В.А.Баженов, А.Ф. Дащенко, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ

ББК 38. 112я73
Б163
УДК 531/534:624(075.8)

В монографии изложены современные методы расчета стержневых и пластинчатых конструкций на статические и динамические нагрузки, а также на устойчивость. Основное внимание уделено одному из наиболее эффективных методов решения краевых задач механики – численно-аналитическому варианту метода граничных элементов, разработанному авторами. Рассмотрены и другие методы, в частности метод конечных элементов, имеющий важное практическое и методологическое значение. Представленные методы иллюстрируются большим количеством примеров с краткими указаниями, поясняющими алгоритм решения. Значительное место уделено математической формулировке, задач и их решению в средах программирования Delphi, Visual Fortran и MATLAB.

Для студентов, аспирантов и преподавателей высших технических учебных заведений, специалистов в области механики деформируемого твердого тела и строительной механики.

Табл. 71. Ил. 180. Библиогр.: 356.

Рецензенты:

Б_____Без объявл.

ISBN © В.А. Баженов, А.Ф. Дащенко, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов, 2004.

ОГЛАВЛЕНИЕ

		Стр.
Введение		6
РАЗДЕЛ I	СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ	10
Глава 1	Теоретические основы МГЭ в задачах деформирования стержневых систем	10
1.1	Обобщенные функции и их свойства	10
1.2	Интенсивность внешней нагрузки	16
1.3	Метод сведения задачи Коши к расчетным соотношениям	20
1.4	Уравнения связи и правила знаков для граничных параметров стержней	23
1.5	Метод решения краевых задач для линейных систем	30
1.6	Основы МКЭ для расчета стержневых систем	35
Глава 2	Статика стержневых систем	41
2.1	Растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб	41
2.2	Кручение тонкостенных стержней	44
2.3	Пространственный случай деформирования прямолинейного стержня	46
2.4	Расчеты плоских и пространственных стержневых систем	48
2.4.1	Растяжение-сжатие ступенчатого стержня	48
2.4.2	Статически определимые и неопределимые фермы	52
2.4.3	Кручение тонкостенных неразрезных балок и рам	61
2.4.4	Неразрезные балки и плоские рамы	70
2.4.5	Учет продольных перемещений стержней	81
2.4.6	Пространственные рамы	82
2.5	Статика арочных систем	88
2.5.1	Вывод системы дифференциальных уравнений деформирования плоского кругового стержня	89
2.5.2	Фундаментальные решения для кругового стержня	90
2.5.3	Расчет плоских комбинированных арочных систем	97
2.6	МКЭ в задачах статики стержневых систем	106
2.7	Соотношения МГЭ для стержней с переменной геометрией	109
2.8	Применение системного подхода	112
2.9	Учет действия температуры	121
Глава 3	Динамика стержневых систем	124
3.1	Определение частот и форм собственных колебаний МГЭ	125
3.2	Продольные, крутильные и поперечные колебания прямолинейного стержня	126
3.3	Общий случай гармонического динамического воздействия	129
3.4	Выделение симметричных и кососимметричных форм колебаний	132
3.5	Учет сосредоточенных масс	137
3.6	Стержневые системы с подвижными и неподвижными узлами	138
3.6.1	Уточнение динамических моделей	143

3.6.2 Расчет неразрезных балок МГЭ и МКЭ 150
3.6.3 Расчет рам с неподвижными узлами 165
3.6.4 Учет сил инерции подвижных стержней 169
3.7 Дифференциальные уравнения колебаний кругового стержня в своей плоскости 177
.....
Глава 4 Устойчивость стержневых систем 179
4.1 Фундаментальные решения для продольно-поперечного изгиба стержня 180
4.2 Определение спектра критических сил и форм потери устойчивости статическим методом 181
4.3 Устойчивость свободных стержней и стержней на жестких и упругих опорах 182
4.4 Устойчивость стержневых систем с подвижными и неподвижными узлами 189
4.5 Динамический метод решения задач устойчивости 195
4.5.1 Методика учета следящих сил 196
4.5.2 Фундаментальные решения для поперечных колебаний с учетом продольной силы 198
4.5.3 Стержень на упругом основании 199
4.5.4 Модель С.П. Тимошенко 210
4.5.5 Устойчивость систем от следящих консервативных сил 217
4.5.6 Устойчивость систем от неконсервативных сил 219
4.5.7 Неконсервативные комбинированные задачи устойчивости . 227
4.5.7.1 Применение модели С.П. Тимошенко 229
4.6 Расчет рам на устойчивость МКЭ 233
Глава 5 Применение среды программирования MATLAB 236
5.1 Основы языка программирования и визуализации результатов расчетов 237
5.2 Задачи вычислительной математики 254
5.3 Расчет статически определимой балки 282
5.3.1 Использование диалогового режима 292
5.4 Расчет неразрезной балки 296
5.5 Решение задач динамики неразрезной балки 304
5.6 Устойчивость неразрезной балки 316
5.7 Расчет плоской рамы на статическую нагрузку 320
5.8 Динамика плоской рамы 331
5.9 Устойчивость плоской рамы 347
5.10 Расчет балок на упругом основании 352
Глава 6 Основные выводы практического применения алгоритма МГЭ в задачах статики, динамики и устойчивости стержневых систем 386

РАЗДЕЛ II ПЛАСТИНЧАТЫЕ СИСТЕМЫ 390
Глава 7 Двумерные задачи теории тонких пластин 391

7.1	Вариационный метод Канторовича-Власова сведения двумерных задач к одномерным	391
7.2	Изгиб прямоугольных пластин	393
7.2.1	Выбор функции поперечного распределения прогибов пластины	393
7.2.2	Фундаментальные решения	395
7.2.3	Оценка точности метода Канторовича-Власова	406
7.3	Изгиб круглых пластин	413
7.3.1	Фундаментальные решения	414
7.3.2	Решения осесимметричных задач	423
7.4	Расчет пластин с комбинированным контуром	425
7.5	Устойчивость и динамика прямоугольных пластин	429
7.6	Устойчивость прямоугольных пластин с неоднородными граничными условиями	442
7.6.1	Асимптотический метод на основе теории возмущений	443
7.6.2	Применение МГЭ	447
7.7	Действие сосредоточенных сжимающих сил	451
7.8	Устойчивость и динамика круглых пластин	468
7.8.1	Фундаментальные решения	471
7.8.2	Осесимметричные задачи на собственные значения	475
7.9	Определение собственных значений пластин с комбинированным контуром	476
7.10	Построение соотношений МГЭ для складчатых цилиндрических и пологих оболочек	479
7.10.1	Плоская задача теории упругости для прямоугольных пластин	480
7.10.2	Расчет цилиндрических складчатых систем	485
7.10.3	Интегрирование уравнений статики пологих оболочек	490
7.11	Предложения по учету дополнительных факторов	510
Приложение №1	Программы, реализующие отдельные вопросы алгоритма МГЭ в средах программирования Visual Fortran и Delphi	514
Приложение №2	Варианты заданий, рекомендуемые для самостоятельной работы	533
ЛИТЕРАТУРА		548
Биографические данные авторов		

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая вниманию читателей книга освещает различные методы решения задач механики деформируемого твердого тела. Для иллюстрации возможностей методов выбраны задачи статики, динамики и устойчивости стержневых и пластинчатых систем, т.е. задачи сопротивления материалов, строительной механики и теории упругости, имеющих важное практическое и методологическое значения. Каждая задача механики деформируемого твердого тела содержит в себе три стороны: 1. Статическая – рассматривает равновесие тела или конструкции; 2. Геометрическая – рассматривает связь между перемещениями и деформациями точек тела; 3. Физическая – описывает связь между деформациями и напряжениями. Объединение этих сторон позволяет составить дифференциальное уравнение задачи. Далее нужно применить методы математики, которые разделяются на аналитические и численные. Большим преимуществом аналитических методов является то, что мы имеем точный и достоверный результат решения задачи. Применение численных методов приводит к получению просто результата и нужно еще доказывать его достоверность и оценивать величину погрешности. К сожалению, до настоящего времени получено весьма мало точных аналитических решений задач механики деформируемого твердого тела и других наук. Поэтому приходится применять численные методы. Наличие весьма мощной компьютерной техники и развитого программного обеспечения практически обеспечивает решение любой задачи любой науки. В этой связи большую популярность и распространение приобрел универсальный численный метод конечных элементов (МКЭ). Применительно к стержневым системам алгоритм МКЭ в форме метода перемещений представлен во 2, 3 и 4 главах книги. Большими возможностями обладает также универсальный численный метод конечных разностей (МКР), который начал развиваться раньше МКЭ. Оба этих метода по праву занимают ведущие места в арсенале исследований. Большой опыт их применения выявил как преимущества, так и очевидные недостатки. Например, МКР обладает недостаточной устойчивостью численных операций, что сказывается на точности результатов при некоторых краевых условиях. МКЭ хуже, чем хотелось бы, решает задачи на определение спектров частот собственных колебаний и критических сил потери устойчивости. Эти и другие недостатки различных методов способствовали созданию и бурному развитию принципиально нового метода решения дифференциальных уравнений задач механики и других наук. Метод получил название метод граничных элементов (МГЭ). В отличии от МКР, где используется конечно-разностная аппроксимация дифференциальных операторов, в МГЭ основой являются интегральное уравнение задачи и его фундаментальные решения. В отличие от МКЭ, где вся область объекта разбивается на конечные элементы, в МГЭ дискретизации подлежит лишь граница объекта. На границе объекта из системы линейных алгебраических уравнений определяются необходимые параметры, а состояние во

внутренних точках вычисляется по интегральным уравнениям. Данный алгоритм может быть реализован только при наличии вычислительной техники, т.к. вычисление одномерных и многомерных интегралов требует огромного объема вычислительной работы. В литературе приводится любопытный случай, когда проф. С.Г. Михлин с аспиранткой три месяца потратили на получение одного численного результата по интегральному уравнению. Поскольку для определенного интеграла можно подобрать несколько подынтегральных функций, приводящих к достаточно точному результату, то предложены и развиты различные варианты МГЭ. Имеется только численный вариант метода, когда отсутствуют фундаментальные решения дифференциального уравнения. Здесь актуальными являются вопросы достоверности и точности результатов, а также имеются трудности вычисления многомерных сингулярных интегралов. Область применения этого варианта практически неограниченна. В данной книге представлен аналитический вариант МГЭ, разработанный авторами. Аналитический вариант метода предполагает использование только одномерных интегралов, которые описывают одномерный континуум. В механике такими объектами являются стержень и стержневые системы. Для пластин, оболочек и пространственных конструкций существует возможность сведения двумерных и трехмерных объектов к одномерному континууму – обобщенному стержню. Поэтому аналитический вариант МГЭ также привлекателен и перспективен, как и численный вариант.

Сравнение МГЭ с МКЭ и МКР показало, что новый метод является конкурентоспособным и во многих задачах превосходит их по точности и достоверности результатов, по устойчивости и сходимости численного процесса, по объему занимаемой памяти, по простоте алгоритма и подготовки исходных данных, по объему программ и т.д. Например, сопоставляемые времена решения трехмерных задач по МКЭ и МГЭ при близкой точности обычно равны такому отношению [29]

$$t_{МКЭ} / t_{МГЭ} = 4 \div 10.$$

Эта разница значительно больше для некоторых классов задач.

Большой вклад в создание различных вариантов МГЭ внесли труды П.К. Бенеджи, Р. Баттерфилда [29], К. Бреббиа, Л. Вроубела [42, 43], С. Крауча, А. Старфилда [157], Ф.Ж. Риццо, Т.А. Крузо, С. Уокера, С. Кобаяши, Н.И. Мусхелишвили [192, С.Г. Михлина, В.Д. Купрадзе [161], Ю.В. Верюжского [60], А.Г. Угодчикова, Н.М. Хуторянского [321], А.И. Цейтлина, А.Я. Александрова, П.И. Перлина, В.А. Гришина и др. Особо необходимо отметить труды академика АН СССР А.Н. Крылова [158], где впервые предложено использовать фундаментальные ортонормированные функции для стержня, а для прямоугольных пластин – в работах члена-корреспондента АН СССР В.З. Власова [63-67]. Много внимания уделено интегральным уравнениям и методу начальных параметров в работе проф. И.А. Биргера

[32]. К сегодняшнему времени число публикаций по развитию и применению МГЭ в различных задачах весьма велико и не поддается полному описанию.

В данной книге нашли отражение вопросы теории и практического применения аналитического варианта МГЭ применительно к одномерным плоским и пространственным расчетным схемам линейных систем стержней и пластин. Для расчета подобных систем предложен вариант МГЭ, основанный на новой схеме преобразования интегральных соотношений метода начальных параметров в систему линейных алгебраических уравнений. Отличительной особенностью метода является единообразный подход к алгоритму задач статики, динамики и устойчивости, что создает широкие возможности для машинной реализации алгоритма. Показано, что решения этих трех типов задач отличаются только лишь фундаментальными функциями, а матричная форма разрешающих уравнений позволяет совместить разные задачи. Несмотря на уклон в задачи строительной механики и теории тонких пластин, разработанный аналитический вариант МГЭ с небольшими изменениями может быть приспособлен для решения задач электротехники, теплотехники, физики, гидрогазодинамики, аэроупругости и других наук, где соответствующие процессы можно описать дифференциальными уравнениями.

Сущность предложенного метода состоит в первоначальной дискретизации линейной системы стержней или пластин на первокирпичики (модули), далее выполняется анализ состояния всех модулей и обратный синтез модулей с соответствующими уравнениями в заданную конструкцию. Предложенная схема близка к схеме решения задач по МКЭ, но применение соотношений метода начальных параметров позволяет более эффективно прийти к намеченной цели. Под модулем в работе понимаются стержень и обобщенный стержень, к которому приводятся пластины и оболочки. У стержня, как одномерного тела, имеются только две граничные точки $x=0$ и $x=l$. Поэтому о дискретизации границ стержня говорить не приходится и для построения теории метода в завершенном виде введен ряд новых терминов. Предлагаемый вариант МГЭ не имеет аналогов в научной литературе, однако он опирается на хорошо известные решения дифференциальных уравнений в форме метода начальных параметров. При отсутствии таковых данный пробел восполняется. Выбор примеров обусловлен теоретическим характером работы, а также необходимостью подробного изложения алгоритма и процессов формирования матриц. Программы, реализующие данный вариант МГЭ, написаны на алгоритмических языках высокого уровня Pascal, Fortran и MATLAB, что позволяет использовать современные и широко распространенные среды программирования Delphi, Visual Fortran, MATLAB и операционную систему Windows. Сами программы имеют статус любительских и могут совершенствоваться по различным направлениям.

В первой главе рассмотрены вопросы теории метода, построения основных расчетных соотношений, дано описание внешней нагрузки, введены понятия о граничных параметрах. Во второй главе показано применение предлагаемого алгоритма для решения задач статики

стержневых систем и учета дополнительных факторов. В третьей и четвертой главах описаны задачи динамики и устойчивости стержневых систем. Пятая глава освещает вопросы применения одной из самых эффективных систем компьютерной математики MATLAB. Шестая глава содержит выводы и анализ практического применения нового метода. В седьмой главе рассмотрены отдельные задачи теории тонких пластин, которые могут быть решены предлагаемым методом, и даны предложения по расширению области его применения. В приложении представлены программы, реализующие отдельные вопросы алгоритма МГЭ и варианты заданий, рекомендуемые для углубленного самостоятельного изучения метода. Список литературы ориентирован на ознакомление и глубокую проработку различных методов решения задач механики деформируемого твердого тела.

РАЗДЕЛ I СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

В данном разделе рассматриваются вопросы теории метода граничных элементов (МГЭ) и его практического применения для решения задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Основное внимание уделено изложению алгоритма метода, математическим моделям расчетных схем и реализации соотношений на персональных компьютерах.

Глава 1 Теоретические основы МГЭ в задачах деформирования стержневых систем

Стержень, как основной элемент стержневой системы, является одномерным континуумом. В этой связи процессы воздействия на него (механические, тепловые, электрические) в большинстве случаев описываются сравнительно простыми дифференциальными уравнениями, для которых можно получить аналитическое решение. Теория решений дифференциальных уравнений позволяет учесть особенности геометрии и нагрузки стержня. Особенности в виде сосредоточенных сил, разрывов нагрузки и геометрии 1-го рода можно описать с помощью обобщенных функций. Представим основные свойства обобщенных функций.

1.1 Обобщенные функции и их свойства

При описании непрерывно распределенных величин в виде нагрузки, массы, жесткости, механического импульса и т.п., действующих на стержень, используются обычные функции. При этом под обычной непрерывной функцией понимается такое соответствие $f(\ )$, которое каждому элементу x из множества E относит некоторый элемент y из множества F. Это записывается в виде $y= f(x)$. Множество E называется исходным множеством, а множество F - конечным множеством отображения. Элемент x здесь является независимой величиной (аргументом), а элемент $y= f(x)$ - зависимой величиной (функцией).

В ряде случаев вместо функции пользуются понятием оператора – отображение множества в себя. Обычные функции можно складывать и умножать на вещественные числа, так что они образуют линейные вещественные пространства (линейные отображения).

В связи с трудностями решения задач, содержащих сосредоточенные включения (сосредоточенные нагрузки, распределенные нагрузки с разрывами 1-го рода, точечная масса, сосредоточенный импульс и др.), можно расширить класс обычных функций на основе использования разрывных функций.

Из разрывных функций в механике распространение получили единичная функция Хевисайда $H(x\text{-}x_o)$ и дельта-функция Дирака $\delta(x\text{-}x_0)$. Определение дельта-функции Дирака следует из свойств импульсных функций, под которыми понимают непрерывные или кусочно-непрерывные функции $\delta(x,\lambda)$ аргумента x, зависящие от параметра λ, если они удовлетворяют условиям [110].

1 $\delta(x,\lambda)=0 \qquad |x|\rangle\lambda;$

2 $\delta(x,\lambda)\geq 0 \qquad |x|\langle\lambda;$

3 $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x,\lambda)dx=\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\delta(x,\lambda)dx=1.$

Этим условиям могут удовлетворять множество обычных функций, некоторые примеры которых представлены на рисунке 1.1, где

a) $y=\delta(x,\lambda)=\begin{cases}0, |x|\rangle\lambda\\ \dfrac{1}{\lambda}, |x|\leq\lambda\end{cases};$ *b*) $y=\delta(x,\lambda)=\begin{cases}0, |x|\rangle\lambda\\ \dfrac{1}{2\lambda}, |x|\leq\lambda\end{cases};$

c) $y=\delta(x,\lambda)=\begin{cases}0, |x|\rangle\lambda\\ \dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{|x|}{\lambda}\right), |x|\leq\lambda\end{cases};$ *d*) $y=\delta(x,\lambda)=\begin{cases}0, |x|\rangle\lambda\\ \dfrac{1}{\lambda}\cos^2\dfrac{\pi x}{2\lambda}, |x|\leq\lambda\end{cases};$

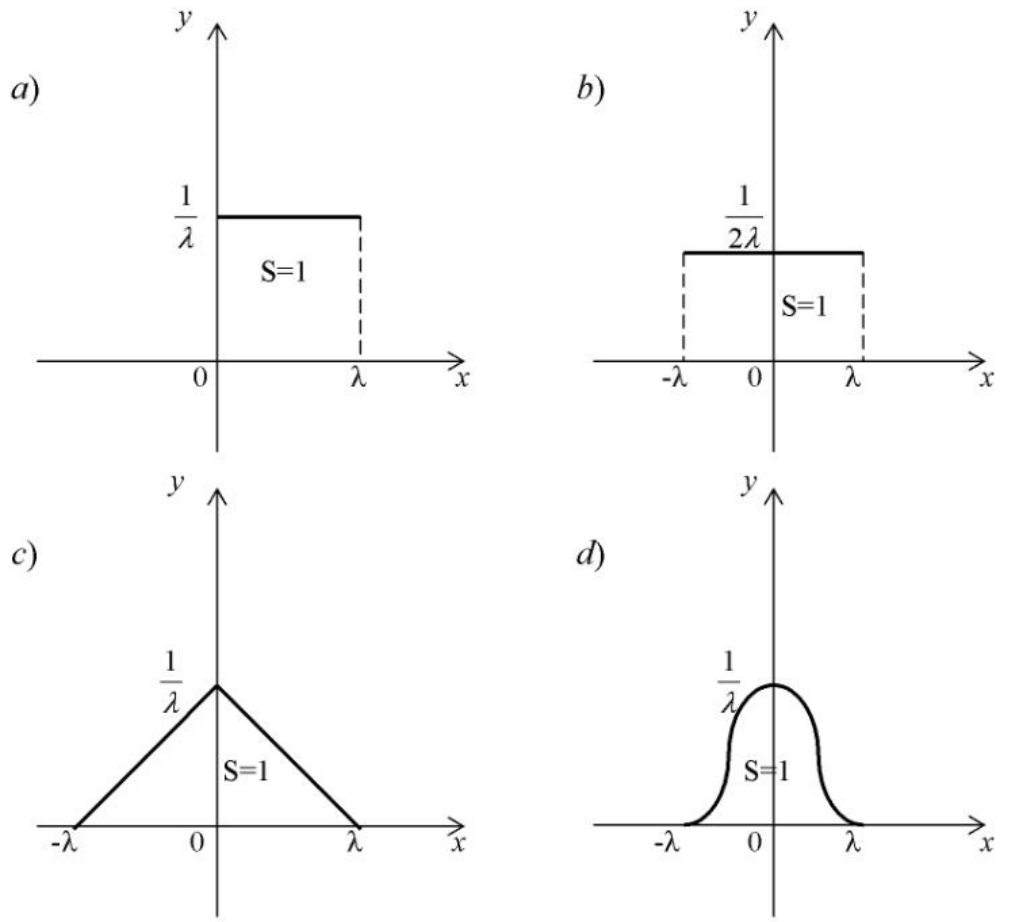


Рисунок 1.1

Из рисунка 1.1 следует, что формы вершин импульсных функций могут быть различными, но это не сказывается на общих свойствах таких функций. Отметим, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\delta(x,\lambda)=0,$$

так как для $\forall x \neq 0 \quad \delta(x,\lambda)=0$, если $|x|\rangle\lambda$, а средняя высота функции $\delta(x,\lambda)$ на [-λ,λ] неограниченно возрастает. Так что:

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda}\delta(x,\lambda)dx=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2\lambda}\cdot 1=\infty.$$

Пусть $f(x)$ – обычная непрерывная на $[a,b]$ функция, $\delta\ (x,\lambda)$ – импульсная функция. Рассмотрим поведение интеграла

$$\int_a^b f(x)\delta(x,\lambda)dx \quad \text{при } \lambda\to 0.$$

Здесь возможны два случая:

1) (a,b) содержит точку x=0, т.е. $a<0<b$ и $\lambda\leq min\ (|a|,b)$ (рисунок 1.2)

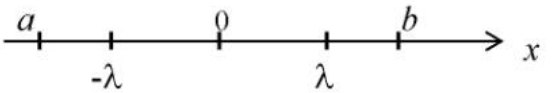


Рисунок 1.2

Из определения импульсной функции и обобщенной теоремы о среднем для определенного интеграла следует, что

$$\int_a^b f(x)\delta(x,\lambda)dx=\int_{-\lambda}^{\lambda}f(x)\delta(x,\lambda)dx=f(x_0)\int_{-\lambda}^{\lambda}\delta(x,\lambda)dx=f(x_0),$$

где $x_0\in[-\lambda,\lambda]$.

Если $\lambda\to 0$, то $x_0\to 0$ и, в силу непрерывности $f(x)$, $f(x_0)\to f(0)$. Поэтому, при $0\in(a,b)$:

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(x)\delta(x,\lambda)dx=f(0) \tag{1.1}$$

2) (a,b) не содержит точку x= 0 ($0\ \bar{\in}\ (a,b)$). В этом случае очевидно, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(x)\delta(x,\lambda)dx=0 \tag{1.2}$$

Обозначим:

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(x)\delta(x,\lambda)dx=\int_a^b f(x)\delta(x)dx \tag{1.3}$$

Введенный символ $\delta(x)$ называется дельта-функцией Дирака. Она характеризует предельное поведение импульсной функции $\delta(x,\lambda)$ при $\lambda\to 0$, а интеграл $\int_a^b f(x)\delta(x)dx$ следует понимать только в смысле равенства (1.3), где сначала необходимо вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\delta(x,\lambda)dx$, а потом осуществить предельный переход при $\lambda\to 0$.

При использовании дельта-функции опускают операцию предельного перехода, тогда из (1.1) и (1.2) следует, что

$$\int_a^b f(x)\delta(x)dx = \begin{cases} f(0), & \text{если} \quad 0 \in (a,b); \\ 0, & \text{если} \quad 0 \bar{\in} (a,b) \end{cases} \tag{1.4}$$

Аналогично вводится дельта-функция со сдвигом в точку x_0:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{если} \quad x_0 \in (a,b); \\ 0, & \text{если} \quad x_0 \bar{\in} (a,b) \end{cases} \tag{1.5}$$

Свойства (1.4) и (1.5) называются фильтрующим свойством дельта-функции. При $f(x) \equiv 1$ имеем:

$$\int_a^b \delta(x)dx = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \in (a,b); \\ 0, & \text{если} \quad 0 \bar{\in} (a,b) \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\int_a^b \delta(x-x_0)dx = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_0 \in (a,b); \\ 0, & \text{если} \quad x_0 \bar{\in} (a,b) \end{cases} \tag{1.7}$$

Правые части (1.6) и (1.7) определяются как единичные функции Хевисайда:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}; \qquad H(x-x_0) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \geq x_0 \\ 0, & \text{если} \quad x < x_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Поэтому соотношения (1.6), (1.7) можно записать как

$$\int_{-\infty}^x \delta(x)dx = H(x); \qquad \int_{-\infty}^x \delta(x-x_0)dx = H(x-x_0) \tag{1.9}$$

и

$$\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x); \qquad \frac{dH(x-x_0)}{dx} = \delta(x-x_0) \tag{1.10}$$

Равенства (1.9), (1.10) устанавливают связь между дельта-функцией Дирака и единичной функцией Хевисайда. На рисунке 1.3 дана геометрическая интерпретация этих функций. Аналитически это предстанет так:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0; \end{cases} \qquad \delta(x-x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Укажем еще на ряд свойств дельта-функции:

1) свойство четности

$$\delta(x) = \delta(-x), \qquad \delta(x-x_0) = \delta(x_0-x);$$

2) если за $[a,b]$ взять всю числовую ось, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)dx = 1; \tag{1.12}$$

3) интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx = \frac{f(0)}{|a|}, \qquad a = \text{const} \neq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta[a(x-x_0)]dx = \frac{f(x_0)}{|a|}, \quad a = \text{const} \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = \frac{f(0)}{|\varphi'(0)|},$$

где $\varphi(x)$ – монотонная функция, имеющая единственный нуль в точке $x = 0$, т.е. $\varphi(0) = 0$, но $\varphi'(0) \neq 0$.

В общем случае, если точки $x_1, x_2, \ldots x_n$ являются простыми нулями функции $\varphi(x)$, то:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|}.$$

Так как $\delta(x - x_0) = 0$ при $x \neq x_0$, то справедливо равенство $f(x)\,\delta(x - x_0) = f(x_0)\,\delta(x - x_0), \quad x \neq x_0$.

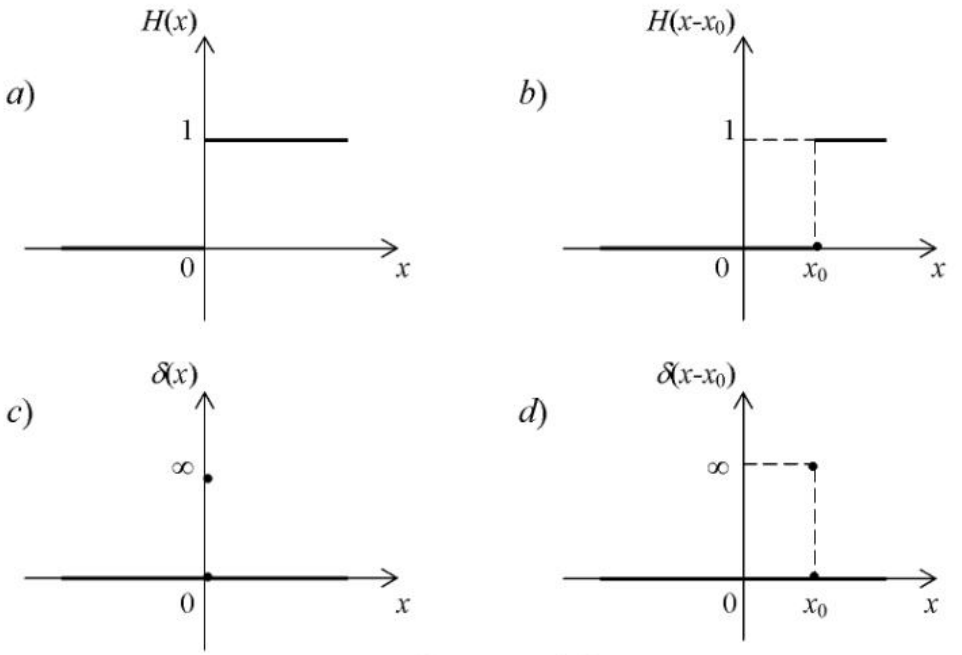


Рисунок 1.3

Теория обобщенных функций полагает, что дифференцирование распределений всегда возможно, т.е. обобщенная функция бесконечно дифференцируема, а n-я производная определяется выражениями:

$$\int_a^b f(x)\delta^{(n)}(x)dx = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(0), & \text{если } 0 \in (a,b); \\ 0, & \text{если } 0 \bar{\in} (a,b) \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\int_a^b f(x)\delta^{(n)}(x - x_0)dx = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(x_0), & \text{если } x_0 \in (a,b); \\ 0, & \text{если } x_0 \bar{\in} (a,b) \end{cases} \tag{1.14}$$

Анализ выражений (1.10), (1.13), (1.14) показывает, что с механической точки зрения дельта-функция Дирака и ее производные должны трактоваться как обобщенная мера, равная нулю. В этом случае любая постоянная величина (сила, момент, бимомент и т.п.), умноженная на дельта-функцию Дирака и ее производные, должна быть равна нулю:

$$F\delta(x - x_0) = M\delta'(x - x_0) = B_\omega \delta'(x - x_0) = 0 \tag{1.15}$$

Однако, если к символам $\delta(x)$, $\delta(x - x_0)$ и их производным применять операции интегрирования, то могут наступать моменты, когда нуль "исчезает". Тогда может быть использовано понятие сплайн-функции. Так называются обычно кусочно полиномиальные функции, обладающие определенной гладкостью.

Применительно к механике стержневых систем расширим понятие сплайн-функции. Под сплайн-функцией будем понимать функцию, составленную из "кусков" различных функций, имеющих производные до $(n - 1)$ порядка включительно. По такому определению сплайны могут содержать любые непрерывные функции. Если взять определенный интеграл от единичной функции Хевисайда, то получим простейший линейный сплайн:

$$S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-a)dx = \int_{a}^{x} dx = (x-a), \qquad x \geq a$$

или

$$S_1 = (x-a)_+ = \begin{cases} 0, & x\langle a \\ (x-a), & x \geq a \end{cases},$$

где символ "+" указывает на сплайн-функцию. Интегрируя линейный сплайн еще раз, получим сплайн 2-й степени и т.д.:

$$S_2 = \int_{-\infty}^{x} S_1 dx = \int_{-\infty}^{x} (x-a)_+ dx = \int_{a}^{x} (x-a)dx = \frac{(x-a)_+^2}{2}$$

Аналогично определяются сплайны от тригонометрических, гиперболических и других функций:

$$\cos(x-a)_+ = \begin{cases} 0, & x\langle a \\ \cos(x-a), & x \geq a \end{cases}; \qquad sh(x-a)_+ = \begin{cases} 0, & x\langle a \\ sh(x-a), & x \geq a \end{cases}$$

Сплайны, единичная функция Хевисайда и дельта-функция Дирака образуют логически завершенную цепочку взаимной связи.

$$S_1' = H(x-a), \quad H'(x-a) = \delta(x-a), \quad [\delta(x-a)]' = \delta'(x-a);$$

$$\int_{-\infty}^{x} \delta'(x-a)dx = \delta(x-a), \qquad \int_{-\infty}^{x} \delta(x-a)dx = H(x-a), \quad \int_{-\infty}^{x} H(x-a)dx = (x-a)_+$$

и

$$[\cos(x-a)_+]' = -\sin(x-a)_+; \qquad [sh(x-a)_+]' = ch(x-a)_+;$$

Благодаря указанным свойствам обобщенные функции $H(x\text{-}a)$ и $\delta(x\text{-}a)$ оказались очень удобными для описания сосредоточенных и распределенных нагрузок, действующих на стержень. При этом интенсивность нагрузки может быть представлена аналитическим выражением на всем интервале, занимаемом стержнем.

Операции интегрирования выражений с обобщенными функциями выполняются по своим правилам. В качестве примера рассмотрим случаи:

1) На стержень действует сосредоточенная сила F в точке $x=a$.

Интенсивность нагрузки

$$q(x) = F \cdot \delta(x\text{-}a),$$

интеграл

$$\int_0^x \frac{(x-\xi)^3}{6} q(\xi)d\xi = \int_0^x \frac{(x-\xi)^3}{6} F\delta(\xi-a)d\xi = \frac{F(x-a)_+^3}{6}.$$

Здесь использовано фильтрующее свойство дельта-функции (1.5). Знак сплайна "+" необходим, так как при $x < a$ интеграл равен нулю по свойству (1.5).

2) На стержень действует сосредоточенный момент M в точке $x = a$. Тогда

$$q(x) = M \cdot \delta'(x\text{-}a),$$

и

$$\int_0^x \frac{(x-\xi)^3}{6} q(\xi)d\xi = \int_0^x \frac{(x-\xi)^3}{6} M\delta'(\xi-a)d\xi = (-1)\left[\frac{(x-\xi)^3}{6}\cdot M\right]'_{\xi=a} = \frac{(x-a)_+^2}{2}\cdot M.$$

Интегрирование выполнено по выражению (1.14). При $x< a$ интеграл равен нулю, поэтому необходим символ сплайна "+".

3) На стержень действует распределенная нагрузка от точки $x=a$ до точки $x=b$.

В этом случае

$$q(x) = q[H(x\text{-}a) - H(x\text{-}b)],$$

и

$$\int_0^x \frac{(x-\xi)^3}{6} q(\xi)d\xi = \int_0^x \frac{(x-\xi)^3}{6} q[H(\xi-a) - H(\xi-b)]d\xi = \int_a^x \frac{(x-\xi)^3}{6} qd\xi - \int_b^x \frac{(x-\xi)^3}{6} qd\xi =$$

$$= q\left[-\frac{(x-\xi)^4}{24}\Big|_a^x + \frac{(x-\xi)^4}{24}\Big|_b^x\right] = \left[\frac{(x-a)_+^4}{24} - \frac{(x-b)_+^4}{24}\right]q.$$

Знак сплайна свидетельствует, что при $x< a$ и $x< b$ интегралы равны нулю.

Отметим, что операция дифференцирования снижает размерность линейных сплайнов и обобщенных функций, т.е. единичная функция Хевисайда является безразмерной функцией, дельта-функция Дирака имеет отрицательную размерность по отношению к размерности аргумента.

Если $[x] = [м]$, то $[\delta(x - x_0] = [м^{-1}]$ и т.д.

Более полно о свойствах и применении обобщенных функций и сплайнов можно узнать в работах [3, 12, 62, 110, 164].

1.2 Интенсивность внешней нагрузки

Интенсивность внешней нагрузки будем рассматривать как совокупность сосредоточенных сил, приложенных на некоторой длине Δx стержня (рисунок 1.4).

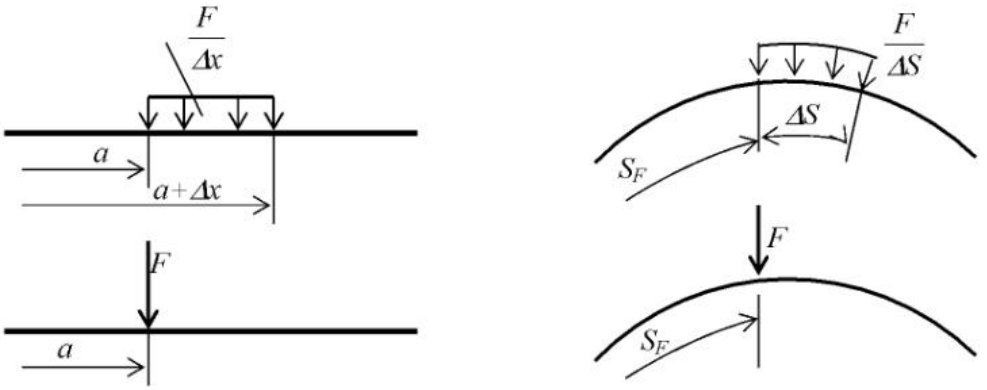


Рисунок 1.4

Тогда для прямолинейного стержня интенсивность нагрузки при действии сосредоточенной нагрузки, приложенной в точке a, предстанет следующим образом:

$$q_y(x) = \frac{F}{\Delta x}\left[H(x-a) - H(x-a-\Delta x)\right],$$

для кругового стержня:

$$q_n(x) = \frac{F}{\Delta S}\left[H(S-S_F) - H(S-S_F-\Delta S)\right].$$

Учитывая, что $\Delta S = R\cdot\Delta\alpha$, где α - угловая координата; R - радиус кривизны, и выполняя предельный переход, будем иметь:

$$q_y(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F}{\Delta x}\left[H(x-a) - H(x-a-\Delta x)\right] = F\delta(x-a); \qquad (1.16)$$

$$q_n(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{F}{R\Delta\alpha}\left[H(S-S_F) - H(S-S_F-\Delta S)\right] = \frac{F}{R}\delta(\alpha-\alpha_F). \qquad (1.17)$$

Аналогично вводя сосредоточенный момент, с помощью предельного перехода получим:

для прямолинейного стержня

$$q_y(x) = M\delta'(x-a), \qquad (1.18)$$

для кругового стержня

$$q_n(\alpha) = \frac{M}{R^2}\delta'(\alpha-\alpha_M). \qquad (1.19)$$

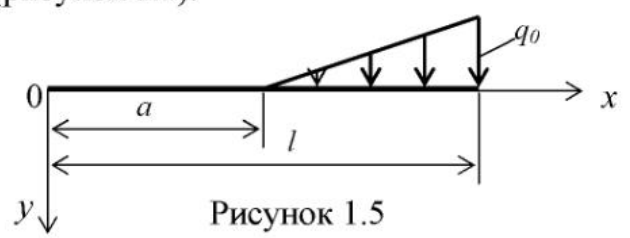
Равномерно распределенная нагрузка вводится с помощью единичной функции Хевисайда:

$$q(x) = q\left[H(x-a) - H(x-b)\right]; \qquad (1.20)$$

$$q(\alpha) = q\left[H(\alpha-\alpha_н) - H(\alpha-\alpha_к)\right], \qquad (1.21)$$

где $a, \alpha_н, b, \alpha_к$ - координаты начала и конца распределенной нагрузки.

Не вызывает трудностей и запись нагрузки более сложного вида (рисунок 1.5):



$$q_y(x) = \frac{q_0}{l-a}(x-a)_+.$$

Рисунок 1.5

Простую нагрузку на прямолинейный стержень можно представить следующими выражениями (рисунок 1.6):

- при растяжении - сжатии

$$q_x(x) = F\delta(x-a_1) + q\left[H(x-a_2) - H(x-a_3)\right]; \qquad (1.22)$$

- при сдвиге

$$q_y(x) = F\delta(x-a_1) + q\left[H(x-a_3) - H(x-a_4)\right]; \qquad (1.23)$$

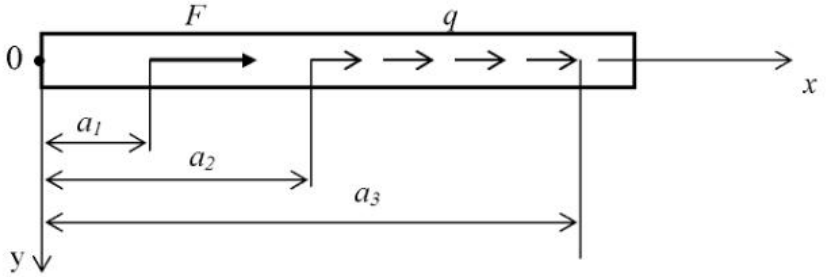
- при кручении (включая и тонкостенные стержни)

$$m(x) = M_{кр}\delta(x-a_1) + m\left[H(x-a_2) - H(x-a_3)\right] + B_\omega\delta'(x-a_4); \qquad (1.24)$$

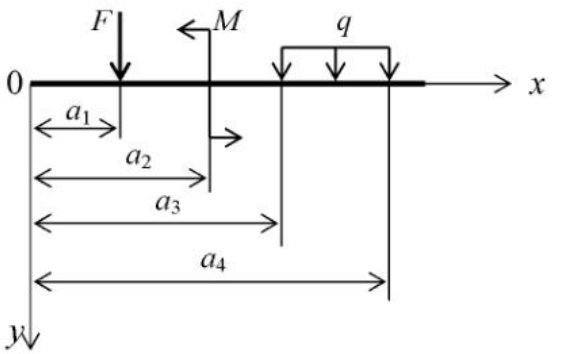
- при изгибе

$$q_y(x) = F\delta(x-a_1) + M\delta'(x-a_2) + q\left[H(x-a_3) - H(x-a_4)\right]; \qquad (1.25)$$

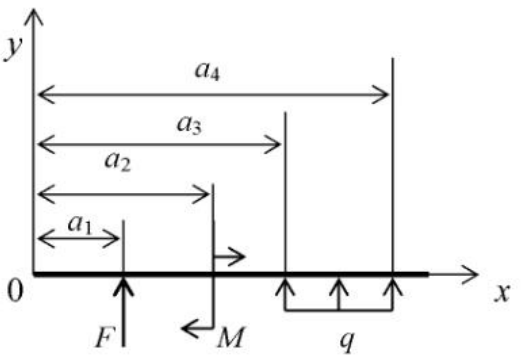
a) растяжение - сжатие



b) изгиб, ось O_y направлена «вниз»



c) изгиб, ось O_y направлена «вверх»



d) кручение

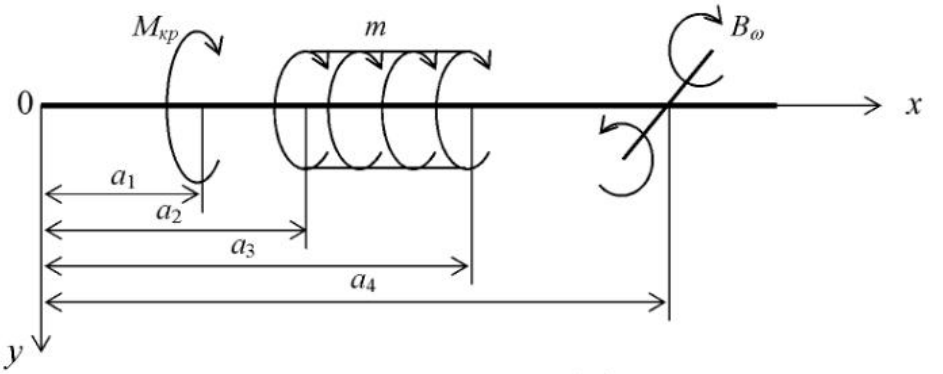


Рисунок 1.6

Для кругового стержня касательная и нормальная нагрузки (рисунок 1.7) записываются в виде:

$$q_t(\alpha)=\frac{F_x}{R}\delta(\alpha-\alpha_F)+q_x\left[H(\alpha-\alpha_н)-H(\alpha-\alpha_к)\right]; \tag{1.26}$$

$$q_n(\alpha)=\frac{F_y}{R}\delta(\alpha-\alpha_F)+\frac{M}{R^2}\delta'(\alpha-\alpha_F)+q_y\left[H(\alpha-\alpha_н)-H(\alpha-\alpha_к)\right]; \tag{1.27}$$

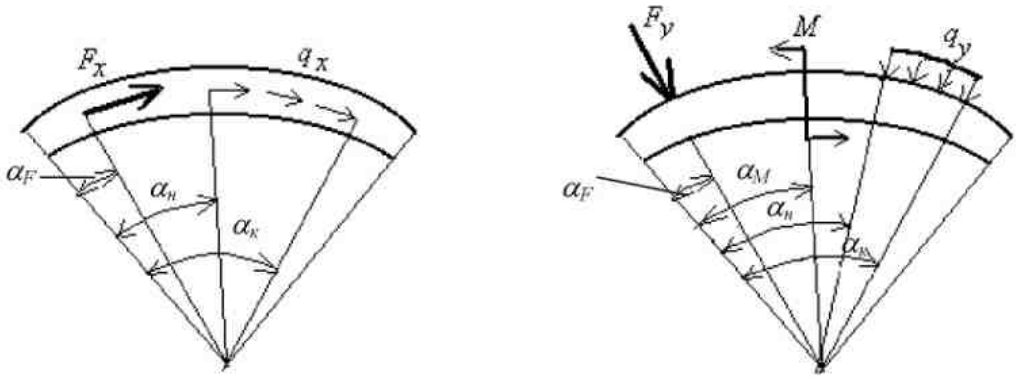


Рисунок 1.7

Отметим, что выражения (1.22 - 1.27) получены путем наложения множества сосредоточенных и распределенных включений на пространство обобщенных функций, т.е. правые части представляют собой элементы с вложенными пространствами.

Аналогично записываются аналитические выражения для простой нагрузки на прямоугольную и круглую пластины (рисунок 1.8):

$$\begin{aligned}q(x,y)=q\left[H(x-c_н)H(y-d_н)-H(x-c_к)H(y-d_к)\right]+F\delta(x-c_F)\delta(y-d_F)+\\+M_x\delta'(x-c_M)\delta(y-d_M)+M_y\delta(x-c_M)\delta'(y-d_M),\end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}q(\rho,\varphi)=q\left[H(\rho-\rho_н)H(\varphi-\varphi_н)-H(\rho-\rho_к)H(\varphi-\varphi_к)\right]+\frac{F}{\rho_F}\delta(\rho-\rho_F)\delta(\varphi-\varphi_F)+\\+\frac{M_\rho}{\rho_M}\delta'(\rho-\rho_M)\delta(\varphi-\varphi_M)+\frac{M_\varphi}{\rho_\varphi^2}\delta(\rho-\rho_M)\delta'(\varphi-\varphi_M),\end{aligned} \tag{1.29}$$

где $c_н \dots \varphi_м$ - координаты соответствующих величин.

В выражениях (1.28), (1.29) обобщенные функции двух переменных представлены в виде произведений одномерных функций [29, 30], что позволяет распространить одномерный вариант МГЭ на пластины и оболочки.

Нагрузка, представленная на рисунках 1.6 – 1.8, считается положительной.

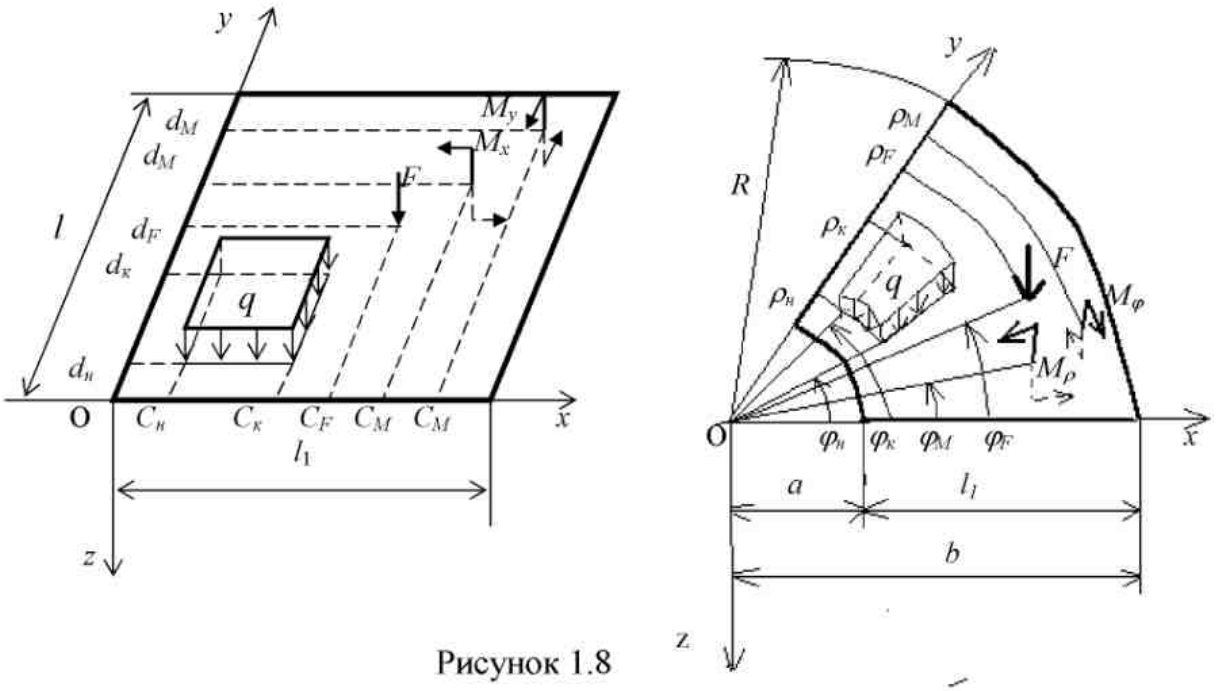


Рисунок 1.8

1.3 Метод сведения задачи Коши к расчетным соотношениям

Значительное число задач механики упругого стержня сводится к решению линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = q(x), \qquad (1.30)$$

удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0; \ldots; \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (1.31)$$

Как известно, такая задача определения частного решения уравнения (1.30), удовлетворяющего начальным условиям (1.31), называется *задачей Коши.*

Процесс решения задачи Коши включает две операции с некоторыми последовательными действиями.

1) Составление общего решения уравнения (1.30):

$$y(x) = \sum_{к=1}^{n} C_к y_к(x) + y_*(x) \ , \qquad (1.32)$$

где $y_к(x)$, $к = \overline{1,n}$ - фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего (1.30);

$C_к(x)$, $к = \overline{1,n}$ - константы интегрирования;

$y_*(x)$ – частное решение неоднородного уравнения (1.30), зависящее от вида правой части $q(x)$.

Наиболее удобной формой представления $y_*(x)$ для различных приложений считается выражение [110, 319]:

$$y_*(x) = \int_0^x G(x,\xi) q(\xi) d\xi \ , \qquad (1.33)$$

где $G\ (x,\xi)$ – функция Грина для краевых задач (функция влияния Коши), переменная $x \in [0,\ l]$, l - длина стержня.

Такая запись для $y_*(x)$ позволяет находить частное решение неоднородного уравнения (1.30) непосредственно через заданную нагрузку (для механических задач), а постоянные интегрирования будут иметь механический смысл начальных параметров. При этом система фундаментальных функций $y_к(x)$, $к = \overline{1,n}$ будет ортонормированной системой в точке $x = 0$, т.е. наиболее эффективной системой фундаментальных функций среди других систем [319].

Алгоритм построения функции Грина не зависит от краевых условий стержня и включает следующие операции:

1.1) Определение констант интегрирования $C_к$ из линейной системы уравнений при $x = \xi$.

$$\begin{bmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_n(\xi) \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_n(\xi) \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ y_1^{(n-1)}(\xi) & y_2^{(n-1)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-1)}(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1/a_0 \end{bmatrix} \qquad (1.34)$$

Определитель этой системы является определителем Вронского, который не равен нулю на $(0,\ l)$. Поэтому система уравнений (1.34) имеет единственное решение, и постоянные $C_1,\ \dots,\ C_n$ будут функциями второй независимой переменной ξ:

$$C_1 = C_1(\xi);\qquad C_2 = C_2(\xi);\ \dots;\ C_n = C_n(\xi) \qquad (1.35)$$

1.2) Формирование частного решения

$$\mathrm{Y}(x,\ \xi) = C_1(\xi)y_1(x) + C_2(\xi)y_2(x) + \dots + C_n(\xi)y_n(x) \qquad (1.36)$$

1.3) Построение функции Грина

$$G(x,\xi) = \mathrm{Y}(x,\xi)\ H(x-\xi) \qquad (1.37)$$

Отметим некоторые свойства функции Грина:

I $G(x,\xi) \equiv 0$ при $x < \xi$.

II $G(x,\xi)$, как функция от x при фиксированном ξ в $(0,\ l)$, за исключением точки $x = \xi$, удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему (1.30).

III $G(x,\xi)$ и ее производные по x до n-го порядка включительно непрерывны для $x \in (0,\ l)$, за исключением точки $x = \xi$, в которой производные по x непрерывны лишь до $(n - 2)$ порядка, а $(n - 1)$ производная имеет разрыв 1-го рода со скачком

$$\left.\frac{d^{(n-1)}G(x,\xi)}{dx^{(n-1)}}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{d^{(n-1)}G(x,\xi)}{dx^{(n-1)}}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{a_0}$$

IV При $x = \xi$

$$G(\xi,\xi) = G'(\xi,\xi) = \dots = G^{(n-2)}(\xi,\xi) = 0;\qquad G^{(n-1)}(\xi,\xi) = \frac{1}{a_0}.$$

V $G(x,\xi)$ для уравнений с постоянными коэффициентами зависит только от разности двух переменных $(x - \xi)$.

В дальнейшем в выражении (1.37) будем опускать единичную функцию Хевисайда $H(x - \xi)$, имея в виду, что в функции Грина $G(x,\xi)$ всегда выполняется неравенство $x > \xi$.

Таким образом, общее решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (1.30) можно представить в виде

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) + \int_0^x G(x,\xi) q(\xi) d\xi \ .$$

2 Определение констант интегрирования $C_1, \ \dots \ , C_n$ из заданных начальных условий. При $x = 0$ требуется решить систему линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \dots & y_n(0) \\ y'_1(0) & y'_2(0) & \dots & y'_n(0) \\ & \cdot \ \cdot \ \cdot & & \\ y_1^{(n-1)}(0) & y_2^{(n-1)}(0) & \dots & y_n^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix}, \qquad (1.38)$$

которая единственным образом определяет постоянные интегрирования.

При ортонормированной системе фундаментальных функций будем иметь:

$$C_1 = y_0; \quad C_2 = y'_0; \quad \dots \ ; \quad C_n = y_0^{(n-1)}.$$

Таким образом, для формирования решения задачи Коши требуется составить и аналитически решить две системы линейных уравнений (1.34) и (1.38). Для большинства задач механики стержней, пластин и оболочек такие решения известны, отдельные задачи решены авторами в работах [211-232], однако многие задачи еще ждут своего решения.

Далее решение задачи Коши необходимо дополнить уравнениями, описывающими остальные параметры воздействия на стержень, что выполняется простым дифференцированием выражения (1.32). Применительно к упругому стержню решение задачи Коши и дополнительные уравнения удобно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ & \cdot \ \cdot \ \cdot & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} G(x,\xi) \\ G'_x(x,\xi) \\ \vdots \\ G_x^{(n-1)}(x,\xi) \end{bmatrix} q(\xi) d\xi \qquad (1.39)$$

или компактно:

$$Y(x) = A(x)\, X(0) + B(x), \qquad (1.40)$$

где $Y(x)$- матрица-столбец параметров напряженно-деформированного состояния стержня в точке x (вектор состояния стержня в точке x);

$A(x)$- квадратная матрица фундаментальных ортонормированных функций дифференциального уравнения (1.30);

$X(0)$- матрица-столбец начальных параметров (вектор начальных параметров);

$B(x)$- матрица-столбец элементов от заданной нагрузки (вектор нагрузки).

При формировании вектора нагрузки учтены свойство функции Грина по пункту IV и правило дифференцирования интеграла [246].

$$\frac{d^{(k-1)}}{dx^{(k-1)}}\left[\int_0^x G(x,\xi)q(\xi)d\xi\right]=\frac{d^{(k-2)}}{dx^{(k-2)}}\left[G(x,x)q(x)\right]+\int_0^x \frac{d^{(k-1)}}{dx^{(k-1)}}\left[G(x,\xi)q(\xi)\right]d\xi, \quad (1.41)$$

$\kappa = 2, 3, \ldots, n.$

Отметим, что форма записи решения задачи Коши (1.39) совпадает с формой представления интегральных уравнений типа Вольтерра 2-го рода [29,32,194]. Функция Грина и ее производные по x являются вырожденными, зависящими от разности аргументов, ядрами. При граничном значении переменной $x = l$ интегральные соотношения (1.39) переходят в алгебраические уравнения.

Для обратных задач механики упругих стержней функции $y(x)$, $G(x,\xi)$ будут известны, а нагрузка $q(\xi)$ будет являться искомой функцией под знаком интеграла. Для прямых задач неизвестными будут функция $y(x)$ и отдельные начальные параметры, а функция Грина $G(x,\xi)$, фундаментальные функции и нагрузка $q(\xi)$ будут известны.

Решение обратных задач механики стержней сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений [194], матрица коэффициентов которой будет плохо обусловленной. Ниже будет показано, что интегральные соотношения типа (1.39) позволяют весьма эффективно решать и прямые задачи. Их решение также сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, но с хорошо обусловленной матрицей коэффициентов.

Приведенный алгоритм сведения задачи Коши к интегральным соотношениям далее применяется для решения задач статики, динамики и устойчивости различных упругих систем.

1.4 Уравнения связи и правила знаков для граничных параметров стержней

При механических воздействиях стержень в общем случае будет испытывать 4 вида деформирования: растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб. В граничных точках стержня $x = 0$ и $x = l$ при деформировании возникают следующие кинематические и статические граничные параметры:

а) растяжение-сжатие

$u(0)$; $u(l)$ – перемещение граничных точек по нормали к поперечному сечению;

$N(0)$; $N(l)$ – нормальные силы;

б) сдвиг

$v_c(o)$; $v_c(l)$ - поперечные перемещения граничных точек;

$Q(o)$; $Q(l)$ - поперечные силы;

в) кручение, включая и тонкостенные стержни

$\theta(o)$; $\theta(l)$ - углы закручивания граничных точек;

$\theta'(o)$; $\theta'(l)$ - производные углов закручивания;

$M_{кр}(o)$; $M_{кр}(l)$ - крутящие моменты;

$B_\omega(o)$; $B_\omega(l)$ - бимоменты;

$M_\omega(o)$; $M_\omega(l)$ - изгибно-крутящие моменты;

$L(o)$; $L(l)$ - внешние крутящие моменты относительно центра изгиба;

г) изгиб

$v(o)$; $v(l)$ - поперечные перемещения граничных точек;

$\varphi(o)$; $\varphi(l)$ - углы поворота сечений в граничных точках;

$Q(o)$; $Q(l)$ - поперечные силы;

$M(o)$; $M(l)$ - изгибающие моменты.

Для построения соотношений между граничными параметрами принимается левовинтовая система координат (рисунок 1.9), как наиболее часто применяемая другими авторами. Можно применить и правовинтовую систему координат, но с соответствующими изменениями в правилах знаков.

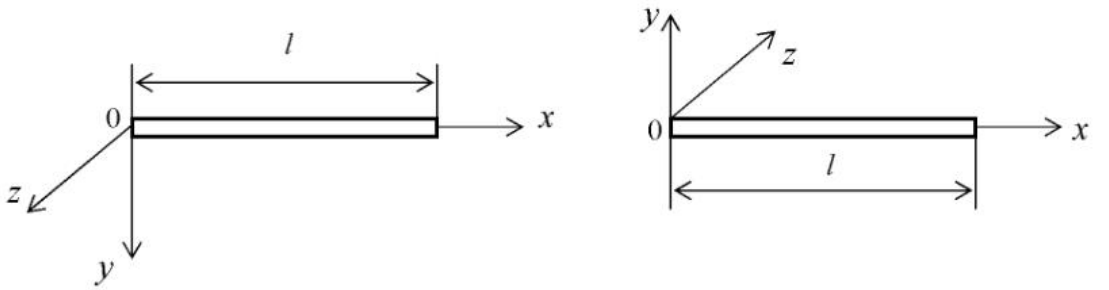


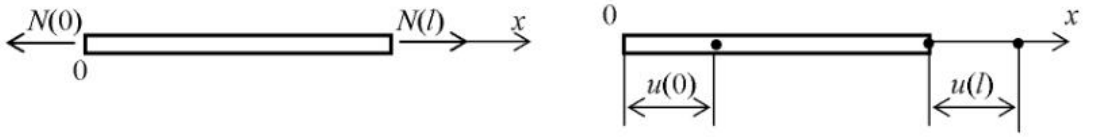
Рисунок 1.9

Граничные параметры напряженно-деформированного состояния стержня имеют положительные и отрицательные направления, зависящие от выбранной локальной системы координат. В принятой системе координат положительные линейные перемещения граничных точек будем считать совпадающими с направлениями осей OX, OY, OZ. Углы поворота сечений в граничных точках будем считать положительными, если они направлены по часовой стрелке со стороны положительного направления координатных осей.

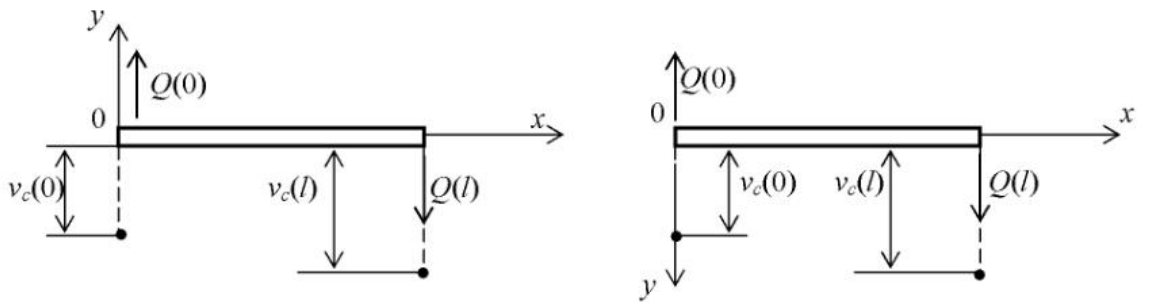
Принятые положительные направления статических и кинематических граничных параметров представлены на рисунке 1.10.

Рассмотрим соотношения между кинематическими и статическими граничными параметрами, возникающие при объединении стержней в линейную систему. При равновесии всей системы будут находиться в равновесии и узлы. При этом статические граничные параметры будут удовлетворять уравнениям равновесия узлов.

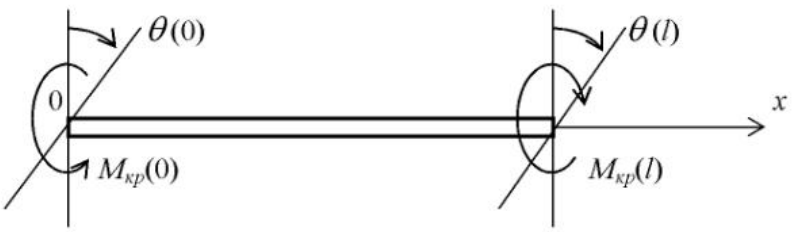
растяжение-сжатие



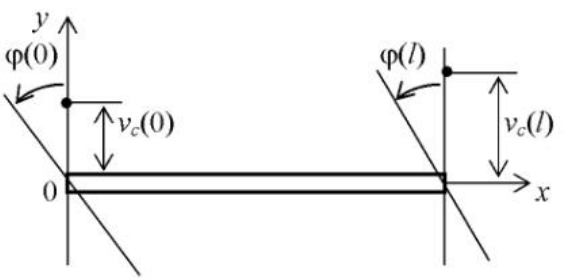
сдвиг

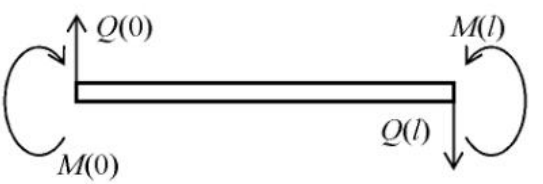


кручение

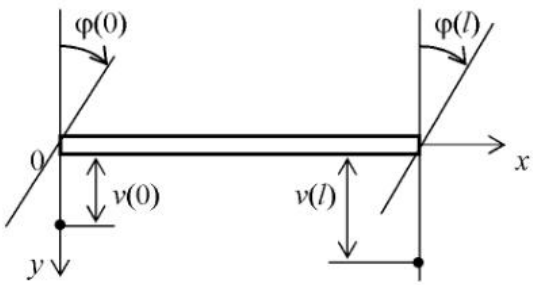


изгиб, ось O_y направлена “вверх”





изгиб, ось O_y направлена “вниз”



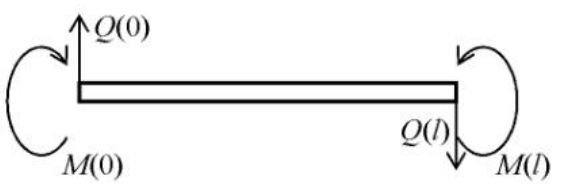


Рисунок 1.10

При деформировании стержневой системы узлы получают определенные линейные и угловые перемещения, и кинематические граничные параметры будут связаны в этих узлах уравнениями совместности перемещений. Как следует из уравнения (1.39), нагрузка на стержень выделяется в отдельную матрицу и не связывается с граничными статическими параметрами. Поэтому уравнения равновесия узлов не должны содержать внешнюю нагрузку. Соответственно, уравнения равновесия, содержащие реакции внешних связей, могут рассматриваться только в случае, когда известны направление и величина внешних реакций. Для кинематических параметров уравнения совместности перемещений узлов не должны включать линейные и угловые перемещения стержней как абсолютно твердых тел. В такой постановке уравнения равновесия и совместности перемещений узлов стержневой системы выступают только как уравнения связи между граничными параметрами соседних стержней. Это позволяет изображать статические граничные параметры в узле либо в положительном, либо в отрицательном направлениях (необходимо выбрать что-то одно), а перемещения узлов изображать визуально на деформированной схеме линейной системы лишь качественно. В этой связи для конкретной конструкции узла необходимо составить уравнения статики и совместности перемещений лишь один раз. В любой стержневой системе, содержащей такой узел, эти уравнения сохранят свой вид, что весьма существенно облегчает построение соотношений между граничными параметрами.

Рассмотрим примеры составления уравнений связи между граничными параметрами соседних стержней. Для жесткого узла из двух стержней в случае, изображенному на рисунке 1.11 *a*, можно правильно установить соотношения между статическими граничными параметрами:

$$\sum x = 0 \to -Q^{0-1}(l) + N^{1-2}(0) = 0 \to Q^{0-1}(l) = N^{1-2}(0); \tag{1.42}$$

$$\sum y = 0 \to -N^{0-1}(l) - Q^{1-2}(0) = 0 \to N^{0-1}(l) = -Q^{1-2}(0); \tag{1.43}$$

$$\sum m(1) = 0 \to M^{0-1}(l) - M^{1-2}(0) = 0 \to M^{0-1}(l) = M^{1-2}(0); \tag{1.44}$$

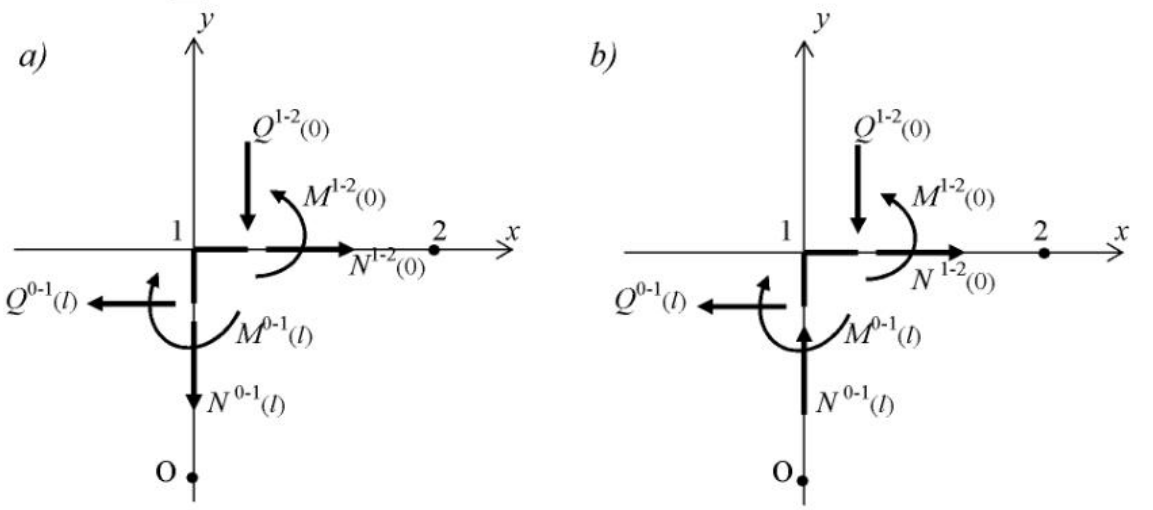


Рисунок 1.11

а случай (рисунок 1.11, b) приведет к ошибке для соотношения (1.43) (неправильно изображена сила $N^{0\text{-}1}(l)$), хотя равновесие узла 1 в направлении оси OY выполняется.

Для жесткого узла из трех стержней (рисунок 1.12) соотношения (1.42 – 1.44) примут вид:

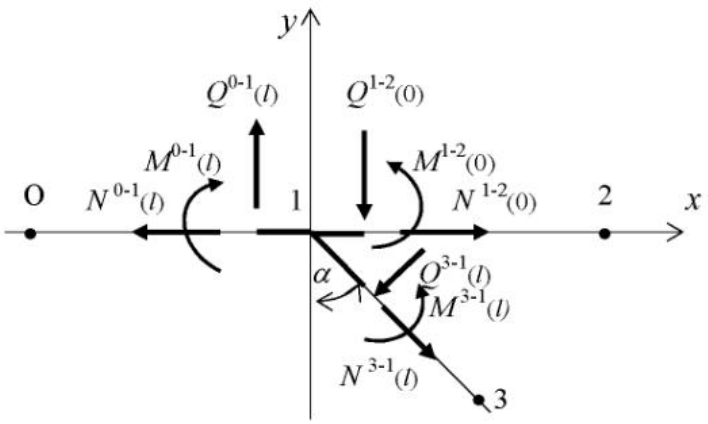


Рисунок 1.12

$$\sum x = 0 \rightarrow -N^{0-1}(l) + N^{1-2}(0) - Q^{3-1}(l)\cos\alpha + N^{3-1}(l)\sin\alpha = 0; \qquad (1.42)$$

$$\sum y = 0 \rightarrow Q^{0-1}(l) - Q^{1-2}(0) - Q^{3-1}(l)\sin\alpha - N^{3-1}(l)\cos\alpha = 0; \qquad (1.43)$$

$$\sum m(1) = 0 \rightarrow M^{0-1}(l) - M^{1-2}(0) - M^{3-1}(l) = 0. \qquad (1.44)$$

Аналогично составляются уравнения равновесия узла, где сходятся большее число стержней.

Несколько сложнее установить связь между кинематическими параметрами. Здесь необходимо изображать качественную картину деформированного состояния упругой системы, что требует определенных навыков и достаточно глубоких представлений о поведении элементов конструкций при действии внешних нагрузок.

Рассмотрим шарнирный узел с двумя стержнями (рисунок 1.13). Пусть стержни испытывают растяжение-сжатие.

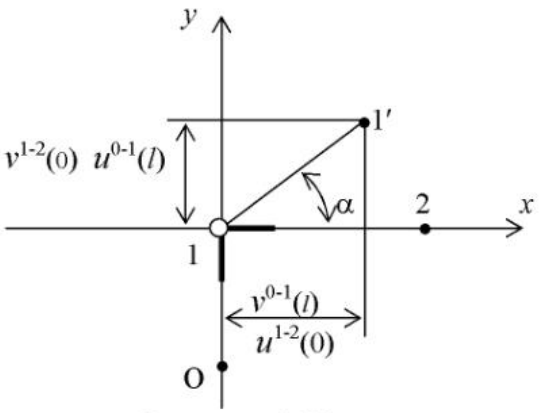


Рисунок 1.13

Положение шарнира 1 после деформирования стержневой системы определяется тем, что граничные точки стержней 0-1 и 1-2 перемещаются по направлению своих осей и поворачиваются на некоторый угол. Это равнозначно тому, что граничная точка стержня имеет два взаимно перпендикулярных перемещения (плоский случай). Поэтому, если шарнир 1 переместился в первый или третий квадранты, то:

$$u^{0\text{-}1}(l) = u^{1\text{-}2}(0)\cdot\mathrm{tg}\alpha,$$

т.е. знаки граничных параметров одинаковы.

Если шарнир 1 окажется во втором или четвертом квадрантах, то знаки параметров разные:

$$u^{0\text{-}1}(l) = -\,u^{1\text{-}2}(0)\cdot\mathrm{tg}\alpha.$$

Если стержни испытывают изгиб, то для положения шарнира в первом и третьем квадрантах можно записать:

$$v^{0\text{-}1}(l) = -\,v^{1\text{-}2}(0)\cdot\mathrm{ctg}\alpha.$$

Для положения шарнира во втором и четвертом квадрантах знак минус опускается:

$$v^{0\text{-}1}(l) = v^{1\text{-}2}(0)\cdot\mathrm{ctg}\alpha.$$

Рассмотренные примеры приводят к выводу о том, что необходимо учитывать знаки граничных параметров. В шарнирном узле для углов поворота граничных точек в общем случае выполняется соотношение

$$\varphi^{0-1}(l) \neq \varphi^{1-2}(0).$$

В частном случае может быть и равенство. В жестком узле для одинаково ориентированных локальных систем координат (ось ОУ направлена у всех стержней “вниз” или “вверх”) имеем равенство углов поворота:

$$\varphi^{0-1}(l) = \varphi^{1-2}(0),$$

для систем координат разной ориентации:

$$\varphi^{0-1}(l) = -\varphi^{1-2}(0).$$

Рассмотрим деформированное состояние шарнирного узла с тремя стержнями (рисунок 1.14), испытывающими растяжение - сжатие, где

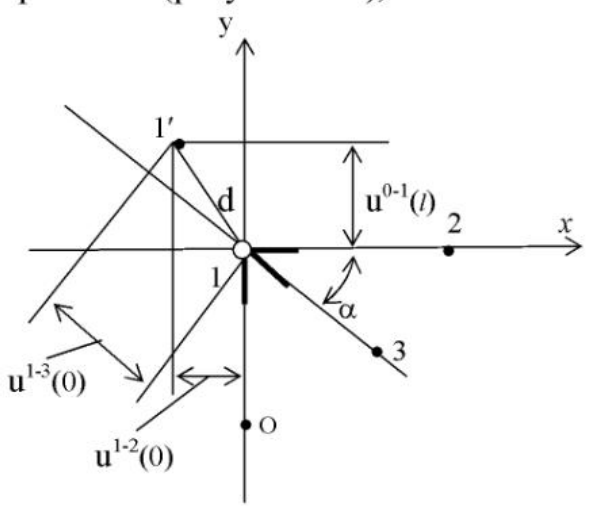


Рисунок 1.14

d - абсолютное перемещение узла 1.

Из рисунка 1.14 следует, что:

$$d = \sqrt{\left[u^{1-2}(0)\right]^2 + \left[u^{0-1}(l)\right]^2},$$

т.е. абсолютное перемещение шарнирного узла определяется перемещениями только взаимно перпендикулярных стержней.

Пусть узел 1 переместится во второй (или четвертый) квадрант. Проецируя перемещения $u^{0\text{-}1}(l)$ и $u^{1\text{-}2}(0)$ на перемещение $u^{1\text{-}3}(0)$, получим:

$$-u^{1-3}(0) = u^{0-1}(l)\sin\alpha - u^{1-2}(0)\cos\alpha .$$

Если узел окажется в первом (или третьем) квадранте, то получится такое же соотношение. Таким образом, соотношения между кинематическими параметрами зависят лишь от геометрических особенностей узлов и не зависят от степени деформированности стержневой системы. Для жесткого узла с тремя стержнями, испытывающими изгиб, кинематические соотношения можно получить из деформированного состояния (рисунок 1.15).

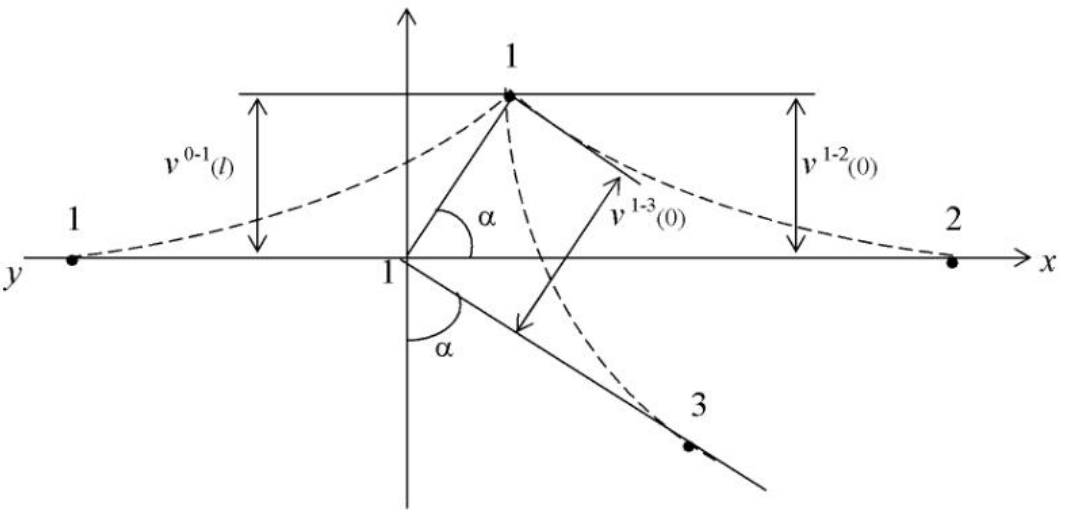


Рисунок 1.15

$$v^{0-1}(l) = v^{1-2}(0) = v^{1-3}\sin\alpha ; \qquad \varphi^{0-1}(l) = \varphi^{1-2}(0) = \varphi^{1-3}(0) .$$

Для узлов с большим числом стержней соотношения между кинематическими граничными параметрами устанавливаются аналогично.

Примеры составления соотношений между граничными параметрами показывают, что необходимо заранее определить для каждого стержня конструкции его начало и конец, т.е. составить ориентированный граф упругой системы.

Ориентированный граф стержневой системы будем представлять в виде определенного набора пронумерованных узлов с указанием начала и конца каждого стержня. В таком виде ориентированный граф не отличается от расчетной схемы стержневой системы и содержит номера узлов с выбранными для каждого стержня началом и концом. Чтобы дополнительно не изображать ориентированные графы, каждая упругая система в дальнейшем имеет номера узлов и стрелки, указывающие на начало и конец стержней. При этом удобно обозначать и граничные параметры, присвоив им номера соответствующих стержней.

1.5 Метод решения краевых задач для линейных систем

Если несколько стержней соединены в единую конструкцию, то для системы стержней можно составить матричное уравнение типа (1.40). Матрица A преобразуется к квазидиагональному виду, а векторы Y и X будут содержать параметры напряженно-деформированного состояния всех стержней в текущей и начальной точках.

$$A = \begin{pmatrix} A_1(x) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_i(x) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_m(x) \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1(x) \\ \cdots \\ Y_i(x) \\ \cdots \\ Y_m(x) \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} X_1(x) \\ \cdots \\ X_i(x) \\ \cdots \\ X_m(x) \end{pmatrix} \qquad (1.45)$$

где m число стержней в системе.

Диагональные блоки матрицы A представляют собой одинаковые или разные квадратные матрицы ортонормированных фундаментальных функций, описывающих состояние стержней. Вектор нагрузки B строится аналогично векторам Y и X и включает внешнюю нагрузку всех стержней по выражению (1.33).

Такая схема формирования матричного уравнения требует дискретизации стержневой системы в узлах. Связано это с тем, что узлы являются точками разрыва кинематических и статических параметров стержней, а уравнение (1.40) справедливо в точках непрерывности параметров напряженно-деформированного состояния. Однако, при необходимости, узлами стержневой системы могут быть и точки, где сохраняется непрерывность параметров. Порядок чередования параметров стержней в матрицах (1.45). произвольный, т.е. в цепочке могут располагаться параметры стержней, находящихся в разных местах конструкции. Поэтому любую стержневую систему можно описать уравнением типа (1.40), выступающим уже в роли математической модели деформирования линейной системы. Порядок такого уравнения определяется числом стержней, на которое разбивается система, и порядком дифференциальных уравнений, принятых для описания состояния стержней.

Отметим, что формирование матриц (1.45) при текущем значении переменной x нецелесообразно. Достаточно иметь одно уравнение типа (1.40) с матрицами (1.45) при граничном значении переменной $x=l$ каждого стержня, т.е. сформировать уравнение краевой задачи. В этом случае можно выполнить преобразования матриц уравнения (1.40) по схеме

$$Y(l) = A(l)\cdot X(0) + B(l) \rightarrow A(l) \cdot X(0) - Y(l) = -B(l) \rightarrow$$
$$A_*(l)\cdot X_*(0,l) = - B(l), \qquad (1.46)$$

где векторы Y, X содержат параметры стержней в граничных точках $x=\ell$ и $x=0$. Вектор B состоит из грузовых элементов всех стержней при $x=\ell$. Матрица A содержит граничные значения ортонормированных фундаментальных функций при $x=\ell_i$ и имеет квазидиагональную структуру.

Как видно, сущность схемы преобразования матриц (1.46) заключается в переносе конечных параметров вектора Y на место нулевых параметров вектора X. При этом вектор Y становится нулевым и исключается из рассмотрения. Матрица A_* обнуляется в отдельных столбцах и в нее вводятся элементы, компенсирующие перенос параметров. Вектор X_* содержит уже неизвестные начальные и конечные граничные параметры всех стержней системы, как это имеет место в методе граничных элементов [29,42,43,157].

Таким образом, решение прямых задач механики линейных систем с помощью уравнений метода начальных параметров сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных начальных и конечных параметров стержней.

Процесс переноса конечных параметров вектора Y на вектор X основан на следующем. Векторы Y, X любой линейной системы при граничном значении переменной $x=\ell_i$ будут содержать 3 группы граничных параметров.

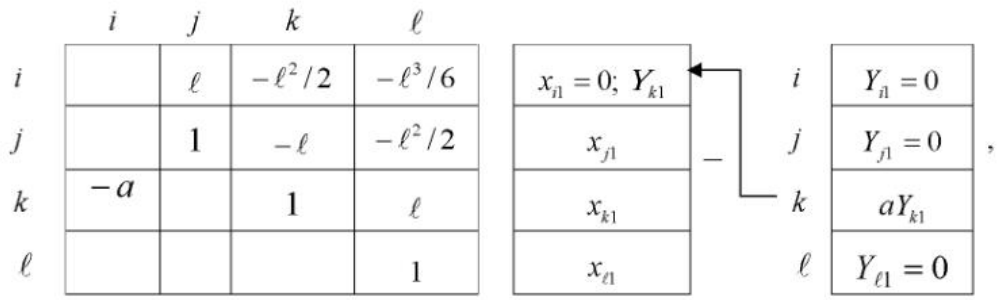
Первая группа – это нулевые граничные парметры, что определяется заданными условиями опирания (краевыми условиями).

Вторая группа – это зависимые параметры, связь между которыми выражается уравнениями равновесия и совместности перемещений узлов линейной системы.

Третья группа граничных параметров векторов Y, X никак не связаны между собой. Эти параметры условно могут быть названы независимыми.

Перенос параметров из Y в X должен компенсироваться соответствующими не нулевыми элементами матрицы A, иначе нарушится исходное уравнение (1.40) при $x=\ell_i$. Очевидно, что независимые параметры вектора Y должны быть перенесены на место нулевых параметров вектора X, а зависимые параметры переносятся в соответствии с уравнениями их связи. Перед операцией переноса параметров необходимо освободить поля матрицы A от элементов, связанных с нулевыми параметрами вектора X. Выполняется это путем обнуления столбцов матрицы A, номера которых равны номерам строк нулевых параметров вектора X. Далее в матрицу A вводятся не нулевые компенсирующие элементы и преобразования по схеме (1.46) завершены. Правило для определения величины и положения компенсирующих элементов при переносе параметров включает 3 случая.

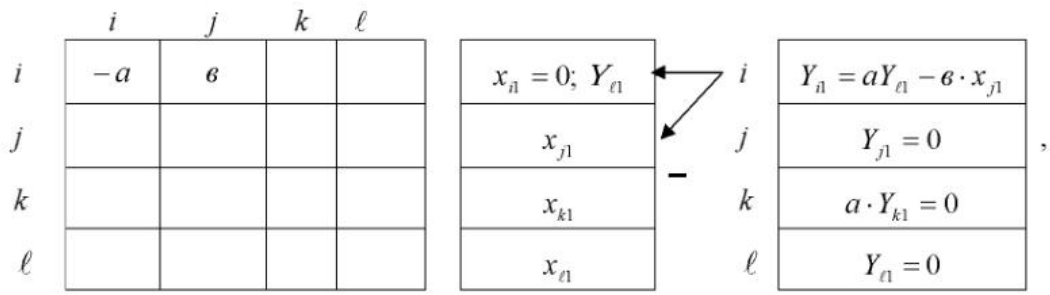
1 случай. При переносе независимого параметра вектора Y в вектор X компенсирующий элемент матрицы A равен коэффициенту при переносимом параметре со своим знаком по схеме



, (1.47)

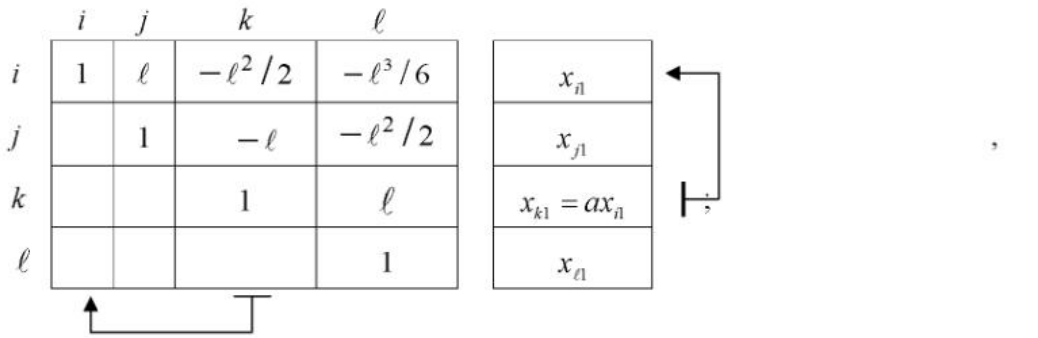
т.е. компенсирующий элемент матрицы A_* равен ($-a$) и должен появиться на месте (k,i), где k - номер строки матрицы Y, где находился параметр; i - номер строки матрицы X, куда переносится параметр. Другими словами, первый индекс компенсирующего элемента указывает на старый адрес переносимого параметра, а второй индекс указывает новый адрес в матрице X.

2 случай. Перенос зависимых параметров представляет собой повторение операций 1-го случая с той лишь разницей, что в матрице X не появляются новые параметры, а в матрице A_* соответствующие строки могут содержать несколько компенсирующих элементов.

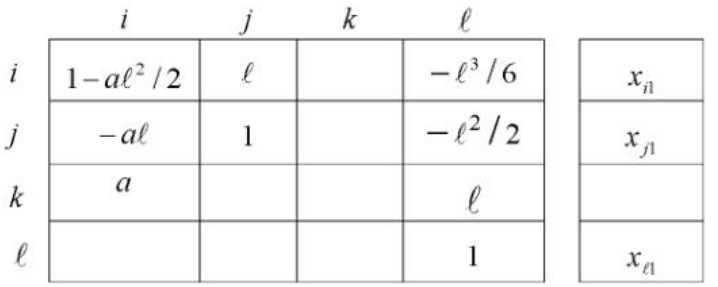


, (1.48)

3 случай. Для сложных стержневых систем в одном узле могут находиться несколько начальных точек стержней. В этом случае возникают уравнения связи между начальными параметрами и требуется переносить параметры в пределах матрицы X. Компенсирующие элементы получают сдвиг в соответствии со схемой



(1.49)



Видно, что элементы матрицы A сдвигаются на место столбца, номер которого равен номеру строки нового положения параметра. Компенсирующие элементы равны произведению коэффициента при переносимом параметре на элементы матрицы A. При этом возрастает число компенсирующих элементов. Поэтому необходимо, по возможности, избегать переносов параметров внутри матрицы X. Достигается это формированием ориентированного графа линейной системы так, чтобы в узлах не сходились две и более начальных точек. Недостатком МКЭ является то, что для систем с большим числом стержней добиться этого невозможно и оптимальным будет такой ориентированный граф, при котором в каждом узле будут сходиться минимальное число начальных точек.

Определив все компенсирующие элементы матрицы A, можно свести расчетное соотношение (1.46) к системе линейных алгебраических уравнений, решением которой определяются неизвестные начальные и конечные параметры всех стержней. Напряженно-деформированное состояние во внутренних точках стержня определяется вычислением по матричному уравнению (1.40).

Для реализации МГЭ на персональном компьютере необходимо сформировать линейную систему алгебраических уравнений (1.40). Данная система имеет свои ярко выраженные особености, которые существенно отличаются от параметров систем методов сил, перемещений, МКЭ и других методов.

В рассматриваемом варианте МГЭ матрица коэффициентов A_* будет являться весьма разреженной матрицей общего вида. Решение системы уравнений с такой матрицей может быть осуществлено с помощью метода исключения Гаусса. Одной из особенностей матрицы является наличие

нулевых ведущих элементов. Поэтому перед применением метода Гаусса необходимо переставить строки матриц A_*, B в новом порядке, исключающем нулевые ведущие элементы. Поскольку матрица сильно разрежена, то в новом порядке строк нельзя переставлять отдельные строки, т.е. МГЭ накладывает ограничения на алгоритм метода Гаусса с выбором ведущих элементов. Отметим, что сильная разреженность матрицы A_* является положительным фактором, который существенно улучшает устойчивость численных операций и обеспечивает точность результатов [100, 266, 336]. В данной книге для решения систем уравнений (1.46) применяется простой алгоритм метода Гаусса. Для уменьшения арифметических ошибок в процессе решения уравнений желательно применять двойную точность.

Наиболее сложной операцией в алгоритме МГЭ является формирование матрицы A_*, включающее следующие этапы:

1 этап. Формируется квазидиагональная матрица A (1.45). Нулевая матрица A заполняется блоками A_i граничных значений ортонормированных фундаментальных функций, что легко осуществить операторами цикла;

2 шаг. Обнуляются столбцы матрицы A, номера которых равны номерам нулевых строк матрицы X. Нулевые начальные параметры стержней являются исходными данными и номера нулевых строк матрицы X определяются в процессе ее формирования. Обнуленную в отдельных столбцах матрицу обозначим A_o;

3 шаг. Определяются компенсирующие элементы, связанные с переносом конечных параметров из Y в X. Все компенсирующие элементы получают из анализа матриц Y и X и могут быть введены в матрицу A_o как исходные данные. Однако, для наглядности алгоритма МГЭ, компенсирующие элементы в ряде примеров сведены во вспомогательную матрицу C;

4 шаг. Матрица A_* получается суммированием

$$A_* = A_o + C \qquad (1.50)$$

Матрица C характеризует топологию линейной системы и является инвариантной по отношению к видам расчета. Она составляется для определенного ориентированного графа только одни раз и далее может использоваться при формировании матрицы A_* в задачах статики, динамики и устойчивости.

Матрица нагрузки B в уравнении МГЭ (1.46) содержит элементы с вложенными силовыми пространствами на основе теории обобщенных функций и сплайнов. Нагрузка на каждый стержень задается, а функция Грина всегда может быть определена. В матрице B после интегрирования остаются члены с обобщенными функциями и сплайнами. Единичная функция Хевисайда и сплайны легко программируются на любом алгоритмическом языке, а дельта-функция Дирака и ее производные должны

представляться нулями. Вектор нагрузки B в алгоритме МГЭ не требует сведения нагрузки к эквивалентной узловой, как это делается в МКЭ, так что исключаются промежуточные операции. Координаты нагрузки в векторе B можно сделать переменными величинами. В этом случае расчет линейных систем можно проводить на статическую подвижную нагрузку или с помощью компьютера строить линии влияния.

При выполнении преобразований по схеме (1.46) возникают два вопроса:

1 Всегда ли возможна схема преобразований (1.46) или, другими словами, всегда ли число нулевых начальных параметров матрицы X линейной системы будет равно числу независимых конечных параметров матрицы Y?

2 Всегда ли имеет место вариант перестановки строк матрицы A_*, исключающий нулевые ведущие элементы?

При положительном ответе на эти вопросы можно утверждать, что нет препятствий для выполнения преобразований (1.46). Ответы на эти вопросы можно сформулировать в виде двух теорем.

Теорема № 1. Для любой линейной системы с заданными краевыми условиями число нулевых начальных параметров матрицы X всегда равно (для систем с линейно неподвижными узлами) или больше (для систем с линейно подвижными узлами) числа независимых конечных параметров матрицы Y.

Теорема № 2. Для любой линейной системы с заданными краевыми условиями получается матрица A_* с не нулевыми строками и столбцами, т.е. всегда существует вариант перестановки строк матрицы A_*, исключающий нулевые ведущие элементы.

Доказательство этих теорем осуществляется методом математической индукции [223]. Таким образом, схема преобразований матриц (1.46) всегда может быть выполнена, что подтверждается и многочисленными частными примерами расчета упругих стержневых, пластинчатых и оболочечных систем, приведенными в данной книге.

1.6 Основы МКЭ для расчета стержневых систем

Для сопоставления возможностей МГЭ и МКЭ кратко представим последний метод, следуя работам [54, 75, 115, 184, 258, 267, 275 и др.]. Широкое применение МКЭ объясняется весьма развитой технологией в виде готовых программ, где автоматизированы трудоемкие процессы формирования матрицы жесткости и дискретизации объекта исследования. Метод позволяет весьма полно учесть геометрию конструкции, реальные условия ее работы, распределение в пространстве и изменение во времени внешних нагрузок, любые граничные условия, температурные факторы,

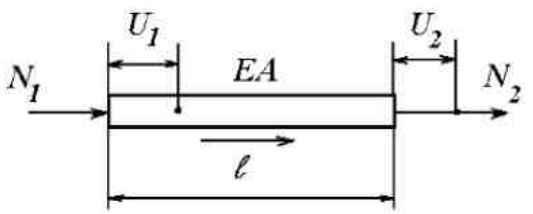
физические свойства материалов и т.п. МКЭ основан на представлении объекта в виде совокупности конечных элементов, взаимодействующих между собой в конечном числе узловых точек. Замена исходной конструкции совокупностью конечных элементов подразумевает равенство потенциальных энергий конструкции и ее дискретной модели. Для стержневых систем соблюдение энергетического баланса приводит к дискретной модели, точно описывающей поведение исходной конструкции. Такая идеализация конструкции требует, чтобы напряженное состояние в каждом конечном элементе определялось через значения узловых перемещений. Связь между узловыми усилиями и перемещениями осуществляется с помощью матрицы жесткости по матричному уравнению

$$\vec{R} + K \cdot \vec{Z} = \mathrm{O}, \qquad (1.51)$$

где $\vec{R}$ - вектор узловой нагрузки; K - матрица жесткости конструкции в глобальной системе координат; $\vec{Z}$ - вектор неизвестных перемещений. Уравнение (1.51) соответствует варианту МКЭ в форме метода перемещений. Если за основные неизвестные принять узловые усилия, то получается вариант МКЭ в форме метода сил, где определяющей является уже матрица податливости. Расчетная практика показала, что МКЭ в форме метода перемещений имеет меньшее число уравнений для определения неизвестных, что предопределило его преимущественное использование. Поскольку МКЭ достаточно полно и подробно описан в литературе, то представим только необходимые данные по методу.

В качестве конечных элементов для расчета стержневых систем используются прямолинейные стержни с жестким защемлением концов или шарнирным опиранием и жесткой заделкой.

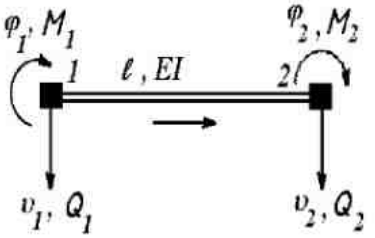
Призматический КЭ при растяжении-сжатии



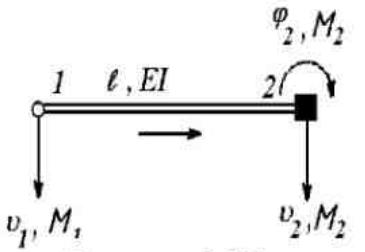
$$\begin{vmatrix} N_1 \\ N_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{EA}{\ell} & -\frac{EA}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & \frac{EA}{\ell} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} \qquad (1.52)$$

Рисунок 1.16

Аналогичный вид имеет уравнение МКЭ кручения призматического бруса, где необходимо поменять кинематические и статические параметры.



$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{\ell} \begin{bmatrix} 6/\ell^2 & 3/\ell & -6/\ell^2 & 3/\ell \\ 3/\ell & 2 & -3/\ell & 1 \\ -6/\ell^2 & -3/\ell & 6/\ell^2 & -3/\ell \\ 3/\ell & 1 & -3/\ell & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \varphi_1 \\ \upsilon_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \qquad (1.53)$$



$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{3EI}{\ell} \begin{bmatrix} 1/\ell^2 & -1/\ell^2 & 1/\ell \\ -1/\ell^2 & 1/\ell^2 & -1/\ell \\ 1/\ell & -1/\ell & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Рисунок 1.17

В уравнениях (1.52), (1,53) матрицы жесткости соответствуют локальным системам координат КЭ, а на рисунке 1.16, 1.17 показаны положительные направления перемещений и усилий. Для пространственного случая деформирования КЭ уравнения (1.52), (1.53) объединяются в одно матричное уравнение 12-го порядка. Если КЭ тонкостенный стержень, то нужно использовать МЖ стесненного кручения и порядок уравнения пространственного деформирования увеличивается до 14. Для приведения уравнений состояния КЭ к уравнению (1.51), т.е. фактически к краевой задаче, необходимо выполнить ряд стандартных матричных операций.

1 Формирование МЖ отдельных КЭ в глобальной системе координат по формуле

$$K_\partial = C_\partial^T k_\partial C_\partial, \qquad (1.54)$$

где K_∂ – МЖ отдельного КЭ в глобальной системе координат; C_∂ – матрица преобразования перемещений КЭ к глобальной системе координат; C_∂^T - транспонированная матрица; k_∂ - МЖ КЭ в локальной системе координат.

Матрица C_∂ содержит направляющие косинусы между осями локальной и глобальной систем координат. Для стержневого КЭ направления осей локальной и глобальной систем координат принимаются одинаковыми [258]. Поэтому можно вместо направляющих косинусов использовать сами перемещения концевых сечений КЭ в матрице C_∂. Например, для задач изгиба они принимают вид

C_∂=

$z_1=1$	$z_2=1$	...
υ_1	υ_1	
φ_1	φ_1	
υ_2	υ_2	
φ_2	φ_2	

;

C_∂=

$z_1=1$	$z_2=1$	...
υ_1	υ_1	
υ_2	υ_2	
φ_2	φ_2	

где z_1, z_2, … - неизвестные перемещения узлов основной системы метода перемещений стержневой конструкции.

2 Построение МЖ конструкции по формуле

$$K = \sum_{\partial=1}^{n} K_\partial \qquad (1.55)$$

3 Составление разрешающего уравнения МКЭ и его решение

$$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{z}+\boldsymbol{R}=0\rightarrow\boldsymbol{z}=-\boldsymbol{K}^{-1}\cdot\boldsymbol{R}, \qquad (1.56)$$

где $\boldsymbol{K}^{-1}$ - обратная матрица жесткости, R - матрица узловых реакций от внешней нагрузки.

4 Определение перемещений граничных точек всех КЭ

$$\boldsymbol{\Delta}_\partial = C_\partial \cdot \boldsymbol{z} \qquad (1.57)$$

5 Определение усилий в граничных точках всех КЭ

$$\boldsymbol{s}_\partial = k_\partial \boldsymbol{\Delta}_\partial + \overset{\circ}{\boldsymbol{s}}_\partial, \qquad (1.58)$$

где $\overset{\circ}{\boldsymbol{s}}_\partial$ - матрица усилий в граничных точках КЭ от внеузловых нагрузок.

6 Построение эпюр напряженно-деформированного состояния по компонентам векторов перемещений $\boldsymbol{\Delta}_\partial$ и усилий $\boldsymbol{s}_\partial$.

Для решения задач динамики данный алгоритм дополняется следующими процедурами:

1 Приведение матриц эквивалентных масс КЭ к глобальной системе координат

$$M_\partial = C_\partial^T \cdot m_\partial \cdot C_\partial, \qquad (1.59)$$

где m_∂ - матрица эквивалентных масс КЭ в локальной системе координат. Для поперечных колебаний она имеет вид [184]

$$m_\partial = m\ell$$

11/35	$11\ell/210$	9/70	$-13\ell/420$
$11\ell/210$	$\ell^2/105$	$13\ell/420$	$-\ell^2/140$
9/70	$13\ell/420$	13/35	$-11\ell/210$
$-13\ell/420$	$-\ell^2/140$	$-11\ell/210$	$\ell^2/105$

; (1.60)

$$m_\partial = m\ell$$

33/140	39/280	$-11\ell/280$
39/280	17/35	$-3\ell/35$
$-11\ell/280$	$-3\ell/35$	$2\ell^2/105$

.

2 Формирование матрицы эквивалентных масс всей системы

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\partial=1}^{n} M_\partial \qquad (1.61)$$

3 Определение частот собственных колебаний системы из векового уравнения

$$\left|\boldsymbol{K}^{-1}\cdot\boldsymbol{M} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{E}\right| = 0, \qquad (1.62)$$

где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица; $\boldsymbol{\lambda}_i = 1/\omega_i^2$. В данном варианте МКЭ число частот собственных колебаний ω_i равно степени кинематической неопределимости системы. Для увеличения числа частот и повышения их точности необходимо увеличивать число неизвестных метода перемещений.

4 Построение динамических матриц жесткости всех КЭ в локальной системе координат

$$k_{m\partial} = k_\partial - \theta^2 m_\partial, \qquad (1.63)$$

где θ - частота вынужденных колебаний.

5 Приведение динамических матриц жесткости всех КЭ к глобальной системе координат

$$k_{m\partial} = C_\partial^T k_{m\partial} C_\partial. \qquad (1.64)$$

6 Формирование динамической матрицы жесткости всей системы

$$\boldsymbol{K_m} = \sum_{\partial=1}^{n} K_{m\partial}. \qquad (1.65)$$

7 Составление системы разрешающих уравнений МКЭ для вынужденных колебаний и его решение

$$\boldsymbol{K_m}\cdot\boldsymbol{z} + \boldsymbol{R} = 0 \rightarrow \boldsymbol{z} = -\boldsymbol{K_m^{-1}}\cdot\boldsymbol{R}. \qquad (1.66)$$

Для задач устойчивости соответственно вводятся матрицы потенциала нагрузки. КЭ, нагруженные сжимающими силами, имеют матрицы потенциала нагрузки в локальной системе координат вида [184].

$$P_\partial = F \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6/5\,\ell & 1/10 & -6/5\,\ell & 1/10 \\ \hline 1/10 & 2\ell/15 & -1/10 & -\ell/30 \\ \hline -6/5\,\ell & -1/10 & 6/5\,\ell & -1/10 \\ \hline 1/10 & -\ell/30 & -1/10 & 2\ell/15 \\ \hline \end{array} \; ; \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 6/5\,\ell & -6/5\,\ell & 1/5 \\ \hline P_\partial = F & -6/5\,\ell & 6/5\,\ell & -1/5 \\ \hline & 1/5 & -1/5 & \ell/5 \\ \hline \end{array} \qquad (1.67)$$

Критические силы потери устойчивости определяются из векового уравнения

$$|\boldsymbol{K} - \boldsymbol{P}| = 0 \qquad (1.68)$$

где K, P – матрицы жесткости и потенциала нагрузки системы в глобальной системе координат. Число критических сил, как и в задаче динамики, будет равно степени кинематической неопределимости расчетной схемы. Примеры расчета стержневых систем по МКЭ представлены в главах 2, 3, 4.

ГЛАВА 2 СТАТИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В данной главе представлены решения задач Коши деформирования стержней в форме (1.40). Фундаментальные функции и правые части строились по методике п. 1.3.

2.1 Растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб

В общем случае стержни упругих систем испытывают растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб. Точные дифференциальные уравнения этих видов сопротивлений являются нелинейными и построить аналитические решения этих уравнений весьма затруднительно. Для преодоления математических трудностей нелинейные дифференциальные уравнения линеаризуют и используют их решения в расчетной практике. Погрешность приближенных решений при $\ell/h>10$ не превышает 3% [312], что вполне удовлетворяет требованиям к точности инженерных расчетов. В этой связи представим известные решения приближенных дифференциальных уравнений всех видов сопротивлений.

Задача Коши растяжения-сжатия стержня постоянной жесткости имеет вид [53]

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}=-\frac{q_x(x)}{EA};\qquad u(0);\qquad N(0)=EAu'(0). \tag{2.1}$$

Решение этой задачи представляется выражением

$$EAu(x)=EA\,u(0)+N(0)\cdot x-\int_0^x(x-\xi)q_x(\xi)d\xi \tag{2.2}$$

Дифференцируя это уравнение по x, получим нормальную силу

$$N(x)=EA\,u(0)\cdot 0+N(0)\cdot 1-\int_0^x q_x(\xi)d\xi. \tag{2.3}$$

Объединяя выражения (2.2), (2.3) в матрицы, получим уравнение типа (1.40)

$$\begin{bmatrix} EAu(x) \\ N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EAu(0) \\ N(0) \end{bmatrix} - \int_o^x \begin{bmatrix} (x-\xi)q_x(\xi) \\ q_x(\xi) \end{bmatrix} d\xi. \tag{2.4}$$

Элементы матрицы нагрузки $\boldsymbol{B}$ после подстановки $q_x(x)$ из (1.22) и интегрирования примут вид

$$B_{11}=F(x-a_1)_+ +q\left[\frac{(x-a_2)_+^2}{2}-\frac{(x-a_3)_+^2}{2}\right]; \tag{2.5}$$

$$B_{21}=F\cdot H(x-a_1)\ +q\left[(x-a_2)_+-\ (x-a_3)_+\right].$$

Сопоставление уравнения (2.4) с разрешающим уравнением растяжения-сжатия по МКЭ (1.52) показывает, что матрица коэффициентов уравнения МГЭ имеет 3 ненулевых элемента, а в МКЭ – 4.

Аналогично строятся решения уравнений сдвига, кручения стержня сплошного сечения и изгиба. Дифференциальные уравнения и начальные параметры этих видов сопротивлений имеют вид

$$v_c^{II}(x) = -\frac{q_y(x)k_1}{GA}; \qquad \frac{GA}{k_1}v_c(0); \quad Q(0); \tag{2.6}$$

$$\Theta^{II}(x) = -\frac{m(x)}{GI_k}; \qquad GI_k\Theta(0); \quad M_{kp}(0); \tag{2.7}$$

$$v^{IV}(x) = \frac{q_y(x)}{EI}; \qquad \mathrm{EI}v(0);\ \mathrm{EI}\varphi(0);\ \mathrm{M}(0)\ \ \mathrm{Q}(0); \tag{2.8}$$

Решения задач Коши (2.6) – (2.8) в матричной форме запишутся следующим образом:

сдвиг

$$\begin{bmatrix} \frac{GA}{k_1}v_c(x) \\ Q(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{GA}{k_1}v_c(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} - \int_o^x \begin{bmatrix} (x-\xi)q_y(\xi) \\ q_y(\xi) \end{bmatrix} d\xi, \tag{2.9}$$

кручение стержня сплошного сечения

$$\begin{bmatrix} GI_k\Theta(x) \\ M_{kp}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GI_k\Theta(0) \\ M_{kp}(x) \end{bmatrix} - \int_o^x \begin{bmatrix} (x-\xi)m_y(\xi) \\ m_y(\xi) \end{bmatrix} d\xi, \tag{2.10}$$

изгиб

$$\begin{bmatrix} EIv(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & -A_{13} & -A_{14} \\ & 1 & -x & -A_{13} \\ & & 1 & x \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} + \int_o^x \begin{bmatrix} (x-\xi)^3 q_y(\xi)/6 \\ (x-\xi)^2 q_y(\xi)/2 \\ -(x-\xi)q_y(\xi) \\ -q_y(\xi) \end{bmatrix} d\xi, \tag{2.11}$$

где $A_{13} = x^2/2;\ A_{14} = x^3/6.$

Если ось oy стержня направлена вверх, то знаки "-" в матрицах ***A, B*** сдвига и изгиба опускаются. Элементы матрицы нагрузки ***B*** уравнения (2.9)

для $q_y(x)$ по (1.23) не будут отличаться от выражений (2.5). Для уравнения (2.10) элементы вектора $\boldsymbol{B}$ после подстановки $m(x)$ по (1.24) и интегрирования предстанут следующим образом

$$B_{11} = M_{kp} \cdot (x-a_1)_+ + m\left[\frac{(x-a_2)_+^2}{2} - \frac{(x-a_3)_+^2}{2}\right];$$
$$B_{21} = M_{kp} \cdot H(x-a_1) + m\left[(x-a_2)_+ - (x-a_3)_+\right]. \qquad (2.12)$$

Элементы матрицы $\boldsymbol{B}$ уравнения изгиба (2.11) для $q_y(x)$ по (1.25) примут вид

$$B_{11} = F(x-a_1)_+^3/6 + M(x-a_2)_+^2/2 + q\left[(x-a_3)_+^4 - (x-a_4)_+^4\right]/24;$$
$$B_{21} = F(x-a_1)_+^2/2 + M(x-a_2)_+ + q\left[(x-a_3)_+^3 - (x-a_4)_+^3\right]/6$$
$$B_{31} = F(x-a_1)_+ + M \cdot H(x-a_2) + q\left[(x-a_3)_+^2 - (x-a_4)_+^2\right]/2 \qquad (2.13)$$
$$B_{41} = F \cdot H(x-a_1) + q\left[(x-a_3)_+ - (x-a_4)_+\right]$$

Из (2.11) следует, что матрица коэффициентов уравнения изгиба имеет 10 ненулевых элементов, а матрица коэффициентов уравнения МКЭ (1.53) - 16 элементов. Исходя из представленного можно утверждать, что одномерный вариант МГЭ открывает класс задач механики стержневых систем с более эффективными показателями исходных матриц по сравнению с МКЭ. Отметим при этом наличие пессимистического вывода в фундаментальной книге П.К. Бенерджи и Р. Баттерфилда [29] о том, что " … применение МГЭ к одномерным системам вообще не является эффективным". Вывод, очевидно, был основан на разрешающем уравнении изгиба прямолинейного стержня в прямом варианте МГЭ, которое в представлении авторов работы [29] принимает вид

$$\begin{vmatrix} w(L-\varepsilon) \\ w(0-\varepsilon) \\ \Theta(L-\varepsilon) \\ \Theta(0-\varepsilon) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -G(L,L-\varepsilon) & -G(0,L-\varepsilon) & F(L,L-\varepsilon) & -F(0,L-\varepsilon) \\ -G(L,0+\varepsilon) & -G(0,0+\varepsilon) & F(L,0+\varepsilon) & -F(0,0+\varepsilon) \\ -G'(L,L-\varepsilon) & -G'(0,L-\varepsilon) & F'(L,L-\varepsilon) & -F'(0,L-\varepsilon) \\ -G'(L,0+\varepsilon) & -G'(0,0+\varepsilon) & F'(L,0+\varepsilon) & -F'(0,0+\varepsilon) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s(L) \\ s(0) \\ m(L) \\ m(0) \end{vmatrix} +$$

(2.14)

$$+\begin{vmatrix} D(L,L-\varepsilon) & -D(0,L-\varepsilon) & -E(L,L-\varepsilon) & E(0,L-\varepsilon) \\ D(L,0+\varepsilon) & -D(0,0+\varepsilon) & -E(L,0+\varepsilon) & E(0,0+\varepsilon) \\ D'(L,L-\varepsilon) & -D'(0,L-\varepsilon) & -E'(L,L-\varepsilon) & E'(L,L-\varepsilon) \\ D'(L,0+\varepsilon) & -D'(0,0+\varepsilon) & -E'(L,0+\varepsilon) & E'(0,0+\varepsilon) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w(L) \\ w(0) \\ \Theta(L) \\ \Theta(0) \end{vmatrix} - \int_0^L \begin{vmatrix} G(x,L-\varepsilon) \\ G(x,0+\varepsilon) \\ G'(x,L-\varepsilon) \\ G'(x,0+\varepsilon) \end{vmatrix} \psi_1(x)dx$$

где $\psi_1(x)$ - внешняя нагрузка; L - длина стержня; w,Θ,m,s - соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила; G - функция Грина; F,D,E - фундаментальные функции; $(L-\varepsilon),(0+\varepsilon)-\varepsilon$ - окрестности конечной и начальной точек стержня. Видно, что уравнение МГЭ (2.14) более громоздко, чем аналогичное уравнение МКЭ (1.53). Однако, существуют более эффективные решения, типа (2.11) в форме метода начальных параметров, и МГЭ, основанный на этих решениях, становится конкурентно способным с МКЭ методом также для одномерных систем. По мнению авторов данная книга и является доказательством этого утверждения.

2.2 Кручение тонкостенных стержней

Рассмотрим процедуру построения соотношений МГЭ для кручения тонкостенных стержней открытого профиля. Уравнение стесненного кручения тонкостенного стержня получено проф. В.З. Власовым [63, 66]

$$\Theta^{IV}_{(x)} - k^2\Theta(x) = m(x)/EI_\omega, \tag{2.15}$$

где k - изгибно-крутильная характеристика поперечного сечения стержня, определяемая выражением

$$k^2 = GI_k / EI_\omega; \tag{2.16}$$

EI_ω - секториальная жесткость сечения. В качестве кинематических параметров выступают угол закручивания $\Theta(x)$ и производная угла закручивания $\Theta'(x)$. Статическими параметрами являются бимомент $B_\omega(x)$ и изгибно-крутящий момент $M_\omega(x)$. Особенность стесненного кручения тонкостенного стержня состоит в том, что кинематический параметр $\Theta'(x)$ имеет механический смысл крутящего момента (статической величины), а статические параметры $B_\omega(x)$ и $M_\omega(x)$ не определяются из уравнений статики. Согласно теории стесненного кручения тонкостенного стержня открытого профиля имеют место соотношения

$$B_\omega(x) = -EI_\omega \Theta^{II}(x); \qquad M_\omega(x) = -EI_\omega \Theta^{III}(x);$$
$$L(x) = M_\omega(x) + M_{kp}(x) = -EI_\omega \Theta^{III}(x) + GI_k \Theta'(x), \tag{2.17}$$

где $L(x)$ - крутящий момент внешних сил относительно центра изгиба.

Уравнение (2.15) по форме записи совпадает с дифференциальным уравнением продольно- поперечного изгиба прямолинейного стержня, когда продольная сила растягивающая. Поэтому существует аналогия между параметрами стесненного кручения и продольно-поперечного изгиба

$$\Theta(x) \sim v(x); \quad \Theta'(x) \sim \varphi(x); \quad B_\omega(x) \sim M(x); \quad M_\omega(x) \sim Q(x). \tag{2.18}$$

Эта аналогия позволяет упростить анализ краевых условий для параметров кручения. Если какой-либо параметр продольно-поперечного изгиба для упругой системы не равен нулю (равен нулю), то его аналог при стесненном кручении также не равен нулю (равен нулю) (рисунок 2.1)

$\Theta(o) = 0$	$\Theta(\ell) \neq 0$	$\Theta(\ell) = 0$
$\Theta'(o) = 0$	$\Theta'(\ell) \neq 0$	$\Theta'(\ell) \neq 0$



$B_\omega(o) \neq 0$	$B_\omega(\ell) = 0$	$B_\omega(\ell) = 0$
$M_\omega(o) \neq 0$	$M_\omega(\ell) \neq 0$	$M_\omega(\ell) \neq 0$
$L(o) \neq 0$	$L(\ell) = 0$	

Рисунок 2.1

Решение задачи Коши стесненного кручения тонкостенного стержня предстанет в виде

$$GI_k \Theta(X) = GI_k \cdot \Theta(0) + GI_k \cdot \Theta^I(0) \cdot x + \left[-B_\omega(0)\right](\mathrm{ch}kx - 1) +$$
$$+ \left[-M_\omega(0)\right]\frac{\mathrm{sh}kx - kx}{k} + \int_o^x \frac{\mathrm{sh}k(x-\xi) - k(x-\xi)}{k} m(\xi) d\xi \tag{2.19}$$

Данное выражение является другой формой известного решения В.З. Власова. Дифференцируя уравнение (2.19) и используя соотношения (2.16), (2.17), можно получить другие параметры кручения. В матричной форме соотношения МГЭ стесненного кручения будут иметь вид

$$\begin{array}{|c|} \hline GI_k\Theta(x) \\ \hline GI_k\Theta'(x) \\ \hline B_\omega(x) \\ \hline M_\omega(x) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & x & -A_{13} & -A_{14} \\ \hline & 1 & -A_{23} & -A_{13} \\ \hline & & A_{33} & A_{34} \\ \hline & & A_{23} & A_{33} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline GI_k\Theta(0) \\ \hline GI_k\Theta'(o) \\ \hline B_\omega(0) \\ \hline M_\omega(0) \\ \hline \end{array} + \int_o^x \begin{array}{|c|} \hline A_{14}(x-\xi) \\ \hline A_{13}(x-\xi) \\ \hline -A_{34}(x-\xi) \\ \hline -A_{33}(x-\xi) \\ \hline \end{array} m(\xi)d\xi \quad (2.20)$$

где элементы матрицы ортонормированных фундаментальных функций и матрицы нагрузки для $m(x)$ по (1.24) запишутся следующим образом

$$A_{13} = \operatorname{ch} kx - 1;\ A_{14} = \frac{\operatorname{sh} kx - kx}{k};\ A_{23} = k \operatorname{sh} kx;\ A_{33} = \operatorname{ch} kx;\ A_{34} = \frac{\operatorname{sh} kx}{k};$$

$$B_{11} = M_{kp}\left[\frac{\operatorname{sh} kx(x-a_1)_+ - k(x-a_1)_+}{k}\right] + m\left\{\left[\frac{\operatorname{ch} k(x-a_2)_+ - H(x-a_2)}{k^2} - \frac{(x-a_2)_+^2}{2}\right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\operatorname{ch} k(x-a_3)_+ - H(x-a_3)}{k^2} - \frac{(x-a_3)_+^2}{2}\right]\right\} + B_\omega\left[\operatorname{ch} k(x-a_4)_+ - H(x-a_4)\right];$$

$$B_{21} = M_{kp}\left[\operatorname{ch} k(x-a_1)_+ - H(x-a_1)\right] + m\left\{\left[\frac{\operatorname{sh} k(x-a_2)_+}{k} - (x-a_1)_+\right] - \right. \quad (2.21)$$

$$\left. - \left[\frac{\operatorname{sh} k(x-a_3)_+}{k} - (x-a_3)_+\right]\right\} + B_\omega \cdot k \operatorname{sh} k(x-a_4)_+;$$

$$B_{31} = -M_{kp}\frac{\operatorname{sh} k(x-a_1)_+}{k} m\left[\frac{\operatorname{ch} k(x-a_2)_+ - H(x-a_2)}{k^2} - \frac{\operatorname{ch} k(x-a_3)_+ - H(x-a_3)}{k^2}\right] -$$

$$- B_\omega \cdot k \operatorname{ch} k(x-a_4)_+;$$

$$B_{41} = -M_{kp} \cdot \operatorname{ch} k(x-a_1)_+ - m\frac{\operatorname{sh} k(x-a_2)_+ - \operatorname{sh} k(x-a_3)_+}{k} - B_\omega \cdot k \operatorname{sh} k(x-a_4)_+.$$

2.3 Пространственный случай деформирования прямолинейного стержня

При малых перемещениях и упругих деформациях будет справедлив принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции). Этот принцип позволяет легко получить соотношения МГЭ для общего (пространственного) случая деформирования стержня. Для этого необходимо объединить уравнения (2.4), (2.9), (2.10), (2.11) и (2.20) путем квазидиагонализации матрицы фундаментальных функций. Общее уравнение

МГЭ представлено ниже, где $\boldsymbol{A}_{II}$, $\boldsymbol{A}_{kp}$, $\boldsymbol{A}_{p}$, $\boldsymbol{A}_{c}$ - матрицы фундаментальных функций изгиба, кручения, растяжения и сдвига; $G_{II}(x,\xi)$; $G_{kp}(x,\xi)$; $G_{p}(x,\xi)$; $G_{c}(x,\xi)$ - функции Грина этих видов деформирования. Уравнение (2.23) имеет 16-й порядок, а число ненулевых элементов матрицы $\boldsymbol{A}$ равно 32. Аналогичное уравнение МКЭ имеет также 16-й порядок, но содержит 48 ненулевых элементов матрицы жесткости, т.е. разреженность матрицы коэффициентов МГЭ выше, чем у матрицы жесткости МКЭ примерно на 33,0 %. Порядок уравнения (2.23) можно уменьшить, если совместить перемещения и силы от изгиба и сдвига. В этом случае объединенное уравнение изгиба и сдвига примет вид

$$v_{II}(x)=v_{II}(0)\cdot 1+\varphi(0)\cdot x+\frac{M_{(0)}}{EI}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{Q_{(0)}}{EI}\left(\frac{x^3}{6}-k_{*}x\right)+ \qquad (2.22)$$

$$+\int_{o}^{x}\left[\frac{(x-\xi)^3}{6EI}-k_{*}(x-\xi)\right]q(\xi)d\xi,$$

где $v_{II}(x)=v(x)+v_{c}(x)$ - полный прогиб; $k_{*}=k_1 EI/GA$.

1	$EI_z v_y(x)$	$\boldsymbol{A}_{II}$					$EI_z v_y(0)$		$G_{II} q_y(\xi)$	
2	$EI_z \varphi_z(x)$						$EI_z \varphi_z(0)$		$G^{I}_{II} q_y(\xi)$	
3	$M_z(x)$						$M_z(0)$		$G^{II}_{II} q_y(\xi)$	
4	$Q_y(x)$						$Q_y(0)$		$G^{III}_{II} q_y(\xi)$	
5	$EI_y v_z(x)$		$\boldsymbol{A}_{II}$				$EI_y v_z(0)$		$G_{II} q_z(\xi)$	
6	$EI_y \varphi_y(x)$						$EI_y \varphi_y(0)$		$G^{I}_{II} q_z(\xi)$	
7	$M_y(x)$						$M_y(0)$		$G^{II}_{II} q_z(\xi)$	
8	$Q_z(x)$						$Q_z(0)$		$G^{III}_{II} q_z(\xi)$	
9	$GI_k \Theta(x)$	$=$		$\boldsymbol{A}_{kp}$			$GI_k \Theta(0)$	$+\int_{o}^{x}$	$-G_{kp} m(\xi)$	$d\xi$
10	$M_{kp}(x)$						$M_{kp}(0)$		$-G^{I}_{kp} m(\xi)$	(2.23)
11	$EAu(x)$				$\boldsymbol{A}_{p}$		$EAu(0)$		$-G_p q_x(\xi)$	
12	$N(x)$						$N(0)$		$-G^{I}_{p} q_x(\xi)$	
13	$\frac{GA}{k_1} v_y(x)$					$\boldsymbol{A}_{c}$	$\frac{GA}{k_1} v_y(0)$		$-G_c q_y(\xi)$	
14	$Q_y(x)$						$Q_y(0)$		$-G^{I}_{c} q_y(\xi)$	
15	$\frac{GA}{k_1} v_z(x)$					$\boldsymbol{A}_{c}$	$\frac{GA}{k_1} v_z(0)$		$-G_c q_z(\xi)$	
16	$Q_z(x)$						$Q_z(0)$		$-G^{I}_{c} q_z(\xi)$	

Уравнение (2.23) с учетом (2.22) уменьшит свой порядок до 12 уравнений.

Для реальных стержневых конструкций можно пренебрегать некоторыми видами деформирования. Так, при определенных размерах стержней можно не учитывать деформацию сдвига, продольные перемещения и т.п. Все подобные частные случаи описываются уравнением (2.23), где нужно исключить соответствующие слагаемые. При этом следует иметь в виду, что неучёт каких-то перемещений и видов сопротивлений приводит к завышенным значениям искомых параметров. Методика применения частных уравнений МГЭ показана ниже на примерах.

2.4 Расчеты плоских и пространственных стержневых систем

Рассмотрим расчеты стержневых систем, элементы которых испытывают только растяжение-сжатие. К таким конструкциям относятся стержни, нагруженные осевой нагрузкой, и фермы, у которых нагрузка приложена в узлах, а сами узлы представляют собой шарниры. Для расчета таких конструкций достаточно применить уравнение (2.4).

2.4.1 Растяжение-сжатие ступенчатого стержня

Пример 2.1 Определить начальные и конечные граничные параметры ступенчатого статически неопределимого стержня (рисунок 2.2), где $EA_1 / EA_2 = 2;\quad EA_1 / EA_3 = 4/3;\quad EA_2 / EA_3 = 2/3.$

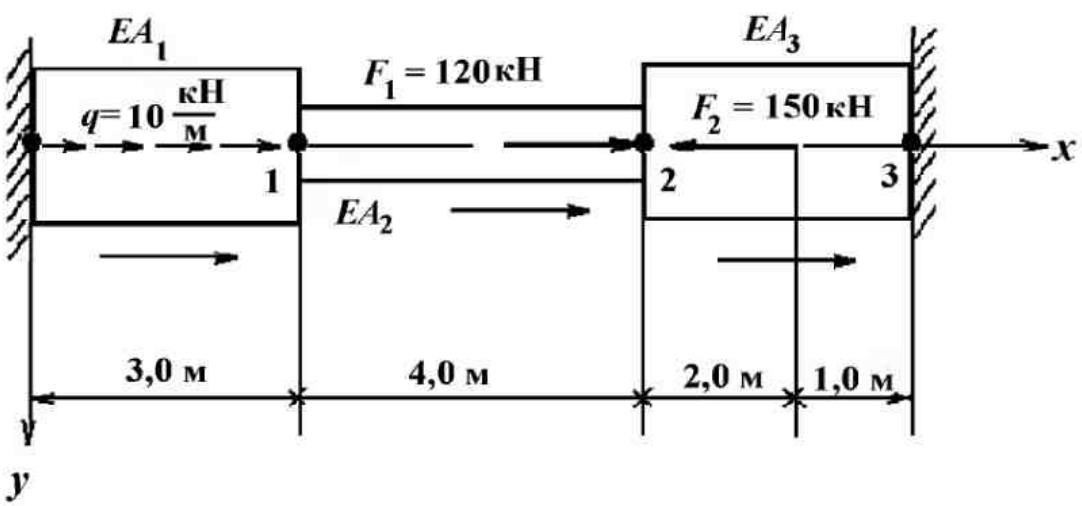


Рисунок 2.2

Решение задачи представим алгоритмом

1 Разбиваем стержневую систему на 3 стержня, нумеруем узлы и стрелками указываем начало и конец каждого стержня.

2 Формируем матрицы ***A, X, Y, B*** ,и систему разрешающих уравнений

$\boldsymbol{A}=$

	1	2	3	4	5	6
1	1	3				
2		1				
3			1	4		
4				1		
5					1	3
6						1

; $\boldsymbol{X}=$

1	$EA_1u_{(0)}^{0-1}=0$
2	$N_{(0)}^{0-1}$
3	$EA_2u_{(0)}^{1-2}$
4	$N_{(0)}^{1-2}$
5	$EA_3u_{(0)}^{2-3}$
6	$N_{(0)}^{2-3}$

; $\boldsymbol{Y}=$

1	$EA_1u_{(\ell)}^{0-1}$
2	$N_{(\ell)}^{0-1}$
3	$EA_2u_{(\ell)}^{1-2}$
4	$N_{(\ell)}^{1-2}$
5	$EA_3u_{(\ell)}^{2-3}=0;$
6	$N_{(\ell)}^{2-3}$

; $\boldsymbol{B}=$

1	45
2	30
3	0
4	120
5	-150
6	-150

При заполнении матрицы ***A*** учтено, что $\ell^{0-1}=3{,}0$ м; $\ell^{1-2}=4{,}0$ м; $\ell^{2-3}=3{,}0$ м. Элементы матрицы ***B*** вычисляются по выражениям (2.5), если подставить значения F_1 =120,0 кН; F_2=-150 кН; q = 10,0 кН/м; a_1=2,0 м. В матрицах ***X, Y*** учтены условия опирания, так что первая строка матрицы ***X*** содержит нулевой параметр. Соответственно, необходимо обнулить первый столбец матрицы ***A***. Для выполнения цепочки преобразований (1.46) составляем уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1.и 2 (рисунок 2.3).

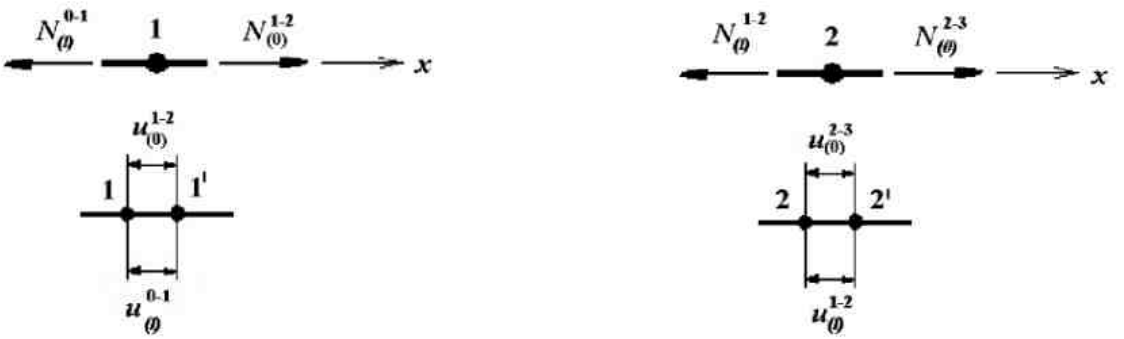


Рисунок 2.3

$$\sum x=0\rightarrow -N_{(\ell)}^{0-1}+N_{(0)}^{1-2}=0\rightarrow N_{(\ell)}^{0-1}=N_{(0)}^{1-2};\quad N_{(\ell)}^{1-2}=N_{(0)}^{2-3};$$

$$u_{(\ell)}^{0-1}=u_{(0)}^{1-2};\qquad u_{(\ell)}^{1-2}=u_{(0)}^{2-3}.$$

Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов удобно помещать в матрицы ***X***, ***Y***. Анализ этих матриц позволяет получить топологическую матрицу системы.

$\boldsymbol{X}_* =$

1	$EA_1 u_{(0)}^{0-1} = 0\,;\ N_{(\ell)}^{2-3}$
2	$N_{(0)}^{0-1}$
3	$EA_2 u_{(0)}^{1-2}$
4	$N_{(0)}^{1-2}$
5	$EA_3 u_{(0)}^{2-3}$
6	$N_{(0)}^{2-3}$

; $\boldsymbol{Y} =$

1	$EA_1 u_{(\ell)}^{0-1} = EA_1 u_{(0)}^{1-2}$
2	$N_{(\ell)}^{0-1} = N_{(0)}^{1-2}$
3	$EA_2 u_{(\ell)}^{1-2} = EA_2 u_{(0)}^{2-3}$
4	$N_{(\ell)}^{1-2} = N_{(0)}^{2-3}$
5	$EA_3 u_{(\ell)}^{2-3} = 0$
6	$N_{(\ell)}^{2-3}$

$\boldsymbol{C} =$

	1	2	3	4	5	6
1			$-\frac{EA_1}{EA_2}$			
2				-1		
3					$-\frac{EA_2}{EA_3}$	
4						-1
5						
6	-1					

Независимый параметр $N_{(\ell)}^{2-3}$ переносим в 1-ю строку матрицы $\boldsymbol{X}_*$. В качестве компенсации в матрице $\boldsymbol{A}_*$ появится ненулевой элемент $A(6,1) = -1$, где $i = 6$ – старый адрес, $j = 1$ – новый адрес переносимого параметра. Аналогично переносятся зависимые параметры. Сложив матрицы $\boldsymbol{A_0}$ и $\boldsymbol{C}$, получаем матрицу $\boldsymbol{A}_*$. Система уравнений (1.46) данного примера запишется так

	1	2	3	4	5	6				
1		3	-2				$N_{(\ell)}^{2-3}$		45	3
2		1		-1			$N_{(0)}^{0-1}$		30	2
3			1	4	-2/3		$EA_2 u_{(0)}^{1-2}$	=	0	4
4				1		-1	$N_{(0)}^{1-2}$		120	6

5					1	3	$EA_3u_{(0)}^{2-3}$	-150	5
6	-1					1	$N_{(0)}^{2-3}$	-150	1

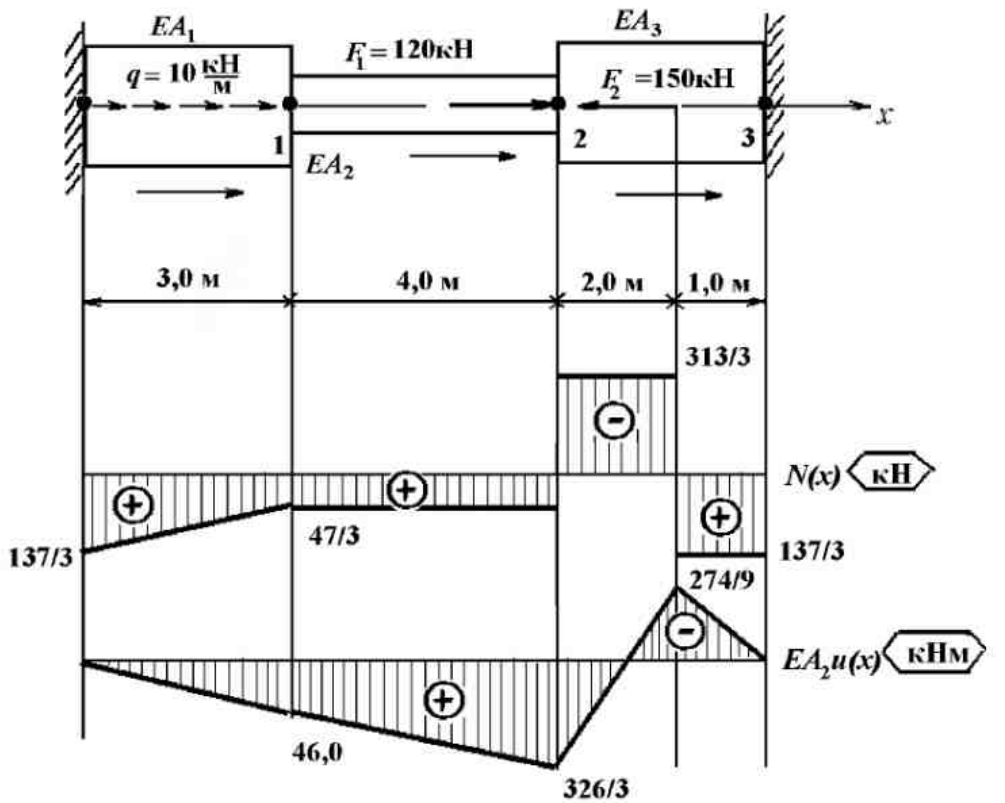
3 Решаем систему линейных алгебраических уравнений. Определить неизвестные начальные и конечные параметры стержня можно с помощью обратной матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$, но такой путь связан с большими затратами времени процессора. Удобнее воспользоваться алгоритмом метода исключения Гаусса. В связи с тем, что ведущий элемент $A(1,1)=0$, то для применения метода Гаусса нужно переставить строки матриц $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$. Один из возможных вариантов перестановки строк показан цифрами справа. Выполняя прямой и обратный ходы метода Гаусса, определяем граничные параметры, которые сведены в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

$\boldsymbol{X}_*=$

1	$N_{(\ell)}^{2-3}=137/3$ кН
2	$N_{(0)}^{0-1}=137/3$ кН
3	$EA_2u_{(0)}^{1-2}=46{,}0$ кНм
4	$N_{(0)}^{1-2}=47/3$ кН
5	$EA_3u_{(0)}^{2-3}=163{,}0$ кНм
6	$N_{(0)}^{2-3}=-104{,}3$ кН

По начальным параметрам можно построить эпюры $N(x)$ и $EA_2u(x)$ (смотри рисунок 2.4).



2.4.2 Статически определимые и неопределимые фермы

Пример 2.2 [278, с. 217]. Определить усилия в стержнях фермы (рисунок 2.5).

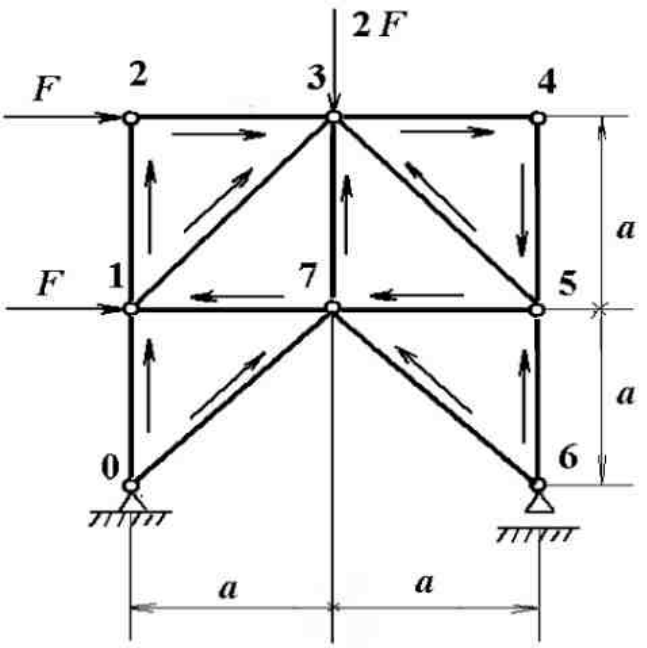


Рисунок 2.5

Из уравнения (2.4) следует, что нормальная сила не зависит от перемещения $u(0)$ и $N(x)$ можно считать независимой от перемещений. Если необходимо определить только усилия, то уравнения для перемещений в соотношениях (2.4) можно опустить. В этом случае порядок матричного уравнения схемы (1.46) сокращается в 2 раза, а матрица $\boldsymbol{A}_*$ становится единичной. Матрица $\boldsymbol{Y}$ будет содержать уравнения равновесия узлов и независимые конечные параметры, т.е. известный метод расчета ферм – метод вырезания узлов является частным случаем МГЭ, когда не используются уравнения для продольных перемещений.

Алгоритм МГЭ представим набором отдельных пунктов.

1 Выполняем кинематический анализ и определяем число степеней свободы по формуле:

$$w = 2y - c - c_0 = 2 \cdot 8 - 13 - 3 = 16 - 16 = 0,$$

где $y = 8$ - число узлов фермы; c = 13 – число стержней фермы; $c_0 = 3$-число опорных связей. Поскольку $w = 0$, то ферма геометрически неизменяема и статически определима.

2 Разбиваем ферму на 13 стержней и нумеруем узлы. Обозначаем стрелками начало и конец каждого стержня (рисунок 2.5).

3 Формируем матричные уравнения схемы (1.46). Уравнения равновесия узлов записываем в матрицу $\boldsymbol{Y}$. Обнуляем 3, 5, 6 и 7 столбцы матрицы $\boldsymbol{A}$, т.к. нулевыми оказались усилия в соответствующих строках матрицы $\boldsymbol{X}$ (силу $N_{(0)}^{5-7}$ переносим в 11-ю строку с компенсирующим элементом $A(6,11) = -\sqrt{2}/2$).

$\boldsymbol{X}_*=$	1	$N_{(0)}^{0-1}$	; $\boldsymbol{Y}=$	1	$N_{(\ell)}^{0-1}=N_{(0)}^{1-2}+\frac{\sqrt{2}}{2}N_{(0)}^{1-3}$	$\boldsymbol{;\ B}=$	1
	2	$N_{(0)}^{1-2}$		2	$N_{(\ell)}^{0-1}=0$		2
	3	$N_{(0)}^{2-3}=0;\ N_{(\ell)}^{5-3}$		3	$N_{(\ell)}^{2-3}=\frac{\sqrt{2}}{2}N_{(\ell)}^{5-3}-$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}N_{(\ell)}^{1-3}+N_0^{3-4}$		3 1
	4	$N_{(0)}^{3-4}$		4	$N_{(\ell)}^{3-4}=0$		4
	5	$N_{(0)}^{4-5}=0;\ N_{(\ell)}^{1-3}$		5	$N_{(\ell)}^{4-5}$		5
	6	$N_{(0)}^{5-7}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ N_{(0)}^{5-3};$ $N_{(\ell)}^{6-7}$		6	$N_{(\ell)}^{5-7}=N_{(0)}^{7-1}+N_{(0)}^{7-3}-$ $-\sqrt{2}N_{(\ell)}^{6-7}$		6
	7	$N_{(0)}^{6-7}=0;\ N_{(\ell)}^{4-5}$		7	$N_{(\ell)}^{6-7}$		7
	8	$N_{(0)}^{7-1}$		8	$N_{(\ell)}^{7-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}N_{(0)}^{1-3}$		8 -1
	9	$N_{(0)}^{7-3}$		9	$N_{(\ell)}^{7-3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}N_{(\ell)}^{1-3}-\frac{\sqrt{2}}{2}N_{(\ell)}^{5-3}$		9 -2
	10	$N_{(0)}^{1-3}$		10	$N_{(\ell)}^{1-3}$		10
	11	$N_{(0)}^{5-3}$		11	$N_{(\ell)}^{5-3}$		11
	12	$N_{(0)}^{6-5}$		12	$N_{(\ell)}^{6-5}=N_{(\ell)}^{4-5}+\frac{\sqrt{2}}{2}N_{(0)}^{5-3}$		12
	13	$N_{(0)}^{0-7}$		13	$N_{(\ell)}^{0-7}=\sqrt{2}N_{(0)}^{7-3}-N_{(\ell)}^{6-7}$		13

$\boldsymbol{F}$

В 3, 5, 6 и 7 строки вектора $\boldsymbol{X}_*$ переносим независимые параметры $N_{(\ell)}^{5-7}$, $N_{(\ell)}^{1-3}$, $N_{(\ell)}^{6-7}$, $N_{(\ell)}^{4-5}$, не входящие в уравнения равновесия узлов. Топологическая матрица $\boldsymbol{C}$ фермы и разрешающая системы уравнений МГЭ представлены ниже.

4 Переставляя строки, как показано цифрами справа, методом Гаусса получаем усилия, совпадающие с результатом работы [278].

$N_{(0)}^{0-1}=-1{,}5F;\ N_{(0)}^{1-2}=0;\ \ N_{(\ell)}^{5-3}=-3{,}535F;\ N_{(0)}^{3-4}=0;\ N_{(\ell)}^{1-3}=-2{,}12F;\ N_{(\ell)}^{6-7}=0;$

$N_{(\ell)}^{4-5}=0;N_{(0)}^{7-1}=0{,}5F;N_{(0)}^{7-3}=2F;N_{(0)}^{1-3}=-2{,}121F;N_{(0)}^{5-3}=-3{,}535F;$

$N_{(0)}^{6-5}=-2{,}5F;N_{(0)}^{0-7}=2{,}828F.$

Если сравнивать с методикой расчета работы [278], то очевидна более простая логика МГЭ,

$C=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1		-1								$-\frac{\sqrt{2}}{2}$			
2													
3			$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$								
4													
5							-1						
6						$\sqrt{2}$		-1	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
7						-1							
8										$\frac{\sqrt{2}}{2}$			
9			$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$								
10					-1								
11			-1										
12							-1				$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
13						1			$-\sqrt{2}$				

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13				
1	1	-1								$-\frac{\sqrt{2}}{2}$				$N_{(0)}^{0-1}$			1
2		1												$N_{(0)}^{1-2}$			2
3			$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$									$N_{(\ell)}^{5-3}$		1	3
4				1										$N_{(0)}^{3-4}$			4
5							-1							$N_{(\ell)}^{1-3}$			7
6						$\sqrt{2}$		-1	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$			$N_{(\ell)}^{6-7}$			8
7						-1								$N_{(\ell)}^{4-5}$	=F		6
8								1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$				$N_{(0)}^{7-1}$		-1	10
9			$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$				1					$N_{(0)}^{7-3}$		-2	9
10					-1					1				$N_{(0)}^{1-3}$			5
11			-1								1			$N_{(0)}^{5-3}$			11
12							-1				$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1		$N_{(0)}^{6-5}$			12
13						1			$-\sqrt{2}$				1	$N_{(0)}^{0-7}$			13

Пример 2.3 [93, с.331]. Определить усилия в стержнях и абсолютные перемещения узлов статически неопределимой фермы (рисунок 2.5)

1 Кинематический анализ $w = 2y - c - c_0 = 2 \cdot 4 - 6 - 3 = 8 - 9 = -1 < 0$,

т.е. ферма геометрически неизменяема и статически неопределима.

2 Разбиваем ферму на 6 стержней и нумеруем узлы. Стрелки на рисунке 2.5 показывают начало и конец каждого стержня.

3 Составляем уравнения равновесия узлов фермы в соответствии с рисунком 2.6. Уравнения равновесия, содержащие реакции внешних связей не рассматриваем.

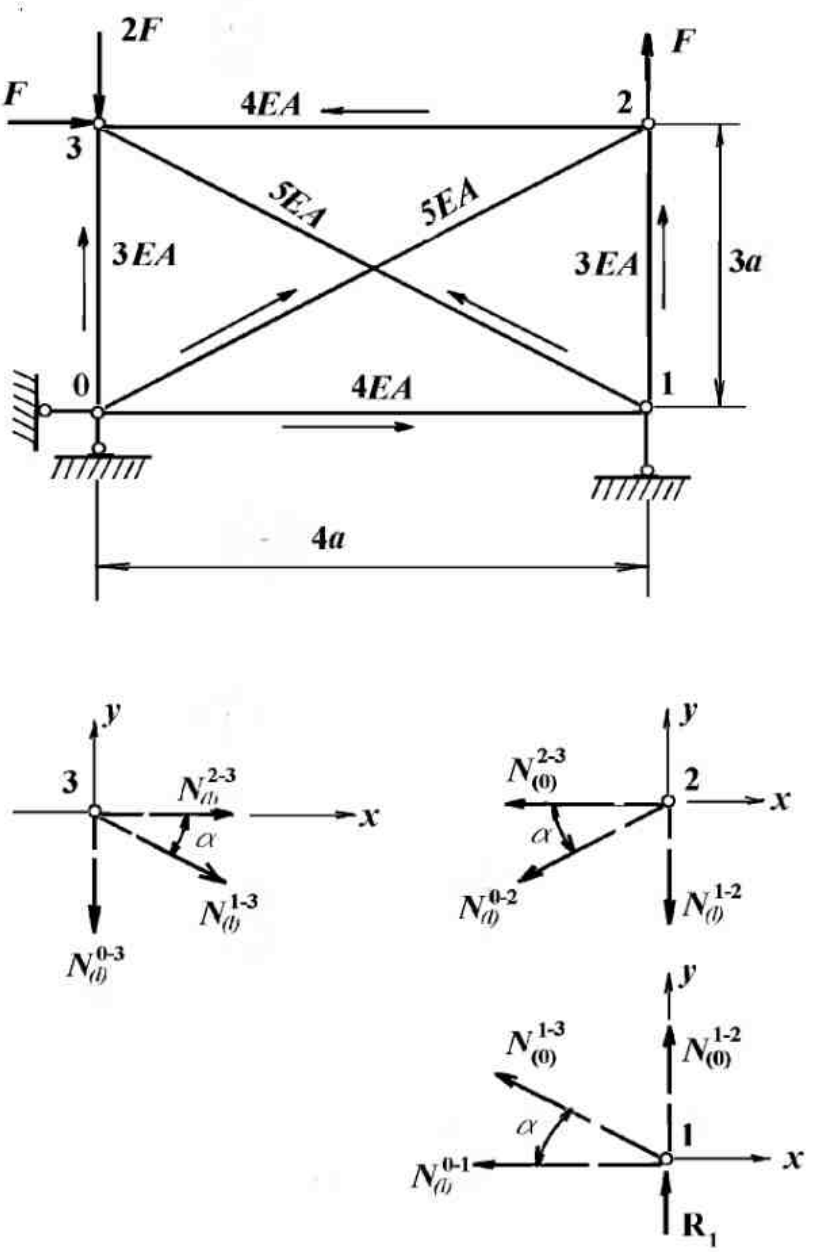


Рисунок 2.6

Узел 1

$$\sum x = 0;\ \ N_{(\ell)}^{0\text{-}1} + N_{(0)}^{1\text{-}3}\cos\alpha = 0 \rightarrow N_{(\ell)}^{0\text{-}1} = -0{,}8N_{(0)}^{1\text{-}3}.$$

Узел 2

$$\sum x = 0;\ \ N_{(\ell)}^{0\text{-}2}\cos\alpha + N_{(0)}^{2\text{-}3} = 0 \rightarrow N_{(\ell)}^{0\text{-}2} = -1{,}25N_{(0)}^{2\text{-}3}.$$

$$\sum y = 0;\ \ N_{(\ell)}^{1\text{-}2} + N_{(\ell)}^{0\text{-}2}\sin\alpha = 0 \rightarrow N_{(\ell)}^{1\text{-}2} = -0{,}6N_{(0)}^{0\text{-}2} = 0{,}75N_{(0)}^{2\text{-}3}.$$

Узел 3

$$\sum x = 0;\ \ N_{(\ell)}^{2\text{-}3} + N_{(\ell)}^{1\text{-}3}\cos\alpha = 0 \rightarrow N_{(\ell)}^{2\text{-}3} = -0{,}8N_{(\ell)}^{1\text{-}3}.$$

$$\sum y = 0;\ \ N_{(\ell)}^{0\text{-}3} + N_{(\ell)}^{1\text{-}3}\sin\alpha = 0 \rightarrow N_{(\ell)}^{0\text{-}3} = -0{,}6N_{(\ell)}^{1\text{-}3} = 0{,}75\,N_{(\ell)}^{2\text{-}3}.$$

Уравнения совместности перемещений узлов 1, 2, 3 составляем исходя из деформированного состояния фермы по рисунку 2.7, которое выбрано как отвечающее заданной нагрузке.

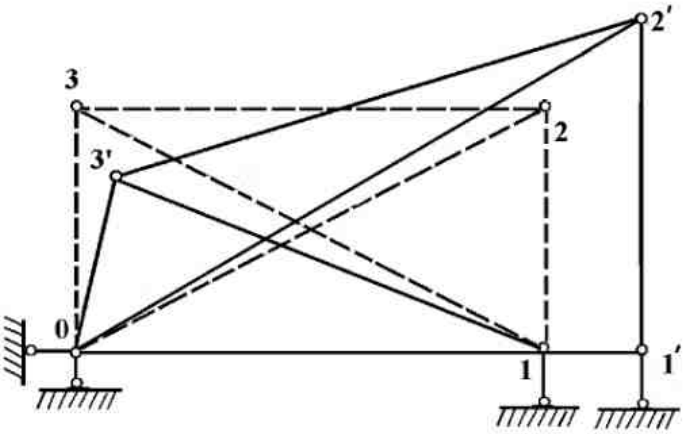


Рисунок 2.7

Положения узлов фермы после деформирования изобразим отдельными схемами (рисунок 2.8).

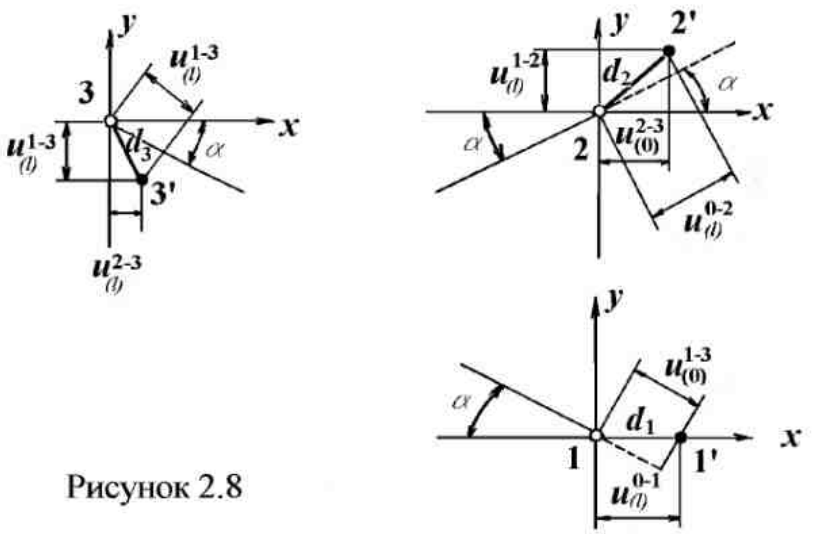


Рисунок 2.8

Узел 1

$$u_{(0)}^{1-3} = -u_{(\ell)}^{0-1}\cos\alpha \rightarrow u_{(\ell)}^{0-1} = -1{,}25\,u_{(0)}^{1-3}$$

Узел 2

$$u_{(\ell)}^{1-2}\sin\alpha - u_{(0)}^{2-3}\cos\alpha = u_{(\ell)}^{0-2} \rightarrow u_{(\ell)}^{0-2} = 0{,}6u_{(\ell)}^{0-3} + 0{,}8\,u_{(\ell)}^{2-3}$$

Узел 3

$$u_{(\ell)}^{0-3}\sin\alpha + u_{(\ell)}^{2-3}\cos\alpha = u_{(\ell)}^{1-3} \rightarrow u_{(\ell)}^{1-3} = 0{,}6u_{(\ell)}^{0-3} - 0{,}8\,u_{(0)}^{2-3}$$

Горизонтальную силу F включаем в нагрузку стержня 2-3, вертикальную силу F - в нагрузку стержня 1-2 и $2F$ - в нагрузку стержня 0-3.

Принимая $F = a = 1$, формируем матрицы МГЭ

$$\boldsymbol{X}_* = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4EAu_{(0)}^{0-1} = 0;\ 3EAu_{(\ell)}^{1-2} \\ \hline 2 & N_{(0)}^{0-1} \\ \hline 3 & 5EAu_{(0)}^{0-2} = 0;\ 3EAu_{(\ell)}^{0-3} \\ \hline 4 & N_{(0)}^{0-2} \\ \hline 5 & 3EAu_{(0)}^{0-3} = 0;\ 4EAu_{(\ell)}^{2-3} \\ \hline 6 & N_{(0)}^{0-3} \\ \hline 7 & 3EAu_{(0)}^{1-2} = 0;\ N_{(\ell)}^{1-3} \\ \hline 8 & N_{(0)}^{1-2} \\ \hline 9 & 5EAu_{(0)}^{1-3} \\ \hline 10 & N_{(0)}^{1-3} \\ \hline 11 & 4EAu_{(0)}^{2-3} \\ \hline 12 & N_{(0)}^{2-3} \\ \hline \end{array};\ \boldsymbol{Y} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4EAu_{(\ell)}^{0-1} = -5EAu_{(0)}^{1-3} \\ \hline 2 & N_{(\ell)}^{0-1} = -0{,}8N_{(0)}^{1-3} \\ \hline 3 & 5EAu_{(\ell)}^{0-2} = 3EAu_{(\ell)}^{1-2} - 4EAu_{(0)}^{2-3} \\ \hline 4 & N_{(\ell)}^{0-2} = -1{,}25N_{(0)}^{2-3} \\ \hline 5 & 3EAu_{(\ell)}^{0-3} \\ \hline 6 & N_{(\ell)}^{0-3} = -0{,}6N_{(\ell)}^{1-3} \\ \hline 7 & 3EAu_{(\ell)}^{1-2} \\ \hline 8 & N_{(\ell)}^{1-2} = 0{,}75N_{(0)}^{2-3} \\ \hline 9 & 5EAu_{(\ell)}^{1-3} = 3EAu_{(\ell)}^{0-3} + 4EAu_{(\ell)}^{2-3} \\ \hline 10 & N_{(\ell)}^{1-3} \\ \hline 11 & 4EAu_{(\ell)}^{2-3} \\ \hline 12 & N_{(\ell)}^{2-3} = -0{,}8N_{(\ell)}^{1-3} \\ \hline \end{array};\ \boldsymbol{B} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline 5 & \\ \hline 6 & -2 \\ \hline 7 & \\ \hline 8 & 1 \\ \hline 9 & \\ \hline 10 & \\ \hline 11 & \\ \hline 12 & -1 \\ \hline \end{array}$$

В матрицу $\boldsymbol{X}_*$ переносим независимые параметры 5, 7, 10 и 11 строк вектора $\boldsymbol{Y}$, остальные параметры переносим по уравнениям их связи. Топологическая матрица С и разрешающая система уравнений МГЭ данной фермы принимает вид

C=

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1									1			
2										0,8		
3	-1										1	
4												1,25
5			-1									
6							0,6					
7	-1											
8												-3/4
9			-1		-1							
10							-1					
11					-1							
12							0,8					

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
1		4							1				$3EAu_{(\ell)}^{1-2}$			9
2		1								**0,8**			$N_{(0)}^{0-1}$			2
3	-1			5							1		$3EAu_{(\ell)}^{0-3}$			4
4				1								**1,25**	$N_{(0)}^{0-2}$			12
5			-1			3							$4EAu_{(\ell)}^{2-3}$			3
6						1	**0,6**						$N_{(0)}^{0-3}$	=	-2	6
7	-1							3					$N_{(\ell)}^{1-3}$			1
8								1				**-3/4**	$N_{(0)}^{1-2}$		1	8
9			-1		-1				1	5			$5EAu_{(0)}^{1-3}$			5
10							-1			1			$N_{(0)}^{1-3}$			10
11					-1						1	4	$4EAu_{(0)}^{2-3}$			11
12							**0,8**					1	$N_{(0)}^{2-3}$		-1	7

4 Переставив строки матриц $\boldsymbol{A}_*$ и $\boldsymbol{B}$, как показано цифрами справа, методом Гаусса определяем значения граничных параметров, которые совпадают с результатами смешанного метода [93]

$$N^{0-1} = 0{,}620F; \quad N^{1-2} = 0{,}715F; \quad N^{2-3} = -0{,}380F; \quad N^{0-3} = -1{,}535F;$$

$$N^{1-3} = -0{,}775\,F; \quad N^{0-2} = 0{,}475\,F; \quad d_1 = 0{,}620\frac{Fa}{EA}; \quad d_2 = 0{,}717\frac{Fa}{EA};$$

$$d_3 = 1{,}596\frac{Fa}{EA}.$$

Сравнение МГЭ с алгоритмом смешанного метода показывает, что логика формирования разрешающей системы уравнений МГЭ более простая и требует составления одной матрицы коэффициентов $\mathbf{A}_*$, а в смешанном методе матрица коэффициентов формируется из двух матриц. Отметим также, что заполненность матрицы $\mathbf{A}_*$ МГЭ для данного примера равна 19,4 %, в смешанном методе – 21,5 %. После прямого хода метода Гаусса заполненность матрицы МГЭ уменьшается (18%), а заполненность матрицы смешанного метода увеличивается (22,3%). Учитывая, что по МГЭ определяются начальные параметры, а по смешанному методу – узловые усилия и перемещения, можно считать, что трудоемкость расчета ферм по МГЭ будет меньше, чем по смешанному методу.

Для расчета пространственных ферм также можно использовать уравнение (2.4), но уравнения равновесия и совместности перемещений узлов нужно составлять для пространственного случая работы элементов фермы.

2.4.3 Кручение тонкостенных неразрезных балок и рам

К числу простых видов сопротивлений, имеющих важное практическое значение, относится кручение. Рассмотрим примеры расчета тонкостенных неразрезных балок и рам только на один вид сопротивления – стесненное кручение.

Пример 2.4 [46,с.313]. Определить напряженно-деформированное состояние неразрезной тонкостенной балки открытого профиля при следующих данных: сечение балки по всей длине – двутавр №60^{a}, к = 0,7427 1/м (рисунок 2.9). Для формирования разрешающего уравнения используем уравнения (2.20) и выражения (2.21).

1 Разбиваем балку на 3 стержня и нумеруем узлы. Стрелками указаны начало и конец каждого элемента.

2 Составляем матричное уравнение типа (1.40). Условные уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1, 2 в соответствии с аналогией (2.18) приведены в матрице **Y**. Уравнения для изгибно-крутящих моментов $M_\omega(x)$ не используются, так как уравнения равновесия их аналогов $Q(x)$ содержат неизвестные реакции опор 1 и 2. Матрицы $\boldsymbol{X}_*$, **Y, B** примут вид

$\boldsymbol{X}_*=$

1	$GI_k\theta_{(0)}^{0-1}=0;\ M_\omega^{0-1}(\ell)$
2	$GI_k\theta'^{0-1}_{(0)}=0;\ M_\omega^{1-2}(\ell)$
3	$B_\omega^{0-1}(0)$
4	$M_\omega^{0-1}(0)$
5	$GI_k\theta_{(0)}^{1-2}=0;GI_k\theta_{(\ell)}^{2-3}$
6	$GI_k\theta'^{1-2}_{(0)}$
7	$B_\omega^{1-2}(0)$
8	$M_\omega^{1-2}(0)$
9	$GI_k\theta_{(0)}^{2-3}=0;GI_k\theta'^{2-3}_{(\ell)}$
10	$GI_k\theta'^{2-3}_{(0)}$
11	$B_\omega^{2-3}(0)$
12	$M_\omega^{2-3}(0)$

; **Y=**

1	$GI_k\theta_{(\ell)}^{0-1}=0$
2	$GI_k\theta'^{0-1}_{(\ell)}=GI_k\theta'^{1-2}_{(0)}$
3	$B_\omega^{0-1}(\ell)=B_\omega^{1-2}(0)$
4	$M_\omega^{0-1}(\ell)$
5	$GI_k\theta_{(\ell)}^{1-2}=0$
6	$GI_k\theta'^{1-2}_{(\ell)}=GI_k\theta'^{2-3}_{(0)}$
7	$B_\omega^{1-2}(\ell)=B_\omega^{2-3}(0)$
8	$M_\omega^{1-2}(\ell)$
9	$GI_k\theta_{(\ell)}^{2-3}$
10	$GI_k\theta'^{2-3}_{(\ell)}$
11	$B_\omega^{2-3}(\ell)=0$
12	$L_{(\ell)}^{2-3}=0\rightarrow M_\omega^{2-3}(\ell)=$ $=-GI_k\theta'^{2-3}_{(\ell)}$

; **B=**

1	-311,1324
2	-248,1873
3	343,1324
4	256,1873
5	-10,1646
6	-11,8239
7	19,7646
8	15,0239
9	
10	
11	1,0000
12	

где элементы вектора нагрузки **B** определены по формулам (2.21) при m = -1,00 кН; $M_{кр}$ = - 3,20 кНм; B_ω= - 1,00 кНм^2; $l^{0\text{-}1}$= 8 м; $l^{1\text{-}2}$= 6 м; $l^{2\text{-}3}$= 2 м; a_1 =3 м; a_2 = 0 м; a_3 = 8 м; a_4 = (2 - 0) м.

В матрице $\boldsymbol{X}_*$ нулевыми оказались 1, 2, 5 и 9 строки. Соответственно обнуляем 1, 2, 5 и 9 столбцы матрицы **A**. Топологическая матрица **C** и разрешающее уравнение МГЭ для балки примет вид:

C=

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2						-1						
3							-1					
4	-1											
5												
6										-1		
7											-1	
8		-1										
9					-1							
10									-1			
11												
12									1			

;

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$									$M_\omega^{0-1}(\ell)$	$-B_{11}^{0-1}$	3
2			$-A_{23}$	$-A_{13}$		-1							$M_\omega^{1-2}(\ell)$	$-B_{21}^{0-1}$	6
3			A_{33}	A_{34}			-1						$B_\omega^{0-1}(0)$	B_{31}^{0-1}	4
4	-1		A_{23}	A_{33}									$M_\omega^{0-1}(0)$	B_{41}^{0-1}	1
5						6	$-A_{13}$	$-A_{14}$					$GI_k\theta_{(\ell)}^{2-3}$	$-B_{11}^{1-2}$	7
6						1	$-A_{23}$	$-A_{13}$		-1			$GI_k\theta_{(0)}'^{1-2}$	$-B_{21}^{1-2}$	10
7							A_{33}	A_{34}			-1		$B_\omega^{1-2}(0)$	B_{31}^{1-2}	8
8		-1					A_{23}	A_{33}					$M_\omega^{1-2}(0)$	B_{41}^{1-2}	2
9					-1					2	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$GI_k\theta_{(\ell)}'^{2-3}$		5
10									-1	1	$-A_{23}$	$-A_{13}$	$GI_k\theta_{(0)}'^{2-3}$		9
11											A_{33}	A_{34}	$B_\omega^{2-3}(0)$	B_{31}^{2-3}	11
12									1		A_{23}	A_{33}	$M_\omega^{2-3}(0)$		12

=

3 Переставляя строки матриц $\boldsymbol{A}_*$, $\boldsymbol{B}$ в новом порядке, как показано цифрами справа, методом Гаусса получаем значения граничных параметров

$M_\omega^{0-1}(\ell) = 3{,}4004$ кНм; $M_\omega^{1-2}(\ell) = 0{,}9276$ кНм; $B_\omega^{0-1}(0) = 3{,}7593$ кНм^2;

$M_\omega^{0-1}(0) = -4{,}1205$ кНм; $GI_k\theta_{(\ell)}^{2-3} = -0{,}1454$ кНм^2; $GI_k\theta_{(0)}'^{1-2} = 0{,}4789$ кНм;

$B_\omega^{1-2}(0) = 2{,}7948$ кНм^2; $M_\omega^{1-2}(0) = -2{,}4023$ кНм; $GI_k\theta_{(\ell)}'^{2-3} = -0{,}5199$ кНм;

$GI_k\theta_{(0)}'^{2-3} = 0{,}3490$ кНм; $B_\omega^{2-3}(0) = 0{,}8548$ кНм^2; $M_\omega^{2-3}(0) = -0{,}3490$ кНм.

Значения бимоментов совпадают с результатами работы [46], полученными методом трех бимоментов (методом сил). Решение данной и других краевых задач может быть выполнено по программе в среде программирования Visual Fortran, приведенной в Приложении №1. Для упрощения программ матрицы $\boldsymbol{A}_*$, $\boldsymbol{B}$ вводятся с помощью операторов присваивания.

4 Для определения напряженно-деформированного состояния балки используем уравнение (2.20), куда подставляем найденные значения начальных параметров:

стержень 0 - 1

$$\begin{bmatrix} GI_k\theta^{0-1}_{(x)} \\ GI_k\theta'^{0-1}_{(x)} \\ B^{0-1}_{\omega}(x) \\ M^{0-1}_{\omega}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & -A_{13} & -A_{14} & 0{,}0 \\ & 1 & -A_{23} & -A_{13} & 0{,}0 \\ & & A_{33} & A_{34} & 3{,}7593 \\ & & A_{23} & A_{33} & -4{,}1205 \end{bmatrix} + (-1{,}0) \begin{bmatrix} (2chkx - 2 - k^2x^2)/2k^2 \\ (shkx - kx)/k \\ -(chkx - 1)/k^2 \\ -shkx/k \end{bmatrix};$$

стержень 1 - 2

$$\begin{bmatrix} GI_k\theta^{1-2}_{(x)} \\ GI_k\theta'^{1-2}_{(x)} \\ B^{1-2}_{\omega}(x) \\ M^{1-2}_{\omega}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & -A_{13} & -A_{14} & 0{,}0 \\ & 1 & -A_{23} & -A_{13} & 0{,}4789 \\ & & A_{33} & A_{34} & 2{,}7948 \\ & & A_{23} & A_{33} & -2{,}4023 \end{bmatrix} + (-3{,}2) \begin{bmatrix} [shk(x-3)_+ - k(x-3)_+]/k \\ chk(x-3)_+ - H(x-3) \\ -shk(x-3)_+/k \\ -chk(x-3)_+ \end{bmatrix}$$

стержень 2 – 3

$$\begin{bmatrix} GI_k\theta^{2-3}_{(x)} \\ GI_k\theta'^{2-3}_{(x)} \\ B^{2-3}_{\omega}(x) \\ M^{2-3}_{\omega}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & -A_{13} & -A_{14} & 0{,}0 \\ & 1 & -A_{23} & -A_{13} & 0{,}3490 \\ & & A_{33} & A_{34} & 0{,}8548 \\ & & A_{23} & A_{33} & -0{,}3490 \end{bmatrix} + (-1{,}0) \begin{bmatrix} chk(x-2)_+ - H(x-2) \\ kshk(x-2)_+ \\ -chk(x-2)_+ \\ -kshk(x-2)_+ \end{bmatrix}.$$

Результаты вычислений параметров балки по этим уравнениям сведены в таблицу 2.2. Эпюры напряженно-деформированного состояния изображены на рисунке 2.9.

Таблица 2.2

Глобальная координата x, м	Локальная координата x, м	Значения параметров				
		Угол закручивания $GI_k\theta(x)$, кНм^2	Производная $GI_k\theta'(x)$, кНм	Бимомент $B_\omega(x)$, кНм^2	Изгибно-крутящий момент $M_\omega(x)$, кНм	Крутящий момент внешних сил $L(x)$. кНм
0,0	0,0	0,0	0,0	3,7593	-4,1205	-4,1205
2,0	2,0	-1,9810	-1,2251	-0,5007	-0,8953	-2,1204
4,0	4,0	-3,4305	-0,0837	-1,2924	-0,0368	-0,1205
6,0	6,0	-2,2556	1,1550	-0,7084	0,7244	1,8794
8,0-0	8,0-0	0,0	0,4789	2,7948	3,4004	3,8794
8,0+0	0,0	0,0	0,4789	2,7948	-2,4023	-1,9233
9,5	1,5	-1,1309	-0,6908	0,3201	-1,2325	-1,9233
11,0-0	3,0-0	-1,2589	-0,1662	-1,7161	-1,7570	-1,9233
11,0+0	3,0+0	-1,2589	-0,1662	-1,7161	1,4429	1,2766
12,5	4,5	-0,8049	0,5742	-0,2552	0,7024	1,2766
14,0-0	6,0-0	0,0	0,3490	0,8548	0,9276	1,2766
14,0+0	0,0	0,0	0,3490	0,8548	-0,3490	0,0
15,0	1,0	0,1351	-0,0663	0,7196	0,0663	0,0
16,0-0	2,0-0	-0,1454	-0,5199	1,0000	0,5199	0,0

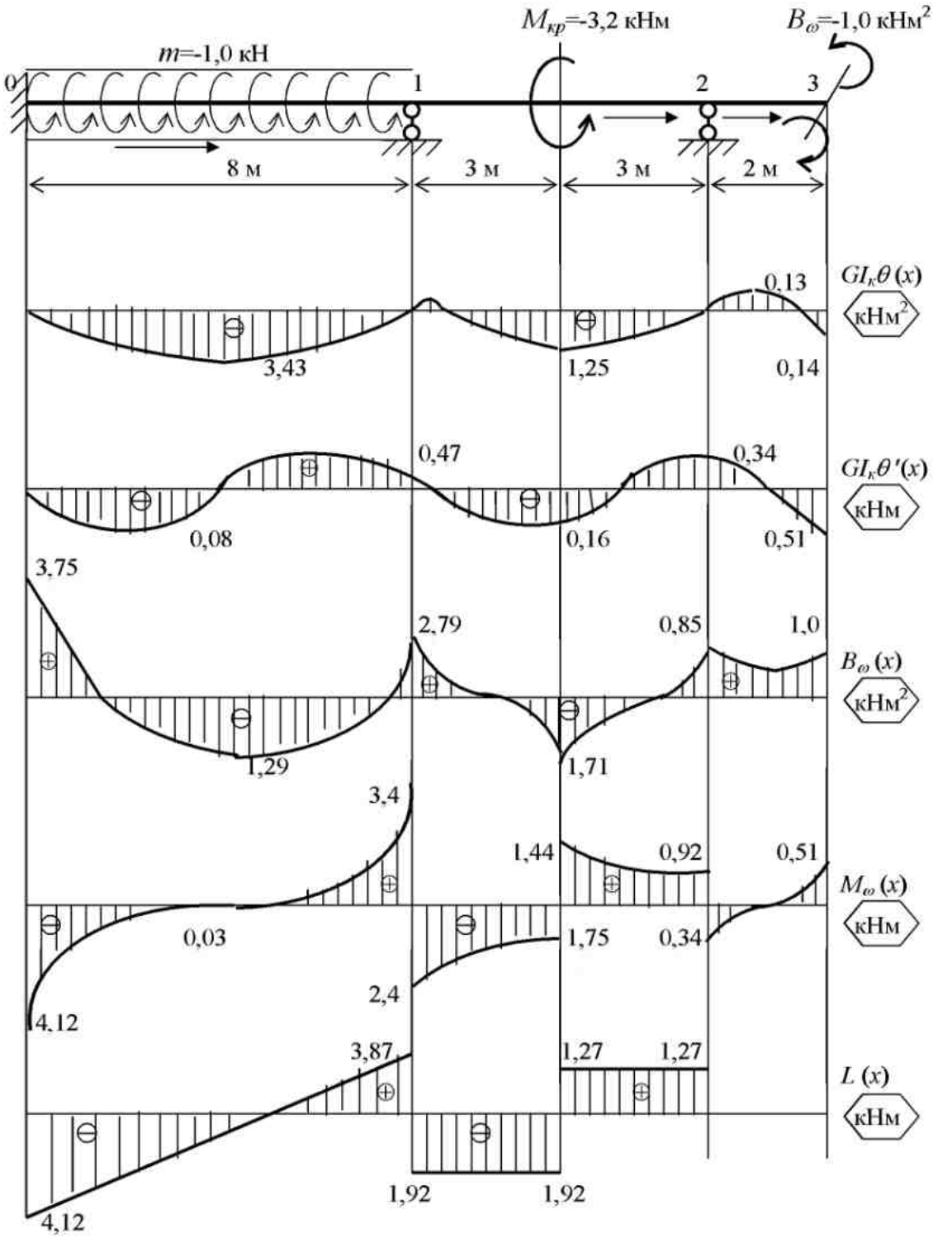


Рисунок 2.9

Выше отмечалось, что порядок системы уравнений МГЭ (1.46) определяется числом стержней и не зависит от условий опирания.

Подтверждением этому является следующий пример.

Пример 2.5 [131, с.88]. Определить напряженно-деформированное состояние неразрезной балки с жестким защемлением граничных сечений (рисунок 2.10), у которой сечение – прокатный швеллер №33^{б}; κ =1,404 1/м. У данной балки изменится топологическая матрица **C**, а порядок системы уравнений останется равным 12. Выполняя соответствующие процедуры, будем иметь

C=

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2						-1						
3							-1					
4	-1											
5												
6										-1		
7											-1	
8		-1										
9												
10												
11					-1							
12									-1			

;

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$									$M_{\omega}^{0-1}(\ell)$	1,0276	4
2			$-A_{23}$	$-A_{13}$		-1							$M_{\omega}^{1-2}(\ell)$	2,3291	6
3			A_{33}	A_{34}			-1						$B_{\omega}^{0-1}(0)$	-4,3911	3
4	-1		A_{23}	A_{33}									$M_{\omega}^{0-1}(0)$	-6,9567	1
5						4	$-A_{13}$	$-A_{14}$					$B_{\omega}^{2-3}(\ell)$	36,7162	8
6						1	$-A_{23}$	$-A_{13}$		-1			$GI_k\theta'^{1-2}_{(0)}$	56,3146	7
7							A_{33}	A_{34}			-1		$B_{\omega}^{1-2}(0)$	-81,8375	11
8		-1					A_{23}	A_{33}					$M_{\omega}^{1-2}(0)$	-115,7391	2
9										2	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$M_{\omega}^{2-3}(\ell)$	1,0276	12
10										1	$-A_{23}$	$-A_{13}$	$GI_k\theta'^{2-3}_{(0)}$	2,3291	10
11					-1						A_{33}	A_{34}	$B_{\omega}^{2-3}(0)$	-4,3911	5
12									-1		A_{23}	A_{33}	$M_{\omega}^{2-3}(0)$	-6,9567	9

Переставляя строки матриц **A**, **B**, как показано цифрами справа, методом Гаусса определяем граничные параметры:

$M_{\omega}^{0-1}(\ell)$ = 0,9558 кНм; $M_{\omega}^{1-2}(\ell)$ = 1,0082 кНм; $B_{\omega}^{0-1}(0)$ = 0,0908 кНм^2;

$M_{\omega}^{0-1}(0)$ = - 0,4359 кНм; $B_{\omega}^{2-3}(\ell)$ = 0,0908 кНм^2; $GI_k\theta'^{1-2}_{(0)}$ = -0,1917 кНм;

$B_{\omega}^{1-2}(0)$ = 0,4189 кНм^2; $M_{\omega}^{1-2}(0)$ = - 1,0082 кНм; $M_{\omega}^{2-3}(\ell)$ = 0,4359 кНм;

$GI_k\theta'^{2-3}_{(0)}$ = 0,1917 кНм; $B_{\omega}^{2-3}(0)$ = 0,4189 кНм^2; $M_{\omega}^{2-3}(0)$ = - 0,9558 кНм.

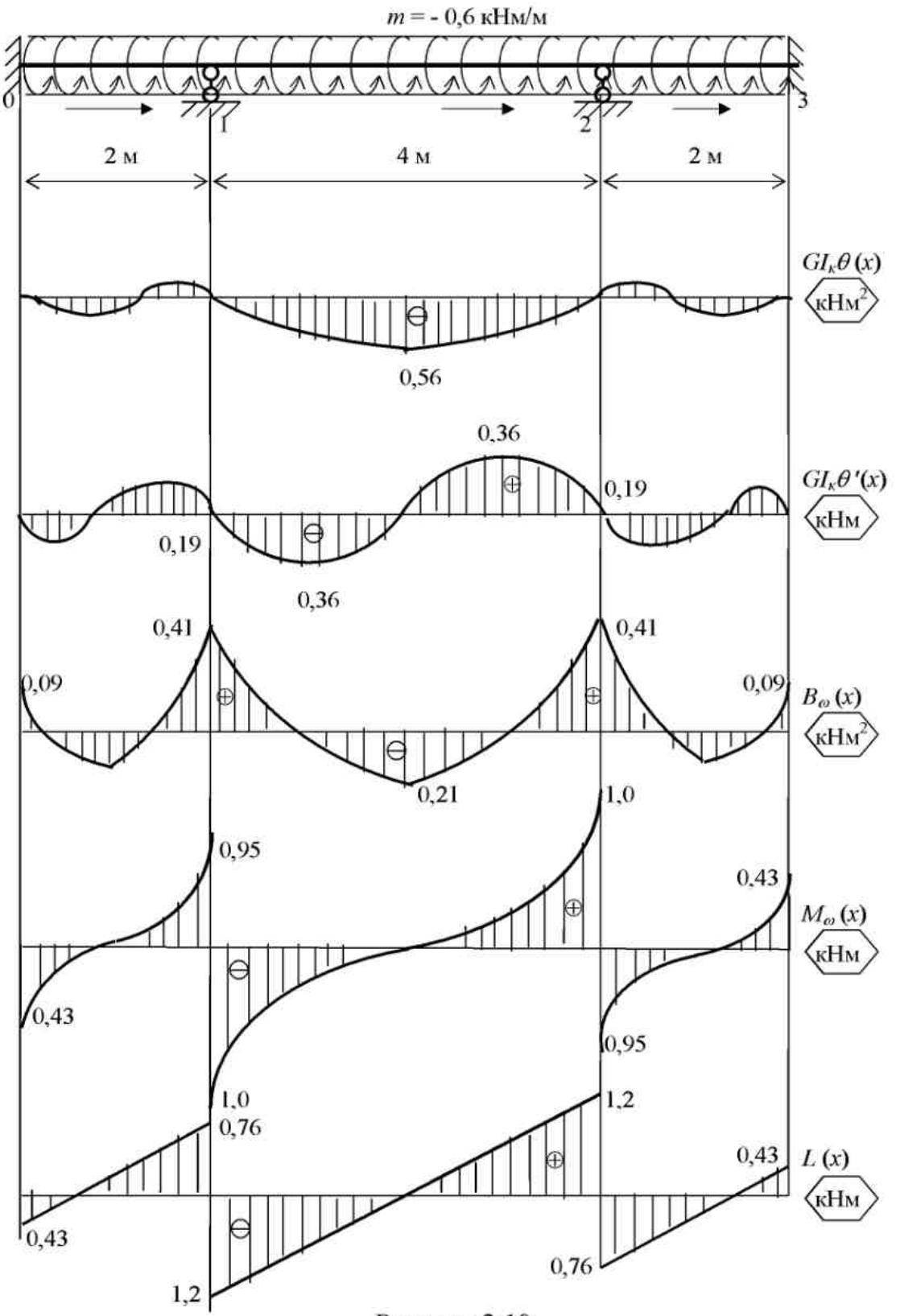

m = - 0,6 кНм/м
0
1
2
3
2 м
4 м
2 м
GIκθ (x)
кНм2
0,56
0,36
GIκθ '(x)
кНм
0,19
0,19
0,36
0,41
0,41
0,09
0,09
Bω (x)
кНм2
0,21
1,0
0,95
0,43
Mω (x)
кНм
0,43
0,95
1,0
1,2
0,76
0,43
L (x)
кНм
0,43
0,76
1,2

Рисунок 2.10

Значения бимоментов отличаются на 10% от результатов работы [131], полученных методом узловых депланаций (методом перемещений). Результаты расчета напряженно-деформированного состояния стержней во внутренних точках сведены в таблицу 2.3.

Таблица 2.3

Глобальная координата x, м	Локальная координата x, м	Значения параметров				
		Угол закручивания $GI_k\theta(x)$, кНм^2	Производная $GI_k\theta'(x)$, кНм	Бимомент $B_\omega(x)$, кНм^2	Изгибно-крутящий момент $M_\omega(x)$, кНм	Крутящий момент внешних сил $L(x)$, кНм
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0908	-0,4359	-0,4359
0,5	0,5	-0,0080	-0,0103	-0,0440	-0,1255	
1,0	1,0	0,0001	0,0436	-0,0452	0,1204	
1,5	1,5	0,0254	0,0358	0,0865	0,4282	
2,0	2,0	0,0	-0,1917	0,4189	0,9558 -1,0082	0,7640 -1,2000
3,0	1,0	-0,3643	-0,3664	-0,1166	-0,2335	
4,0	2,0	-0,5635	0,0	-0,2174	0,0	
6,0	4,0	0,0	0,1917	0,4189	1,0082 -0,9558	1,2000 -0,7640
6,5	0,5	0,0254	-0,0358	0,0865	-0,4282	
7,0	1,0	0,0001	-0,0436	-0,0452	-0,1204	
7,5	1,5	-0,0080	0,0103	-0,0440	0,12	
8,0	2,0	0,0	0,0	0,0908	0,4359	0,4359

Эпюры состояния неразрезной балки представлены на рисунке 2.10. Из эпюры $L(x)$ следует, что сумма опорных крутящих моментов точно равна равнодействующему крутящему моменту внешней нагрузки, т.е. решение по МГЭ данной балки является точным.

Рассмотрим пример расчета на кручение тонкостенной рамы.

Пример 2.6 [131, с.78]. Определить напряженно-деформированное состояние Г-образной рамы (рисунок 2.11) при κ =1 1/м.

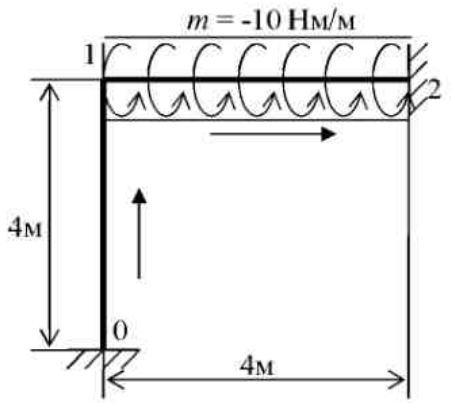


Рисунок 2.11

Рама нагружена распределенным крутящим моментом m = -10 Нм/м , который вызывает угол закручивания в узле 1. Вследствие этого возникает кроме кручения еще и деформация изгиба, которой пренебрегаем. В этом случае расчетом получатся завышенные параметры кручения по сравнению с их действительными значениями.

1 Разбиваем раму на 2 стержня, нумеруем узлы, стрелками обозначаем начало и конец каждого элемента.

2 Формируем матрицы уравнения (1.46).

X*=

1	$GI_k\theta_{(0)}^{0-1}=0;\ M_\omega^{0-1}(\ell)$
2	$GI_k\theta_{(0)}'^{0-1}=0;\ B_\omega^{1-2}(\ell)$
3	$B_\omega^{0-1}(0)$
4	$M_\omega^{0-1}(0)$
5	$GI_k\theta_{(0)}^{1-2}=0;\ M_\omega^{1-2}(\ell)$
6	$GI_k\theta_{(0)}'^{1-2}$
7	$B_\omega^{1-2}(0)$
8	$M_\omega^{1-2}(0)$

; Y=

1	$GI_k\theta_{(\ell)}^{0-1}=0$
2	$GI_k\theta_{(\ell)}'^{0-1}=GI_k\theta_{(0)}'^{1-2}$
3	$B_\omega^{0-1}(\ell)=B_\omega^{1-2}(0)$
4	$M_\omega^{0-1}(\ell)$
5	$GI_k\theta_{(\ell)}^{1-2}=0$
6	$GI_k\theta_{(\ell)}'^{1-2}=0$
7	$B_\omega^{1-2}(\ell)$
8	$M_\omega^{1-2}(\ell)$

; B=

1	
2	
3	
4	
5	-183,082
6	-232,899
7	263,082
8	272,899

	1	2	3	4	5	6	7	8			
1			-A13	-A14					$M_\omega^{0-1}(\ell)$		4
2			-A23	-A13		-1			$B_\omega^{1-2}(\ell)$		6
3			A33	A34			-1		$B_\omega^{0-1}(0)$		3
4	-1		A23	A33					$M_\omega^{0-1}(0)$		1
5						4	-A13	-A14	$M_\omega^{1-2}(\ell)$	183,082	7
6						1	-A23	-A13	$GI_k\theta_{(0)}'^{1-2}$	232,899	8
7		-1					A33	A34	$B_\omega^{1-2}(0)$	-263,082	2
8					-1		A23	A33	$M_\omega^{1-2}(0)$	-272,899	5

3 Переставив строки матриц, как показано цифрами справа, методом Гаусса получаем значения граничных параметров:

$M_\omega^{0-1}(\ell)=5{,}401$ Нм; $B_\omega^{1-2}(\ell)=12{,}273$ Нм^2; $B_\omega^{0-1}(0)=-1{,}528$ Нм^2;

$M_\omega^{0-1}(0)=1{,}725$ Нм; $M_\omega^{1-2}(\ell)=21{,}725$ Нм; $GI_k\theta_{(0)}'^{1-2}=-3{,}708$ Нм;

$B_\omega^{1-2}(0)=5{,}373$ Нм^2; $M_\omega^{1-2}(0)=-14{,}567$ Нм.

Значения бимоментов совпадают с результатами работы [131], полученными методом сил.

4 Напряженно-деформированное состояние элементов рамы определяем по уравнению (2.20), задавая различные значения аргумента x.

Эпюры состояния рамы представлены на рисунке 2.12.

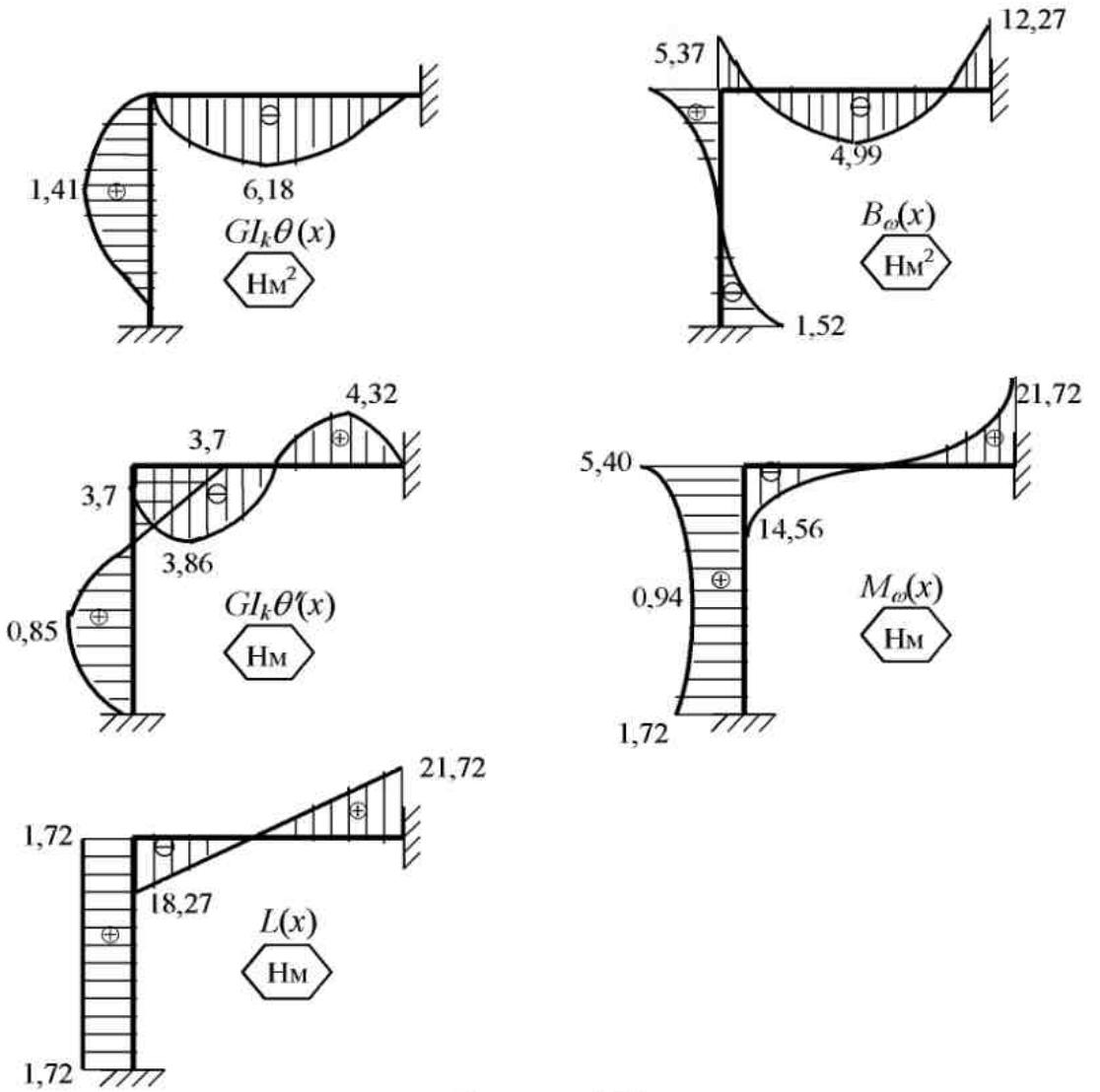


Рисунок 2.12

Приведенные примеры характерны использованием гиперболических функций для описания перемещений и усилий в упругих системах. Как видно, МГЭ позволяет получать точные решения задач статики при минимально возможной дискретизации расчетной схемы. Отметим, что, если фундаментальные функции отличны от полиномов, то МКЭ не дает точных решений задач [184]. Повышение точности расчетов по МКЭ достигается либо дроблением сетки КЭ (этот путь приводит к увеличению порядка разрешающей системы уравнений), либо применением точных матриц жесткости, что не всегда возможно.

Добавим также, что между аналитическим вариантом МГЭ и МКЭ существует непосредственная связь. Из уравнения МГЭ (2.23) следуют все элементы матрицы жесткости пространственного случая деформирования стержня при единичных линейных и угловых перемещениях граничных точек. Таким же образом можно формировать матрицу жесткости не только стержней, но и пластин, и оболочек.

2.4.4 Неразрезные балки и плоские рамы

Рассмотрим расчет плоских стержневых систем на действие изгиба. В этом случае необходимо применять уравнение (2.11).

Пример 2.7 [305, с.175]. Определить напряженно-деформированное состояние неразрезной балки постоянного сечения (рисунок 2.13).

1 Разбиваем балку на 4 стержня и нумеруем узлы, стрелками указываем начало и конец каждого стержня.

2 Формируем матричное уравнение типа (1.40). Уравнение равновесия и совместности перемещений узлов 1, 2, 3 представлены в матрице ***Y***. Уравнения равновесия для поперечных сил $Q(x)$ не используются, так как они содержат неизвестные реакции опор 1, 2, 3. Элементы вектора нагрузки ***B*** определены по формулам (2.13). В матрице $\boldsymbol{X}_*$ нулевыми оказались 1, 2,5, 9, 13 строки. Соответственно обнуляем 1, 2,5, 9 и 13 столбцы матрицы ***A***. Выполнив перенос независимых и зависимых параметров из матрицы ***Y***, получаем топологическую матрицу ***C*** и разрешающее уравнение МГЭ, которые представлены ниже.

$\boldsymbol{X}_*=$

1	$EI\,v_{(0)}^{0-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{0-1}$
2	$EI\,\varphi_{(0)}^{0-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{1-2}$
3	$M_{(0)}^{0-1}$
4	$Q_{(0)}^{0-1}$
5	$EI\,v_{(0)}^{1-2}=0;\ Q_{(\ell)}^{2-3}$
6	$EI\,\varphi_{(0)}^{1-2}$
7	$M_{(0)}^{1-2}$
8	$Q_{(0)}^{1-2}$
9	$EI\,v_{(0)}^{2-3}=0;\ EI\,v_{(\ell)}^{3-4}$
10	$EI\,\varphi_{(0)}^{2-3}$
11	$M_{(0)}^{2-3}$
12	$Q_{(0)}^{2-3}$
13	$EI\,v_{(0)}^{3-4}=0;\ EI\,\varphi_{(\ell)}^{3-4}$
14	$EI\,\varphi_{(0)}^{3-4}$
15	$M_{(0)}^{3-4}$
16	$Q_{(0)}^{3-4}$

$\boldsymbol{Y}=$

1	$EI\,v_{(\ell)}^{0-1}=0$
2	$EI\,\varphi_{(\ell)}^{0-1}=EI\,\varphi_{(0)}^{1-2}$
3	$M_{(\ell)}^{0-1}=M_{(0)}^{1-2}$
4	$Q_{(\ell)}^{0-1}$
5	$EI\,v_{(\ell)}^{1-2}=0$
6	$EI\,\varphi_{(\ell)}^{1-2}=EI\,\varphi_{(0)}^{2-3}$
7	$M_{(\ell)}^{1-2}=M_{(0)}^{2-3}$
8	$Q_{(\ell)}^{1-2}$
9	$EI\,v_{(\ell)}^{2-3}=0$
10	$EI\,\varphi_{(\ell)}^{2-3}=EI\,\varphi_{(0)}^{3-4}$
11	$M_{(\ell)}^{2-3}=M_{(0)}^{3-4}$
12	$Q_{(\ell)}^{2-3}$
13	$EI\,v_{(\ell)}^{3-4}$
14	$EI\,\varphi_{(\ell)}^{3-4}$
15	$M_{(\ell)}^{3-4}=0$
16	$Q_{(\ell)}^{3-4}=0$

$\boldsymbol{B}=$

1	256/6
2	32,0
3	-16,0
4	-4,0
5	18,0
6	18,0
7	-12,0
8	-4,0
9	108,0
10	72,0
11	-36,0
12	-12,0
13	4/3
14	8/3
15	-4,0
16	-4,0

$C =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1																
2						-1										
3							-1									
4	-1															
5																
6										-1						
7											-1					
8		-1														
9																
10														-1		
11															-1	
12					-1											
13									-1							
14													-1			
15																
16																

3 Переставив строки матриц $\boldsymbol{A}_{\text{э}}$, $\boldsymbol{B}$ в новом порядке, как показано цифрами справа, методом Гаусса определяем граничные параметры неразрезной балки по программе на языке *Pascal* (см. Приложение №1).

$Q_{(\ell)}^{0-1} = -1{,}8125$ кН; $Q_{(\ell)}^{1-2} = -2{,}3333$ кН; $M_{(0)}^{0-1} = -4{,}5000$ кНм;

$Q_{(0)}^{0-1} = 2{,}1875$ кН; $Q_{(\ell)}^{2-3} = -5{,}8333$ кН; $EI\varphi_{(0)}^{1-2} = -2{,}0000$ кНм^2;

$M_{(0)}^{1-2} = -3{,}0000$ кНм; $Q_{(0)}^{1-2} = 1{,}6667$ кН; $EIv_{(\ell)}^{3-4} = -6{,}0000$ кНм^3;

$EI\varphi_{(0)}^{2-3} = 4{,}0000$ кНм^2; $M_{(0)}^{2-3} = -5{,}0000$ кНм; $Q_{(0)}^{2-3} = 6{,}1667$ кН;

$EI\varphi_{(\ell)}^{3-4} = -2{,}3333$ кНм^2; $EI\varphi_{(0)}^{3-4} = -5{,}0000$ кНм^2; $M_{(0)}^{3-4} = -4{,}0000$ кНм;

$Q_{(0)}^{3-4} = 4{,}0000$ кН.

Значения параметров совпадают с результатами работы [305], полученными методами сил и перемещений.

В расчетах этих величин не учитывалась деформация сдвига, поэтому их значения весьма близки к действительным значениям параметров балки.

Определяя состояние конструкции во внутренних точках по уравнению (2.11), строим эпюры, представленные на рисунке 2.13.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16				
1			-32	$\frac{256}{3}$													$M^{0-1}(\ell)$	=	-256/6	3
2			-8	-32		-1											$Q^{0-1}(\ell)$		-32,0	4
3			1	8			-1										$M^{0-1}(0)$		16,0	7
4	-1			1													$Q^{0-1}(0)$		4,0	1
5						6	-18	-36									$Q^{2-3}(\ell)$		-18,0	6
6						1	-6	-18		-1							$EI\varphi^{1-2}(0)$		-18,0	8
7							1	6			-1						$M^{1-2}(0)$		12,0	11
8		-1						1									$Q^{1-2}(0)$		4,0	2
9										6	-18	-36					$EIv^{3-4}(\ell)$		-108,0	10
10										1	-6	-18		-1			$EI\varphi^{2-3}(0)$		-72,0	14
11											1	6			-1		$M^{2-3}(0)$		36,0	12
12					-1							1					$Q^{2-3}(0)$		12,0	5
13									-1					2	-2	-4/3	$EI\varphi^{3-4}(\ell)$		- 4/3	9
14													-1	1	-2	-2	$EI\varphi^{3-4}(0)$		- 8/3	13
15															1	-2	$M^{3-4}(0)$		4,0	15
16																1	$Q^{3-4}(0)$		4,0	16

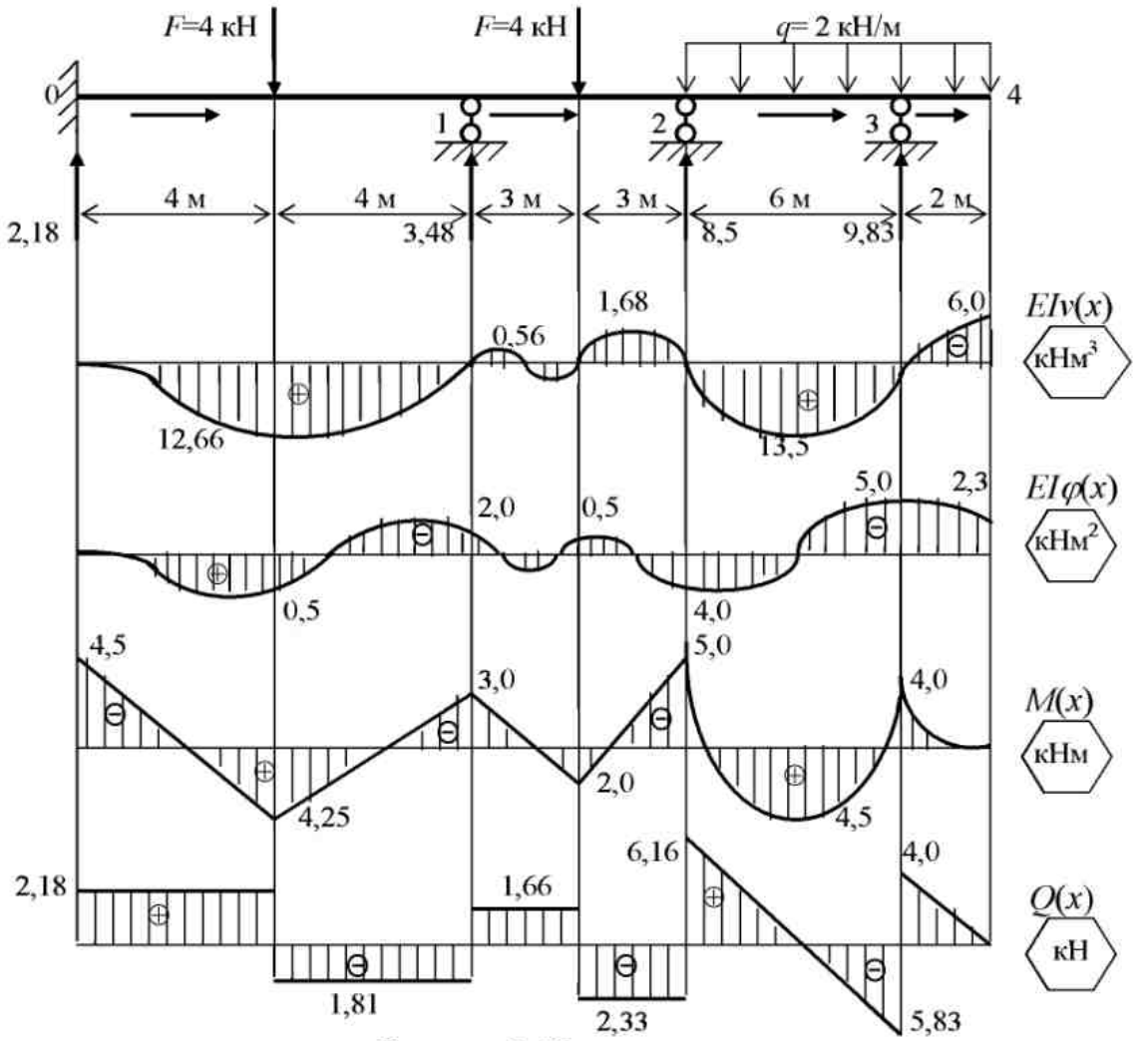


Рисунок 2.13

Пример 2.8 [93, с.249]. Построить эпюры *M, Q, N* симметричной рамы, являющейся несущей конструкцией двухэтажного фабрично-заводского корпуса, от несимметричной нагрузки верхнего ригеля (рисунок 2.14).

Жесткости разных элементов рамы различны. Элементы рамы испытывают изгиб, растяжение-сжатие и сдвиг. Последними двумя сопротивлениями пренебрегаем и для расчета используем только уравнение (2.11). В этом случае значения параметров изгиба будут завышенными по сравнению с их действительными значениями.

1 Разбиваем раму на 6 стержней, нумеруем узлы, стрелками обозначаем начало и конец каждого элемента. Для данной рамы можно составить ориентированный граф расчетной схемы, при котором в каждом узле сходятся не более одной начальной точки.

2 Формируем матричное уравнение МГЭ. Оно будет содержать 24 уравнения. Поскольку используются соотношения только изгиба, то стержни предполагаются нерастяжимыми и несжимаемыми. В соответствии с этими допущениями изображаем деформированное состояние рамы (рисунок 2.15).

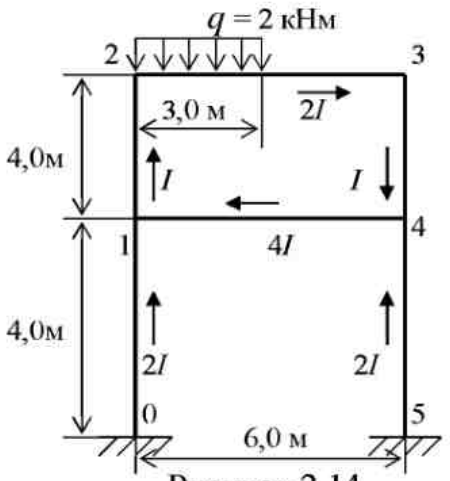


Рисунок 2.14

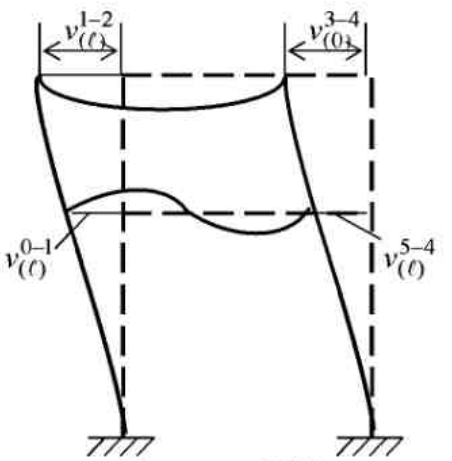


Рисунок 2.15

X =

1	$2EIv^{0-1}(0)=0;\ Q^{0-1}(\ell)$
2	$2EI\varphi^{0-1}(0)=0;\ Q^{2-3}(\ell)$
3	$M^{0-1}(0)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$EIv^{1-2}(0)$
6	$EI\varphi^{1-2}(0)$
7	$M^{1-2}(0)$
8	$Q^{1-2}(0)$
9	$2EIv^{2-3}(0)=0;\ Q^{3-4}(\ell)$
10	$EI\varphi^{2-3}(0)$
11	$M^{2-3}(0)$
12	$Q^{2-3}(0)$
13	$EIv^{3-4}(0)$
14	$EI\varphi^{3-4}(0)$
15	$M^{3-4}(0)$
16	$Q^{3-4}(0)$
17	$4EIv^{4-1}(0)=0;\ M^{4-1}(\ell)$
18	$4EI\varphi^{4-1}(0)$
19	$M^{4-1}(0)$
20	$Q^{4-1}(0)$
21	$2EIv^{5-4}(0)=0;\ Q^{5-4}(\ell)$
22	$2EI\varphi^{5-4}(0)=0;M^{5-4}(\ell)$
23	$M^{5-4}(0)$
24	$Q^{5-4}(0)$

; Y=

1	$2EIv^{0-1}(\ell)=2EIv^{1-2}(0)$
2	$2EI\varphi^{0-1}(\ell)=2EI\varphi^{1-2}(0)$
3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(0)-M^{4-1}(\ell)$
4	$Q^{0-1}(\ell)$
5	$EIv^{1-2}(\ell)=-EIv^{3-4}(0)$
6	$EI\varphi^{1-2}(\ell)=EI\varphi^{2-3}(0)$
7	$M^{1-2}(\ell)=M^{2-3}(0)$
8	$Q^{1-2}(\ell)=-Q^{3-4}(0)$
9	$2EIv^{2-3}(\ell)=0$
10	$2EI\varphi^{2-3}(\ell)=2EI\varphi^{3-4}(0)$
11	$M^{2-3}(\ell)=M^{3-4}(0)$
12	$Q^{2-3}(\ell)$
13	$EIv^{3-4}(\ell)=-EIv^{1-2}(0)$
14	$EI\varphi^{3-4}(\ell)=EI\varphi^{4-1}(0)$
15	$M^{3-4}(\ell)=M^{4-1}(0)-M^{5-4}(\ell)$
16	$Q^{3-4}(\ell)$
17	$4EIv^{4-1}(\ell)=0$
18	$4EI\varphi^{4-1}(\ell)=4EI\varphi^{1-2}(0)$
19	$M^{4-1}(\ell)$
20	$Q^{4-1}(\ell)$
21	$2EIv^{5-4}(\ell)=2EIv^{1-2}(0)$
22	$2EI\varphi^{5-4}(\ell)=2EI\varphi^{4-1}(0)$
23	$M^{5-4}(\ell)$
24	$Q^{5-4}(\ell)=Q^{1-2}(0)+Q^{3-4}(\ell)-Q^{0-1}(\ell)$

; B=

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	101,25
10	63.0
11	-27,0
12	-6,0
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	

Данный пример характеризуется тем, что в матрице $\boldsymbol{X}_*$ число нулевых строк меньше числа независимых параметров матрицы $\boldsymbol{Y}$. Для выполнения схемы преобразований (1.46) в этом случае необходимо привлекать глобальные уравнения равновесия отдельных ригелей 2–3 ($Q_{(\ell)}^{1-2} = -Q_{(0)}^{3-4}$), 4 – 1 ($Q_{(\ell)}^{5-4} = Q_{(0)}^{1-2} + Q_{(\ell)}^{3-4} - Q_{(\ell)}^{0-1}$) и соотношения для перемещений в масштабе всей рамы ($v_{(\ell)}^{1-2} = -v_{(0)}^{3-4}$; $v_{(\ell)}^{3-4} = -v_{(0)}^{1-2}$; $v_{(\ell)}^{5-4} = v_{(0)}^{1-2}$).

Если уравнение изгиба (2.11) дополнить уравнением растяжения-сжатия (2.4), то для схемы преобразований (1.46) уравнений равновесия и совместности перемещений только узлов рамы будет достаточно. Окончательное уравнение краевой задачи рамы представлено ниже.

3 Методом исключения Гаусса после перестановки строк определяем граничные параметры:

$Q_{(\ell)}^{0-1} = 0{,}0853$ кН; $Q_{(\ell)}^{2-3} = -1{,}4604$ кН; $M_{(0)}^{0-1} = -0{,}1798$ кНм; $Q_{(0)}^{0-1} = 0{,}0853$ кН;

$EIv_{(0)}^{1-2} = 0{,}0823$ кНм^3; $EI\varphi_{(0)}^{1-2} = -0{,}2285$ кНм^2; $M_{(0)}^{1-2} = 0{,}5636$ кНм; $Q_{(0)}^{1-2} = -0{,}6078$ кН;

$Q_{(\ell)}^{3-4} = 0{,}6078$ кН; $2EI\varphi_{(0)}^{2-3} = 4{,}7597$ кНм^2; $M_{(0)}^{2-3} = -1{,}8677$ кНм; $Q_{(0)}^{2-3} = 4{,}5396$ кН;

$EIv_{(0)}^{3-4} = -1{,}1433$ кНм^3; $EI\varphi_{(0)}^{3-4} = -1{,}3737$ кНм^2; $M_{(0)}^{3-4} = -1{,}6299$ кНм; $Q_{(0)}^{3-4} = 0{,}6078$ кН;

$M_{(\ell)}^{4-1} = 0{,}2315$ кНм; $4EI\varphi_{(0)}^{4-1} = 1{,}1335$ кНм^2; $M_{(0)}^{4-1} = 0{,}4510$ кНм; $Q_{(0)}^{4-1} = -0{,}0366$ кН;

$Q_{(\ell)}^{4-1} = -0{,}0366$ кН; $M_{(\ell)}^{5-4} = -0{,}3504$ кНм; $M_{(0)}^{5-4} = 0{,}1615$ кНм; $Q_{(0)}^{5-4} = -0{,}0853$ кН.

Значения изгибающих моментов совпадают с результатами работы [93], полученными методом сил. Непосредственно по значениям граничных параметров рамы могут быть построены эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q, а эпюру нормальных сил N можно построить, определяя нормальные силы из уравнений равновесия узлов. Соответствующие эпюры представлены на рисунке 2.16.

Решение данного примера показывает, что использование только уравнений изгиба (2.11) создает определенные неудобства при определении нормальных сил и составлении уравнений равновесия узлов. Поэтому при расчете плоских стержневых систем предпочтительней пользоваться уравнением (2.11), дополненным уравнением нормальных сил из (2.4). Учет нормальных сил увеличивает порядок матричного уравнения (2.11) на единицу, но упрощает дальнейший расчет. В этом усматривается выигрыш данного подхода, так как число арифметических операций не является критерием при оценке метода [93, 277], более существенным является упрощение логики.

В качестве примера рассмотрим расчет рамы с наклонным стержнем и применим уравнение изгиба (2.11) с добавлением нормальных сил.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
1			-18	-36	-2																				$Q^{0-1}(\ell)$		3
2			-6	-18		-2																			$Q^{2-3}(\ell)$		6
3			1	6			-1										1								$M^{0-1}(0)$		4
4	-1			1																					$Q^{0-1}(0)$		1
5					1	4	-8	-32/3					1												$EIv^{1-2}(0)$		5
6						1	-4	-8		-1/2															$EI\varphi^{1-2}(0)$		7
7							1	4			-1														$M^{1-2}(0)$		8
8								1								1									$Q^{1-2}(0)$		16
9										6	-18	-36													$Q^{3-4}(\ell)$	-101,25	10
10										1	-6	-18		-2											$2EI\varphi^{2-3}(0)$	-63,0	11
11											1	6			-1										$M^{2-3}(0)$	27,0	12
12		-1										1													$Q^{2-3}(0)$	6,0	2
13					1								1	4	-8	-32/3									$EIv^{3-4}(0)$		13
14														1	-4	-8		-1/4							$EI\varphi^{3-4}(0)$		14
15															1	4			-1			1			$M^{3-4}(0)$		15
16									-1							1									$Q^{3-4}(0)$		9
17																		6	-18	-36					$M^{4-1}(\ell)$		20
18						-4												1	-6	-18					$4EI\varphi^{4-1}(0)$		19
19																	-1		1	6					$M^{4-1}(0)$		17
20																				1	-1				$Q^{4-1}(0)$		21
21					-2																		-18	-36	$Q^{4-1}(\ell)$		23
22																		-1/2					-6	-18	$M^{5-4}(\ell)$		18
23																						-1	1	6	$M^{5-4}(0)$		22
24	1							-1	-1															1	$Q^{-4}(0)$		24

=

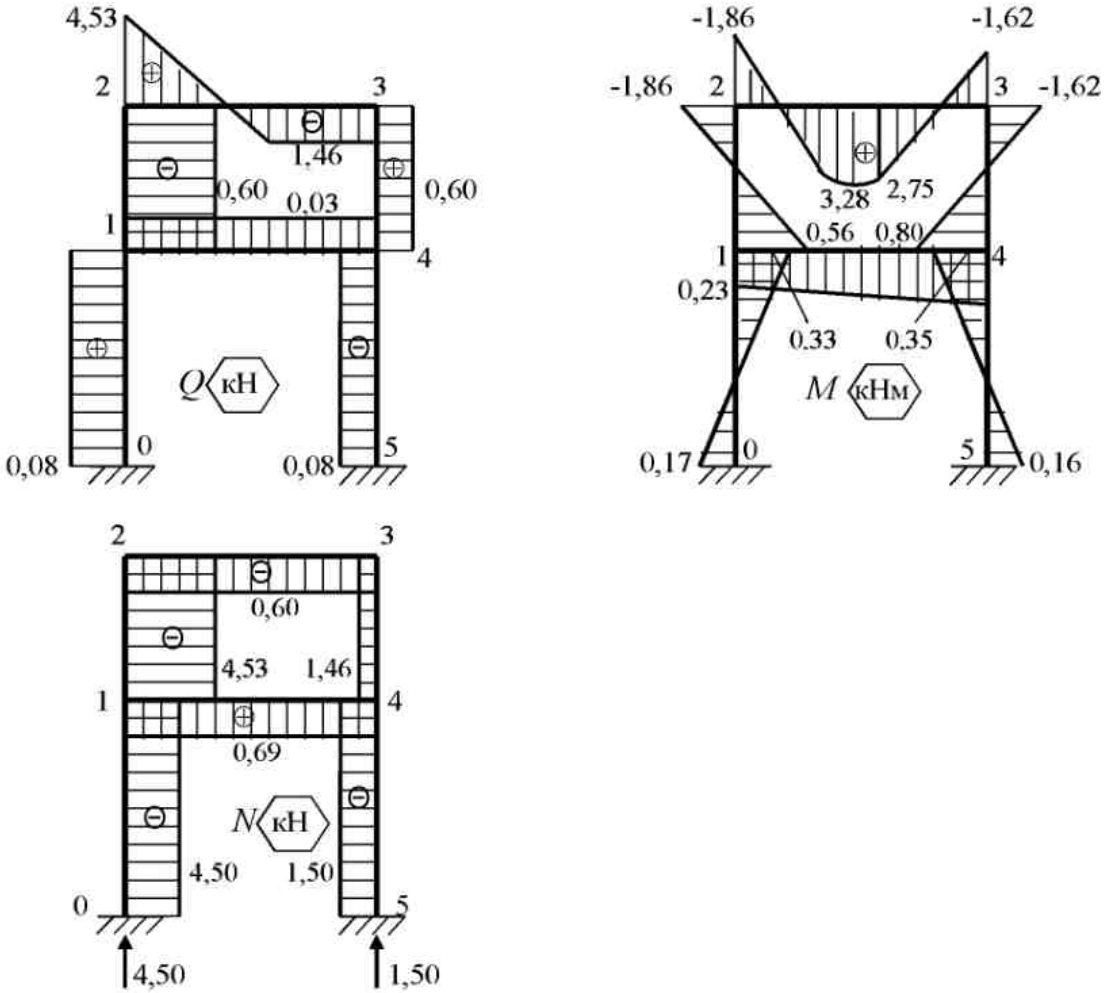


Рисунок 2.16

Пример 2.9. Построить эпюры *M, Q, N* рамы с наклонным стержнем (рисунок 2.17).

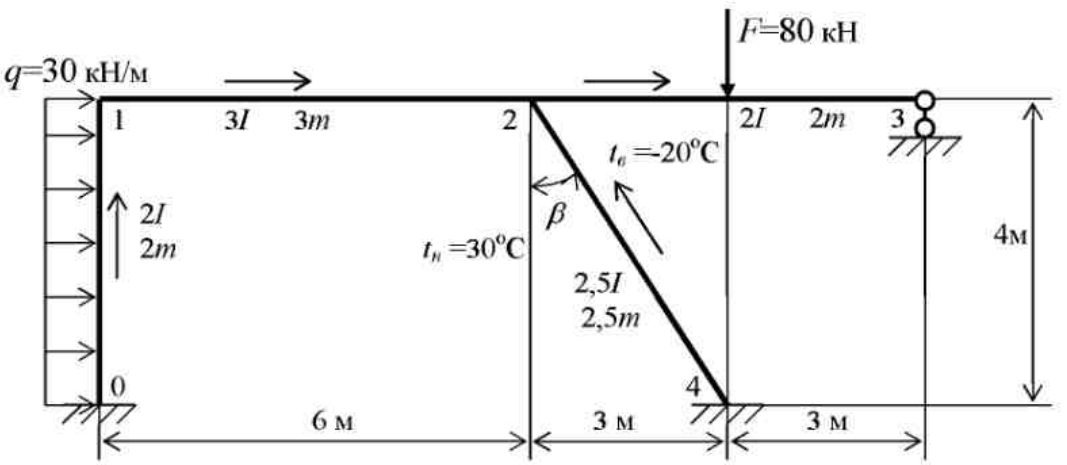


Рисунок 2.17

1 Разбиваем раму на 4 стержня и нумеруем узлы. Стрелками показаны начало и конец каждого стержня. Используем в качестве примера такую ориентацию локальных систем координат всех стержней, когда ось O_y направлена «вверх» (рисунок 1.6). Соответственно меняется положительное направление внешней нагрузки. Равновесие узлов 1, 2 и деформированное состояние рамы (продольными перемещениями стержней пренебрегаем) показаны на рисунке 2.18.

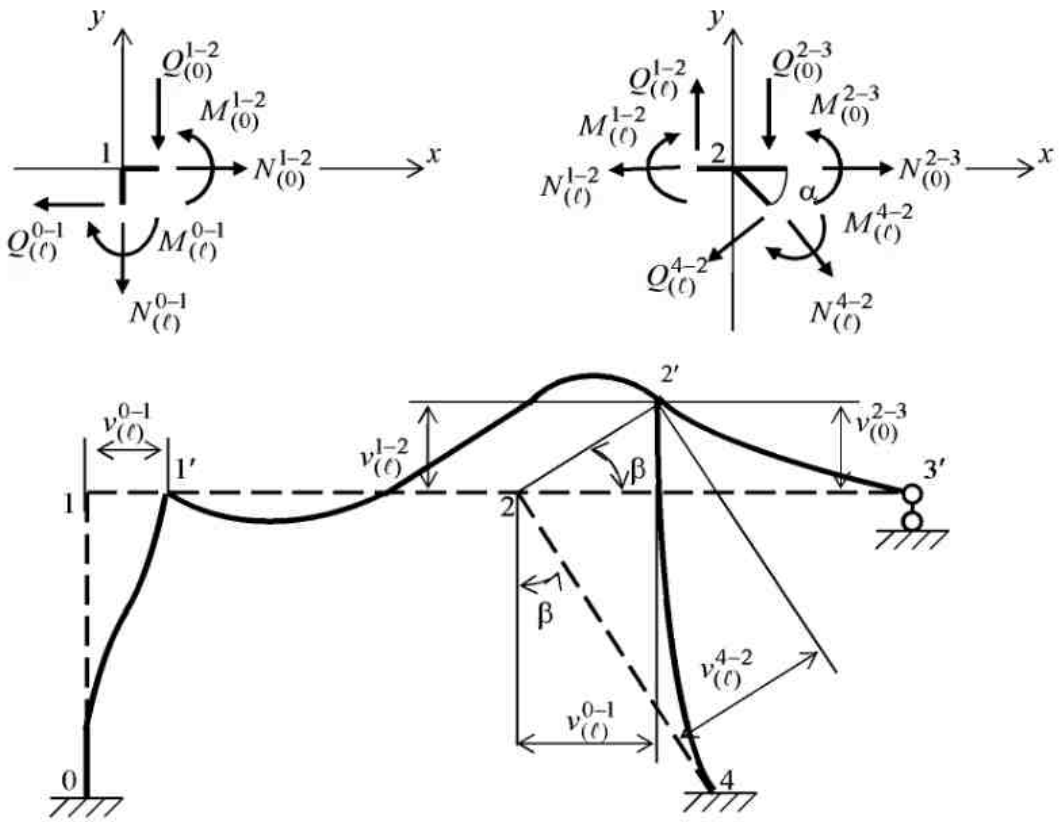


Рисунок 2.18

2 Формируем матрицы разрешающего уравнения МГЭ (1.46) (представлены далее). Элементы вектора $\boldsymbol{B}$ вычислялись по формулам (2.13).

Видно, что число нулевых строк матрицы $\boldsymbol{X}$ равно числу независимых конечных параметров матрицы $\boldsymbol{Y}$. Выполняя перенос параметров в матрицу $\boldsymbol{X}_*$, получаем разрешающее уравнение МГЭ данной рамы.

Переставляя строки матриц $\boldsymbol{A}_*$, $\boldsymbol{B}$ в новом порядке, как показано цифрами справа (один из возможных вариантов), методом Гаусса определяем граничные параметры рамы, которые представлены в таблице 2.4.

Поскольку в расчете не учитывались продольные перемещения стержней, то моментное напряженное состояние (изгибающие моменты) является завышенным. Результаты расчета по МГЭ совпадают с результатами расчета по МКЭ.

$X_* =$

1	$2EIv^{0-1}(0)=0;$ $2EI\varphi^{2-3}(\ell)$
2	$2EI\varphi^{0-1}(0)=0;\ Q^{2-3}(\ell)$
3	$M^{0-1}(0)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$N^{0-1}(0)$
6	$3EIv^{1-2}(0)=0;\ M^{4-2}(\ell)$
7	$3EI\varphi^{1-2}(0)$
8	$M^{1-2}(0)$
9	$Q^{1-2}(0)$
10	$N^{1-2}(0)$
11	$2EIv^{2-3}(0);$
12	$2EI\varphi^{2-3}(0)$
13	$M^{2-3}(0)$
14	$Q^{2-3}(0)$
15	$N^{2-3}(0)$
16	$2{,}5EIv^{4-2}(0)=0;$ $Q^{4-2}(\ell)$
17	$2{,}5EI\varphi^{4-2}(0)=0;$ $N^{4-2}(\ell)$
18	$M^{4-2}(0)$
19	$Q^{4-2}(0)$
20	$N^{4-2}(0)$

; $Y =$

1	$2EI\left[v^{0-1}(\ell)=-v^{2-3}(0)\cdot\operatorname{ctg}\beta\right]$
2	$2EI\varphi^{0-1}(\ell)=2EI\varphi^{1-2}(0)$
3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(0)$
4	$Q^{0-1}(\ell)=N^{1-2}(0)$
5	$N^{0-1}(\ell)=-\ Q^{1-2}(0)$
6	$3EI\left[v^{1-2}(\ell)=v^{2-3}(0)\right]$
7	$3EI\varphi^{1-2}(\ell)=3EI\varphi^{2-3}(0)$
8	$M^{1-2}(\ell)=M^{2-3}(0)-M^{4-2}(\ell)$
9	$Q^{1-2}(\ell)=Q^{2-3}(0)+Q^{4-2}(\ell)\cdot 0{,}6+$ $+N^{4-2}(\ell)\cdot 0{,}8$
10	$N^{1-2}(\ell)=N^{2-3}(0)-Q^{4-2}(\ell)\cdot 0{,}8+$ $+N^{4-2}(\ell)\cdot 0{,}6$
11	$2EIv^{2-3}(\ell)=0$
12	$2EI\varphi^{2-3}(\ell)$
13	$M^{2-3}(\ell)=0$
14	$Q^{2-3}(\ell)$
15	$N^{2-3}(\ell)=0$
16	$2{,}5EI\left[v^{4-2}(\ell)=-v^{2-3}(0)/\sin\beta\right]$
17	$2{,}5EI\varphi^{4-2}(\ell)=2{,}5EI\varphi^{2-3}(0)$
18	$M^{4-2}(\ell)$
19	$Q^{4-2}(\ell)$
20	$N^{4-2}(\ell)$

; $B =$

1	-320
2	-320
3	-240
4	-120
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	-360
12	-360
13	-240
14	-80
15	
16	
17	
18	
19	
20	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20			
1			8	32/3							4/3										$2EI\varphi^{2-3}(\ell)$	320	3
2			4	8			-2/3														$Q^{2-3}(\ell)$	320	4
3			1	4				-1													$M^{0-1}(0)$	240	8
4				1						-1											$Q^{0-1}(0)$	120	10
5					1				1												$N^{0-1}(0)$		5
6							6	18	36		-3/2										$M^{4-2}(\ell)$		7
7							1	6	18			-3/2									$3EI\varphi^{1-2}(0)$		9
8						1		1	6				-1								$M^{1-2}(0)$		6
9									1					-1		-0,6	-0,8				$Q^{1-2}(0)$		14
10										1					-1	0,8	-0,6				$N^{1-2}(0)$		17
11											1	6	18	36							$2Elv^{2-3}(0)$	360	11
12	-1											1	6	18							$2EI\varphi^{2-3}(0)$	360	1
13													1	6							$M^{2-3}(0)$	240	13
14		-1												1							$Q^{2-3}(0)$	80	2
15															1						$N^{2-3}(0)$		15
16											25/12							25/2	125/6		$Q^{4-2}(\ell)$		18
17												-5/4						5	25/2		$N^{4-2}(\ell)$		12
18						-1												1	5		$M^{4-2}(0)$		19
19																-1			1		$Q^{4-2}(0)$		16
20																	-1			1	$N^{4-2}(0)$		20

=

2.4.5 Учет продольных перемещений стержней

Учет продольных перемещений позволяет составить более точную модель деформирования упругой системы и в ряде случаев существенно уточнить результаты расчетов. Последовательность учета продольных перемещений рассмотрим на примере расчета рамы по рисунку 2.17.

Пример 2.10. Равновесие узлов 1 и 2 рамы не изменится по сравнению с рисунком 2.18, а деформированное состояние будет включать и продольные перемещения (рисунок 2.19). Для определенности примем, что $EA = 120\,EI$.

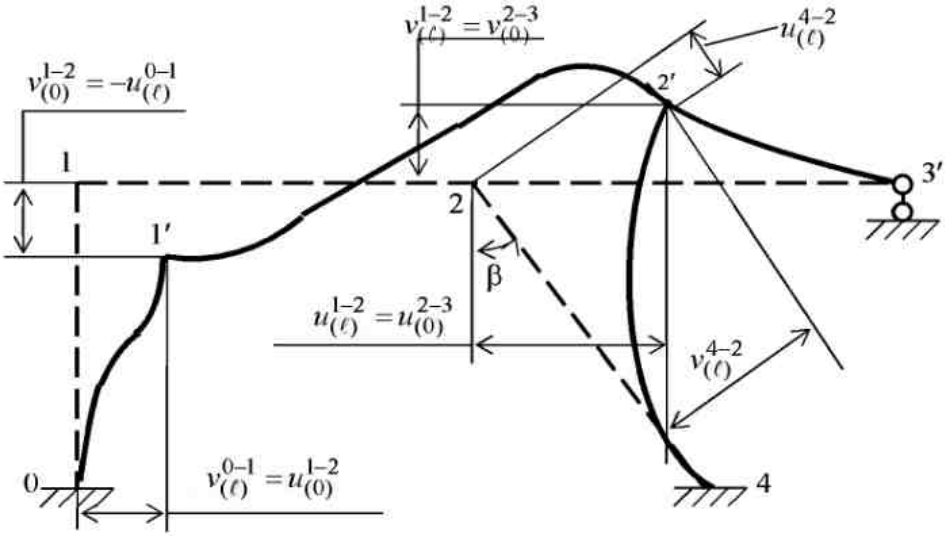


Рисунок 2.19

Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1, 2 представлены в матрице ***Y***. Структура этих уравнений обосновывается деформированным состоянием по рисункам 2.18, 2.19 и 2.20.

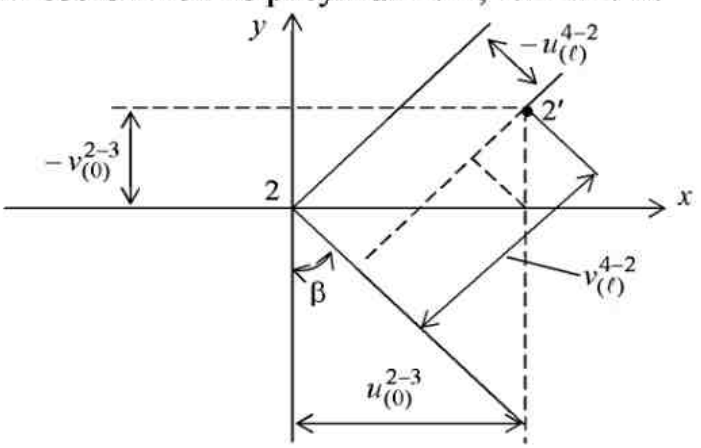


Рисунок 2.20

Разрешающее уравнение МГЭ этого примера представлено ниже. Переставляя строки в новом порядке, методом Гаусса определяем граничные параметры, которые сведены в таблицу 2.5. Из таблицы следует, что учет продольных перемещений уменьшает изгибающие моменты, т.е. потенциал внешней нагрузки перераспределяется от изгибной деформации к деформации растяжения-сжатия.

$X_* =$

1	$2EIv^{0-1}(0)=0;\ 2EI\varphi^{2-3}(\ell)$
2	$2EI\varphi^{0-1}(0)=0;\ Q^{2-3}(\ell)$
3	$M^{0-1}(0)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$EAu^{0-1}(0)=0;\ 240EIu^{2-3}(\ell)$
6	$N^{0-1}(0)$
7	$3EIv^{1-2}(0)$
8	$3EI\varphi^{1-2}(0)$
9	$M^{1-2}(0)$
10	$Q^{1-2}(0)$
11	$EAu^{1-2}(0)=360EIu^{1-2}(0)$
12	$N^{1-2}(0)$
13	$2EIv^{2-3}(0)$
14	$2EI\varphi^{2-3}(0)$
15	$M^{2-3}(0)$
16	$Q^{2-3}(0)$
17	$EAu^{2-3}(0)=240EIu^{2-3}(0)$
18	$N^{2-3}(0)$
19	$2{,}5EIv^{4-2}(0)=0;\ M^{4-2}(\ell)$
20	$2{,}5EI\varphi^{4-2}(0)=0;\ Q^{4-2}(\ell)$
21	$M^{4-2}(0)$
22	$Q^{4-2}(0)$
23	$EAu^{4-2}(0)=0;\ N^{4-2}(\ell)$
24	$N^{4-2}(0)$

; $Y =$

1	$2EIv^{0-1}(\ell)=2EIu^{1-2}(0)$
2	$2EI\varphi^{0-1}(\ell)=2EI\varphi^{1-2}(0)$
3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(0)$
4	$Q^{0-1}(\ell)=N^{1-2}(0)$
5	$240EIu^{0-1}(\ell)=-240EIv^{1-2}(0)$
6	$N^{0-1}(\ell)=-Q^{1-2}(0)$
7	$3EIv^{1-2}(\ell)=3EIv^{2-3}(0)$
8	$3EI\varphi^{1-2}(\ell)=3EI\varphi^{2-3}(0)$
9	$M^{1-2}(\ell)=M^{2-3}(0)-M^{4-2}(\ell)$
10	$Q^{1-2}(\ell)=Q^{2-3}(0)+0{,}6Q^{4-2}(\ell)+0{,}8N^{4-2}(\ell)$
11	$360EIu^{1-2}(\ell)=360EIu^{2-3}(0)$
12	$N^{1-2}(\ell)=N^{2-3}(0)-0{,}8Q^{4-2}(\ell)+0{,}6N^{4-2}(\ell)$
13	$2EIv^{2-3}(\ell)=0$
14	$2EI\varphi^{2-3}(\ell)$
15	$M^{2-3}(\ell)=0$
16	$Q^{2-3}(\ell)$
17	$EAu^{2-3}(\ell)=240EIu^{2-3}(\ell)$
18	$N^{2-3}(\ell)=0$
19	$2{,}5EIv^{4-2}(\ell)=2{,}5EI\left[-0{,}6v^{2-3}(0)+0{,}8u^{2-3}(0)\right]$
20	$2{,}5EI\varphi^{4-2}(\ell)=2{,}5EI\varphi^{2-3}(0)$
21	$M^{4-2}(\ell)$
22	$Q^{4-2}(\ell)$
23	$300EIu^{4-2}(\ell)=300EI\left[-0{,}8v^{2-3}(0)-0{,}6u^{2-3}(0)\right]$
24	$N^{4-2}(\ell)$

По результатам расчета на рисунке 2.21 представлены эпюры M, Q, N, в скобках указаны значения параметров без учета продольных перемещений.

2.4.6 Пространственные рамы

Элементы пространственных рам испытывают изгиб, кручение, сдвиг и растяжение-сжатие. Последними двумя видами сопротивления обычно пренебрегают, поэтому уравнение МГЭ одного стержня для пространственного случая будет содержать 6 или 8 уравнений. Рассмотрим простейший пример, так как при большом числе стержней матрицы не помещаются на формате страницы.

Пример 2.11 [324,с.225]. Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов пространственной рамы (рисунок 2.22).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24				
1			-8	-32/3							-1/180														$2EI\varphi^{2-3}(\ell)$	=	-320	11
2			-4	-8				-2/3																	$Q^{2-3}(\ell)$		-320	8
3			1	4																					$M^{0-1}(0)$		240	3
4				1								-1													$Q^{0-1}(0)$		120	4
5						4	80																		$240EIu^{2-3}(\ell)$			6
6						1				1															$N^{0-1}(0)$			10
7							1	6	-18	-36			-3/2												$3EIv^{1-2}(0)$			7
8								1	-6	-18				-3/2											$3EI\varphi^{1-2}(0)$			14
9									1	6					-1				1						$M^{1-2}(0)$			9
10										1						-1				-0,6			-0,8		$Q^{1-2}(0)$			16
11											1	6					-3/2								$360EIu^{1-2}(0)$			17
12												1						-1		0,8			-0,6		$N^{1-2}(0)$			12
13													1	6	-18	-36									$2EIv^{2-3}(0)$		-360	13
14	-1													1	-6	-18									$2EI\varphi^{2-3}(0)$		-360	1
15															1	6									$M^{2-3}(0)$		240	15
16		-1														1									$Q^{2-3}(0)$		80	2
17					-1												1	6							$240EIu^{2-3}(0)$			5
18																		1							$N^{2-3}(0)$			18
19													3/4				-1/120				-25/2	-125/6			$M^{4-2}(\ell)$			21
20														-5/4							-5	-25/2			$Q^{4-2}(\ell)$			22
21																			-1		1	5			$M^{4-2}(0)$			19
22																				-1		1			$Q^{4-2}(0)$			20
23													120				3/4							5	$N^{4-2}(\ell)$			24
24																							-1	1	$N^{4-2}(0)$			23

Таблица 2.4

	Параметры стержней рамы по рисунку 2.17	Расчет без учета продольных перемещений стержней	Расчет с учетом продольных перемещений стержней
1	$2EI\varphi_{(\ell)}^{2-3}$, кНм^2	102,4167	105,2160
2	$Q_{(\ell)}^{2-3}$, кН	-28,3125	-28,5793
3	$M_{(0)}^{0-1}$, кНм	-75,4792	-74,0602
4	$Q_{(0)}^{0-1}$, кН	81,0156	80,3519
5	$240EIu_{(\ell)}^{2-3}$, кНм^3	-	6488,0108
6	$N_{(0)}^{0-1}$, кН	8,9792	8,7646
7	$3EIv_{(0)}^{1-2}$, кНм^3	0,0	-0,4382
8	$3EI\varphi_{(0)}^{1-2}$, кНм^2	39,3125	39,8615
9	$M_{(0)}^{1-2}$, кНм	8,5833	7,3474
10	$Q_{(0)}^{1-2}$, кН	-8,9792	-8,7646
11	$360EIu_{(0)}^{1-2}$, кНм^3	-	9971,0901
12	$N_{(0)}^{1-2}$, кН	-38,9844	-39,6481
13	$2EIv_{(0)}^{2-3}$, кНм^3	44,7500	37,5576
14	$2EI\varphi_{(0)}^{2-3}$, кНм^2	-47,2083	-49,2108
15	$M_{(0)}^{2-3}$, кНм	-70,1250	-68,5244
16	$Q_{(0)}^{2-3}$, кН	51,6875	51,4207
17	$240EIu_{(0)}^{2-3}$, кНм^3	-	6488,8011
18	$N_{(0)}^{2-3}$, кН	0,0	0,0
19	$M_{(\ell)}^{4-2}$, кНм	24,8333	23,2845
20	$Q_{(\ell)}^{4-2}$, кН	-5,2125	-4,3927
21	$M_{(0)}^{4-2}$, кНм	-1,2292	-1,3209
22	$Q_{(0)}^{4-2}$, кН	-5,2125	-4,3927
23	$N_{(\ell)}^{4-2}$, кН	-71,9240	-71,9371
24	$N_{(0)}^{4-2}$, кН	-71,9240	-71,9371

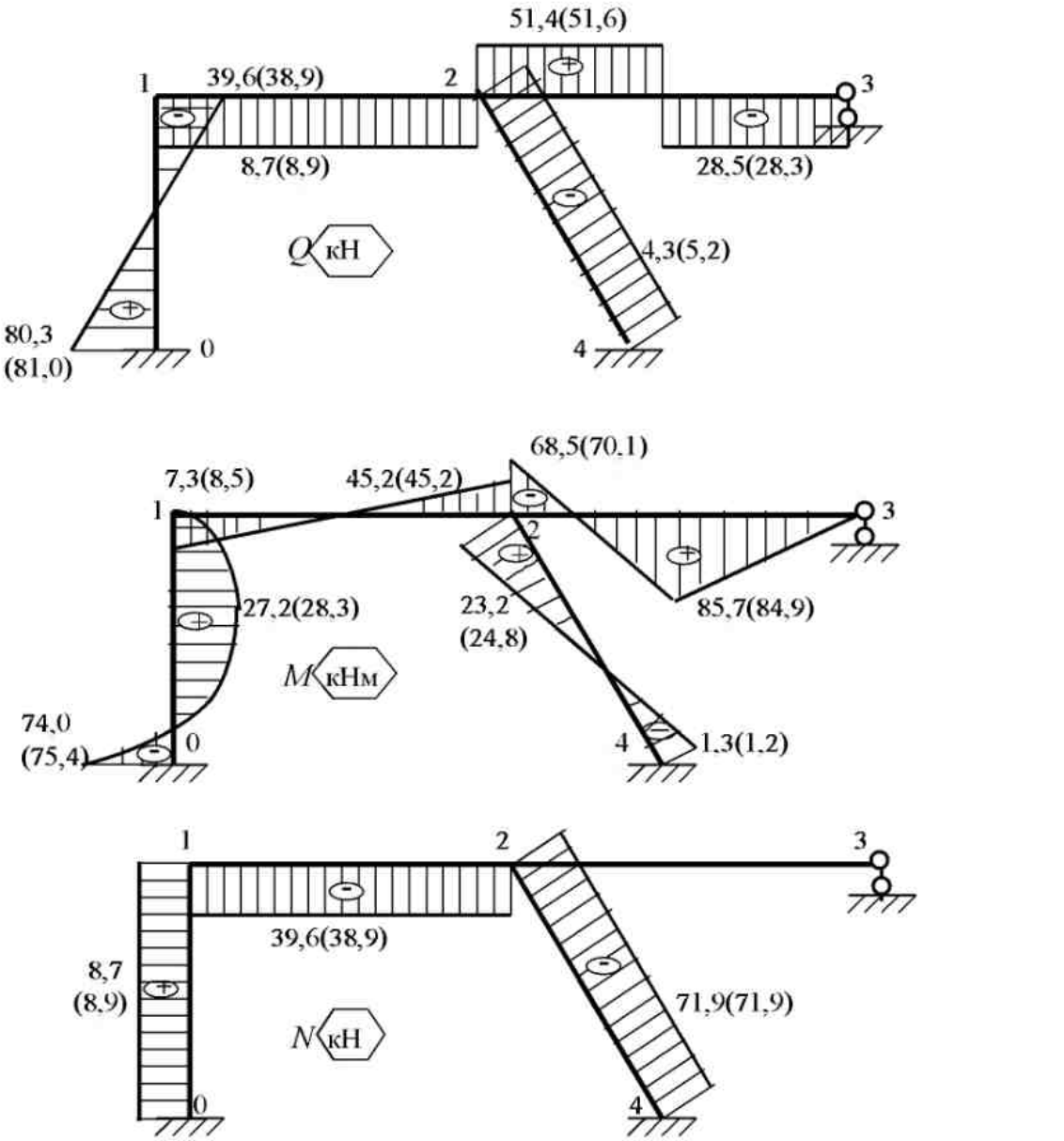


Рисунок 2.21

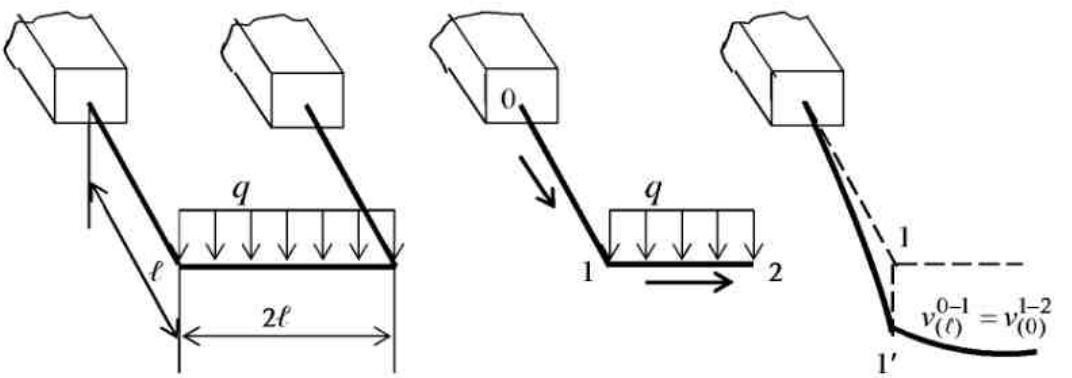


Рисунок 2.22

1 Рама может быть разбита на три стержня. Но, учитывая симметрию нагрузки и расчетной схемы, представим раму двумя стержнями.

2 Формируем матрицы МГЭ. Уравнения равновесия и совместности перемещений параметров изгиба и кручения для узла 1 представлены в матрице **Y** (ось ОУ стержней направлена «вверх»).

X_*=

1	$EIv_{(0)}^{0-1}=0;\ EIv_{(\ell)}^{1-2}$
2	$EI\varphi_{(0)}^{0-1}=0;\ M_{(\ell)}^{1-2}$
3	$M_{(0)}^{0-1}$
4	$Q_{(0)}^{0-1}$
5	$GI_k\theta_{(0)}^{0-1}=0;\ GI_k\theta_{(\ell)}^{1-2}$
6	$M_{kp(0)}^{0-1}$
7	$EIv_{(0)}^{1-2}$
8	$EI\varphi_{(0)}^{1-2}$
9	$M_{(0)}^{1-2}$
10	$Q_{(0)}^{1-2}$
11	$GI_k\theta_{(0)}^{1-2}$
12	$M_{kp(0)}^{1-2}$

Y=

1	$EIv_{(\ell)}^{0-1}=EIv_{(0)}^{1-2}$
2	$EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}=EI\theta_{(0)}^{1-2}$
3	$M_{(\ell)}^{0-1}=M_{kp(0)}^{1-2}$
4	$Q_{(\ell)}^{0-1}=Q_{(0)}^{1-2}$
5	$GI_k\theta_{(\ell)}^{0-1}=-GI_k\varphi_{(0)}^{1-2}$
6	$M_{kp(\ell)}^{0-1}=-M_{(0)}^{1-2}$
7	$EIv_{(\ell)}^{1-2}$
8	$EI\varphi_{(\ell)}^{1-2}=0$
9	$M_{(\ell)}^{1-2}$
10	$Q_{(\ell)}^{1-2}=0$
11	$GI_k\theta_{(\ell)}^{1-2}$
12	$M_{kp(\ell)}^{1-2}=0$

B=

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	-1/24
8	-1/6
9	-1/2
10	-1
11	
12	

Для исключения буквенных символов принимаем, что $q = l = 1$. Топологическая матрица **C** и система уравнений МГЭ для рамы примут вид:

C=

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1							-1					
2											-1,3	
3												-1
4										-1		
5								1/1,3				
6									1			
7	-1											
8												
9		-1										
10												
11					-1							
12												

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
1			1/2	1/6			-1						$EIv_{(\ell)}^{1-2}$		7
2			1	1/2							-1,3		$M_{(\ell)}^{1-2}$		11
3			1	1								-1	$M_{(0)}^{0-1}$		3
4				1						-1			$Q_{(0)}^{0-1}$		4
5						1		1/1,3					$GI_k\theta_{(\ell)}^{1-2}$		8
6						1			1				$M_{kp_{(0)}}^{0-1}$	=	6
7	-1						1	1	1/2	1/6			$EIv_{(0)}^{1-2}$	1/24	1
8								1	1	1/2			$EI\varphi_{(0)}^{1-2}$	1/6	9
9		-1							1	1			$M_{(0)}^{1-2}$	1/2	2
10										1			$Q_{(0)}^{1-2}$	1	10
11					-1						1	1	$GI_k\theta_{(0)}^{1-2}$		5
12												1	$M_{kp_{(0)}}^{1-2}$		12

3 Переставляя строки, как показано цифрами справа, и применяя метод Гаусса, получаем значения граничных параметров:

$EIv_{(\ell)}^{1-2} = -0{,}4692q\ell^4$; $M_{(\ell)}^{1-2} = 0{,}3550q\ell^2$; $M_{(0)}^{0-1} = -q\ell^2$; $Q_{(0)}^{0-1} = q\ell$;

$GI_k\theta_{(\ell)}^{1-2} = -0{,}3846q\ell^3$; $M_{kp_{(0)}}^{0-1} = 0{,}1449q\ell^2$; $EIv_{(0)}^{1-2} = -0{,}3333q\ell^4$; $EI\varphi_{(0)}^{1-2} = -0{,}1884q\ell^3$;

$M_{(0)}^{1-2} = -0{,}1449q\ell^2$; $Q_{(0)}^{1-2} = q\ell$; $GI_k\theta_{(0)}^{1-2} = -0{,}3846q\ell^3$; $M_{kp_{(0)}}^{1-2} = 0{,}0$.

Значение момента $M_{(\ell)}^{1-2}$ совпадает с результатом работы [324], полученным методом сил. Эпюры M, Q, $M_{кр}$ показаны на рисунке 2.23.

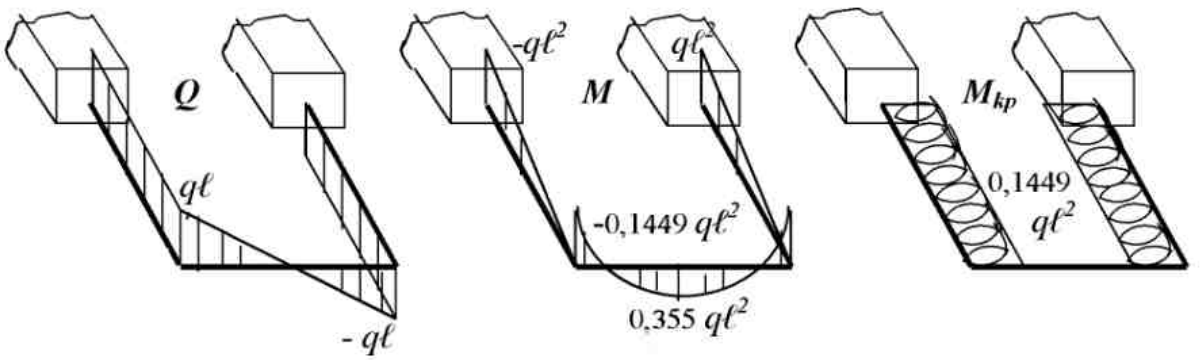


Рисунок 2.23

2.5 Статика арочных систем

В современной технике и строительстве широко используются стержневые системы, содержащие криволинейные стержни в виде дуги окружности, параболы, кубической параболы и т.д. В справочной литературе приводятся решения различных задач плоского деформирования кругового стержня с учетом только деформации изгиба [262]. В 1938г. проф.Н.К.Снитко получил решение задачи плоского деформирования кругового стержня с учетом деформаций изгиба и растяжения только для частного случая нагрузки $q_y(\alpha) = q = \text{const}$ (рисунок 2.24) [293].

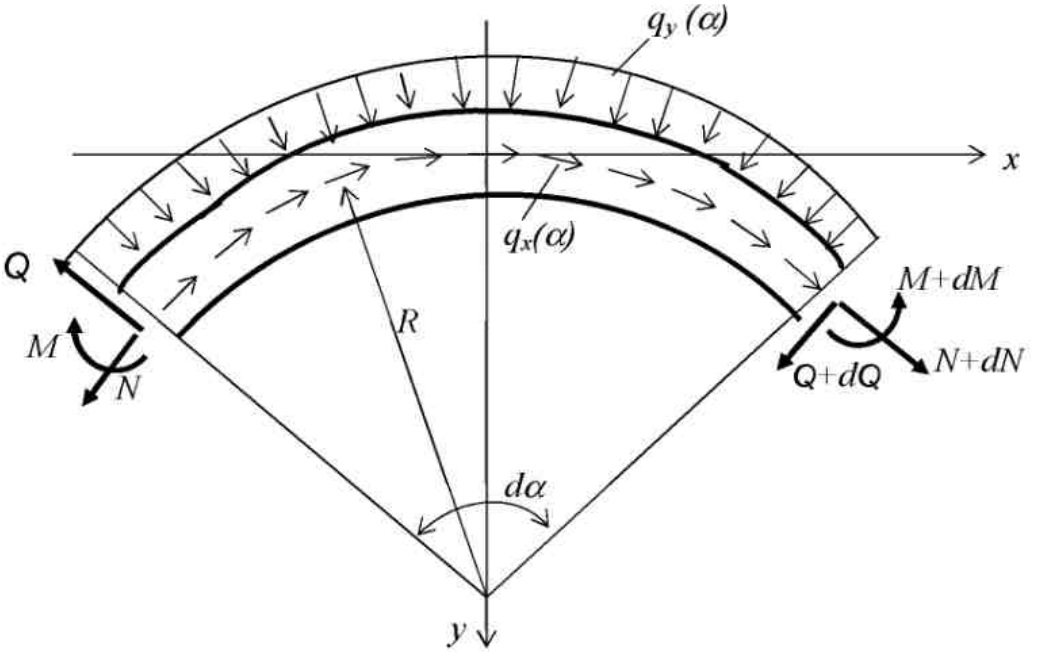


Рисунок 2.24

Отсутствие достаточно полного аналитического решения задачи плоского деформирования кругового стержня способствовало тому, что в ряде работ [4, 184, 258] рекомендуется заменять криволинейные стержни набором прямолинейных стержней. Такая модель достаточно хорошо отражает поведение криволинейных стержней только при большом числе заменяющих стержней. В работе [93] показано, что погрешность полигональной аппроксимации кругового стержня не превышает 1,0 %, если прямолинейный стержень стягивает дугу криволинейного стержня примерно в 5 градусов. Таким образом, кольцо может быть представлено правильным многоугольником из 72 стержней, а арка в 90^0 – 18 стержнями. Далее расчет стержневой системы может быть выполнен МКЭ, методом сил и другими методами.

Существенно снизить трудоемкость расчета, упростить алгоритм, повысить достоверность результатов можно при наличии фундаментальных решений плоского деформирования кругового стержня.

2.5.1 Вывод системы дифференциальных уравнений деформирования плоского кругового стержня

Для построения соотношений МГЭ кругового стержня принимаем левовинтовую систему координат с направлением оси *OY* «вниз». На рисунке 2.24 показаны положительные направления нагрузки и статических параметров. Положительные направления кинематических параметров принимаем такими же, как и для прямолинейных стержней, т.е. линейные перемещения в направлении осей *OX, OY* считаются положительными. Угловые перемещения положительны, если они направлены по часовой стрелке со стороны оси *OZ*. Равновесие элемента *dS* (рисунок 2.24) приводит к следующим уравнениям

$$\sum x = 0 \to \frac{dN}{d\alpha} = Q - q_x(\alpha)R \ ; \tag{2.24}$$

$$\sum y = 0 \to \frac{dQ}{d\alpha} = -N - q_y(\alpha)R \ ; \tag{2.25}$$

$$\sum m(0) = 0 \to \frac{dM}{d\alpha} = QR \ ; \tag{2.26}$$

Здесь α - угловая координата. Принцип двойственности статических и геометрических уравнений позволяет получить выражения для деформации оси кругового стержня [273]

$$\varepsilon = \frac{1}{R}[u'(\alpha) - v(\alpha)]; \qquad \kappa = \left\{\frac{1}{R}[u'(\alpha) + v''(\alpha)] - \gamma'(\alpha)\right\}\frac{1}{R}, \tag{2.27}$$

где ε - деформация растяжения-сжатия;

κ– кривизна после деформирования;

$u(\alpha)$, $v(\alpha)$ - перемещения точки оси в направлении касательной и нормали (продольное и поперечное перемещения);

$\gamma(\alpha)$ – деформация сдвига.

Для кругового стержня выполняется также геометрическое соотношение

$$\varphi(\alpha) = -\gamma(\alpha) + \frac{1}{R}[u(\alpha) + v'(\alpha)], \tag{2.28}$$

где φ(α) – угол поворота сечения.

Физические уравнения связи между напряжением и деформациями кругового стержня аналогичны прямолинейному стержню

$$\varepsilon = N/EA; \quad \kappa = -M/EI; \quad \gamma = k_1 Q/GA \tag{2.29}$$

Набор уравнений (2.24) – (2.29) свидетельствует о принятии модели жесткого кругового стержня с допущениями [262]:

1 – Применимости гипотезы плоских нормалей;

2 – Недеформируемости поперечного сечения при нагружении;

3 – Малости кривизны (R/h >5) и деформаций.

Учесть деформацию сдвига весьма затруднительно. Поэтому в дальнейших выкладках принимаем $\gamma(\alpha) = 0$, что, как показано ниже, несущественно влияет на точность результатов. Выражая нормальную и поперечную силы через перемещения с помощью (2.26), (2.27), (2.29) и

подставляя их в (2.24), (2.25), получим связанную систему дифференциальных уравнений плоского деформирования кругового стержня в перемещениях

$$\begin{cases} v^{IV}(\alpha)+\dfrac{EAR^2}{EI}v(\alpha)+u'''(\alpha)-\dfrac{EAR^2}{EI}u'(\alpha)=\dfrac{R^4}{EI}q_y(\alpha); \\ \left(1+\dfrac{EAR^2}{EI}\right)u''(\alpha)+v'''(\alpha)-\dfrac{EAR^2}{EI}v'(\alpha)=-\dfrac{R^4}{EI}q_x(\alpha) \end{cases}, \tag{2.30}$$

где первое уравнение соответствует изгибу, а второе – растяжению продольного стержня.

Из анализа системы уравнений (2.30) следуют два любопытных вывода:

1) Если пренебречь деформациями сдвига и растяжения, то согласно (2.27) $u'(\alpha) = v(\alpha)$ и система (2.30) распадается на два независимых уравнения, решения которых в форме метода начальных параметров приведены в справочнике [262, том 1].

2) Если $q_x(\alpha) = 0$, то система уравнений (2.30) может быть сведена к одному уравнению. Первым это обнаружил и получил решение для частного случая проф. Н.К.Снитко.

2.5.2 Фундаментальные решения для кругового стержня

В связи с вышеизложенным, получим аналитическое решение системы уравнений (2.30) с построением функций Грина для перемещений $u(\alpha)$, $v(\alpha)$. Для решения данной задачи воспользуемся аппаратом интегральных преобразований Лапласа, где оригиналами выступают перемещения $u(\alpha)$, $v(\alpha)$. Согласно теореме о дифференцировании оригинала [103] будем иметь

$$\begin{aligned} &v(\alpha)\to V(p);\quad v'(\alpha)\to pV(p)-v(0);\quad v'''(\alpha)\to p^3V(p)-p^2v(0)-pv'(0)-v''(0); \\ &v^{IV}(\alpha)\to p^4V(p)-p^3v(0)-p^2v'(0)-pv''(0)-v'''(0);\quad u(\alpha)\to U(p) \\ &u'(\alpha)\to pU(p)-u(0);\quad u''(\alpha)\to p^2U(p)-pu(0)-u'(0); \\ &u'''(\alpha)\to p^3U(p)-p^2u(0)-pu'(0)-u''(0);\quad q_x(\alpha)\to q_x(p);\quad q_y(\alpha)\to q_y(p), \end{aligned} \tag{2.31}$$

где $V(p)$, $U(p)$ - неизвестные изображения оригиналов $v(\alpha)$, $u(\alpha)$;

p – переменная интегрального преобразования Лапласа.

Начальные значения перемещений и их производных связаны с начальными параметрами кругового стержня зависимостями согласно (2.27)–(2.30).

$$\begin{aligned} &N(0)=\frac{EA}{R}\left[u'(0)-v(0)\right];\quad M(0)=-\frac{EI}{R^2}\left[u'(0)+v''(0)\right];\quad Q(0)=-\frac{EI}{R^3}\left[u''(0)+v'''(0)\right]; \\ &\varphi(0)=\frac{1}{R}\left[u(0)+v'(0)\right]; \\ &u''(0)=-\frac{R^4}{EI+EAR^2}q_x(0)-\frac{EI}{EI+EAR^2}v'''(0)+\frac{EAR^2}{EI+EAR^2}v'(0) \end{aligned} \tag{2.32}$$

Подставляя соотношения (2.31) в систему (2.30) и решая ее алгебраически, получаем неизвестные изображения

$$V(p)=\left[\frac{1}{p}-\frac{1+\dfrac{EAR^2}{EI}}{p(p^2+1)^2}\right]v(0)+\frac{p^4+2p^2}{p^2(p^2+1)}v'(0)+\frac{1}{p(p^2+1)}v''(0)+\frac{1}{(p^2+1)^2}v'''(0)+$$

$$+0\cdot u(0)+\frac{1+\dfrac{EAR^2}{EI}}{p(p^2+1)^2}u'(0)+\frac{R^2}{EA}\left(1+\frac{EAR^2}{EI}\right)\frac{1}{(p^2+1)^2}q_y(p)+\frac{R^2}{EA}\cdot\frac{p^2-\dfrac{EAR^2}{EI}}{p(p^2+1)^2}q_x(p)-$$

$$-\frac{R^2}{EA}\cdot\frac{1}{(p^2+1)^2}q_x(0);$$

$$U(p)=\frac{p^2-\dfrac{EAR^2}{EI}}{p^2(p^2+1)^2}v(0)+\left[\frac{1+\dfrac{EAR^2}{EI+EAR^2}}{p(p^2+1)^2}+\frac{EAR^2}{EI+EAR^2}\cdot\frac{p}{(p^2+1)^2}\right]v'(0)+\frac{1}{p^2(p^2+1)}v''(0)-$$

$$-\frac{EI}{EI+EAR^2}\cdot\frac{p^2-\dfrac{EAR^2}{EI}}{p(p^2+1)^2}v'''(0)+\frac{1}{p}u(0)+\left[\frac{1+\dfrac{EAR^2}{EI}}{p^2(p^2+1)^2}+\frac{1}{p^2+1}\right]u'(0)-$$

$$-\frac{R^2}{EA}\cdot\frac{p^4+\dfrac{EAR^2}{EI}}{p^2(p^2+1)^2}q_x(p)-\frac{R^2}{EA}\cdot\frac{p^2-\dfrac{EAR^2}{EI}}{p(p^2+1)^2}q_y(p)+\frac{R^2}{EA}\cdot\frac{EI}{EI+EAR^2}\cdot\frac{p^2-\dfrac{EAR^2}{EI}}{p(p^2+1)^2}q_x(0).$$

Полученные изображения представляют собой алгебраические суммы правильных дробно-рациональных функций, для обращения которых можно применить вторую теорему разложения. Переход от изображений к оригиналам в соответствии с этой теоремой проведем с помощью соотношений

$$\frac{p^4+\dfrac{EAR^2}{EI}}{p^2(p^2+1)^2}\to\frac{\alpha\cos\alpha+\sin\alpha}{2}+\frac{EAR^2}{EI}\left(\alpha+\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha-\frac{3}{2}\sin\alpha\right);$$

$$\frac{p^2-\dfrac{EAR^2}{EI}}{p(p^2+1)^2}\to\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha-\frac{EAR^2}{EI}\left(1-\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\right);$$

$$\frac{p^2-\dfrac{EAR^2}{EI}}{p^2(p^2+1)^2}\to-\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{EAR^2}{EI}\left(\alpha+\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha-\frac{3}{2}\sin\alpha\right);$$

$$\frac{1}{p(p^2+1)^2}\to1-\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha-\cos\alpha;\quad\frac{p}{(p^2+1)^2}\to\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha;\quad\frac{1}{p^2}\to\alpha;\quad\frac{1}{p}\to\alpha;$$

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)}\to\alpha-\sin\alpha;\qquad\frac{1}{p^2+1}\to\sin\alpha;\qquad\frac{1}{p(p^2+1)}\to1-\cos\alpha;$$

$$\frac{1}{(p^2+1)^2} \to -\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha; \quad \frac{1}{p^2(p^2+1)^2} \to \alpha + \frac{1}{2}\alpha\cos\alpha - \frac{3}{2}\sin\alpha;$$

$$\frac{p}{p^2+1} \to \cos\alpha; \quad \frac{p^2+2}{(p^2+1)^2} \to \frac{3}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\alpha\cos\alpha.$$

Обращение членов, содержащих изображения нагрузок, выполняется по теореме умножения: при свертывании оригиналов их изображения перемножаются. Поэтому произведения изображений будут иметь оригиналы в виде сверток соответствующих функций.

$$\frac{R^2}{EA}\left(1+\frac{EAR^2}{EI}\right)\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}q_y(p) \to \frac{R^2}{EA}\left(1+\frac{EAR^2}{EI}\right)\int_0^\alpha \frac{\sin(\alpha-\xi)-(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)}{2}q_y(\xi)d\xi;$$

$$\frac{R^2}{EA}\cdot\frac{p^2-\dfrac{EAR^2}{EI}}{p(p^2+1)^2}q_x(p) \to \frac{R^2}{EA}\int_0^\alpha\left\{\left(1+\frac{EAR^2}{EI}\right)\frac{(\alpha-\xi)\sin(\alpha-\xi)}{2} - \right.$$

$$\left. -\frac{EAR^2}{EI}\left[H(\alpha-\xi)-\cos(\alpha-\xi)\right]\right\}q_x(\xi)d\xi;$$

$$\frac{R^2}{EA}\cdot\frac{p^2+\dfrac{EAR^2}{EI}}{p^2(p^2+1)^2}q_x(p) \to \frac{R^2}{EA}\int_0^\alpha\left\{\frac{(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)+\sin(\alpha-\xi)}{2}+\frac{EAR^2}{EI}\left[(\alpha-\xi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)-\frac{3}{2}\sin(\alpha-\xi)\right]\right\}q_x(\xi)d\xi$$

После обращения изображений выражения для перемещений запишутся следующим образом

$$v(\alpha) = \left[\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-\frac{EAR^2}{EI}\left(1-\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\right)\right]v(0)+\left(\frac{3}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha\right)v'(0)+$$

$$+(1-\cos\alpha)v''(0)+\left(\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha\right)v'''(0)+0\cdot u(0)+\left(1+\frac{EAR^2}{EI}\right)\left(1-\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\right)u'(0)+$$

$$+\frac{R^2}{EA}\int_0^\alpha\left\{\left(1+\frac{EAR^2}{EI}\right)\frac{\sin(\alpha-\xi)-(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)}{2}q_y(\xi)+\left[\left(1+\frac{EAR^2}{EI}\right)\frac{(\alpha-\xi)\sin(\alpha-\xi)}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{EAR^2}{EI}\left(H(\alpha-\xi)-\cos(\alpha-\xi)\right)\right]q_x(\xi)\right\}d\xi-\frac{R^2}{EA}\cdot\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{2}q_x(0);$$

$$u(\alpha) = \left(\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{2}-\frac{EAR^2}{EI}\cdot\frac{2\alpha+\alpha\cos\alpha-3\sin\alpha}{2}\right)v(0)+$$

$$+\left[\left(1+\frac{EAR^2}{EI+EAR^2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\right)+\frac{EAR^2}{EI+EAR^2}\cdot\frac{\alpha\sin\alpha}{2}\right]v'(0)+(\alpha-\sin\alpha)v''(0)+$$

$$+\frac{EI}{EI+EAR^2}\left[\frac{EAR^2}{EI}(1-\cos\alpha)-\left(1+\frac{EAR^2}{EI}\right)\frac{\alpha\sin\alpha}{2}\right]v'''(0)+1\cdot u(0)+$$

$$+\left[\left(1+\frac{EAR^2}{EI}\right)\left(\alpha+\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha-\frac{3}{2}\sin\alpha\right)+\sin\alpha\right]u'(0)-$$

$$-\frac{R^2}{EA}\int_0^{\alpha}\left[\left\{\left(1+\frac{EAR^2}{EI}\right)\frac{(\alpha-\xi)\sin(\alpha-\xi)}{2}-\frac{EAR^2}{EI}\left[H(\alpha-\xi)-\cos(\alpha-\xi)\right]\right\}q_y(\xi)+\right.$$

$$+\left\{\frac{(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)+\sin(\alpha-\xi)}{2}+\frac{EAR^2}{EI}\left[(\alpha-\xi)+\frac{1}{2}(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)-\frac{3}{2}\sin(\alpha-\xi)\right]\right\}\times$$

$$\left.\times\, q_x(\xi)\right]d\xi+\frac{R^2}{EA}\cdot\frac{EI}{EI+EAR^2}\cdot\left[\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha-\frac{EAR^2}{EI}\left(1-\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\right)\right]q_x(0)$$

Статические и кинематические параметры напряженно-деформированного состояния кругового стержня удобно представить через начальные параметры. Для этого выразим перемещения $v(\alpha)$, $u(\alpha)$ через начальные параметры в соответствии с выражениями (2.32). Затем перемещения и их производные подставим в зависимости (2.26), (2.28), (2.29). Матричное уравнение МГЭ для кругового стержня примет вид:

$EI\,v(\alpha)$		A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	A_{15}	A_{16}	$EI\,v(0)$		B_{11}	
$EI\,\varphi(\alpha)$			A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{13}$		A_{26}	$EI\,\varphi(0)$		B_{21}	
$M(\alpha)$				A_{22}	A_{12}		$-A_{36}$	$M(0)$	$+\int_0^{\alpha}$	$-B_{31}$	$d\xi$, (2.33)
$Q(\alpha)$	$=$				A_{11}		$-A_{46}$	$Q(0)$		$-B_{41}$	
$EA\,u(\alpha)$		A_{51}	A_{52}	$-A_{53}$	$-A_{54}$	A_{11}	A_{56}	$EA\,u(0)$		$-B_{51}$	
$N(\alpha)$					$-A_{64}$		A_{11}	$N(0)$		$-B_{61}$	

где фундаментальные ортонормированные функции и грузовые элементы представляются выражениями

$$A_{11}=\cos\alpha;\qquad A_{12}=R\sin\alpha;\qquad A_{13}=R^2(1-\cos\alpha);\qquad A_{15}=-\frac{EI}{EA}\sin\alpha;$$

$$A_{14}=\left(R^3+\frac{EIR}{EA}\right)\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{2};\qquad A_{22}=1;\qquad A_{23}=R\cdot\alpha;\qquad A_{46}=\sin\alpha;$$

$$A_{16}=R^3\left(1-\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\right)-\frac{EIR}{EA}\cdot\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha;\qquad A_{26}=R^2(\alpha-\sin\alpha);$$

$$A_{36}=R(1-\cos\alpha);\qquad A_{51}=\frac{EA}{EI}\sin\alpha;\qquad A_{52}=\frac{EAR}{EI}(1-\cos\alpha);$$

$$A_{53}=\frac{EAR^2}{EI}(\alpha-\sin\alpha);\qquad A_{54}=\frac{EAR^3}{EI}(1-\cos\alpha-\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha)-R\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha;$$

$$A_{56}=R\frac{\sin\alpha+\alpha\cos\alpha}{2}+\frac{EAR^3}{EI}(\alpha+\frac{1}{2}\alpha\cos\alpha-\frac{3}{2}\sin\alpha);\qquad A_{64}=-\sin\alpha;$$

$$B_{11}=\left(R^4-\frac{EIR^2}{EA}\right)\frac{\sin(\alpha-\xi)-(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)}{2}\cdot q_y(\xi)+$$

$$+\left\{\left(R^4+\frac{EIR^2}{EA}\right)\frac{(\alpha-\xi)\sin(\alpha-\xi)}{2}-R^4\left[H(\alpha-\xi)-\cos(\alpha-\xi)\right]\right\}q_x(\xi);\qquad (2.34)$$

$$B_{21} = R^3\left[H(\alpha-\xi)-\cos(\alpha-\xi)\right]q_y(\xi) - R^3\left[(\alpha-\xi)-\sin(\alpha-\xi)\right]q_x(\xi);$$

$$B_{31} = R^2\sin(\alpha-\xi)q_y(\xi) + R^2\left[\cos(\alpha-\xi)-H(\alpha-\xi)\right]q_x(\xi);$$

$$B_{41} = R\cos(\alpha-\xi)q_y(\xi) - R\sin(\alpha-\xi)q_x(\xi);$$

$$B_{51} = \left\{\left(\underline{1}+\frac{EAR^2}{EI}\right)R^2\frac{(\alpha-\xi)\sin(\alpha-\xi)}{2} - \frac{EAR^4}{EI}\left[H(\alpha-\xi)-\cos(\alpha-\xi)\right]\right\}q_y(\xi) +$$

$$+\left\{\underline{R^2\frac{(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)+\sin(\alpha-\xi)}{2}} + \frac{EAR^4}{EI}\left[(\alpha-\xi)+\frac{1}{2}(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{3}{2}\sin(\alpha-\xi)\right]\right\}q_x(\xi);$$

$$B_{61} = R\sin(\alpha-\xi)q_y(\xi) + R\cos(\alpha-\xi)q_x(\xi).$$

Подчеркнутые члены учитывают деформацию растяжения. Выражения:

$$G_{yy}(\alpha,\xi) = \left(R^4+\frac{EIR^2}{EA}\right)\frac{\sin(\alpha-\xi)-(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)}{2};$$

$$G_{yx}(\alpha,\xi) = \left(R^4+\frac{EIR^2}{EA}\right)\frac{(\alpha-\xi)\sin(\alpha-\xi)}{2} - R^4\left[H(\alpha-\xi)-\cos(\alpha-\xi)\right]; \qquad (2.35)$$

$$G_{xy}(\alpha,\xi) = \left(R^2+\frac{EAR^4}{EI}\right)\frac{(\alpha-\xi)\sin(\alpha-\xi)}{2} - \frac{EAR^4}{EI}\left[H(\alpha-\xi)-\cos(\alpha-\xi)\right];$$

$$G_{xx}(\alpha,\xi) = R^2\frac{(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)+\sin(\alpha-\xi)}{2} + \frac{EAR^4}{EI}\left[(\alpha-\xi)+\frac{1}{2}(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)-\frac{3}{2}\sin(\alpha-\xi)\right]$$

являются функциями Грина для перемещений $v(\alpha)$, $u(\alpha)$. Алгоритм их построения для системы дифференциальных уравнений отличается от алгоритма п.1.3 и сводится к отысканию свертки двух функций.

Подчеркнутые члены выражений (2.34) начинают оказывать существенное влияние при значительной пологости кругового стержня ($f/l >$ 1/3). Элементы вектора нагрузки после подстановки $q_x(\alpha)$, $q_y(\alpha)$ по (1.26), (1.27) и интегрирования принимают вид

$$B_{11} = \left(R^4+\frac{EIR^2}{EA}\right)\left\{\frac{F_y}{R}\cdot\frac{\sin(\alpha-\alpha_F)_+ - (\alpha-\alpha_F)_+\cdot\cos(\alpha-\alpha_F)_+}{2} + \frac{M}{R^2}\times\right.$$

$$\times\frac{(\alpha-\alpha_M)_+\cdot\sin(\alpha-\alpha_M)_+}{2} + q_y\left[H(\alpha-\alpha_n)-\cos(\alpha-\alpha_n)_+ - \frac{1}{2}(\alpha-\alpha_n)_+\cdot\sin(\alpha-\alpha_n)_+ -\right.$$

$$\left.\left.-H(\alpha-\alpha_\kappa)+\cos(\alpha-\alpha_k)_+ + \frac{1}{2}(\alpha-\alpha_k)_+\cdot\sin(\alpha-\alpha_k)_+\right]\right\} + \left(R^4+\frac{EIR^2}{EA}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{F_x}{R}\cdot\frac{(\alpha-\alpha_F)_+\cdot\sin(\alpha-\alpha_F)_+}{2} + \frac{q_x}{2}\{\sin(\alpha-\alpha_n)_+ - (\alpha-\alpha_n)_+\cdot\cos(\alpha-\alpha_n)_+ - \sin(\alpha-\alpha_k)_+ +\right.$$

$$\left.+(\alpha-\alpha_k)_+\cdot\cos(\alpha-\alpha_k)_+\}\right] - R^4\left\{\frac{F_x}{R}\left[H(\alpha-\alpha_F)-\cos(\alpha-\alpha_F)_+\right] + q_x\cdot\left[(\alpha-\alpha_n)_+ -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin(\alpha-\alpha_n)_+ - (\alpha-\alpha_k)_+ + \sin(\alpha-\alpha_k)_+\right]\right\}; \qquad (2.36)$$

$$B_{21} = F_y R^2 \left[H(\alpha - \alpha_F) - \cos(\alpha - \alpha_F)_+\right] + MR\sin(\alpha - \alpha_M)_+ + q_y R^3 \left[(\alpha - \alpha_n)_+ - \sin(\alpha - \alpha_n)_+ - \right.$$

$$\left. - (\alpha - \alpha_k)_+ + \sin(\alpha - \alpha_k)_+\right] - F_x R^2 \left[(\alpha - \alpha_F)_+ - \sin(\alpha - \alpha_F)_+\right] - q_x R^3 \left[\frac{(\alpha - \alpha_n)^2_+}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos(\alpha - \alpha_n)_+ - \frac{(\alpha - \alpha_k)^2_+}{2} - \cos(\alpha - \alpha_k)_+\right];$$

$$B_{31} = F_y R\sin(\alpha - \alpha_F)_+ + M\cos(\alpha - \alpha_M)_+ + q_y R^2 \left[H(\alpha - \alpha_n) - \cos(\alpha - \alpha_n)_+ - \right.$$

$$\left. - H(\alpha - \alpha_k) + \cos(\alpha - \alpha_k)_+\right] - F_x R\left[H(\alpha - \alpha_F) - \cos(\alpha - \alpha_F)_+\right] - q_y R^2 \left[(\alpha - \alpha_n)_+ - \right.$$

$$\left. - \sin(\alpha - \alpha_n)_+ - (\alpha - \alpha_k)_+ + \sin(\alpha - \alpha_k)_+\right];$$

$$B_{41} = F_y \cos(\alpha - \alpha_F)_+ + \frac{M}{R}\left[-\sin(\alpha - \alpha_M)_+\right] + q_y R\left[\sin(\alpha - \alpha_n)_+ - \sin(\alpha - \alpha_k)_+\right] -$$

$$- F_x \sin(\alpha - \alpha_F)_+ - q_x R\left[H(\alpha - \alpha_n) - \cos(\alpha - \alpha_n)_+ - H(\alpha - \alpha_k) + \cos(\alpha - \alpha_k)_+\right];$$

$$B_{51} = F_y \left\{\left(1 + \frac{EAR^2}{EI}\right) R\frac{(\alpha - \alpha_F)_+ \cdot \sin(\alpha - \alpha_F)_+}{2} - \frac{EAR^3}{EI}\left[H(\alpha - \alpha_F) - \cos(\alpha - \alpha_F)_+\right]\right\} +$$

$$+ M\left[\left(1 + \frac{EAR^2}{EI}\right)\frac{\sin(\alpha - \alpha_M)_+ + (\alpha - \alpha_M)_+ \cos(\alpha - \alpha_M)_+}{2} - \frac{EAR^2}{EI}\sin(\alpha - \alpha_M)_+\right] + q_y \left\{\left(1 + \frac{EAR^2}{EI}\right) \times \right.$$

$$\left. \times R^2 \frac{\sin(\alpha - \alpha_n)_+ - (\alpha - \alpha_n)_+ \cos(\alpha - \alpha_n)_+ - \sin(\alpha - \alpha_\kappa)_+ - (\alpha - \alpha_\kappa)_+ \cos(\alpha - \alpha_\kappa)_+}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{EAR^4}{EI}\left[(\alpha - \alpha_H)_+ - \sin(\alpha - \alpha_H)_+ - (\alpha - \alpha_k)_+ + \sin(\alpha - \alpha_\kappa)_+\right]\right\} +$$

$$+ F_x \left\{R\frac{(\alpha - \alpha_F)_+ \cdot \cos(\alpha - \alpha_F)_+ + \sin(\alpha - \alpha_F)_+}{2} + \frac{EAR^3}{EI}\left[(\alpha - \alpha_F)_+ + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_F)_+ \cdot \cos(\alpha - \alpha_F)_+ - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{3}{2}\sin(\alpha - \alpha_F)_+\right]\right\} + q_x \left\{\frac{R^2}{2}\left[(\alpha - \alpha_n)_+ \cdot \sin(\alpha - \alpha_n)_+ - (\alpha - \alpha_\kappa)_+ \cdot \sin(\alpha - \alpha_\kappa)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{EAR^4}{EI}\left[\frac{(\alpha - \alpha_n)^2_+}{2} + 2\cos(\alpha - \alpha_n)_+ - 2H(\alpha - \alpha_n) + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_n)_+ \cdot \sin(\alpha - \alpha_n)_+ - \frac{(\alpha - \alpha_\kappa)^2_+}{2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\cos(\alpha - \alpha_\kappa)_+ + 2H(\alpha - \alpha_\kappa) - \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_k)_+ \cdot \sin(\alpha - \alpha_k)_+\right]\right\};$$

$$B_{61} = F_y \sin(\alpha - \alpha_F)_+ + \frac{M}{R}\cos(\alpha - \alpha_M)_+ + q_y R\left[H(\alpha - \alpha_n) - \cos(\alpha - \alpha_n)_+ - \right.$$

$$\left. - H(\alpha - \alpha_\kappa) + \cos(\alpha - \alpha_\kappa)_+\right] + F_x \cos(\alpha - \alpha_F)_+ + q_x R\left[\sin(\alpha - \alpha_n)_+ - \sin(\alpha - \alpha_k)_+\right]$$

В арочных системах распределенная нагрузка часто имеет вид, показанный на рисунке 2.25.

Тогда:

$$q_y(\xi) = q\cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \xi\right); \qquad q_x(\xi) = -q\sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \xi\right); \tag{2.37}$$

Если подставить выражения (2.37) в (2.34) и проинтегрировать, то элементы вектора нагрузки $\boldsymbol{B}$ уравнения (2.33) запишутся следующим образом:

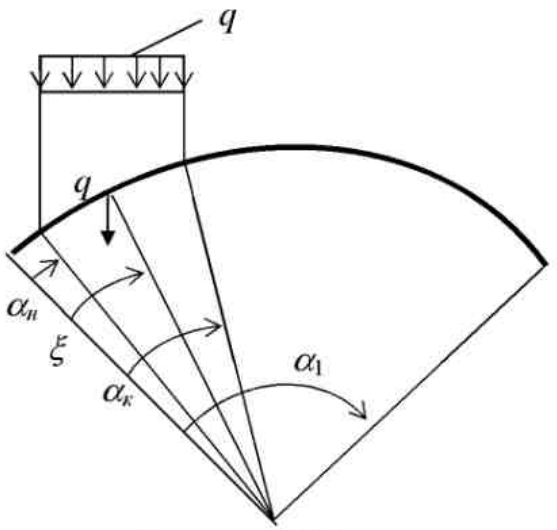


Рисунок 2.25

Если подставить выражения (2.37) в (2.34) и проинтегрировать, то элементы вектора нагрузки $\boldsymbol{B}$ уравнения (2.33) запишутся следующим образом:

$$B_{11} = q\left(R^4 + \frac{EIR^2}{EA}\right)\left[\frac{1}{4}\sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right)(\alpha - \alpha_н) + \frac{1}{8}\cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \frac{1}{8}\cos\left(\frac{\alpha_1}{2} + \alpha - 2\alpha_н\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}(\alpha - \alpha_н)^2 \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right)\right]_{\oplus} + R^4 q\left[\frac{3}{4}\cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_н\right) - \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_н)\cdot\sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\cos\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2} - 2\alpha_н\right)\right]_{\oplus} - q\left(R^4 + \frac{EIR^2}{EA}\right)\left[\frac{1}{4}\sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right)(\alpha - \alpha_к) + \frac{1}{8}\cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8}\cos\left(\frac{\alpha_1}{2} + \alpha - 2\alpha_к\right) - \frac{1}{4}(\alpha - \alpha_к)^2 \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right)\right]_{\oplus} - R^4 q\left[\frac{3}{4}\cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_к\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_к)\cdot\sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2} - 2\alpha_к\right)\right]_{\oplus}; \qquad (2.38)$$

$$B_{21} = R^3 q\left[\left\{-2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + 2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_н\right) - (\alpha - \alpha_н)\left[\cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_н\right)\right]\right\}_{\oplus} - \right.$$

$$\left. - \left\{-2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + 2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_к\right) - (\alpha - \alpha_к)\left[\cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_к\right)\right]\right\}_{\oplus}\right];$$

$$B_{31} = R^2 q\left\{\left[\sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right)(\alpha - \alpha_н) + \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_н\right)\right]_{\oplus} - \right.$$

$$\left. - \left[\sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right)(\alpha - \alpha_к) + \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_к\right)\right]_{\oplus}\right\};$$

$$B_{41} = Rq\cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right)\left[(\alpha - \alpha_н)_{\oplus} - (\alpha - \alpha_к)_{\oplus}\right].$$

$$B_{51}=\frac{EAR^4}{EI}q\left[\frac{17}{8}\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}-\alpha\right)-2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_н\right)+\frac{5}{4}(\alpha-\alpha_н)\cos\left(\alpha-\frac{\alpha_1}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+(\alpha-\alpha_н)\cos\left(\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_н\right)-\frac{1}{4}(\alpha-\alpha_н)^2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}-\alpha\right)-\frac{1}{8}\sin\left(\alpha+\frac{\alpha_1}{2}-2\alpha_н\right)\right]_{\oplus}+$$

$$+R^2q\left[-\frac{1}{4}(\alpha-\alpha_н)^2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}-\alpha\right)-\frac{1}{4}(\alpha-\alpha_н)\cos\left(\alpha-\frac{\alpha_1}{2}\right)-\frac{1}{8}\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}-\alpha\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}\sin\left(\alpha+\frac{\alpha_1}{2}-2\alpha_н\right)\right]_{\oplus}-\frac{EAR^4}{EI}q\left[\frac{17}{8}\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}-\alpha\right)-2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_k\right)+\frac{5}{4}(\alpha-\alpha_k)\cos\left(\alpha-\frac{\alpha_1}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+(\alpha-\alpha_k)\cos\left(\frac{\alpha_1}{2}-\alpha_k\right)-\frac{1}{4}(\alpha-\alpha_k)^2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}-\alpha\right)-\frac{1}{8}\sin\left(\alpha+\frac{\alpha_1}{2}-2\alpha_k\right)\right]_{\oplus}-$$

$$-qR^2\left[-\frac{1}{4}(\alpha-\alpha_k)^2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}-\alpha\right)-\frac{1}{4}(\alpha-\alpha_k)\cos\left(\alpha-\frac{\alpha_1}{2}\right)-\frac{1}{8}\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}-\alpha\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}\sin\left(\alpha+\frac{\alpha_1}{2}-2\alpha_k\right)\right]_{\oplus};$$

$$B_{61}=qR\sin\left(\alpha-\frac{\alpha_1}{2}\right)\left[(\alpha-\alpha_н)_{\oplus}-(\alpha-\alpha_k)_{\oplus}\right], \qquad (2.38)$$

где символ $\oplus$ обозначает, что соответствующее выражение в скобках является сплайн-функцией аргументов (α - $\alpha_н$), (α - $\alpha_к$). Таким образом, уравнение (2.33) с правыми частями (2.36), (2.38) будет являться аналитическим решением системы дифференциальных уравнений (2.30) для кругового стержня, а принятые допущения при его построении соответствуют точности третьего приближения по классификации проф. А.П.Филина [330].

2.5.3 Расчет плоских комбинированных арочных систем

Достоверность результатов применения уравнения МГЭ (2.33) можно оценить при вычислении граничных параметров кругового стержня.

Пример 2.12 [262, т.1, с.297] Построить эпюры *M, Q, N* кругового стержня (рисунок 2.26) с радиусом R = 30 м.

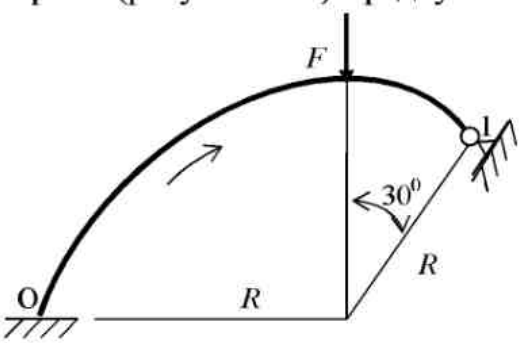


Рисунок 2.26

Стержень не имеет промежуточных связей, поэтому сразу можно записать систему уравнений для определения граничных параметров, где элементы матриц $\boldsymbol{A_н}$, $\boldsymbol{B}$ вычисляются по формулам (2.34), (2.36) при $\alpha = 2\pi/3$; $\alpha_F = \pi/2$; F =1.

	1	2	3	4	5	6
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$		A_{16}
2	-1		$-A_{23}$	$-A_{13}$		A_{26}
3			A_{22}	A_{12}		$-A_{36}$
4		-1		A_{11}		$-A_{46}$
5			$-A_{53}$	$-A_{54}$		A_{56}
6				$-A_{64}$	-1	A_{11}

$EIv_{(0)}^{0-1}=0;\ EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}$		$EIv_{(\ell)}^{0-1}=0$	3	$-B_{11}$
$EI\varphi_{(0)}^{0-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{0-1}$		$EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}$	1	$-B_{21}$
$M_{(0)}^{0-1}$	$-$	$M_{(\ell)}^{0-1}=0$	$=$ 4	B_{31}
$Q_{(0)}^{0-1}$		$Q_{(\ell)}^{0-1}$	2	B_{41}
$EAu_{(0)}^{0-1}=0;\ N_{(\ell)}^{0-1}$		$EAu_{(\ell)}^{0-1}=0$	6	B_{51}
$N_{(0)}^{0-1}$		$N_{(\ell)}^{0-1}$	5	B_{61}

Переставляя строки матриц $\boldsymbol{A}_{*}$, $\boldsymbol{B}$ в новом порядке, как показано цифрами справа, методом Гаусса определяем граничные параметры с учетом и без учета деформации растяжения. Последние сведены в таблицу 2.5. Там же приведены результаты расчета по методу сил, где коэффициенты канонических уравнений вычислялись с учетом деформаций изгиба, сдвига и растяжения.

Таблица 2.5

Граничные параметры	Метод сил [262]	МГЭ с учетом деформации растяжения	МГЭ без учета деформации растяжения
$EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}$	--	-0,030772 FR^2	-0,030582 FR^2
$Q_{(\ell)}^{0-1}$	-0,125192 F	-0,125018 F	-0,124306 F
$M_{(0)}^{0-1}$	0,137860 FR	0,137981 FR	0,138437 FR
$Q_{(0)}^{0-1}$	-0,531752 F	-0,531995 F	-0,532971 F
$N_{(\ell)}^{0-1}$	-0,686294 F	-0,686474 F	-0,687190 F
$N_{(0)}^{0-1}$	-0,548434 F	-0,548494 F	-0,548753 F

Анализ данных таблицы 2.5 показывает, что результаты МГЭ с учетом деформации растяжения совпадает с 3-мя значащими цифрами точного решения, а точность результатов МГЭ без учета деформации растяжения тоже достаточно высока, хотя совпадают только 2 значащие цифры, т.е. влияние деформаций сдвига и растяжения при заданных геометрических соотношениях жесткого стержня невелико. Эпюры M, Q, N представлены на рисунке 2.27.

Данный пример показывает, что уравнение МГЭ (2.33) может быть использовано как эталонное решение задачи плоского деформирования жесткого кругового стержня. Практическое применение оно может найти и в расчетах стержневых систем, имеющих криволинейные стержни. Особенности расчета таких систем будут заключаться в составлении уравнений равновесия и совместности перемещений узлов, где сходятся криволинейные и прямолинейные стержни. Уравнения связи граничных параметров будут иметь более сложный вид, чем такие же уравнения прямолинейных стержней.

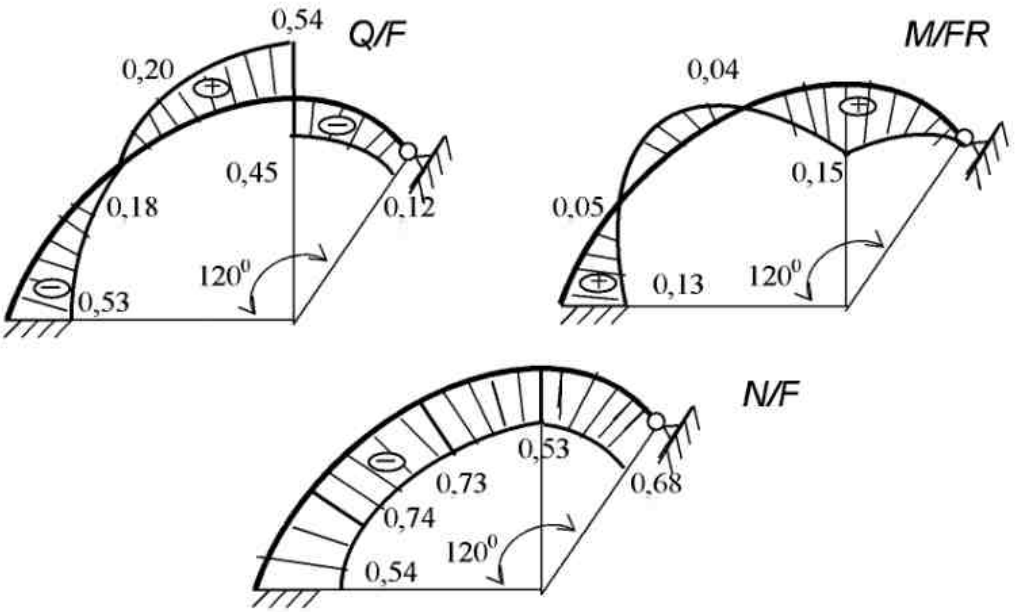


Рисунок 2.27

Пример 2.13 [274,с.109]. Определить граничные параметры стержневой системы с криволинейными ригелями, очерченными по дуге окружности, и загруженной равномерно распределенной нагрузкой 40кН/м (рисунок 2.28).

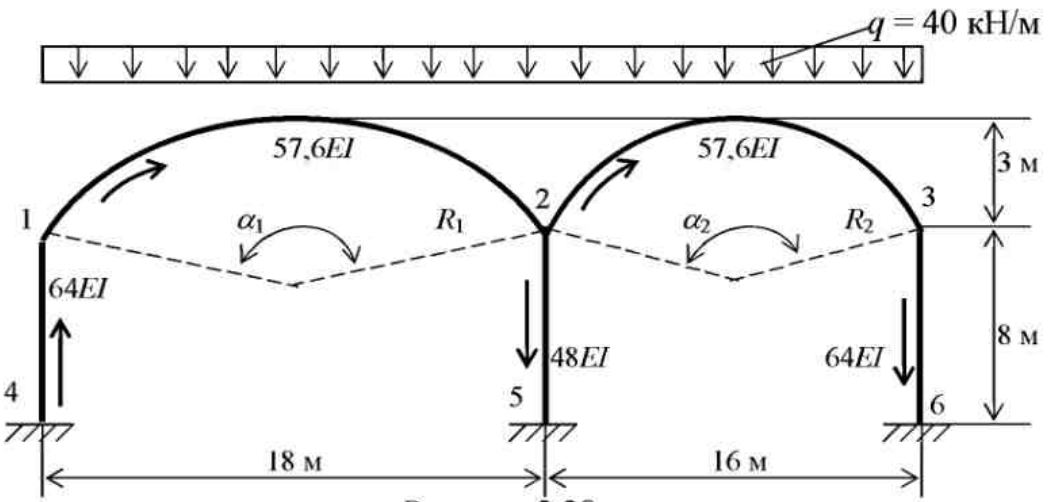


Рисунок 2.28

1 Разбиваем раму на 3 прямолинейных и 2 криволинейных стержня и нумеруем узлы. Стрелки показывают начало и конец каждого стержня. Для ригелей радиусы кривизны и значения центральных углов будут равны

$R_1 = 15$ м; $\alpha_1 = 73{,}739796^0$; $R_2 = 12{,}1666$ м; $\alpha_2 = 82{,}2242^0$

2 Формируем уравнение МГЭ по схеме (1.46). Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1 и 2 показаны в матрицах $\boldsymbol{X}_*$, $\boldsymbol{Y}$.

Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1, 2, 3 составлялись с учетом направления оси ОУ «вниз» для всех стержней и схемы деформирования рамы по рисунку 2.29. Для криволинейных стержней использовалось уравнение (2.33), для прямолинейных – уравнение изгиба (2.11) с нормальными силами.

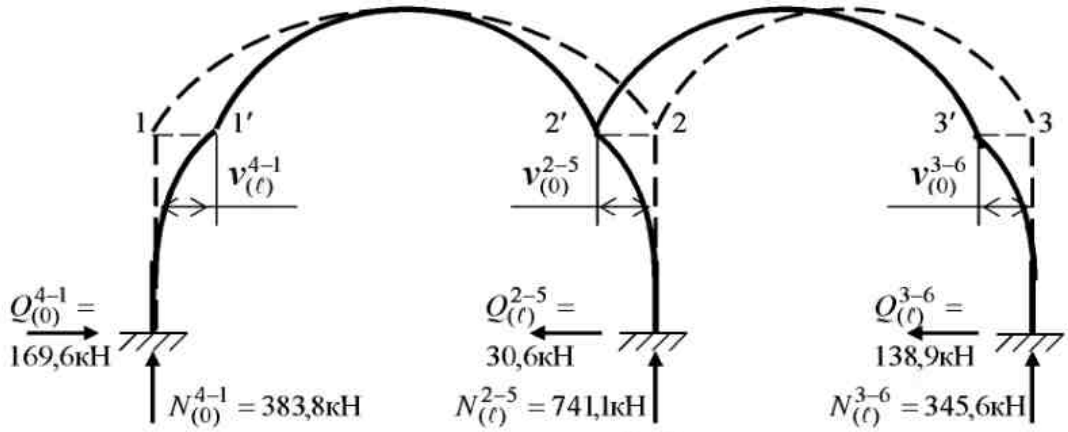


Рисунок 2.29

При вычислении элементов вектора нагрузки использовались выражения (2.38) при $\alpha_н = 0^0$; $\alpha_к = \alpha_1, \alpha_2$.

Ненулевые элементы вектора **B** рамы будут равны:

$B_{11}^{1-2} = 210353{,}361$кНм^3; $B_{21}^{1-2} = 46007{,}5183$кНм^2; $B_{31}^{1-2} = 6949{,}812$кНм;

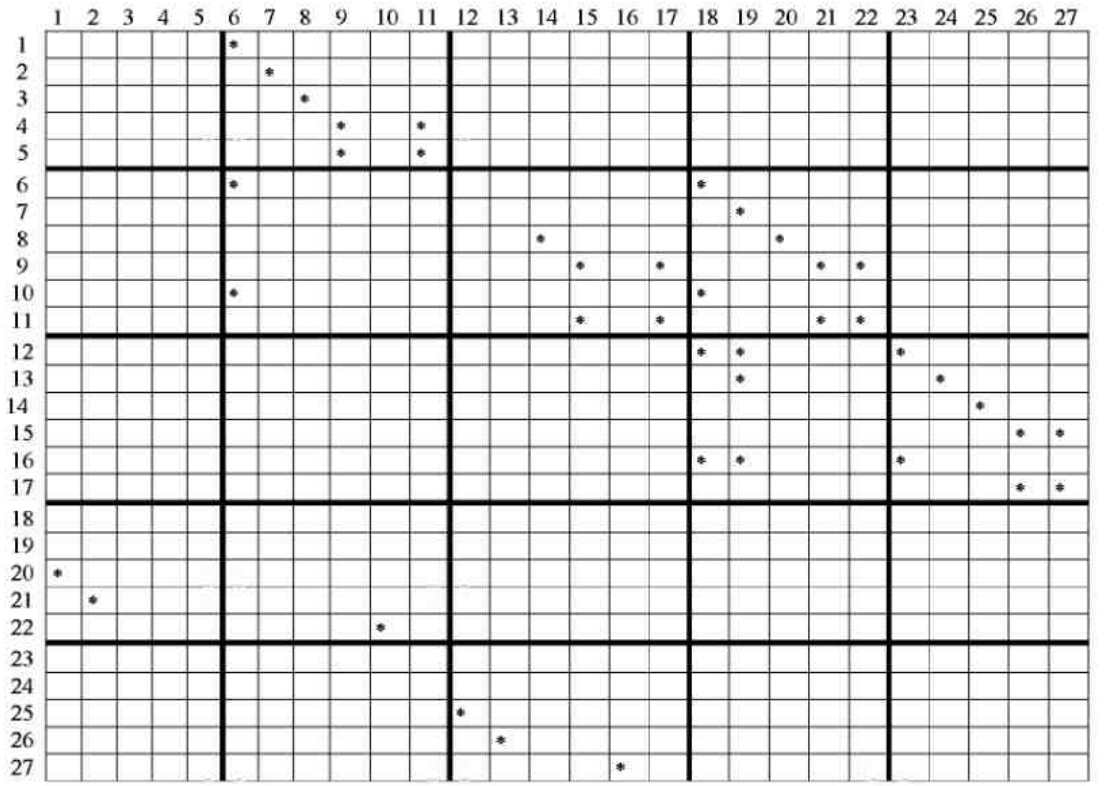
$B_{41}^{1-2} = 617{,}761$кН; $B_{51}^{1-2} = -652989{,}031$кНм; $B_{61}^{1-2} = 463{,}320$кН;

$B_{11}^{2-3} = 137550{,}528$кНм^3; $B_{21}^{2-3} = 33692{,}015$кНм^2; $B_{31}^{2-3} = 5587{,}255$кНм;

$B_{41}^{2-3} = 526{,}196$кН; $B_{51}^{2-3} = -476627{,}493$кНм; $B_{61}^{2-3} = 459{,}226$кН.

В матрице $\boldsymbol{X}_*$ нулевыми оказались 1, 2, 10, 12, 13 и 16 строки. Соответственно обнуляются в матрице **A** столбцы с такими же номерами. Система уравнений МГЭ будет содержать 27 уравнений. Из-за больших размеров матриц ниже представлены только их схемы. Топологическая матрица имеет вид

C=



$\boldsymbol{X}_* =$

1	$64EIv_{(0)}^{4-1} = 0; \qquad M_{(\ell)}^{2-5}$
2	$64EI\varphi_{(0)}^{4-1} = 0; \qquad Q_{(\ell)}^{2-5}$
3	$M_{(0)}^{4-1}$
4	$Q_{(0)}^{4-1}$
5	$N_{(0)}^{4-1}$
6	$57{,}6EIv_{(0)}^{1-2}$
7	$57{,}6EI\varphi_{(0)}^{1-2}$
8	$M_{(0)}^{1-2}$
9	$Q_{(0)}^{1-2}$
10	$EA\left[u_{(0)}^{1-2} = v_{(0)}^{1-2} \cdot ctg\frac{\alpha_1}{2}\right]; \qquad N_{(\ell)}^{2-5}$
11	$N_{(0)}^{1-2}$
12	$57{,}6EI\left[v_{(0)}^{2-3} = -v_{(0)}^{2-5} \cdot \sin\frac{\alpha_2}{2}\right]; \quad M_{(\ell)}^{3-6}$
13	$57{,}6EI\left[\varphi_{(0)}^{2-3} = \varphi_{(0)}^{2-5}\right]; \quad Q_{(\ell)}^{3-6}$
14	$M_{(0)}^{2-3}$
15	$Q_{(0)}^{2-3}$
16	$EA\left[u_{(0)}^{2-3} = -v_{(0)}^{2-5} \cdot \cos\frac{\alpha_2}{2}\right]; \quad N_{(\ell)}^{3-6}$
17	$N_{(0)}^{2-3}$
18	$48EIv_{(0)}^{2-5}$
19	$48EI\varphi_{(0)}^{2-5}$
20	$M_{(0)}^{2-5}$
21	$Q_{(0)}^{2-5}$
22	$N_{(0)}^{2-5}$
23	$64EIv_{(0)}^{3-6}$
24	$64EI\varphi_{(0)}^{3-6}$
25	$M_{(0)}^{3-6}$
26	$Q_{(0)}^{3-6}$
27	$N_{(0)}^{3-6}$

;

$$\boldsymbol{Y}=$$

1	$64EIv_{(\ell)}^{4-1} = 64EIv_{(0)}^{1-2} \Big/ \sin\frac{\alpha_1}{2}$
2	$64EI\varphi_{(\ell)}^{4-1} = 64EI\varphi_{(0)}^{1-2}$
3	$M_{(\ell)}^{4-1} = M_{(0)}^{1-2}$
4	$Q_{(\ell)}^{4-1} = N_{(0)}^{1-2} \cdot \cos\frac{\alpha_1}{2} + Q_{(0)}^{1-2} \cdot \sin\frac{\alpha_1}{2}$
5	$N_{(\ell)}^{4-1} = N_{(0)}^{1-2} \cdot \sin\frac{\alpha_1}{2} - Q_{(0)}^{1-2} \cdot \cos\frac{\alpha_1}{2}$
6	$57{,}6EIv_{(\ell)}^{1-2} = 57{,}6EIv_{(0)}^{2-5} \cdot \sin\frac{\alpha_1}{2}$
7	$57{,}6EI\varphi_{(\ell)}^{1-2} = 57{,}6EI\varphi_{(0)}^{2-5}$
8	$M_{(\ell)}^{1-2} = M_{(0)}^{2-5} + M_{(0)}^{2-3}$
9	$Q_{(\ell)}^{1-2} = Q_{(0)}^{2-5} \cdot \sin\frac{\alpha_1}{2} + N_{(0)}^{2-5} \cdot \cos\frac{\alpha_1}{2} - N_{(0)}^{2-3} \cdot \sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + Q_{(0)}^{2-3} \cdot \cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$
10	$EAu_{(\ell)}^{1-2} = -12 \cdot 57{,}6EIv_{(0)}^{2-5} \cdot \cos\frac{\alpha_1}{2}$
11	$N_{(\ell)}^{1-2} = -Q_{(0)}^{2-5} \cdot \cos\frac{\alpha_1}{2} + N_{(0)}^{2-5} \cdot \sin\frac{\alpha_1}{2} + N_{(0)}^{2-3} \cdot \cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + Q_{(0)}^{2-3} \cdot \sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$
12	$57{,}6EIv_{(\ell)}^{2-3} = 57{,}6EIv_{(0)}^{3-6} \cdot \sin\frac{\alpha_2}{2}$
13	$57{,}6EI\varphi_{(\ell)}^{2-3} = 57{,}6EI\varphi_{(0)}^{3-6}$
14	$M_{(\ell)}^{2-3} = M_{(0)}^{3-6}$
15	$Q_{(\ell)}^{2-3} = Q_{(0)}^{3-6} \cdot \sin\frac{\alpha_2}{2} + N_{(0)}^{3-6} \cdot \cos\frac{\alpha_2}{2}$
16	$EAu_{(\ell)}^{2-3} = -12 \cdot 57{,}6EIv_{(0)}^{3-6} \cdot \cos\frac{\alpha_2}{2}$
17	$N_{(\ell)}^{2-3} = -Q_{(0)}^{3-6} \cdot \cos\frac{\alpha_2}{2} + N_{(0)}^{3-6} \cdot \sin\frac{\alpha_2}{2}$
18	$48EIv_{(\ell)}^{2-5} = 0$
19	$48EI\varphi_{(\ell)}^{2-5} = 0$
20	$M_{(\ell)}^{2-5}$
21	$Q_{(\ell)}^{2-5}$
22	$N_{(\ell)}^{2-5}$
23	$64EIv_{(\ell)}^{3-6} = 0$
24	$64EI\varphi_{(\ell)}^{3-6} = 0$
25	$M_{(\ell)}^{3-6}$
26	$Q_{(\ell)}^{3-6}$
27	$N_{(\ell)}^{3-6}$

Компенсирующие элементы матрицы $\boldsymbol{C}$ будут равны:

$A(1,6) = -\dfrac{64}{57,6\sin\frac{\alpha_1}{2}} = -1,851851;$ $A(2,7) = -\dfrac{64}{57,6};$ $A(3,8) = -1;$

$A(4,9) = -0,6;$ $A(4,11) = -0,8;$ $A(5,9) = 0,8;$ $A(5,11) = -0,6;$

$A(6,6) = 12A_{15}^{1-2} \cdot ctg\frac{\alpha_1}{2} = -1,28;$ $A(6,18) = -\dfrac{57,6}{48\sin\frac{\alpha_1}{2}} = -0,72;$ $A(7,19) = -\dfrac{57,6}{48};$

$A(8,14) = -1;$ $A(8,20) = -1;$ $A(9,15) = -\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = -0,208219;$

$A(9,17) = \sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = 0,978082;$ $A(9,21) = -0,6;$ $A(9,22) = -0,8;$

$A(10,6) = 12A_{11}^{1-2} \cdot ctg\frac{\alpha_1}{2} = 4,48;$ $A(10,18) = -\dfrac{12\cdot 57,6}{48} \cdot \cos\frac{\alpha_1}{2} = 11,52;$

$A(11,15) = -\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = -0,978082;$ $A(11,17) = -\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = -0,208219;$

$A(11,21) = 0,8;$ $A(11,22) = -0,6;$

$A(12,18) = -\dfrac{57,6}{48}A_{11}^{2-3} \cdot \sin\frac{\alpha_2}{2} - \dfrac{12\cdot 57,6}{48}A_{15}^{2-3} \cdot \cos\frac{\alpha_2}{2} = -0,789041;$

$A(12,19) = \dfrac{57,6}{48}A_{12}^{2-3} = 14,465753;$ $A(12,23) = -\dfrac{57,6}{64}\sin\frac{\alpha_2}{2} = -0,591780;$

$A(13,19) = \dfrac{57,6}{48}A_{22}^{2-3} = 1,2;$ $A(13,24) = -\dfrac{57,6}{48};$ $A(14,25) = -1;$

$A(15,26) = -\sin\frac{\alpha_2}{2} = -0,657534;$ $A(15,27) = -\cos\frac{\alpha_2}{2} = -0,753424;$

$A(16,18) = -\dfrac{57,6}{48}A_{51}^{2-3} \cdot \sin\frac{\alpha_2}{2} - \dfrac{12\cdot 57,6}{48}A_{11}^{2-3} \cdot \cos\frac{\alpha_2}{2} = -10,849315;$

$A(16,23) = \dfrac{12\cdot 57,6}{64}\cos\frac{\alpha_2}{2} = 8,136986;$ $A(17,26) = \cos\frac{\alpha_2}{2} = 0,753424;$

$A(17,27) = -\sin\frac{\alpha_2}{2} = -0,657534;$ $A(20,1) = -1;$ $A(21,2) = -1;$

$A(22,10) = -1;$ $A(25,12) = -1;$ $A(26,13) = -1;$ $A(27,16) = -1;$

Граничные значения фундаментальных функций криволинейных стержней вычислялись по формулам (2.34). Система уравнений МГЭ для рамы представлена ниже.

3 Переставляя строки матриц $\boldsymbol{A}_*$, $\boldsymbol{B}$, как показано цифрами справа, методом Гаусса получаем значения граничных параметров. Последние сведены в таблицу 2.6. Там же представлены результаты по методу перемещений [274]. В данном примере не учитывались продольные перемещения прямолинейных стержней. Поэтому значения параметров изгиба стержней (соответственно и нормальных сил) по МГЭ будут больше их действительных значений. Следствием этого является неравенство равнодействующей внешней нагрузки $q\cdot 34 = 1360$ кН сумме нормальных сил прямолинейных стержней $N_{(0)}^{4-1} + N_{(\ell)}^{2-5} + N_{(\ell)}^{3-6} = 1470,5$ кН, а равенство нулю поперечных реакций выполняется (рисунок 2.29). Заметная разница в результатах разных методов объясняется этими причинами, а также тем, что в работе [274] круговые ригеля были заменены параболическими.

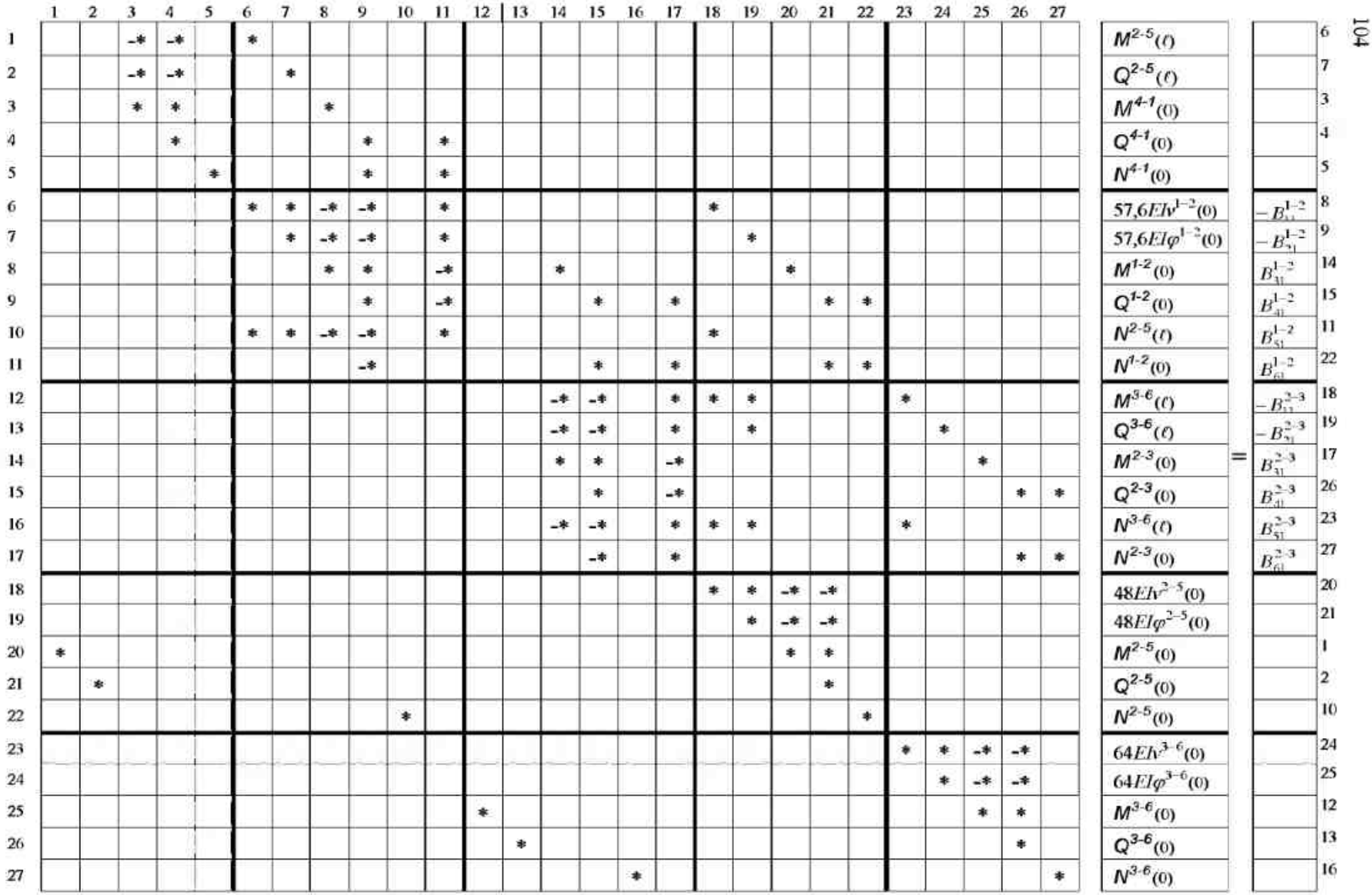

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27
$M^{2-5}(\ell)$
$Q^{2-5}(\ell)$
$M^{4-1}(0)$
$Q^{4-1}(0)$
$N^{4-1}(0)$
$57{,}6EIv^{1-2}(0)$
$57{,}6EI\varphi^{1-2}(0)$
$M^{1-2}(0)$
$Q^{1-2}(0)$
$N^{2-5}(\ell)$
$N^{1-2}(0)$
$M^{3-6}(\ell)$
$Q^{3-6}(\ell)$
$M^{2-3}(0)$
$Q^{2-3}(0)$
$N^{3-6}(\ell)$
$N^{2-3}(0)$
$48EIv^{2-5}(0)$
$48EI\varphi^{2-5}(0)$
$M^{2-5}(0)$
$Q^{2-5}(0)$
$N^{2-5}(0)$
$64EIv^{3-6}(0)$
$64EI\varphi^{3-6}(0)$
$M^{3-6}(0)$
$Q^{3-6}(0)$
$N^{3-6}(0)$
=
$-B_{11}^{1-2}$
$-B_{21}^{1-2}$
B_{31}^{1-2}
B_{41}^{1-2}
B_{51}^{1-2}
B_{61}^{1-2}
$-B_{12}^{2-3}$
$-B_{22}^{2-3}$
B_{32}^{2-3}
B_{42}^{2-3}
B_{52}^{2-3}
B_{62}^{2-3}
6 7 3 4 5 8 9 14 15 11 22 18 19 17 26 23 27 20 21 1 2 10 24 25 12 13 16

Таблица 2.6

	Граничные параметры	МГЭ	Метод С.А.Рогицкого [274]	% расхождений
1	$M_{(\ell)}^{2-5}$, кНм	-110,1858	-98,6	10,5
2	$Q_{(\ell)}^{2-5}$, кН	-30,6751	-	-
3	$M_{(0)}^{4-1}$, кНм	-642,3197	-618,1	3,77
4	$Q_{(0)}^{4-1}$, кН	169,6154	-	-
5	$N_{(0)}^{4-1}$, кН	383,8163	-	-
6	$57,6EIv_{(0)}^{1-2}$, кНм^3	3283,4072	-	-
7	$57,6EI\varphi_{(0)}^{1-2}$, кНм^2	-260,2222	-	-
8	$M_{(0)}^{1-2}$, кНм	714,6036	665,9	6,82
9	$Q_{(0)}^{1-2}$, кН	-205,2838	-	-
10	$N_{(\ell)}^{2-5}$, кН	741,1364	-	-
11	$N_{(0)}^{1-2}$, кН	365,9821	-	-
12	$M_{(\ell)}^{3-6}$, кНм	-547,7885	-524,7	4,21
13	$Q_{(\ell)}^{3-6}$, кН	-138,9402	-	-
14	$M_{(0)}^{2-3}$, кНм	620,5054	549,2	11,5
15	$Q_{(0)}^{2-3}$, кН	-174,4137	-	-
16	$N_{(\ell)}^{3-6}$, кН	345,6552	-	-
17	$N_{(0)}^{3-6}$, кН	336,6272	-	-
18	$48EIv_{(0)}^{2-5}$, кНм^3	908,3314	-	-
19	$48EI\varphi_{(0)}^{2-5}$, кНм^2	100,1191	-	-
20	$M_{(0)}^{2-5}$, кНм	135,2156	136,9	1,25
21	$Q_{(0)}^{2-5}$, кН	-30,6751	-	-
22	$N_{(0)}^{2-5}$, кН	741,1364	-	-
23	$64EIv_{(0)}^{3-6}$, кНм^3	5672,9969	-	-
24	$64EI\varphi_{(0)}^{3-6}$, кНм^2	63,7806	-	-
25	$M_{(0)}^{3-6}$, кНм	563,7337	524,7	6,92
26	$Q_{(0)}^{3-6}$, кН	9402	-	-
27	$N_{(0)}^{3-6}$, кН	345,6552	-	-

В заключении данного параграфа отметим, что многочисленные задачи расчета колец и кольцевых систем, приведенных в справочнике[262,т.1,с.321, 365], могут быть решены с помощью уравнения МГЭ (2.33) в более точной постановке, дополнительно учитывая деформацию растяжения-сжатия оси кольца.

2.6 МКЭ в задачах статики стержневых систем

В данном параграфе приведены решения задач статики стержневых систем по алгоритму МКЭ, изложенному в п.1.6. Сделано это с целью сравнения аналитического варианта МГЭ и варианта МКЭ в форме метода перемещений. Представленные решения задач по МКЭ здесь и ниже выполнены под редакцией д-ра техн. наук, профессора Д.Д.Работягова.

Пример 2.14 Построить эпюры M, Q, N в статически неопределимой плоской раме (рисунок 2.30). Алгоритм МКЭ представим рядом пунктов.

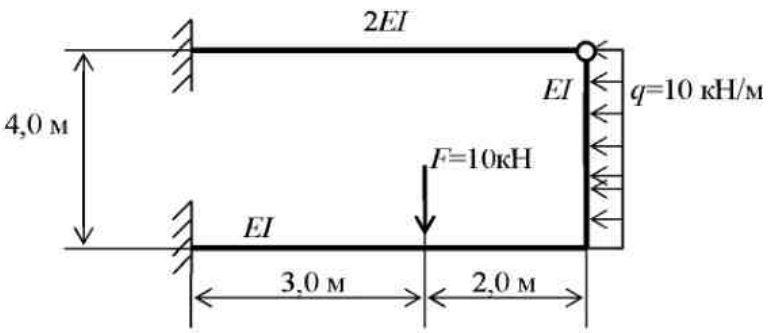
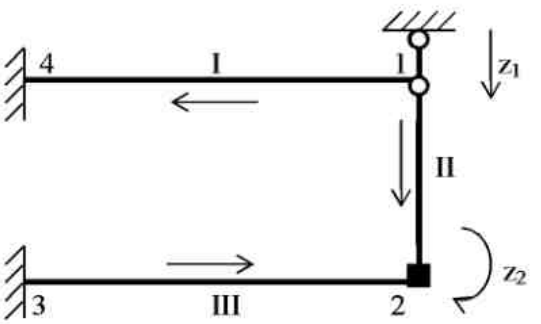


Рисунок 2.30

1 Формируем основную систему метода перемещений.



Данная рама является два раза кинематически неопределимой. Поэтому в заданную систему вводим две связи (рисунок 2.31), нумеруем конечные элементы и стрелками указываем начало и конец каждого КЭ.

Рисунок 2.31

2 В основной системе строим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки (рисунок 2.32). По этим эпюрам формируем матрицы реакций КЭ от внеузловых воздействий.

$$\overset{0}{S}_{\text{I}} = \begin{vmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{vmatrix}; \qquad \overset{0}{S}_{\text{II}} = \begin{vmatrix} -15{,}0 \\ -25{,}0 \\ 20{,}0 \end{vmatrix}; \qquad \overset{0}{S}_{\text{III}} = \begin{vmatrix} -3{,}52 \\ -4{,}8 \\ -6{,}48 \\ 7{,}2 \end{vmatrix}.$$

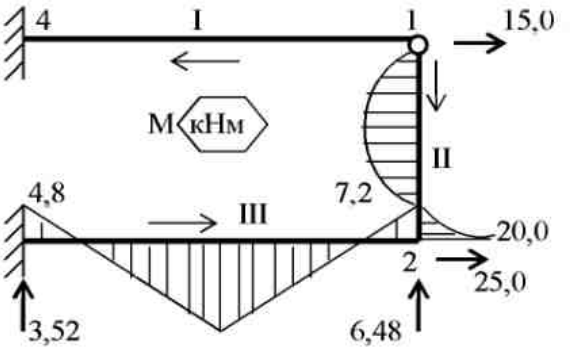


Рисунок 2.32

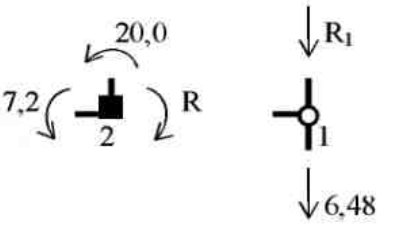


Рисунок 2.33

Составляя уравнения равновесия узлов, находим компоненты вектора нагрузки (рисунок 2.33).

$$\sum x_{(1)} = 0 \rightarrow R_1 + 6{,}48 = 0 \rightarrow R_1 = -6{,}48\text{кН};$$

$$\sum m_{(2)} = 0 \rightarrow R_2 - 20{,}0 - 7{,}2 = 0 \rightarrow R_2 = 27{,}2\text{кНм};$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6{,}48 \\ 27{,}2 \end{vmatrix}.$$

3 Изображаем деформированное состояние рамы при z_1=1 и z_2=1 и формируем матрицы преобразования перемещений к глобальной системе координат (рисунок 2.34).

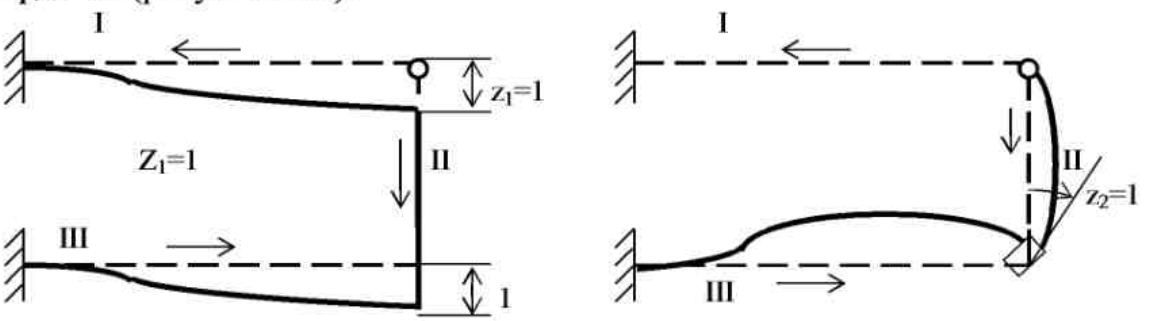


Рисунок 2.34

$$\boldsymbol{C}_{\text{I}} = \begin{array}{c} z_1{=}1 \;\; z_2{=}1 \\ \left|\begin{array}{cc} v_1 & v_1 \\ v_4 & v_4 \\ \varphi_4 & \varphi_4 \end{array}\right| \end{array} = \left|\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right|; \quad \boldsymbol{C}_{\text{II}} = \left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right|; \quad \boldsymbol{C}_{\text{III}} = \left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right|.$$

4 Формируем МЖ КЭ в локальной системе координат

$$k_{\text{I}} = \frac{3EI}{5}\left|\begin{array}{ccc} 1/25 & -1/25 & 1/5 \\ -1/25 & 1/25 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 1 \end{array}\right|; \quad k_{\text{II}} = \frac{3EI}{4}\left|\begin{array}{ccc} 1/16 & -1/16 & 1/4 \\ -1/16 & 1/16 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1 \end{array}\right|$$

$$k_{III} = \frac{2EI}{5}\begin{vmatrix} 6/25 & 3/5 & -6/25 & 3/5 \\ 3/5 & 2 & -3/5 & 1 \\ -6/25 & -3/5 & 6/25 & -3/5 \\ 3/5 & 1 & -3/5 & 2 \end{vmatrix}.$$

5 МЖ КЭ в глобальной системе координат

$$K_I = c_I^T k_I c_I = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{3EI}{5} \begin{vmatrix} 1/25 & -1/25 & 1/5 \\ -1/25 & 1/25 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{3EI}{5} \begin{vmatrix} 1/25 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$K_{II} = \frac{3EI}{4}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \qquad K_{III} = \frac{2EI}{5}\begin{vmatrix} 6/25 & -3/5 \\ -3/5 & 2 \end{vmatrix}.$$

6 МЖ рамы

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=0}^{3} K_i = EI \begin{vmatrix} 18/125 & -6/25 \\ -6/25 & 1{,}55 \end{vmatrix}.$$

7 Система разрешающих уравнений МКЭ типа (1.51) и ее решение

$$EI \begin{vmatrix} 18/125 & -6/25 \\ -6/25 & 1{,}55 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6{,}48 \\ 27{,}2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boldsymbol{Z} = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{vmatrix} 21{,}24 \\ -14{,}27 \end{vmatrix}.$$

8 Определяем перемещения концевых сечений КЭ

$$\Delta_I = c_I \boldsymbol{Z} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{EI} \begin{vmatrix} 21{,}24 \\ -14{,}27 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{vmatrix} -21{,}24 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{II} = \frac{1}{EI}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -14{,}27 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_{III} = \frac{1}{EI}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 21{,}24 \\ -14{,}27 \end{vmatrix}.$$

9 Вычисляем поперечные силы и изгибающие моменты в концевых сечениях КЭ, строим эпюры Q, M, N (рисунок 2.35).

$$S_I = k_I \Delta_I + \overset{0}{S}_I = \frac{3EI}{5} \begin{vmatrix} 1/25 & -1/25 & 1/5 \\ -1/25 & 1/25 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{EI} \begin{vmatrix} -21{,}24 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1{,}02 \\ 1{,}02 \\ -5{,}1 \end{vmatrix};$$

$$S_{II} = \begin{vmatrix} -17{,}68 \\ -22{,}32 \\ 9{,}3 \end{vmatrix}; \qquad S_{III} = \begin{vmatrix} -8{,}98 \\ -15{,}61 \\ -1{,}02 \\ -9{,}3 \end{vmatrix}.$$

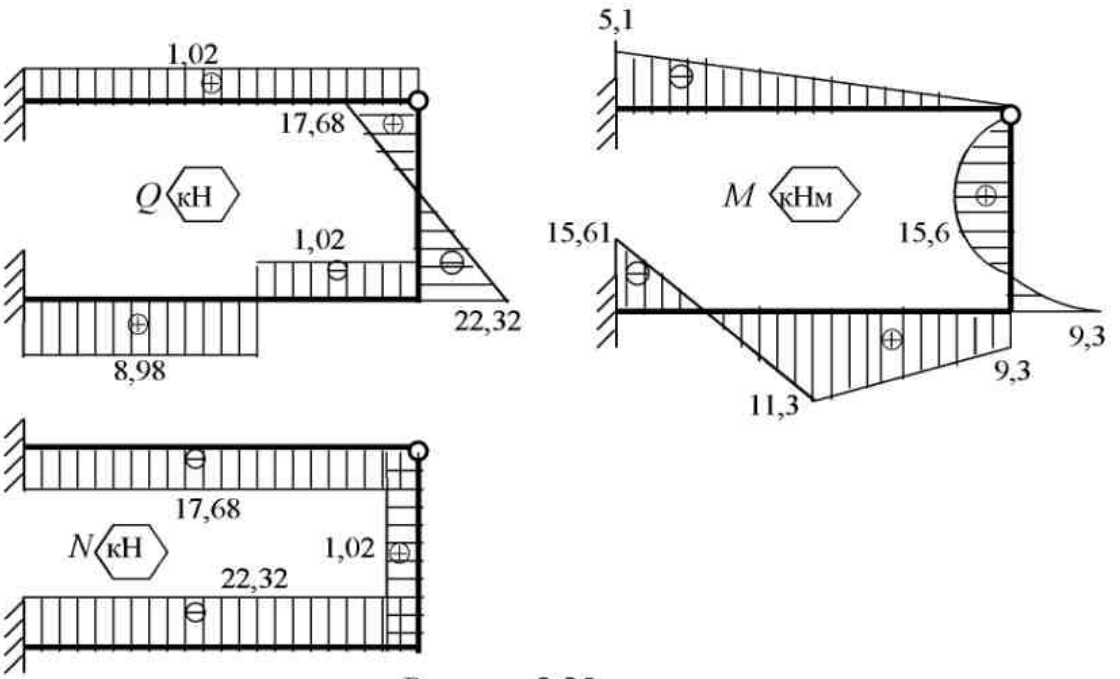


Рисунок 2.35

2.7 Соотношения МГЭ для стержней с переменной геометрией

Случай изменяющейся геометрии стержней приводит к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами (ступенчатые стержни, стержни с непрерывно меняющимися по длине сечениями, криволинейные стержни с переменными радиусами кривизны, а также стержни с изменяющимися по длине массой, сжимающей силой, коэффициентом постели и т.п.). Теория построения решений таких уравнений приводит к псевдодифференциальным уравнениям и сложным фундаментальным функциям. Известны буквально считанные случаи в механике и других науках, когда удавалось построить фундаментальные решения для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В публикациях на эту тему наметился другой подход, когда объект с распределенными параметрами заменялся объектом с кусочно-постоянными параметрами (рисунок 2.36). В этом случае все ступени описываются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, решения которых всегда можно получить. При достаточном числе ступеней решение для дискретизированного таким образом стержня будет мало отличаться от решения для стержня с распределенными параметрами. Эта простая идея довольно долго не могла быть реализована из-за отсутствия соответствующего метода расчета. Метод начальных параметров (МНП), методы сил и перемещений, МКЭ и другие методы приводят алгоритм расчета к произведениям матриц фундаментальных функций, что при большом числе ступеней существенно ухудшает точность результатов вследствие неустранимых погрешностей округления. Предлагаемый аналитический вариант МГЭ свободен от этого недостатка.

Матрица коэффициентов $\boldsymbol{A}$ для ступенчатого объекта формируется посредством операции квазидиагонализации (матричного суммирования), а ее большая разреженность по определению исключает накопление погрешностей. Поэтому в данном варианте МГЭ можно разбивать объект на большое число ступеней (1000 и более), при этом исключаются недостатки существующих методов, а результаты будут стремиться к точным значениям.

В ряде случаев, при малом числе ступеней, целесообразней использовать рекуррентные соотношения метода начальных параметров, что может существенно уменьшить порядок матрицы $\boldsymbol{A}$.

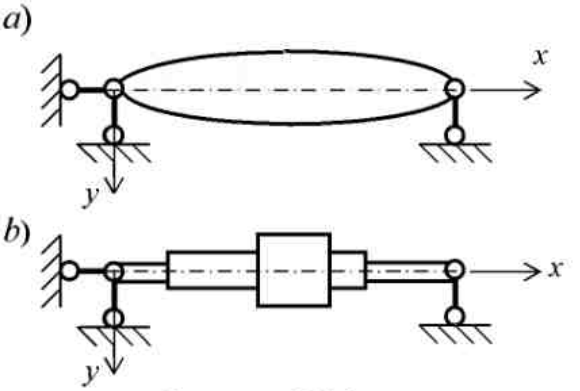


Рисунок 2.36

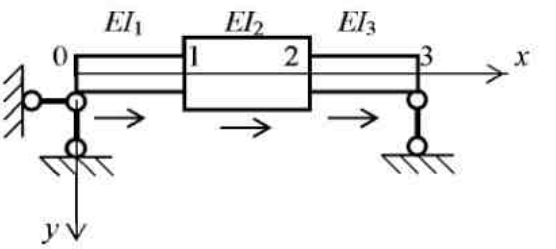


Рисунок 2.37

Рассмотрим стержень кусочно-постоянной жесткости (рисунок 2.37). Такой стержень имеет два промежуточных узла. Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов приводят к равенствам для кинематических и статических параметров (на примере поперечного изгиба).

$$\begin{vmatrix} v^{0-1}(\ell) \\ \varphi^{0-1}(\ell) \\ M^{0-1}(\ell) \\ Q^{0-1}(\ell) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{(0)}^{1-2} \\ \varphi_{(0)}^{1-2} \\ M_{(0)}^{1-2} \\ Q_{(0)}^{1-2} \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} v^{1-2}(\ell) \\ \varphi^{1-2}(\ell) \\ M^{1-2}(\ell) \\ Q^{1-2}(\ell) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{(0)}^{2-3} \\ \varphi_{(0)}^{2-3} \\ M_{(0)}^{2-3} \\ Q_{(0)}^{2-3} \end{vmatrix} \tag{2.39}$$

Уравнения МГЭ (1.40) при граничных значениях $x = l_i$ для ступеней принимают вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}^{0-1}(\ell) &= \boldsymbol{A}^{0-1}(\ell)\cdot\boldsymbol{X}_{(0)}^{0-1} + \boldsymbol{B}^{0-1}(\ell); \\ \boldsymbol{Y}^{1-2}(\ell) &= \boldsymbol{A}^{1-2}(\ell)\cdot\boldsymbol{X}_{(0)}^{1-2} + \boldsymbol{B}^{1-2}(\ell); \\ \boldsymbol{Y}^{2-3}(\ell) &= \boldsymbol{A}^{2-3}(\ell)\cdot\boldsymbol{X}_{(0)}^{2-3} + \boldsymbol{B}^{2-3}(\ell). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Из равенства (2.39) следует, что

$$\boldsymbol{Y}^{0-1}(\ell) = \boldsymbol{X}_{(0)}^{1-2}; \qquad \boldsymbol{Y}^{1-2}(\ell) = \boldsymbol{X}_{(0)}^{2-3}.$$

Если в последнее уравнение из (2.40) вместо матриц $\boldsymbol{X}_{(0)}^{2-3}, \boldsymbol{X}_{(0)}^{1-2}$ подставить выражения для матриц $\boldsymbol{Y}^{1-2}(\ell), \boldsymbol{Y}^{0-1}(\ell)$, то получим уравнение метода начальных параметров для ступенчатого стержня

$$\boldsymbol{Y}^{2-3}(\ell) = \boldsymbol{A}_{\text{П}}\cdot\boldsymbol{X}_{(0)}^{0-1} + \boldsymbol{B}_{\text{СП}}. \tag{2.41}$$

Здесь матрица граничных значений фундаментальных функций определяется в виде произведения

$$\boldsymbol{A}_{\text{П}} = \cdot\boldsymbol{A}^{2-3}(\ell)\cdot\boldsymbol{A}^{1-2}(\ell)\cdot\boldsymbol{A}^{0-1}(\ell), \tag{2.42}$$

а матрица нагрузки в виде суммы произведений

$$\boldsymbol{B}_{\text{СП}} = \boldsymbol{A}^{2-3}(\ell)\cdot\boldsymbol{A}^{1-2}(\ell)\cdot\boldsymbol{B}^{0-1}(\ell) + \boldsymbol{A}^{2-3}(\ell)\cdot\boldsymbol{B}^{1-2}(\ell) + \boldsymbol{B}^{2-3}(\ell). \tag{2.43}$$

Обобщая полученные выражения на случай m ступеней, приходим к рекуррентным соотношениям метода начальных параметров.

Матрица $\boldsymbol{A}_{\text{П}}$ вычисляется как произведение матриц $\boldsymbol{A}_i$ всех ступеней

$$\boldsymbol{A}_{\text{П}} = \prod_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_{m+1-i}, \tag{2.44}$$

где нижний индекс обозначает номер ступени стержня.

Матрица нагрузки вычисляется как сумма произведений

$$\boldsymbol{B}_{\text{СП}} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_{\text{П}i}\cdot\boldsymbol{B}_i, \tag{2.45}$$

где

$$\boldsymbol{A}_{\text{П}i} = \prod_{j=1}^{m-i} \boldsymbol{A}_{m+1-\text{j}}, \tag{2.46}$$

причем, если $j < m - i$, то $\boldsymbol{A}_{\text{П}i} = \boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{E}$ - единичная матрица. Следует учитывать, что равенства (2.39) возможны при отсутствии жесткостей, которые нужно включить в матрицы фундаментальных функций и нагрузки (на примере поперечных колебаний).

$$\boldsymbol{A}_{m+1-i} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \text{A}_{11} & \text{A}_{12} & -\dfrac{\text{A}_{13}}{EI_{m+1-i}} & -\dfrac{\text{A}_{14}}{EI_{m+1-i}} \\ \hline \text{A}_{21} & \text{A}_{11} & -\dfrac{\text{A}_{12}}{EI_{m+1-i}} & -\dfrac{\text{A}_{13}}{EI_{m+1-i}} \\ \hline -\text{A}_{31}\cdot EI_{m+1-i} & -\text{A}_{21}\cdot EI_{m+1-i} & \text{A}_{11} & \text{A}_{12} \\ \hline -\text{A}_{41}\cdot EI_{m+1-i} & -\text{A}_{31}\cdot EI_{m+1-i} & \text{A}_{21} & \text{A}_{11} \\ \hline \end{array}; \quad \boldsymbol{B}_i = \int_0^x \begin{array}{|c|}\hline \dfrac{\text{A}_{14}(x-\xi)}{EI_{m+1-i}} q_y(\xi) \\ \hline \dfrac{\text{A}_{13}(x-\xi)}{EI_{m+1-i}} q_y(\xi) \\ \hline -\text{A}_{12}(x-\xi)\, q_y(\xi) \\ \hline -\text{A}_{11}(x-\xi)\, q_y(\xi) \\ \hline \end{array} d\xi \tag{2.47}$$

Уравнение (2.41) можно записать для многоступенчатого стержня

$$\boldsymbol{Y}(\ell) = \boldsymbol{A}_{\text{П}}(\ell)\cdot\boldsymbol{X}(0) + \boldsymbol{B}_{\text{СП}}(\ell), \tag{2.48}$$

где вектор $\boldsymbol{Y}(\ell)$ содержит конечные граничные параметры, вектор $\boldsymbol{X}(0)$ – начальные параметры, а вектор $\boldsymbol{B}_{СП}(\ell)$ – внешнюю нагрузку всего стержня. Если стержневая система составлена из комбинации стержней постоянной и ступенчатой (или переменной) жесткости, то матричное уравнение МГЭ всей конструкции может содержать матрицы $\boldsymbol{A}_i(\ell)$ всех ступеней или матрицы (2.44), (2.45) в сочетании с матрицами ступеней постоянной жесткости. В последнем случае порядок общего матричного уравнения уменьшается. Соответствующий пример рассмотрен в следующем параграфе.

2.8 Применение системного подхода

Идея системного подхода к расчету стержневых систем изложена в работе [278]. В этом случае любая стержневая система может быть представлена набором Г-образных, Т-образных, П-образных и т.п. простых стержневых элементов. Если заранее составить для этих элементов топологические матрицы $\boldsymbol{C}$, то значительно упростится формирование топологической матрицы для всей конструкции. Рассмотрим применение системного подхода на конкретном примере.

Пример 2.15 [274, с.57]. Определить начальные параметры стержней плоской рамы при распределенной и сосредоточенной нагрузках от ветра (рисунок 2.38).

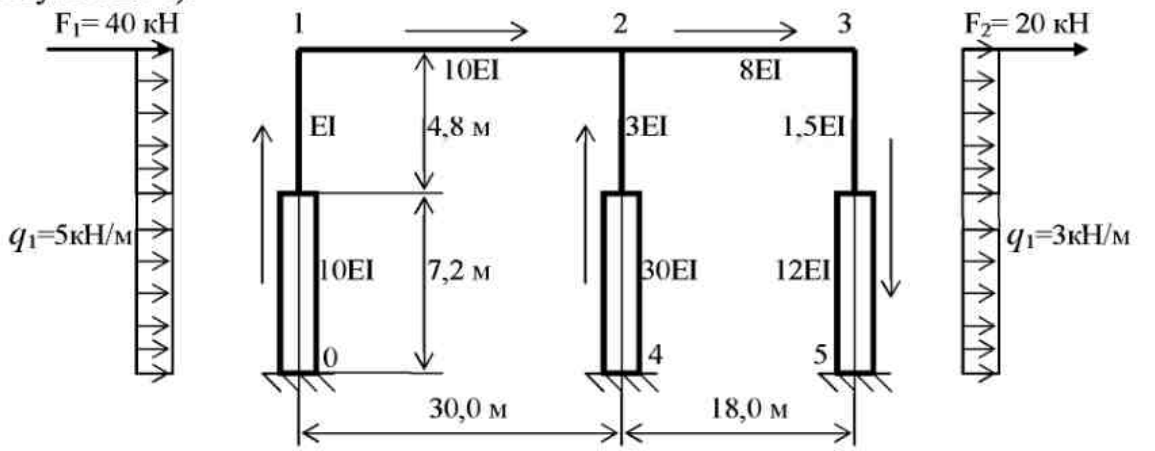


Рисунок 2.38

Если разбить раму на стержни постоянной жесткости, то получится 8 элементов, и матрица $\boldsymbol{A}_*$ будет иметь размер 40x40 элементов. Если для участков рамы 0-1; 4-2; 3-5 использовать рекуррентные соотношения (2.48), то раму можно представить совокупностью 5 стержней (их них 3 условных стержня), и матрица $\boldsymbol{A}_*$ будет иметь размер 25x25 элементов. Ориентированные графы расчета по двум вариантам показаны на рисунке 2.38. Ось ОУ каждого стержневого элемента направим «вверх». Сформируем уравнения типа (2.48) для «стержней» 0-1, 4-2 и 3-5 в соответствии с п.2.7.

Стержень **0 - 1** (число ступеней $m = 2$, $EI = 1$)

$$\boldsymbol{A}_{\text{П}}^{0-1} = \boldsymbol{A}_2^{0-1}\boldsymbol{A}_1^{0-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4{,}8 & \frac{4{,}8^2}{2} & \frac{4{,}8^3}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 4{,}8 & \frac{4{,}8^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7{,}2 & \frac{7{,}2^2}{20} & \frac{7{,}2^3}{60} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7{,}2}{10} & \frac{7{,}2^2}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 12 & 17{,}568 & 120{,}0384 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 5{,}52 & 48{,}672 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 12 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array};$$

$$\boldsymbol{B}_1^{0-1} = \begin{array}{|c|} \hline -5 \cdot \frac{7{,}2^4}{240} \\ \hline -5 \cdot \frac{7{,}2^3}{60} \\ \hline -5 \cdot \frac{7{,}2^2}{2} \\ \hline -5 \cdot 7{,}2 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -55{,}9872 \\ \hline -31{,}104 \\ \hline -129{,}6 \\ \hline -36 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}, \quad \boldsymbol{B}_2^{0-1} = \begin{array}{|c|} \hline -5 \cdot \frac{4{,}8^4}{24} - 40 \cdot 0 \\ \hline -5 \cdot \frac{4{,}8^3}{6} - 40 \cdot 0 \\ \hline -5 \cdot \frac{4{,}8^2}{2} - 40 \cdot 0 \\ \hline -5 \cdot 4{,}8 - 40 \cdot 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -110{,}592 \\ \hline -92{,}16 \\ \hline -57{,}6 \\ \hline -64 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\boldsymbol{B}_{\text{СП}}^{0-1} = \boldsymbol{A}_2^{0-1} \cdot \boldsymbol{B}_1^{0-1} + \boldsymbol{B}_2^{0-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 4{,}8 & 11{,}52 & 18{,}432 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 4{,}8 & 11{,}52 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 4{,}8 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -55{,}9872 \\ \hline -31{,}104 \\ \hline -129{,}6 \\ \hline -36 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} +$$

$$+ \begin{array}{|c|} \hline -110{,}592 \\ \hline -92{,}16 \\ \hline -57{,}6 \\ \hline -64 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -2472{,}4224 \\ \hline -1160{,}064 \\ \hline -360 \\ \hline -100 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}.$$

Стержень **4 - 2**

$$\boldsymbol{A}_{\text{П}}^{4-2} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 12 & 5{,}856 & 40{,}0128 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1{,}84 & 16{,}224 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 12 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}; \quad \boldsymbol{B}_{\text{СП}}^{4-2} = 0.$$

Стержень **3 - 5**

$$\boldsymbol{A}_{\text{П}}^{3-5} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 12 & 32{,}88 & 83{,}136 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3{,}8 & 12{,}72 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 12 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}; \quad \boldsymbol{B}_{\text{СП}}^{3-5} = \begin{array}{|c|} \hline 2149{,}6704 \\ \hline 358{,}656 \\ \hline 456 \\ \hline 56 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}.$$

Матрицы стержней 1-2 и 2-3 не отличаются от матриц уравнения (2.11).

Применяя системный подход, разбиваем стержневую систему на три элемента, как показано на рисунке 2.39.

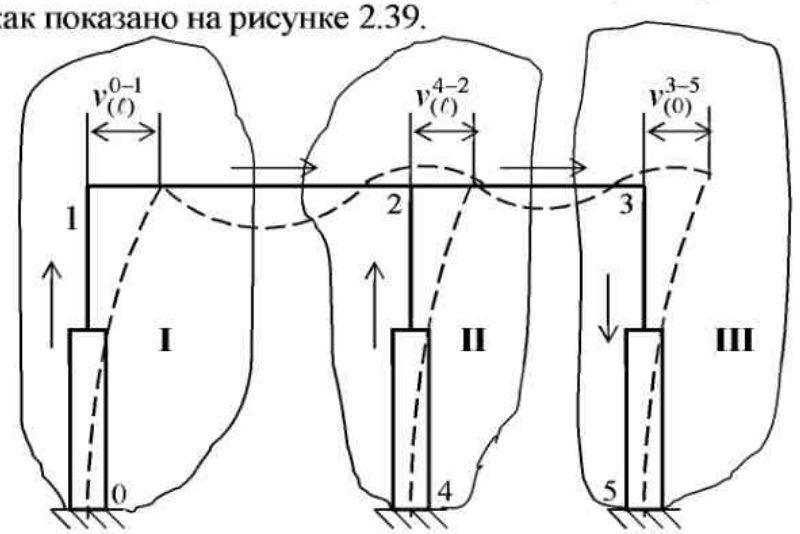


Рисунок 2.39

Матричное уравнение МГЭ для рамы приведено ниже.

Из анализа матрицы $\boldsymbol{X}$ (0) следует, что в матрице $\boldsymbol{A}$ нужно обнулить 1, 2, 6, 11, 16 и 17 столбцы. Для **I** и **III** элементов уравнения равновесия и совместности перемещений узлов составляются так же, как для Г-образной рамы, и топологическая матрица этих частей примет вид:

$$\boldsymbol{C}_{\text{I,III}} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & & -1 \\ & & & 1 & \end{bmatrix}$$

Для **II** Т-образного элемента матрица $\boldsymbol{C}_{\text{II}}$ формируется аналогично (без компенсирующих элементов переноса независимых параметров).

$$\boldsymbol{C}_{\text{II}} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\ & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \end{array}\right]$$

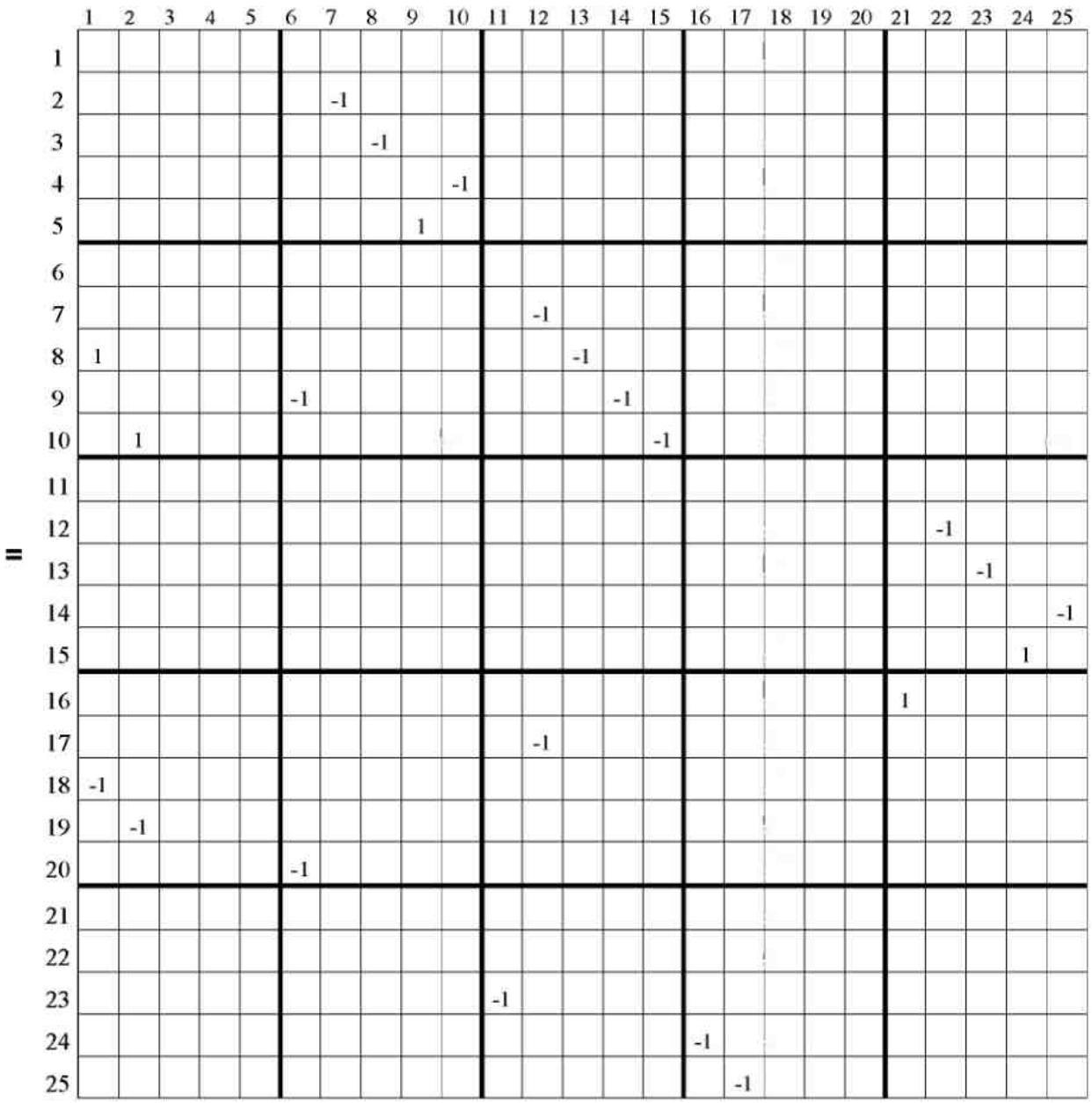
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25				
1	1	12	17,5	120																						$v^{0-1}(0)=0$	$v^{0-1}(\ell)$	2472,4224
2		1	5,52	48																						$\varphi^{0-1}(0)=0$	$\varphi^{0-1}(\ell)$	1160,064
3			1	12																						$M^{0-1}(0)$	$M^{0-1}(\ell)$	360
4				1																						$Q^{0-1}(0)$	$Q^{0-1}(\ell)$	100
5					1																					$N^{0-1}(0)$	$N^{0-1}(\ell)$	
6						1	30	45	450																	$v^{1-2}(0)=0$	$v^{1-2}(0)=0$	
7							1	3	45																	$\varphi^{1-2}(0)$	$\varphi^{1-2}(\ell)$	
8								1	30																	$M^{1-2}(0)$	$M^{1-2}(\ell)$	
9									1																	$Q^{1-2}(0)$	$Q^{1-2}(\ell)$	
10										1																$N^{1-2}(0)$	$N^{1-2}(\ell)$	
11											1	18	20	121												$v^{2-3}(0)=0$	$v^{2-3}(\ell)=0$	
12												1	2,2	20												$\varphi^{2-3}(0)$	$\varphi^{2-3}(\ell)$	
13													1	18												$M^{2-3}(0)$	$M^{2-3}(\ell)$	
14														1												$Q^{2-3}(0)$	$Q^{2-3}(\ell)$	
15															1											$N^{2-3}(0)$	$N^{2-3}(\ell)$	
16																1	12	5,8	40							$v^{4-2}(0)=0$	$v^{4-2}(\ell)$	
17																	1	1,8	16							$\varphi^{4-2}(0)=0$	$\varphi^{4-2}(\ell)$	
18																		1	12							$M^{4-2}(0)$	$M^{4-2}(\ell)$	
19																			1							$Q^{4-2}(0)$	$Q^{4-2}(\ell)$	
20																				1						$N^{4-2}(0)$	$N^{4-2}(\ell)$	
21																					1	12	32,8	83,1		$v^{3-5}(0)$	$v^{3-5}(\ell)$	-2149,6704
22																						1	3.8	12.7		$\varphi^{3-5}(0)$	$\varphi^{3-5}(\ell)$	-358,656
23																							1	12		$M^{3-5}(0)$	$M^{3-5}(\ell)$	-456
24																								1		$Q^{3-5}(0)$	$Q^{3-5}(\ell)$	-56
25																									1	$N^{3-5}(0)$	$N^{3-5}(\ell)$	

В матрице $\boldsymbol{Y}(\ell)$ 4 параметра: $v^{1\text{-}2}(\ell) = v^{2\text{-}3}(\ell) = v^{3\text{-}5}(\ell) = \varphi^{3\text{-}5}(\ell) = 0$. Два параметра связаны уравнениями совместности перемещений узлов всей рамы $-v^{0\text{-}1}(\ell) = -v^{4\text{-}2}(\ell) = v^{3\text{-}5}(0)$ (рисунок 2.39). Поэтому компенсирующие элементы $A_*(1,21)=1$; $A_*(16,21)=1$. Для узла 1 положение матрицы $\boldsymbol{C}_{\text{I}}$ определяется порядком следования параметров матрицы $\boldsymbol{X}$. Так как граничные конечные параметры стержня 0-1 связаны уравнениями равновесия и совместности перемещений с начальными параметрами стержня 1-2 (они расположены на 6-10 строках), то матрица $\boldsymbol{C}_{\text{I}}$ должна находиться на местах 6-10 столбцов и 1-5 строк матрицы $\boldsymbol{A}_*$. Аналогично матрица $\boldsymbol{C}_{\text{III}}$ должна находиться на местах 21-25 столбцов и 11-15 строк, а $\boldsymbol{C}_{\text{II}}$ - на местах 1-20 столбцов и 6-25 строк.

Таким образом, в матрицу $\boldsymbol{X}_*$ перенесено 15 параметров. В матрице $\boldsymbol{Y}$ осталось шесть независимых параметров $M^{4\text{-}2}(\ell)$; $Q^{4\text{-}2}(\ell)$; $N^{4\text{-}2}(\ell)$; $M^{3\text{-}5}(\ell)$; $Q^{3\text{-}5}(\ell)$; $N^{3\text{-}5}(\ell)$. Эти параметры переносим на место нулевых параметров матрицы $\boldsymbol{X}_*$ в порядке очередности. Получаем следующие компенсирующие элементы матрицы рамы: $\boldsymbol{A}_*(18,1)= -1$; $\boldsymbol{A}_*(19,2)= -1$; $\boldsymbol{A}_*(20,6)= -1$; $\boldsymbol{A}_*(23,11)= -1$; $\boldsymbol{A}_*(24,16)= -1$; $\boldsymbol{A}_*(25,17)= -1$. Так же получим и компенсирующие элементы переноса независимых параметров ($M^{4\text{-}2}(\ell)$; $Q^{4\text{-}2}(\ell)$; $N^{4\text{-}2}(\ell)$), связанных с матрицей $\boldsymbol{C}_{\text{II}}$: $\boldsymbol{A}_*(8,1)= 1$; $\boldsymbol{A}_*(9,6)= -1$; $\boldsymbol{A}_*(10,2)= 1$. Всего в матрицу $\boldsymbol{X}_*$ перенесено 21 параметр.

Матрица $\boldsymbol{Y}$ становится нулевой, если добавить 4 нулевых параметра. Все ненулевые параметры топологической матрицы $\boldsymbol{C}$ определены и она принимает вид

$$\boldsymbol{C} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & \boldsymbol{C}_{\text{I}} & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & \boldsymbol{C}_{\text{II}} & & \boldsymbol{C}_{\text{III}} \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} =$$



Суммируя обнуленную матрицу A_0 с топологической матрицей C, получим систему уравнений типа (1.46).

Для исключения нулевых ведущих элементов переставляем строки матриц A_* и B в новом порядке (возможный вариант показан цифрами справа).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25			
1			17,5	120																						$M^{4-2}(\ell)$	=	2472,4224	3
2			5,52	48			-1																			$Q^{4-2}(\ell)$		1160,064	4
3			1	12				-1																		$M^{0-1}(0)$		360	8
4				1						-1																$Q^{0-1}(0)$		100	10
5					1				1																	$N^{0-1}(0)$			5
6							30	45	450																	$N^{4-2}(\ell)$			7
7							1	3	45			-1														$\varphi^{1-2}(0)$			12
8	1							1	30				-1													$M^{1-2}(0)$			9
9						-1			1					-1												$Q^{1-2}(0)$			6
10		1								1					-1											$N^{1-2}(0)$			15
11												18	20	121												$M^{3-5}(\ell)$			13
12												1	2,2	20								-1				$\varphi^{2-3}(0)$			1
13													1	18									-1			$M^{2-3}(0)$			23
14														1											-1	$Q^{2-3}(0)$			25
15															1									1		$N^{2-3}(0)$			24
16																		5,8	40		1					$Q^{3-5}(\ell)$			18
17												-1						1,8	16							$N^{3-5}(\ell)$			19
18	-1																	1	12							$M^{4-2}(0)$			1
19		-1																	1							$Q^{4-2}(0)$			2
20						-1														1						$N^{4-2}(0)$			20
21																					1	12	32,8	83,1		$v^{3-5}(0)$		-2149,6704	21
22																						1	3,8	12,7		$\varphi^{3-5}(0)$		-358,656	22
23											-1												1	12		$M^{3-5}(0)$		-456	11
24																-1								1		$Q^{3-5}(0)$		-56	16
25																	-1								1	$N^{3-5}(0)$			17

Далее, методом исключения Гаусса находим значения всех неизвестных граничных параметров. Они сведены в таблицу 2.7. Там же приведены результаты расчета рамы по обычному графу (рисунок 2.40), при котором матрица $\boldsymbol{A}_*$ имеет размер 40x40 элементов, и результаты, полученные С.А.Рогицким. Сравнение данных таблицы 2.7 показывает, что результаты по МГЭ и по методу С.А.Рогицкого практически совпадают. Причем в работе [274] определены только изгибающие моменты, а по МГЭ получена полная информация о напряженно-деформированном состоянии рамы в форме начальных параметров. При этом:

1 Сокращен порядок матричного уравнения МГЭ, что позволило уменьшить матрицу коэффициентов с размера 40x40 до 25x25 элементов.

2 Применение предложенных соотношений (2.48) не привело к уменьшению точности расчета (совпадают, по крайней мере, 5 цифр значений всех параметров при расчетах с матрицами 40x40 и 25x25).

3 Алгоритм расчета полностью освобожден от процесса составления уравнений равновесия и совместности перемещений узлов рамы, что расширяет возможности машинной реализации МГЭ.

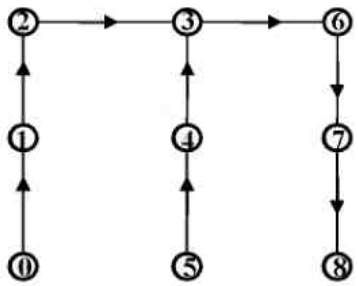


Рисунок 2.40

Таблица 2.7

Величины		МГЭ с матрицей 25x25	МГЭ с матрицей 40x40	Метод С.А.Рогицкого [274]
1	2	3	4	5
1	$M_{(\ell)}^{4-3}$, кНм	144,69	144,69	143,26
2	$Q_{(\ell)}^{4-3}$, кН	52,761	52,761	-
3	$M_{(0)}^{0-1}$, кНм	-287,27	-287,27	-287,73
4	$Q_{(0)}^{0-1}$, кН	56,399	56,399	-
5	$N_{(0)}^{0-1}$, кН	2,9004	2,9004	-
6	$EIv_{(0)}^{1-2}$, кНм^3	-	-449,75	-
7	$EI\varphi_{(0)}^{1-2}$, кНм^2	-	-91,755	-
8	$M_{(0)}^{1-2}$, кНм	-	-10,801	-
9	$Q_{(0)}^{1-2}$, кН	-	20,399	-
10	$N_{(0)}^{1-2}$, кН	-	2,9004	-
11	$N_{(\ell)}^{4-3}$, кН	5,2993	5,2993	-

Продолжение таблицы 2.7

1	2	3	4	5
12	$EI\varphi_{(0)}^{2-3}$, кНм^2	-0,76499	-0,76499	-
13	$M_{(0)}^{2-3}$, кНм	29,514	29,514	29,08
14	$Q_{(0)}^{2-3}$, кН	-2,9004	-2,9004	-
15	$N_{(0)}^{2-3}$, кН	-43,601	-43,601	-
16	$M_{(\ell)}^{7-8}$, кНм	285,68	285,68	283,95
17	$EI\varphi_{(0)}^{3-6}$, кНм^2	-42,741	-42,741	-
18	$M_{(0)}^{3-6}$, кНм	87,190	87,190	86,31
19	$Q_{(0)}^{3-6}$, кН	-8,1997	-8,1997	-
20	$N_{(0)}^{3-6}$, кН	9,1600	9,1600	-
21	$EIv_{(0)}^{4-3}$, кНм^3	-	312,61	-
22	$EI\varphi_{(0)}^{4-3}$, кНм^2	-	-71,641	-
23	$M_{(0)}^{4-3}$, кНм	-	-108,56	-
24	$Q_{(0)}^{4-3}$, кН	-	52,761	-
25	$N_{(0)}^{4-3}$, кН	-	5,2993	-
26	$Q_{(\ell)}^{7-8}$, кН	46,840	46,840	-
27	$N_{(\ell)}^{7-8}$, кН	-8,1997	-8,1997	-
28	$M_{(0)}^{5-4}$, кНм	-488,44	-488,44	-487,49
29	$Q_{(0)}^{5-4}$, кН	52,761	52,761	-
30	$N_{(0)}^{5-4}$, кН	5,2993	5,2993	-
31	$EIv_{(0)}^{6-7}$, кНм^3	749,21	749,21	-
32	$EI\varphi_{(0)}^{6-7}$, кНм^2	-12,607	-12,607	-
33	$M_{(0)}^{6-7}$, кНм	-60,404	-60,404	-59,67
34	$Q_{(0)}^{6-7}$, кН	-9,1600	-9,1600	-
35	$N_{(0)}^{6-7}$, кН	-8,1997	-8,1997	-
36	$EIv_{(0)}^{7-8}$, кНм^3	-	402,24	-
37	$EI\varphi_{(0)}^{7-8}$, кНм^2	-	-85,783	-
38	$M_{(0)}^{7-8}$, кНм	-	26,188	-
39	$Q_{(0)}^{7-8}$, кН	-	25,240	-
40	$N_{(0)}^{7-8}$, кН	-	-8,1997	-

2.9 Учет действия температуры

Выше было отмечено, что стержневые системы, как правило, рассчитываются без учета продольных перемещений и сдвига стержней. При температурном воздействии пренебрежение продольными перемещениями приводит к значительным погрешностям в определении напряженно-деформированного состояния. Поэтому для стержня, который испытывает воздействие температуры, нужно применять полное матричное уравнение МГЭ для изгиба и растяжения вида

$EIv(x)$		1	x	$x^2/2$	$x^3/6$	0	0	$EIv\,(0)$	$(x-\xi)^3 q_y(\xi)/6$
$EI\varphi(x)$		0	1	x	$x^2/2$	0	0	$EI\varphi\,(0)$	$(x-\xi)^2 q_y(\xi)/2$
$M(x)$		0	0	1	x	0	0	$M\,(0)$	$(x-\xi)\, q_y(\xi)$
$Q(x)$	$=$	0	0	0	1	0	0	$Q\,(0)$	$q_y(\xi)$
$EAu(x)$		0	0	0	0	1	x	$EAu\,(0)$	$-(x-\xi)\, q_x(\xi)$
$N(x)$		0	0	0	0	0	1	$N\,(0)$	$-q_x(\xi)$

$+\int_0^x \ldots d\xi$

где элементы матрицы $\boldsymbol{B}$ для $q_y(x)$ по (1.23), $q_x(x)$ по (1.22) определяется выражениями (2.13) и (2.5).

Если какой-либо стержень системы испытывает равномерное воздействие температуры $\Delta t\ ^0C$, то его граничная точка получит продольное перемещение, равное

$$u(\ell) = \ell \cdot \alpha \cdot \Delta t\,, \tag{2.49}$$

где ℓ - длина стержня;

α - температурный коэффициент линейного удлинения.

При неравномерном температурном воздействии возникнут как продольные, так и угловые перемещения граничных точек. Продольные перемещения будут определяться по формуле (2.49), где Δt нужно заменить на изменение температуры оси стержня,

$$t = t_н + y\,(t_в - t_н)/\,h\,, \tag{2.50}$$

угловое перемещение определяется по формуле [273]

$$\varphi_t = \ell\ \alpha\,(t_в - t_н)/\,h\,, \tag{2.51}$$

где $t_н$ - температура наружных волокон;

$t_в$ - температура внутренних волокон;

y- расстояние от оси стержня до его внешнего (наружного волокна);

h - высота сечения стержня.

Перемещения (2.49), (2.51), будучи нестесненными, не вызывают температурных деформаций. Но, если этим перемещениям будут препятствовать другие стержни, то нагретый стержень в плоской стержневой системе будут испытывать изгиб и сжатие. Это приведет к появлению таких же деформаций в остальных стержнях. Таким образом, при расчете плоских стержневых систем на температурное воздействие нужно привлекать полное уравнение МГЭ изгиба и растяжения для стержней, испытывающих непосредственное действие температуры, и неполное уравнение для остальных стержней.

Пример 2.16. В соответствии изложенным определим напряженно-деформированное состояние стальной стержневой системы (рисунок 2.17) после температурного воздействия на стержень 4-2 при таких данных:

$\frac{A}{I} = 0{,}12$ см $^{-2}$; $A = 100$ см $^{-2}$; $t_в = -20\ ^0$C; $t_н = 30\ ^0$C.

Деформированное состояние узла 2 показано на рисунке 2.41. В матрице $\boldsymbol{A}$ обнулены 1, 2, 6, 16, 17 и 20 столбцы, так как равны нулю соответствующие строки матрицы $\boldsymbol{X}$. На место нулевых строк матрицы $\boldsymbol{X}$ переносим независимые параметры матрицы $\boldsymbol{Y}$: $2EI\varphi^{2\text{-}3}(\ell)$; $Q^{2\text{-}3}(\ell)$; $2{,}5EIv^{4\text{-}2}(\ell)$; $M^{4\text{-}2}(\ell)$; $Q^{4\text{-}2}(\ell)$; $N^{4\text{-}2}(\ell)$. Зависимые параметры матрицы $\boldsymbol{Y}$ переносим в соответствии с уравнениями равновесия и совместности перемещений узлов 1 и 2. Компенсирующие элементы показаны в матрице $\boldsymbol{A}_*$. Перемещения стержня 4-2 - $0{,}3EI\,\ell^{4\text{-}2}\alpha\, t = -0{,}15$ кНм^3 и $2{,}5EI\varphi_l^{4\text{-}2} = -0{,}125$ кНм^2, вызванные температурой, переносим в нулевую матрицу $\boldsymbol{B}$ (они выступают в данном случае эквивалентом механической нагрузки). Матрицы $\boldsymbol{X}_*$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{A}_*$ примут вид

$\boldsymbol{X}_* =$

1	$2EIv_{(0)}^{0\text{-}1} = 0;\ EI\varphi_{(\ell)}^{2\text{-}3}$
2	$2EI\varphi_{(0)}^{0\text{-}1},\ Q_{(\ell)}^{2\text{-}3}$
3	$M_{(0)}^{0\text{-}1}$
4	$Q_{(0)}^{0\text{-}1}$
5	$N_{(0)}^{0\text{-}1}$
6	$3EIv_{(0)}^{1\text{-}2} = 0;\ 2{,}5EIv_{(\ell)}^{4\text{-}2}$
7	$3EI\varphi_{(0)}^{1\text{-}2}$
8	$M_{(0)}^{1\text{-}2}$
9	$Q_{(0)}^{1\text{-}2}$
10	$N_{(0)}^{1\text{-}2}$
11	$2EIv_{(0)}^{2\text{-}3}$
12	$2EI\varphi_{(0)}^{2\text{-}3}$
13	$M_{(0)}^{2\text{-}3}$
14	$Q_{(0)}^{2\text{-}3}$
15	$N_{(0)}^{2\text{-}3}$
16	$2{,}5EIv_{(0)}^{4\text{-}2} = 0;\ M_{(\ell)}^{4\text{-}2}$
17	$2{,}5EI\varphi_{(0)}^{4\text{-}2} = 0;\ Q_{(\ell)}^{4\text{-}2}$
18	$M_{(0)}^{4\text{-}2}$
19	$Q_{(0)}^{4\text{-}2}$
20	$0{,}3EIu_{(0)}^{4\text{-}2} = 0;\ N_{(\ell)}^{4\text{-}2}$
21	$N_{(0)}^{4\text{-}2}$

, $\boldsymbol{Y}=$

1	$2{,}5EIv_{(\ell)}^{0\text{-}1} = 2EI\left[v_{(\ell)}^{4\text{-}2} + v_{(0)}^{2\text{-}3}\sin\beta\right]/\cos\beta$
2	$2EI\varphi_{(\ell)}^{0\text{-}1} = 2EI\varphi_{(0)}^{1\text{-}2}$
3	$M_{(\ell)}^{0\text{-}1} = M_{(0)}^{1\text{-}2}$
4	$Q_{(\ell)}^{0\text{-}1} = N_{(0)}^{1\text{-}2}$
5	$N_{(\ell)}^{0\text{-}1} = -Q_{(0)}^{1\text{-}2}$
6	$3EIv_{(\ell)}^{1\text{-}2} = 3EIv_{(0)}^{2\text{-}3}$
7	$3EI\varphi_{(\ell)}^{1\text{-}2} = 3EI\varphi_{(0)}^{2\text{-}3}$
8	$M_{(\ell)}^{1\text{-}2} = M_{(0)}^{2\text{-}3} - M_{(\ell)}^{4\text{-}2}$
9	$Q_{(\ell)}^{1\text{-}2} = Q_{(0)}^{2\text{-}3} + Q_{(\ell)}^{4\text{-}2}\sin\beta + N_{(\ell)}^{4\text{-}2}\cos\beta$
10	$N_{(\ell)}^{1\text{-}2} = N_{(0)}^{2\text{-}3} - Q_{(\ell)}^{4\text{-}2}\cos\beta + N_{(\ell)}^{4\text{-}2}\sin\beta$
11	$2EIv_{(\ell)}^{2\text{-}3} = 0$
12	$2EI\varphi_{(\ell)}^{2\text{-}3}$
13	$M_{(\ell)}^{2\text{-}3} = 0$
14	$Q_{(\ell)}^{2\text{-}3}$
15	$N_{(\ell)}^{2\text{-}3} = 0$
16	$2{,}5EIv_{(\ell)}^{4\text{-}2}$
17	$2{,}5EI\varphi_{(\ell)}^{4\text{-}2} = 2{,}5EI\varphi_{(0)}^{2\text{-}3} + 2{,}5EI\varphi_l^{4\text{-}2}$
18	$M_{(\ell)}^{4\text{-}2}$
19	$Q_{(\ell)}^{4\text{-}2}$
20	$0{,}3EI\left\{u_{(\ell)}^{4\text{-}2} = -\ell^{4\text{-}2}\alpha\cdot t + \left[v_{(0)}^{2\text{-}3} + v_{(\ell)}^{4\text{-}2}\sin\beta\right]/\cos\beta\right\}$
21	$N_{(\ell)}^{4\text{-}2}$

$\boldsymbol{A}_*=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
1			8	64/6		-1					-3/4											6
2			4	8			-2/3															7
3			1	4				-1														3
4				1						-1												4
5					1			2														5
6							6	18	36		-3/2											11
7							1	6	18			-3/2										12
8								1	6				-1			1						8
9									1					-1			-3/5			-4/5		9
10										1					-1		4/5			-3/5		10
11											1	6	18	36								14
12	-1											1	6	18								1
13													1	6								13
14		-1												1								2
15															1							15
16						-1												25/2	125/6			18
17												-5/4						5	25/2			19
18																-1		1	5			16
19																	-1		1			17
20						-1/8					-1/5										5	21
21																				-1	1	20

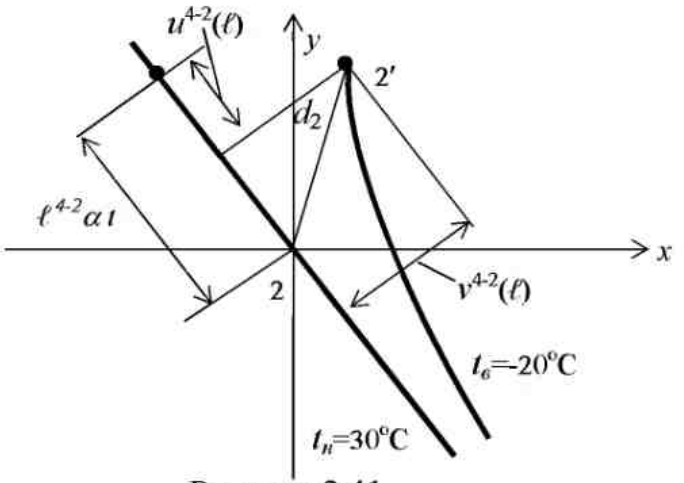


Рисунок 2.41

Для исключения нулевых ведущих элементов переставляем строки матриц $\boldsymbol{A}_*$ и $\boldsymbol{B}$. Далее методом Гаусса получаем значения граничных термоупругих усилий и перемещений. При этом начальные параметры принимают значения

$M_{(0)}^{0-1}$=0,571821829 кНм; $Q_{(0)}^{0-1}$= -0,148309212 кН; $N_{(0)}^{0-1}$=0,077661 кН;

$3EI\varphi_{(0)}^{1-2}$=1,64122353 кНм^2; $M_{(0)}^{1-2}$= -0,021415018 кНм; $Q_{(0)}^{1-2}$= -0,077661714 кН;

$N_{(0)}^{1-2}$= -0,148309212 кН; $2EIv_{(0)}^{2-3}$=4,48402075 кНм^3; $2EI\varphi_{(0)}^{2-3}$=0,083213041кНм^2;

$M_{(0)}^{2-3}$= -0,415274917 кНм; $Q_{(0)}^{2-3}$= 0,069216486 кН; $N_{(0)}^{2-3}$= 0;

$M_{(0)}^{4-2}$= -0,080503867 кНм; $Q_{(0)}^{4-2}$=0,030522851 кН; $N_{(0)}^{4-2}$= -0,2064849 кН,

т.е. стержень 4-2 сжат.

ГЛАВА 3 ДИНАМИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В данной главе рассматриваются свободные и вынужденные установившиеся гармонические колебания стержневых систем. Как и в статике, точные дифференциальные уравнения гармонических колебаний стержней являются нелинейными. Упрощая задачи динамики, нелинейные уравнения линеаризуют. Точность решений линейных уравнений удовлетворяют требованиям инженерных расчетов при $\ell / h > 10$, поэтому они используются в инженерной практике. Линейные дифференциальные уравнения содержат частные производные по координате x и времени t. Методом Фурье разделения переменных уравнения с частными производными сводятся к уравнениям с обычными производными, описывающими перемещения стержня в амплитудном состоянии. Принцип Д'Аламбера, используемый при выводе дифференциальных уравнений, позволяет рассматривать задачи динамики как задачи статики. Поэтому ниже применены предложенные правила знаков для граничных параметров и нагрузки в п.1.2, 1.4.

В большинстве случаев динамика стержневых систем включает две основные задачи:

1 Определение спектра частот и соответствующих им форм собственных колебаний.

2 Определение напряженно-деформированного состояния элементов конструкций от внешней динамической нагрузки.

Рассмотрим алгоритм решения этих задач по МГЭ. Следует отметить, что проблема определения частот собственных колебаний упругих систем продолжает оставаться актуальной задачей. Связано это с недостатками существующих методов. Так, методы сил и перемещений позволяют определять точный спектр частот собственных колебаний (в рамках допущений, принятых при выводе дифференциальных уравнений колебаний), но частотные уравнения этих методов содержат точки разрывов 2-го рода [307]. Возможно также появление фиктивных и пропуск действительных частот вследствие замены заданной расчетной схемы на основную схему [26]. В МКЭ частоты определяются из векового уравнения [184], где спектр частот во-первых ограничен, во-вторых неточен из-за замены системы с бесконечным числом степеней свободы на систему с конечным числом степеней свободы. Аналогичные недостатки имеются и у других методов.

Ниже будет показано, что МГЭ позволяет отбросить недостатки существующих методов и одновременно аккумулировать их достоинства, т.е. решать задачи динамики на качественно более эффективном уровне. В частности, получать точный спектр частот в рамках принятых допущений, в частотном уравнении отсутствуют точки разрывов 2-го рода, исключается появление фиктивных и пропуск действительных частот и т.п.

3.1 Определение частот и форм собственных колебаний МГЭ

При собственных колебаниях стержневой системы все её элементы совершают движение. При этом граничные параметры стержневых элементов будут отличны от нуля. Это положение позволяет установить вид частотного уравнения МГЭ. Согласно схеме преобразования граничных интегральных уравнений (1.46) все неизвестные статические и кинематические граничные параметры стержневой системы связаны уравнением

$$\boldsymbol{A}_*\boldsymbol{X}_* = -\boldsymbol{B},$$

где $\boldsymbol{A}_*$ - квадратная матрица граничных значений фундаментальных ортонормированных функций с компенсирующими элементами, описывающими топологию системы. При собственных колебаниях вектор нагрузки $\boldsymbol{B} = 0$ и последнее уравнение принимает вид

$$\boldsymbol{A}_*\boldsymbol{X}_* = 0. \qquad (3.1)$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение $\boldsymbol{X}_* \neq 0$ только в том случае, если определитель матрицы коэффициентов равен нулю, т.е.

$$\left|\boldsymbol{A}_*\right| = 0. \qquad (3.2)$$

Уравнение (3.2) является трансцендентным частотным уравнением МГЭ, корни которого теоретически дают полный спектр частот собственных колебаний линейной системы. В отличие от существующих методов определитель (3.2) содержит лишь систему фундаментальных функций, что позволяет существенно упростить поиск частот собственных колебаний. Интервал, содержащий корень уравнения (3.2), фиксируется при изменении знака определителя или при его стремлении к нулю.

После определения корней уравнения (3.2) можно найти формы и относительные амплитуды собственных колебаний. Для этого необходимо частоту собственных колебаний подставить в аргументы фундаментальных функций матрицы $\boldsymbol{A}_*$ и решать уравнение (3.1) при единичном значении одного или нескольких параметров вектора $\boldsymbol{B}$.

Поиск частот собственных колебаний связан с приведением матрицы $\boldsymbol{A}_*$ к верхнетреугольному виду и дальнейшему анализу знаков диагональных элементов или величины определителя (3.2). При росте частот собственных колебаний растут и абсолютные величины диагональных элементов верхнетреугольной матрицы. Поэтому верхняя граница спектра частот по МГЭ зависит от возможностей ЭВМ. Для определения частот можно использовать метод исключения Гаусса, где достаточно выполнять только прямой ход. Представим фундаментальные решения линейных дифференциальных уравнений простых видов колебаний.

3.2 Продольные, крутильные и поперечные колебания прямолинейного стержня

Дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня постоянной жесткости имеет вид [307]

$$EA\frac{\partial^2 u_*(x,t)}{\partial x^2} - m\frac{\partial^2 u_*(x,t)}{\partial t^2} = -q_{x*}(x,t), \qquad (3.3)$$

где $u_*(x,t)$ - динамическое продольное перемещение сечения стержня; m - погонная масса стержня; $q_{x*}(x,t)$ - динамическая продольная нагрузка; второе слагаемое – сила инерции материальной точки оси стержня.

Уравнение (3.3) не учитывает сил инерции, возникающих вследствие поперечных деформаций. Согласно методу Фурье решение уравнения (3.3) и нагрузку представим в виде произведения двух функций (гармонические установившиеся колебания допускают такое представление)

$$u_*(x,t) = u(x)T(t); \qquad q_{x*}(x,t) = q_x(x)T(t), \qquad (3.4)$$

где $u(x,)\ q_x(x)$ - амплитудные значения перемещения и нагрузки, зависящие только от x; $T(t)$ - неизвестная функция от времени t.
Функция $T(t)$ обычно приводится к виду [307]

$$T(t) = c\sin(\omega t + t_0), \qquad (3.5)$$

где c - постоянная, определяемая из начальных условий $u_*(x,0)$ и $\dot{u}_*(x,0)$; ω - круговая частота; t_0 - начальная фаза. Подставляя (3.4), (3.5) в (3.3) и сокращая на $c\sin(\omega t + t_0)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение продольных колебаний в амплитудном состоянии

$$EAu''(x) + m\omega^2 u(x) = -q_x(x). \qquad (3.6)$$

Решение уравнения (3.6) представим с помощью функции Грина. Характеристическое уравнение имеет 2 мнимых корня

$$t_1 = i\sqrt{\frac{\omega^2 m}{EA}}; \qquad t_2 = -i\sqrt{\frac{\omega^2 m}{EA}}.$$

В соответствии с этим общее решение однородного уравнения имеет вид

$$u_{одн}(x) = c_1\cos\lambda_p x + c_1\sin\lambda_p x; \qquad \lambda_p = \sqrt{\frac{\omega^2 m}{EA}}.$$

Далее применяя алгоритм построения функции Грина по п.1.3, получаем решение задачи Коши в матричной форме

$$\begin{vmatrix} EAu(x) \\ N(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\lambda_p x & \sin\lambda_p x/\lambda_p \\ -\lambda_p \sin\lambda_p x & \cos\lambda_p x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} EAu(0) \\ N(0) \end{vmatrix} -$$

$$-\int_0^x \begin{vmatrix} \sin\lambda_p(x-\xi)/\lambda_p \\ \cos\lambda_p(x-\xi) \end{vmatrix} q_x(\xi)d\xi \qquad (3.7)$$

Элементы вектора нагрузки $\boldsymbol{B}$, после подстановки $q_x(x)$ по (1.22) и интегрирования, принимают вид

$$B_{11} = F\frac{\sin\lambda_p(x-a_1)_+}{\lambda_p} + q\left[\frac{-\cos\lambda_p(x-a_2)_+ + H(x-a_2) + \cos\lambda_p(x-a_3)_+ - H(x-a_2)}{\lambda_p^2}\right]; \qquad (3.8)$$

$$B_{21} = F\cos\lambda_p(x-a_1)_+ + q\frac{\sin\lambda_p(x-a_2)_+ - \sin\lambda_p(x-a_2)_+}{\lambda_p}$$

Приближенное дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня постоянной жесткости и начальные параметры после разделения переменных имеют вид [307]

$$\begin{gathered} EIv^{IV}(x) - m\omega^2 v(x) = q_y(x);\quad v(0);\quad v'(0) = \varphi(0); \\ EIv^{II}(0) = -M(0);\quad EIv^{III}(0) = -Q(0). \end{gathered} \qquad (3.9)$$

Решение данной задачи Коши в матричной форме запишется так

$$\begin{vmatrix} EIv(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ \lambda^4 A_{14} & A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -\lambda^4 A_{13} & -\lambda^4 A_{14} & A_{11} & A_{12} \\ -\lambda^4 A_{12} & -\lambda^4 A_{13} & \lambda^4 A_{14} & A_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{vmatrix} + \int_0^x \begin{vmatrix} A_{14}(x-\xi) \\ A_{13}(x-\xi) \\ -A_{12}(x-\xi) \\ -A_{11}(x-\xi) \end{vmatrix} q_y(\xi)d\xi \qquad (3.10)$$

где фундаментальные ортонормированные функции (функции академика А.Н. Крылова) и элементы вектора нагрузки после интегрирования принимают вид

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m}{EI}};\quad A_{11} = (\mathrm{ch}\lambda x + \cos\lambda x)/2;\quad A_{12} = (\mathrm{sh}\,\lambda x + \sin\lambda x)/2\lambda;$$

$$A_{13} = (\mathrm{ch}\lambda x - \cos\lambda x)/2\lambda^2;\quad A_{14} = (\mathrm{sh}\lambda x - \sin\lambda x)/2\lambda^3;$$

$$B_{11}=\frac{F}{2\lambda^3}\left[\mathrm{sh}\lambda(x-a_1)_+-\sin\lambda(x-a_1)_+\right]+\frac{M}{2\lambda^2}\left[\mathrm{ch}\lambda(x-a_2)_+-\cos\lambda(x-a_2)_+\right]+$$
$$+q\left[\frac{\mathrm{ch}\lambda(x-a_3)_++\cos\lambda(x-a_3)_+-2H(x-a_3)-\mathrm{ch}\lambda(x-a_4)_+-\cos\lambda(x-a_4)_++2H(x-a_4)}{2\lambda^4}\right];$$

$$B_{21}=\frac{F}{2\lambda^2}\left[\mathrm{ch}\lambda(x-a_1)_+-\cos\lambda(x-a_1)_+\right]+\frac{M}{2\lambda}\left[\mathrm{sh}\lambda(x-a_2)_++\sin\lambda(x-a_2)_+\right]+$$
$$+q\frac{\mathrm{sh}\lambda(x-a_3)_+-\sin\lambda(x-a_3)_+-\mathrm{sh}\lambda(x-a_4)_++\sin\lambda(x-a_4)_+}{2\lambda^3};\qquad(3.11)$$

$$B_{31}=\frac{F}{2\lambda}\left[\mathrm{sh}\lambda(x-a_1)_++\sin\lambda(x-a_1)_+\right]+\frac{M}{2}\cdot\left[\mathrm{ch}\lambda(x-a_2)_++\cos\lambda(x-a_2)_+\right]+$$
$$+q\frac{\mathrm{ch}\lambda(x-a_3)_+-\cos\lambda(x-a_3)_+-\mathrm{ch}\lambda(x-a_4)_++\cos\lambda(x-a_4)_+}{2\lambda^2};$$

$$B_{41}=\frac{F}{2}\left[\mathrm{ch}\lambda(x-a_1)_++\cos\lambda(x-a_1)_+\right]+\frac{M\lambda}{2}\left[\mathrm{sh}\lambda(x-a_2)_+-\sin\lambda(x-a_2)_+\right]+$$
$$+q\frac{\mathrm{sh}\lambda(x-a_3)_++\sin\lambda(x-a_3)_+-\mathrm{sh}\lambda(x-a_4)_+-\sin\lambda(x-a_4)_+}{2\lambda}.$$

Дифференциальное уравнение крутильных колебаний призматического стержня (в амплитудном состоянии) имеет вид [201]

$$\theta^{II}(x)+\omega^2\frac{P}{G}\theta(x)=-\frac{m(x)}{GI_k}\qquad(3.12)$$

Данное уравнение по символьной записи не отличается от уравнения продольных колебаний (3.6). Поэтому решение уравнения (3.12) будет совпадать по форме с решением уравнения (3.6), т.е.

$$\begin{vmatrix}GI_k\theta(x)\\M_{kp}(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\lambda_k x & \sin\lambda_k x/\lambda_k\\-\lambda_k\sin\lambda_k x & \cos\lambda_k x\end{vmatrix}\begin{vmatrix}GI_k\theta(0)\\M_{kp}(0)\end{vmatrix}-$$

$$-\int_0^x\begin{vmatrix}\sin\lambda_k(x-\xi)/\lambda_k\\\cos\lambda_k(x-\xi)\end{vmatrix}m(\xi)d\xi$$

где ρ- плотность материала стержня; $\lambda_k=\sqrt{\omega\rho/G}$, м$^{-1}$.

3.3 Общий случай гармонического динамического воздействия

В общем случае прямолинейный стержень может испытывать продольные, поперечные (в двух плоскостях) и крутильные колебания. Учитывая, что перемещения малы и справедлив закон упругости Гука, будет выполняться принцип суперпозиции (принцип независимости действия сил). В соответствии с этим можно объединить в одно матричное уравнение решения задач Коши для продольных, поперечных и крутильных колебаний по аналогии со статикой. Практически это означает, что в уравнении (2.23) нужно поменять фундаментальные функции матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Тогда будем иметь решение задачи Коши уравнений динамики стержня

$$\begin{cases} EI_z v_y^{IV}(x) - m\omega^2 v_y(x) = q_y(x); \\ EI_y v_z^{IV}(x) - m\omega^2 v_z(x) = q_z(x); \\ GI_k \theta_z^{II}(x) + \rho I_k \theta(x) = -m(x); \\ EAu^{II}(x) + m\omega^2 u(x)(x) = -q_x(x). \end{cases}$$

В частных случаях общее уравнение МГЭ (2.23) упрощается путем отбрасывания соответствующих блоков и отдельных уравнений. В качестве примера рассмотрим вывод частотных уравнений МГЭ для поперечных и продольных колебаний отдельных стержней.

Случай жесткого защемления обоих концов стержня. При граничном значении $x = \ell$ уравнение (3.10) преобразуем к виду (3.1)

	1	2	3	4		
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$	$EIv^{0-1}(0)=0;\ M^{0-1}(\ell)$	$EIv^{0-1}(\ell)=0;$
2			$-A_{12}$	$-A_{13}$	$EI\varphi^{0-1}(0)=0;\ Q^{0-1}(\ell)$	$EI\varphi^{0-1}(\ell)=0;$
3	-1		A_{11}	A_{12}	$M^{0-1}(0)$	$M^{0-1}(\ell)$
4		-1	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	$Q^{0-1}(0)$	$Q^{0-1}(\ell)$

$= 0$

Из этого уравнения при $m = EI = \ell = 1$ следует, что частотное уравнение примет вид $\left|\boldsymbol{A}_*(\ell,\omega)\right| = A_{13}^2 - A_{12}A_{14} = 0 \rightarrow \cos\lambda \cdot \mathrm{ch}\lambda = 1.$

Аналогично можно получить частотные уравнения для других условий опирания стержня. Некоторые из них представлены в таблице 3.1.

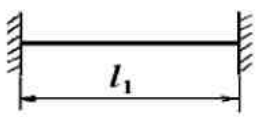
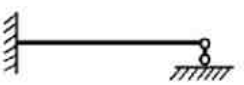
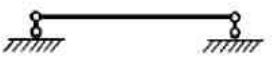
Из таблицы 3.1 следует, что частотные уравнения МГЭ не содержат точек разрыва 2-го рода и позволяют получать в рамках принятых допущений точные спектры частот собственных колебаний.

Таблица 3.1

1 $\ell = 1$	2	3	4	5	6
$\cos\lambda \cdot \mathrm{ch}\lambda = 1$	$\sin\lambda \cdot \mathrm{ch}\lambda = \cos\lambda \cdot \mathrm{sh}\lambda$	$\cos\lambda \cdot \mathrm{ch}\lambda = -1$	$\sin\lambda = 0$	$\sin\lambda \cdot \mathrm{ch}\lambda = \cos\lambda \cdot \mathrm{sh}\lambda$	$\cos\lambda \cdot \mathrm{ch}\lambda = 1$
$\lambda_1 = 4{,}730$ $\lambda_2 = 7{,}859$ $\lambda_3 = 10{,}996$ $\lambda_4 = 14{,}137$	$\lambda_1 = 3{,}927$ $\lambda_2 = 7{,}069$ $\lambda_3 = 10{,}210$ $\lambda_4 = 13{,}352$	$\lambda_1 = 1{,}875$ $\lambda_2 = 4{,}694$ $\lambda_3 = 7{,}855$ $\lambda_4 = 10{,}996$	$\lambda_1 = \pi$ $\lambda_2 = 2\pi$ $\lambda_3 = 3\pi$ $\lambda_4 = 4\pi$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 3{,}927$ $\lambda_3 = 7{,}069$ $\lambda_4 = 10{,}210$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 4{,}730$ $\lambda_3 = 7{,}853$ $\lambda_4 = 10{,}996$

В теории деформирования стержней, пластин и оболочек важную роль играют формы собственных поперечных колебаний прямолинейных стержней. Выражения для собственных форм следуют из уравнения МГЭ (3.10) после определения начальных параметров. Для некоторых случаев условий опирания функции собственных колебаний в безразмерной форме представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Схема балки	Форма собственных колебаний
	$X(x) = \sin(\lambda x/\ell_1) - \mathrm{sh}(\lambda x/\ell_1) - \alpha_*[\cos(\lambda x/\lambda_1) - \mathrm{ch}(\lambda x/\ell_1)]$; $\alpha_* = \dfrac{\sin\lambda - \mathrm{sh}\lambda}{\cos\lambda - \mathrm{ch}\lambda}$; λ по таблице 3.1
	$X(x) = \sin(\lambda x/\ell_1) - \mathrm{sh}(\lambda x/\ell_1) - \alpha_*[\cos(\lambda x/\lambda_1) - \mathrm{ch}(\lambda x/\ell_1)]$; $\alpha_* = \dfrac{\sin\lambda + \mathrm{sh}\lambda}{\cos\lambda + \mathrm{ch}\lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x/\ell_1) - \mathrm{sh}(\lambda x/\ell_1) - \alpha_*[\cos(\lambda x/\lambda_1) - \mathrm{ch}(\lambda x/\ell_1)]$; $\alpha_* = \dfrac{\sin\lambda + \mathrm{sh}\lambda}{\cos\lambda + \mathrm{ch}\lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x/\ell_1)$
	$X(x) = \sin(\lambda x/\ell_1) + \alpha_* \mathrm{sh}(\lambda x/\ell_1)$ $\alpha_* = \dfrac{\sin\lambda}{\mathrm{sh}\lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x/\ell_1) + \mathrm{sh}(\lambda x/\ell_1) - \alpha_*[\cos(\lambda x/\lambda_1) + \mathrm{ch}(\lambda x/\ell_1)]$; $\alpha_* = \dfrac{\sin\lambda - \mathrm{sh}\lambda}{\cos\lambda - \mathrm{ch}\lambda}$

Рассмотрим формирование частотного уравнения для стержневой системы при продольных колебаниях (рисунок 3.1)

Пример 3.1 [201, с 77]

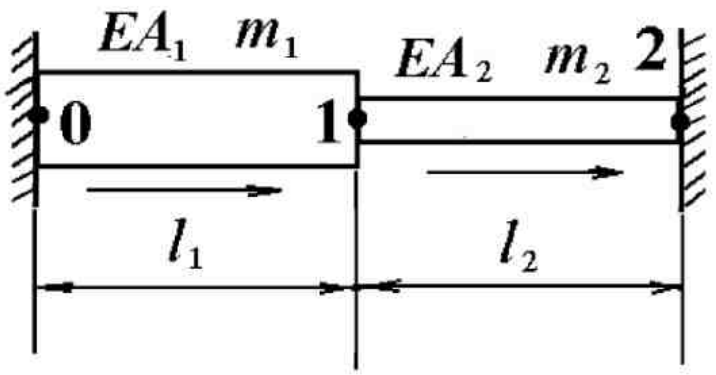


Рисунок 3.1

1 Разбиваем систему на 2 стержня, нумеруем узлы и стрелками отмечаем начало и конец каждого стержня.

2 Формируем матрицы ***X,Y,A********. Уравнения равновесия и совместимости перемещений узла 1 представлены в матрице ***Y***.

X**=**

1	$EA_1u^{0-1}(0)=0;$ $N^{1-2}(\ell)$
2	$N^{0-1}(0)$
3	$EA_2u^{1-2}(0)$
4	$N^{1-2}(0)$

; Y=

1	$EA_1u^{0-1}(\ell)=$ $EA_1u^{1-2}(0)$
2	$N^{0-1}(\ell)=N^{1-2}(0)$
3	$EA_2u^{1-2}(\ell)=0$
4	$N^{1-2}(\ell)$

; C=

	1	2	3	4
1			$-\frac{EA_1}{EA_2}$	
2				-1
3				
4	-1			

В матрице ***X*** нулевой оказалась первая строка. Обнуляя 1-ый столбец матрицы ***A*** и суммируя последнюю с матрицей ***C***, получаем уравнение типа (3.1) для ступенчатого стержня

	1	2	3	4		
1		$\frac{1}{\lambda_{p1}}\sin\lambda_{p1}\ell_1$	$-EA_1/EA_2$		$N^{1-2}(\ell)$	3
2		$\cos\lambda_{p1}\ell_1$		-1	$N^{0-1}(0)$	2
3			$\cos\lambda_{p2}\ell_2$	$\frac{1}{\lambda_{p2}}\sin\lambda_{p2}\ell_2$	$EAu^{1-2}(0)$	4
4	-1		$\lambda_{p1}\sin\lambda_{p2}\ell_2$	$\cos\lambda_{p2}\ell_2$	$N^{1-2}(0)$	1

$= 0$

Переставляя строки матрицы ***A**** в новом порядке, методом Гаусса сводим ее к верхнетреугольному виду

$\boldsymbol{A}_{*\Delta} =$

	1	2	3	4
1	-1		$-\lambda_{p2}\sin\lambda_{p2}\ell_2$	$\cos\lambda_{p2}\ell_2$
2		$\cos\lambda_{p1}\ell_1$		-1
3			$-\frac{EA_1}{EA_2}$	$\frac{1}{\lambda_{p1}}\mathrm{tg}\lambda_{p1}\ell_1$
4				$\frac{1}{\lambda_{p2}}\sin\lambda_{p2}\ell_2+\frac{1}{\lambda_{p1}}\mathrm{tg}\lambda_{p1}\ell_1\cdot\cos\lambda_{p2}\ell_2\frac{EA_2}{EI}$

3 Частотное уравнение по МГЭ для данного стержня есть произведение диагональных элементов верхнетреугольной матрицы $\boldsymbol{A}_{*\Delta}$, равное нулю

$$|A_*|=\prod_{i=1}^{4}A_{ii}=\frac{1}{\lambda_{p2}}\cdot\frac{EA_1}{EA_2}\cos\lambda_{p1}\ell_1\sin\lambda_{p2}\ell_2+\frac{1}{\lambda_{p1}}\sin\lambda_{p1}\ell_1\cos\lambda_{p2}\ell_2=0$$

Если разделить последнее уравнение на $\sin\lambda_{p1}\ell_1\sin\lambda_{p2}\ell_2$, то частотное уравнение МГЭ совпадет с частотным уравнением по методу перемещений [201]. Как видно, алгоритм МГЭ формирует частотное уравнение стержневой системы, которое не имеет точек разрыва 2-го рода. Частотное уравнение метода перемещений содержит такие точки. Можно утверждать, что алгоритм МГЭ переводит проблему собственных значений динамики стержневых систем в новую область, исключающую неопределенности типа бесконечных разрывов. Это положение существенно облегчает поиск частот собственных колебаний.

3.4 Выделение симметричных и кососимметричных форм колебаний

Если стержневая система имеет симметричную структуру геометрического порядка, то собственные колебания могут быть представлены симметричной и кососимметричной формами. МГЭ позволяет выделить такие формы без изменений алгоритма расчета. Учет симметричной и кососимметричной форм колебаний основан на свойствах стержневых систем, имеющих оси (плоскости) симметрии. При симметричных колебаниях в сечениях стержневой системы, проведенных через оси симметрии, равны нулю кососимметричные статические и кинематические параметры.

$$\varphi(\ell_{сим})=0;\ \ Q(\ell_{сим})=0;\ \ M_{kp}(\ell_{сим})=0. \qquad (3.13)$$

При кососимметричных колебаниях равны нулю симметричные факторы

$$v(\ell_{сим})=0;\quad M(\ell_{сим})=0;\quad N(\ell_{сим})=0. \qquad (3.14)$$

Эти равенства следуют из учета симметрии стержневых систем в задачах статики [324]. Если в методе начальных параметров затруднительно использовать свойство симметрии конструкции [178], то в МГЭ выделение симметричных и кососимметричных форм колебаний будет заключаться лишь в выполнении условий (3.13) или (3.14). При этом произойдет сокращение порядка матричного уравнения (1.46) вследствие уменьшения числа стержней в расчетной схеме. Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 3.2. [Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс. –М.: Стройиздат, 1964, 181 с.].

Определить первые частоты свободных симметричных колебаний рамы (рисунок 3.2).

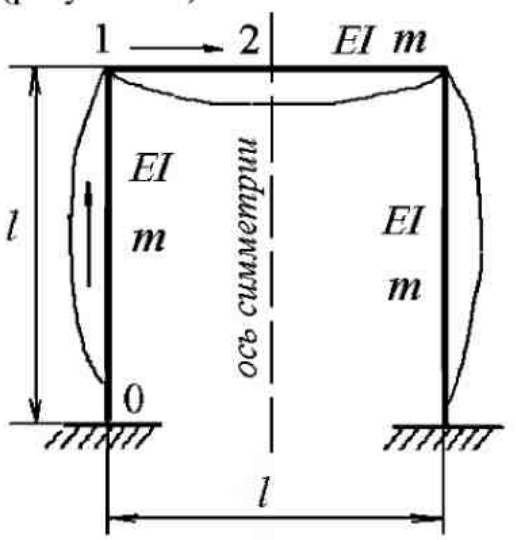


Рисунок 3.2

Методом перемещений найдены 2 первые частоты

$$\omega_1=\frac{12{,}645136}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\qquad \omega_2=\frac{55{,}2049}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\quad \frac{1}{сек}. \qquad (3.15)$$

Согласно алгоритму МГЭ:

1 Рама на рисунке 3.2 имеет ось симметрии. Поэтому рассмотрим только ее левую половину, где вместо 3 стержней и 2 узлов останутся два стержня $\ell^{0-1}=\ell$ и $\ell^{1-2}=\ell/2$ и узел 1. Ось $0y$ стержней направим "вниз", а граф расчета представим стрелками на рисунке 3.2.

2 Формируем матрицы $\boldsymbol{X}_*, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{A}_*$, где учитываем условия опирания стержней и симметричные формы колебаний рамы

В матрице $\boldsymbol{Y}$ оказалось три независимых параметра, которые переносим на место нулевых строк вектора $\boldsymbol{X}_*$. Соответственно в матрице $\boldsymbol{A}_*$ необходимо обнулить 1, 2 и 6 столбцы и ввести ненулевые компенсирующие элементы. Матрица симметричных колебаний рамы примет вид (3.16)

$X_*=$

1	$EIv^{0-1}(0)=0;\ EIv^{1-2}(\ell)$
2	$EI\varphi^{0-1}(0)=0;\ M^{1-2}(\ell)$
3	$M^{0-1}(0)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$N^{0-1}(0)$
6	$EIv^{1-2}(0)=0;\ N^{1-2}(\ell)$
7	$EI\varphi^{1-2}(0)$
8	$M^{1-2}(0)$
9	$Q^{1-2}(0)$
10	$N^{1-2}(0)$

$Y=$

1	$EIv^{0-1}(\ell)=0$
2	$EI\varphi^{0-1}(\ell)=EI\varphi^{1-2}(0)$
3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(0)$
4	$Q^{0-1}(\ell)=N^{1-2}(0)$
5	$N^{0-1}(\ell)=-Q^{1-2}(0)$
6	$EIv^{1-2}(\ell)$
7	$EI\varphi^{1-2}(\ell)=0$
8	$M^{1-2}(\ell)$
9	$Q^{1-2}(\ell)=0$
10	$N^{1-2}(\ell)$

$A_*=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$						
2			$-A_{12}$	$-A_{13}$			-1			
3			$-A_{11}$	A_{12}				-1		
4			$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}						-1
5					1				1	
6	-1						A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	
7							A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	
8		-1					$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}	
9							$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	
10						-1				1

(3.16)

Корни частотного уравнения данной рамы типа (3.2), определенные по программе п.5.3, оказались равными

$$\omega_1=\frac{12{,}6480415}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\ \ \omega_2=\frac{22{,}373285}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\ \omega_3=\frac{55{,}198085}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\ \frac{1}{сек} \qquad (3.17)$$

Данный пример показывает, что при решении задачи методом перемещений существует опасность пропуска частот и вторая частота в действительности является третьей частотой, т.е. погрешность первой частоты $\Delta_1 = 0{,}023\%$, третьей $\Delta_3 = 0{,}012\%$.

Пример 3.3 [131, с.228] Определить первые частоты собственных кососимметричных колебаний рамы (рисунок 3.3). Значение первой частоты получено методом перемещений К. Гогенемзером и В. Прагером

$$\omega_1 = \frac{2{,}637}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

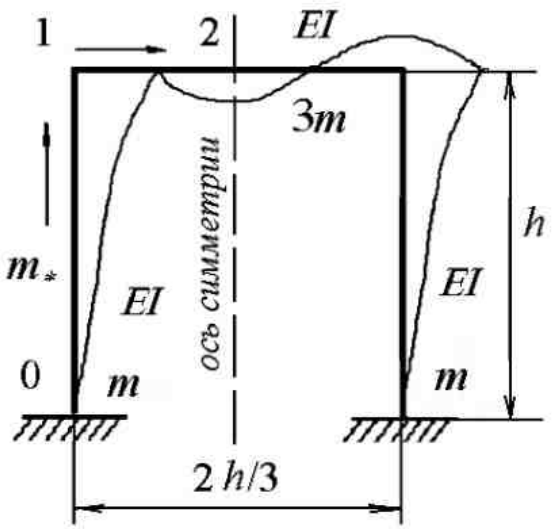


Рисунок 3.3

При кососимметричных колебаниях в сечении по оси симметрии будут равны нулю симметричные параметры ригеля

$$v^{1\text{-}2}(\ell)=0;\ \ M^{1\text{-}2}(\ell)=0;\ \ N^{1\text{-}2}(\ell)=0.$$

1 Поскольку рама симметрична, то рассматриваем только левую её часть (рисунок 3.3).

2 Формируем матрицы . В отличие от предыдущего примера меняются граничные условия для отдельных параметров. Они описывают кососимметричные формы колебаний.

X=

1	$EIv^{0\text{-}1}(0)=0;\ EIv^{0\text{-}1}(\ell)$
2	$EI\varphi^{0\text{-}1}(0)=0;\ EI\varphi^{1\text{-}2}(\ell)$
3	$M^{0\text{-}1}(0)$
4	$Q^{0\text{-}1}(0)$
5	$N^{0\text{-}1}(0)$
6	$EIv^{1\text{-}2}(0)=0;\ Q^{1\text{-}2}(\ell)$
7	$EI\varphi^{1\text{-}2}(0)$
8	$M^{1\text{-}2}(0)$
9	$Q^{1\text{-}2}(0)$
10	$N^{1\text{-}2}(0)$

Y=

1	$EIv^{0\text{-}1}(\ell)$
2	$EI\varphi^{0\text{-}1}(\ell)=EI\varphi^{1\text{-}2}(0)$
3	$M^{0\text{-}1}(\ell)=M^{1\text{-}2}(0)$
4	$Q^{0\text{-}1}(\ell)=N^{1\text{-}2}(0)$
5	$N^{0\text{-}1}(\ell)=-Q^{1\text{-}2}(0)$
6	$EIv^{1\text{-}2}(\ell)=0$
7	$EI\varphi^{1\text{-}2}(\ell)$
8	$M^{1\text{-}2}(\ell)=0$
9	$Q^{1\text{-}2}(\ell)$
10	$N^{1\text{-}2}(\ell)=0$

Матрица кососимметричных колебаний рамы примет вид

$A :=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	–1		$-A_{13}$	$-A_{14}$						
2			$-A_{12}$	$-A_{13}$			–1			
3			$-A_{11}$	A_{12}				–1		
4			$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}						–1
5					1				1	
6							A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	
7		–1					A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	
8							$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}	
9						–1	$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	
10										1

Корни частного уравнения данной задачи оказались равными

$$\omega_1 = \frac{5{,}216253}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\ \ \omega_2 = \frac{27{,}3949615}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\ \omega_3 = \frac{54{,}903095}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\ \frac{1}{сек}, \qquad (3.18)$$

т.е. погрешность первой частоты [redacted]. В данной задаче не учитывалась сила инерции ригеля. Если приближенно принять, что формы колебаний стержня 0-1 рамы, описываемая функцией [redacted], то приведенная масса этого стержня будет равна [redacted]. Тогда коэффициенты λ стержней рамы запишутся так

$$\lambda^{0-1} = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 2m}{EI}};\ \ \lambda^{1-2} = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 3m}{EI}}.$$

При определении частот принимается, что $h = m = EI = 1$. С учетом силы инерции ригеля частоты кососимметричных колебаний рамы будут равны

$$\omega_1 = \frac{3{,}689145}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\ \ \omega_2 = \frac{19{,}527635}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\ \omega_3 = \frac{46{,}217195}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\ \frac{1}{сек} \qquad (3.19)$$

и погрешность [redacted] заметно уменьшилась. Здесь очевидно, что использовано грубое приближение к действительной кривой колебаний стержня 0-1. Если удвоить приведенную массу, т.е. $m_*^{0-1} = 4m$, то частоты

$$\omega_1 = \frac{2{,}608865}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\ \ \omega_2 = \frac{13{,}854515}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\ \omega_3 = \frac{34{,}070305}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\ \frac{1}{сек} \qquad (3.20)$$

и погрешность [redacted] становится малой.

3.5 Учет сосредоточенных масс

В МГЭ учет сосредоточенных масс наиболее просто можно выполнить путем приведения их к эквивалентной распределенной массе, которая суммируется с погонной массой стержня, Данную процедуру естественно выполнить на основе равенства кинетических энергий.

Представим главную формулу колебаний стержня в виде произведений двух функций

$$v_*(x,t) = v(x)\cdot f(t).$$

Скорость движения определяется выражением

$$\dot{v}_*(x,t) = v(x)\cdot \dot{f}(t).$$

Кинетическая энергия стержня с сосредоточенными массами запишется в виде

$$K_{Э1} = \frac{1}{2}\int_0^\ell m v^2(x)\left[\dot{f}(t)\right]^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot v^2(a_i)\left[\dot{f}(t)\right]^2,$$

где M_i - i-ая сосредоточенная масса, a_i - её координата. Соответственно кинетическая энергия заменяющего стержня с распределенной массой предстанет так

$$K_{Э2} = \frac{1}{2}\int_0^\ell m_* v^2(x)\left[\dot{f}(t)\right]^2 dx.$$

Из равенства $K_{Э1} = K_{Э2}$ следует, что

$$m_* = \frac{m\int_0^\ell v^2(x)dx + \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot v^2(a_i)}{\int_0^\ell v^2(x)dx} = m + \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i v^2(a_i)}{\int_0^\ell v^2(x)dx}. \qquad (3.21)$$

Если надлежащим образом выбрать вид задаваемой кривой $v(x)$ упругой линии стержня при колебаниях, то можно приближенно учесть выражением (3.21) сосредоточенные массы. Так, если $v(x) = \sin(\pi x/\ell)$ -

шарнирное опирание граничных точек, то сосредоточенная масса M, расположенная в середине пролета, будет приведена к распределенной с коэффициентом

$$m_* = m + \frac{M \sin^2(\pi/2)}{\int_0^\ell \sin^2(\pi x/\ell)dx} = m + 2M/\ell .$$

Этот результат мало зависит от вида $v(x)$.

3.6 Стержневые системы с подвижными и неподвижными узлами

Стержневые системы, у которых узлы имеют только угловые перемещения, относят к несвободным конструкциям. Их динамический расчет упрощается тем, что отпадает необходимость учета сил и моментов инерции линейно подвижных стержней, а найденные частоты собственных колебаний близки к действительным частотам. Рассмотрим примеры решения задач динамики плоских стержневых систем.

Пример 3.4 [307, с. 205] Определить частоты собственных симметричных колебаний рамы с неподвижными узлами и сосредоточенной массой (рисунок 3.4).

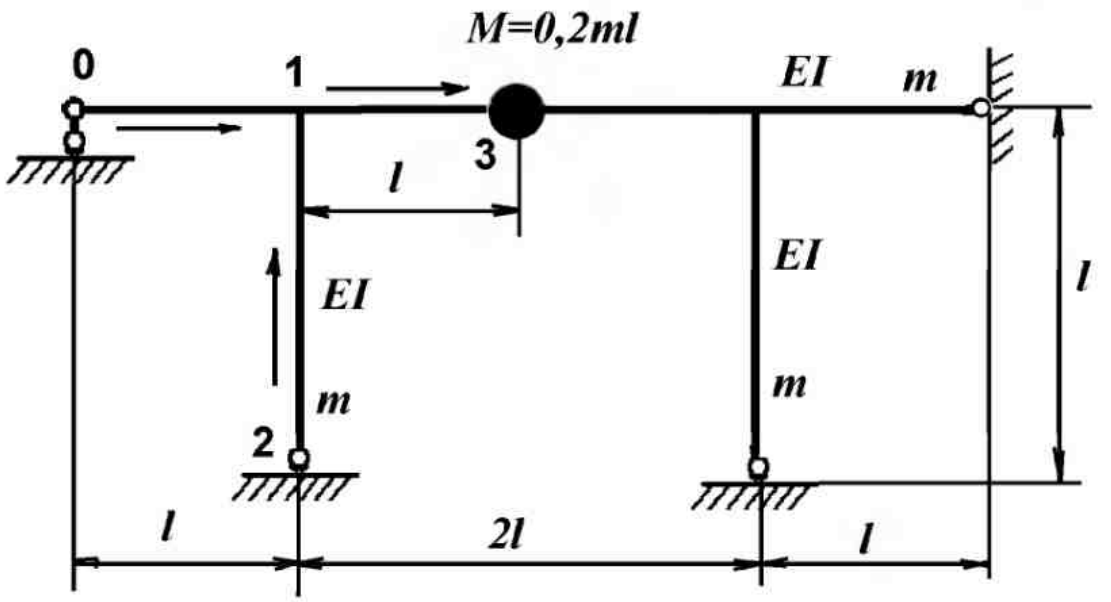


Рисунок 3.4

1 Конструкция симметрична. Рассмотрим только левую часть рамы. Нумеруем узлы, а стрелками показываем начало и конец каждого элемента. Если учитывать продольные и поперечные перемещения стержней, то согласно уравнению (3.10) форма колебаний стержня 1-3 предстанет выражением

$$EIv(x)=A_{11}(x)\cdot EIv(0)+A_{12}(x)\cdot EI\varphi(0)-A_{13}(x)\cdot M(0)-A_{14}(x)\cdot Q(0)+$$
$$+M\cdot g\cdot\left[\mathrm{sh}\lambda(\mathrm{x}-\ell)_+-\sin\lambda(\mathrm{x}-\ell)_+\right]/2\lambda^3\ ,$$

где g- ускорение свободного падения, а все начальные параметры отличны от нуля. Видно, что относительно точный учет сосредоточенной массы по формуле (3.21) предстанет весьма громоздким выражением. Для существенного упрощения процедуры учета сосредоточенной массы примем, что форма колебаний имеет вид

$$v(x)=\sin(\pi\, x/2\ell).$$

Тогда по формуле (3.21) получаем, что

$$m_{1\text{–}3}=m+\frac{2}{2\ell}0{,}2m\ell=1{,}2m.$$

2 Формируем матрицу $\boldsymbol{A}_*$. В плоскости симметрии рамы будет равны нулю кососимметричные параметры (при симметричных колебаниях)

$$\varphi^{1\text{–}3}(\ell)=0;\ Q^{1\text{–}3}(\ell)=0.$$

Матрицы $\boldsymbol{X}_*,\boldsymbol{Y}$ с учетом уравнений равновесия и совместности перемещений узла 1 предстанут в виде

$\boldsymbol{X}_*=$

1	$EIv^{0\text{–}1}(0)=0;\ EIv^{1\text{–}3}(\ell)$
2	$EI\varphi^{1\text{-}3}(0)$
3	$M^{0\text{-}1}(0)=0;\ M^{1\text{-}3}(\ell)$
4	$Q^{1\text{-}3}(0)$
5	$N^{0\text{-}1}(0)=0;\ N^{1\text{-}3}(\ell)$
6	$EIv^{1\text{–}3}(0)=0;\ M^{2\text{–}1}(\ell)$
7	$EI\varphi^{1\text{–}3}(0)$
8	$M^{1\text{-}3}(0)$
9	$Q^{1\text{-}3}(0)$
10	$N^{1\text{-}3}(0)$
11	$EIv^{2\text{–}1}(0)=0;\ Q^{2\text{–}1}(\ell)$
12	$EI\varphi^{2\text{–}1}(0)$
13	$M^{2\text{–}1}(0)=0;\ N^{2\text{–}1}(\ell)$
14	$Q^{2\text{-}1}(0)$
15	$N^{2\text{-}1}(0)$

$\boldsymbol{Y}=$

1	$EIv^{0\text{–}1}(\ell)=0$
2	$EI\varphi^{0\text{–}1}(\ell)=EI\varphi^{1\text{-}3}(0)$
3	$M^{0\text{-}1}(\ell)=M^{1\text{-}3}(0)-M^{2\text{-}1}(\ell)$
4	$Q^{0\text{-}1}(\ell)=Q^{1\text{-}3}(0)+N^{2\text{-}1}(\ell)$
5	$N^{0\text{-}1}(\ell)=N^{1\text{-}3}(0)-Q^{2\text{-}1}(\ell)$
6	$EIv^{1\text{–}3}(\ell)$
7	$EI\varphi^{1\text{–}3}(\ell)=0$
8	$M^{1\text{-}3}(\ell)$
9	$Q^{1\text{-}3}(\ell)=0$
10	$N^{1\text{-}3}(\ell)$
11	$EIv^{2\text{–}1}(\ell)=0$
12	$EI\varphi^{2\text{–}1}(\ell)=EI\varphi^{1\text{–}3}(0)$
13	$M^{2\text{-}1}(\ell)$
14	$Q^{2\text{-}1}(\ell)$
15	$N^{2\text{-}1}(\ell)$

Топологическая матрица $\boldsymbol{C}$, связанная с переносом конечных параметров, примет вид

$\boldsymbol{C}=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1															
2							–1								
3						1		–1							
4									–1				–1		
5										–1	1				
6	–1														
7															
8			–1												
9															
10					–1										
11															
12							–1								
13						–1									
14											–1				
15													–1		

Подчеркнем, что эта матрица не зависит от содержания задачи и будет неизменной и в задачах статики при симметричной нагрузке, и в задачах устойчивости при симметричной форме потери устойчивости.

В матрице $\boldsymbol{A}$ обнуляем 1, 3, 5, 6, 11 и 13 столбцы и накладываем компенсирующие элементы матрицы $\boldsymbol{C}$. Используем блоки фундаментальных функций поперечных колебаний уравнения (3.10) с добавлением динамических нормальных сил. В данном примере не учитываем продольных перемещений стержней и считаем, что $EA \to \infty$, поэтому фундаментальная функция для нормальных сил $\cos\lambda_p \ell \to 1$. Матрица $\boldsymbol{A}_*$ запишется следующим образом (см. следующую страницу).

3 Переставив строки, как показано цифрами справа, прямым ходом метода исключения Гаусса переводим матрицу к верхнетреугольному виду. Далее определитель матрицы вычисляется как произведение диагональных элементов. Чтобы зафиксировать изменение знака определителя необходимо, очевидно, повторять этот алгоритм в пределах определенного интервала изменения частоты ω. Четких правил по выбору начального значения

частоты и шага ее изменения не существует. Здесь необходимо руководствоваться интуитивными представлениями.

$\boldsymbol{A}_* =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1		A_{12}		$-A_{14}$												2
2		A_{11}		$-A_{13}$			**-1**									4
3		$-\lambda^4 A_{14}$		A_{12}		**1**		**-1**								6
4		$-\lambda^4 A_{13}$		A_{11}					**-1**					**-1**		13
5										**-1**	**1**					10
6	**-1**						A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$							1
7							A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$							9
8			**-1**				$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}							3
9							$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}							8
10					**-1**					**1**						5
11												A_{12}		$-A_{14}$		12
12							**-1**					A_{11}		$-A_{13}$		7
13						**-1**						$-\lambda^4 A_{14}$		A_{12}		14
14											**-1**	$-\lambda^4 A_{13}$		A_{11}		11
15													**-1**		**1**	15

Ориентиром могут служить частоты собственных колебаний отдельных стержней (см. таблицу 3.1) и в качестве начальных значений выбрать (1/100 – 1/1000) минимальной частоты составляющих элементов стержневой системы. В качестве грубого шага изменения частоты можно рекомендовать (1/100 – 1/1000) длины интервала, на котором определяется частота. Далее, если интервал, содержащий корень уравнения (3.2), найден, интервал и корень уточняются путем уменьшения шага изменения частоты. Процесс поиска спектра частот собственных колебаний можно полностью автоматизировать, но для наглядности целесообразно осуществить поиск частот визуально, если выводить значения частот и определителя матрицы $\boldsymbol{A}_*$ в виде таблицы, а затем просматривать её. Данный метод

последовательного перебора реализован в программе на языке Fortran, которая представлена в Приложении А.

На рисунке 3.5 показан график изменения определителя $D = f(\lambda)$ для данной рамы. Вычисление определителя проводилось по приведенной программе с шагом $\Delta\lambda = 0{,}01\lambda$. Видно, что частотное уравнение МГЭ не имеет точек разрыва 2-го рода, однако существует возможность пропуска частоты, когда график касается оси абсцисс.

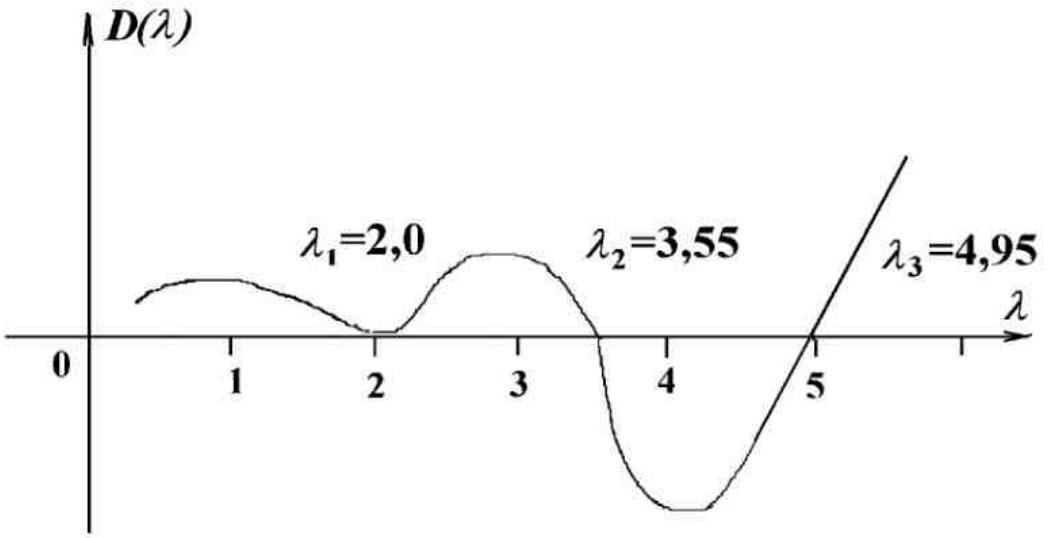


Рисунок 3.5

В этом случае нужно анализировать монотонность изменения определителя $D(\lambda)$. При $EI = m = \ell = 1$ по МГЭ получаются следующие корни

$$\lambda_1 = 2{,}0;\ \lambda_2 = 3{,}55;\ \lambda_3 = 4{,}95;\ldots \qquad (3.22)$$

По методу перемещений корни соответственно равны [307]

$$\lambda_1 \approx 2{,}0;\ \lambda_2 \approx 3{,}39;\ \lambda_3 \approx 4{,}25;\ \lambda_4 \approx 4{,}95\,. \qquad (3.23)$$

Частоты собственных колебаний рамы с сосредоточенной массой по МГЭ

$$\omega_1 = 4{,}0\sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}};\ \ \omega_2 = 12{,}6\sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}};\ \omega_3 = 24{,}5\sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}} \qquad (3.24)$$

По методу перемещений

$$\omega_1 = 4{,}0\sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}};\ \ \omega_2 = 11{,}5\sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}};\ \omega_3 = 18{,}06\sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}};\ \omega_4 = 24{,}5\sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}}\,. \qquad (3.25)$$

Погрешность определения частот по МГЭ составляют

[redacted]; [redacted]; [redacted],

т.е. результаты МГЭ менее достоверны, чем результаты по методу перемещений. Объясняется это приближенным учетом сосредоточенной массы и приведенная масса оказалась заниженной. Действительные частоты будут меньше частот, определенных методом перемещений, поскольку необходимо учитывать продольные перемещения, сдвиг и инерцию вращения элементов рамы.

Если подставить ω_1 в аргументы фундаментальных функций матрицы $\boldsymbol{A}_*$ и условно принять $N^{2-1}(0)=Q^{2-1}(0)=1$, то можно найти из уравнения (3.1) относительные значения граничных параметров стержней рамы при собственных колебаниях. В данном примере

$$\varphi^{1-3}(0)\cdot\frac{\ell}{v^{1-3}(\ell)}=0{,}71 \text{ для } \omega_1 \text{ и } -4{,}42 \text{ для } \omega_2,$$

по методу перемещений

$$\varphi^{1-3}(0)\cdot\frac{\ell}{v^{1-3}(\ell)}=0{,}67 \text{ для } \omega_1 \text{ и } -4{,}85 \text{ для } \omega_2,$$

т.е. формы колебаний, как и частоты двух методов, близки между собой.

3.6.1 Уточнение динамических моделей

В п.3.5 предложено учитывать сосредоточенные массы путем сведения их к эквивалентной распределенной массе. Такой подход позволяет решить задачу учета сосредоточенных масс, однако он имеет серьезные недостатки. Главный недостаток заключается в искажении действительной расчетной схемы. Как результат этого весьма сложно подобрать такое значение эквивалентной распределенной массы, чтобы спектр частот, формы собственных колебаний и напряженно-деформированное состояние модели максимально близко соответствовали бы действительной расчетной схеме. Примеры учета сосредоточенных масс в данной книге подтверждают этот вывод. В этой связи предлагается значительно уточнить динамические модели, которые не искажали бы расчетные схемы и, соответственно, результаты решения динамических задач.

Уточнение выполним на основе простого и, в то же время, достоверного положения. Сосредоточенная масса это некоторая абстрактная модель. Реально сосредоточенная масса представляет собой распределенную массу, но на весьма малой длине (рисунок 3.6). В этой связи предлагается не заменять распределенную массу m_1 сосредоточенной массой M. В этом случае расчетная схема по рисунку 3.6 в алгоритме МГЭ будет иметь дополнительный участок длинной c. Это

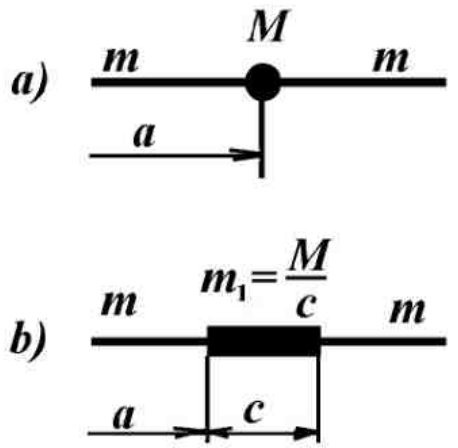


Рисунок 3.6

приведет к увеличению размеров матриц $\boldsymbol{A}_*, \boldsymbol{X}_*$ и $\boldsymbol{B}$, что является как бы платой за уточнение расчетной схемы. Поскольку проблемы с объемом оперативной и внешней памяти компьютеров в настоящее время полностью сняты, то данный подход представляется весьма перспективным. Существенное уточнение одновременно получают расчетная схема, динамическая модель и результаты по МГЭ. Естественно, что чем меньше величина c, тем точнее будет решение задач. Значение c, при котором результаты уже не будут уточняться, можно определить на тестовом примере.

В качестве такового рассмотрим задачу поиска собственных частот симметричных колебаний рамы с сосредоточенной массой по рисунку 3.4.

Пример 3.5 Уточним расчетную схему рамы и примем к рассмотрению левую половину ее (рисунок 3.7). Краевые условия составим для симметричных форм колебаний. Нумеруем узлы, стрелками указываем

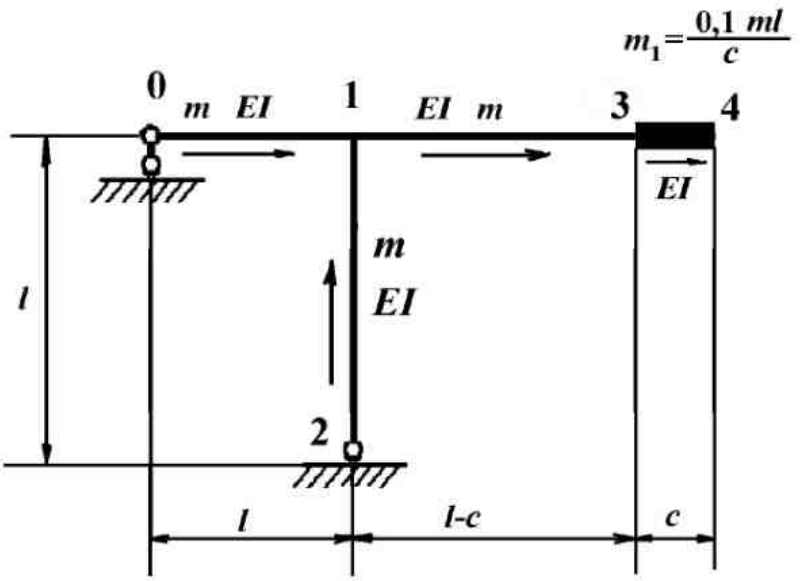


Рисунок 3.7

начало и конец каждого стержня. Распределенная масса стержня 3-4 будет равна половине сосредоточенной массы, деленной на c. Данная расчетная схема в отличие от рисунка 3.4 содержит 4 стержня и матрица $\boldsymbol{A}_*$ будет иметь уже размер 20x20 строк и столбцов. В узле 3 будет иметь место равенство векторов состояний стержней 1-3 и 3-4. Матрицы $\boldsymbol{X}_*$ и $\boldsymbol{Y}$ примут вид

$$X_*= \quad ; \quad Y= \qquad (3.26)$$

	X_*	Y
1	$EIv^{0-1}(0)=0;\ M^{2-1}(\ell)$	$EIv^{0-1}(\ell)=0$
2	$EI\varphi^{0-1}(0)$	$EI\varphi^{0-1}(\ell)=EI\varphi^{1-3}(0)$
3	$M^{0-1}(0)=0;\ Q^{2-1}(\ell)$	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-3}(0)-M^{2-1}(\ell)$
4	$Q^{0-1}(0)$	$Q^{0-1}(\ell)=Q^{1-3}(0)+N^{2-1}(\ell)$
5	$N^{0-1}(0)=0;\ N^{2-1}(\ell)$	$N^{0-1}(\ell)=N^{1-3}(0)-Q^{2-1}(\ell)$
6	$EIv^{1-3}(0)=0;\ EIv^{3-4}(\ell)$	$EIv^{1-3}(\ell)=EIv^{3-4}(0)$
7	$EI\varphi^{1-3}(0)$	$EI\varphi^{1-3}(\ell)=EI\varphi^{3-4}(0)$
8	$M^{1-3}(0)$	$M^{1-3}(\ell)=M^{3-4}(0)$
9	$Q^{1-3}(0)$	$Q^{1-3}(\ell)=Q^{3-4}(0)$
10	$N^{1-3}(0)$	$N^{1-3}(\ell)=N^{3-4}(0)$
11	$EIv^{2-1}(0)=0;\ M^{3-4}(\ell)$	$EIv^{2-1}(\ell)=0$
12	$EI\varphi^{2-1}(0)$	$EI\varphi^{2-1}(\ell)=EI\varphi^{1-3}(0)$
13	$M^{2-1}(0)=0;\ N^{3-4}(\ell)$	$M^{2-1}(\ell)$
14	$Q^{2-1}(0)$	$Q^{2-1}(\ell)$
15	$N^{2-1}(0)$	$N^{2-1}(\ell)$
16	$EIv^{3-4}(0)$	$EIv^{3-4}(\ell)$
17	$EI\varphi^{3-4}(0)$	$EI\varphi^{3-4}(\ell)=0$
18	$M^{3-4}(0)$	$M^{3-4}(\ell)$
19	$Q^{3-4}(0)$	$Q^{3-4}(\ell)=0$
20	$N^{3-4}(0)$	$N^{3-4}(\ell)$

$$\lambda^{0-1}=\lambda^{2-1}=\sqrt[4]{\frac{\omega^2 m}{EI}}=\sqrt{\omega};\ m=EI=1;\ \ell=1;\ c=0{,}1\ell;0{,}01\ell;0{,}001\ell;0{,}0001\ell;\ 0{,}00001\ell;$$

$$\lambda^{1-3}=\sqrt[4]{\frac{\omega^2 m}{EI}}=\sqrt{\omega};\ \lambda^{3-4}=\sqrt[4]{\frac{\omega^2\cdot 0{,}1m\ell}{c\cdot EI}}=\sqrt[4]{\frac{0{,}1\omega^2}{c}};\ \ell^{1-3}=(\ell-c);\ \ell^{3-4}=c.$$

После переноса параметров из Y в X_* уточненная динамическая модель рамы в виде матрицы A_* предстанет следующим образом (см следующую страницу).

Для данной матрицы составляем программу поиска частот собственных колебаний в среде программирования MATLAB.

$A_{\cdot} =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		A_{12}		$-A_{14}$																
2		A_{11}		$-A_{13}$			-1													
3	1	$-\lambda^4 A_{14}$		A_{12}				-1												
4		$-\lambda^4 A_{13}$		A_{11}	-1				-1											
5			1							-1										
6							A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$							-1				
7							A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$								-1			
8							$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}									-1		
9							$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}										-1	
10										1										-1
11												A_{12}		$-A_{14}$						
12							-1					A_{11}		$-A_{13}$						
13	-1											$-\lambda^4 A_{14}$		A_{12}						
14			-1									$-\lambda^4 A_{13}$		A_{11}						
15					-1										1					
16						-1										A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	
17																$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	
18											-1					$-\lambda^4 A_{13}$	$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}	
19																$-\lambda^4 A_{12}$	$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	
20													-1							1

Предварительно в папке Work помещаем подпрограммы – функции фундаментальных функций $A_{11}(t,x)$, $A_{12}(t,x)$, $A_{13}(t,x)$, $A_{14}(t,x)$.

Текст программы поиска частот

$n = 20; n1 = 500; X1 = zeros(n1,1); Y = zeros(n1,1); am = 0.001; dam = 30/n1; \ell = 1.0;$
$c = 0.1 * \ell;$

for $m = 1 : n1$

$\ell a = sqrt(am); \ell a1 = (0.1 * \ell * am\hat{}2/c)\hat{}0.25; a = zeros(n,n);$

$a(1,2) = A12(\ell a, \ell); a(1,4) = -A14(\ell a, \ell); a(2,2) = A11(\ell a, \ell); a(2,4) = -A13(\ell a, \ell);$
$a(2,7) = -1; a(3,1) = 1; a(3,2) = -\ell a\hat{}4 * A14(\ell a, \ell); a(3,4) = a(1,2); a(3,8) = -1;$
$a(4,2) = -\ell a\hat{}4 * A13(\ell a, \ell); a(4,4) = a(2,2); a(4,5) = -1; a(4,9) = -1; a(5,3) = -1;$
$a(5,10) = -1; a(6,7) = A12(\ell a, \ell - c); a(6,8) = -A13(\ell a, \ell - c); a(6,9) = -A14(\ell a, \ell - c);$
$a(6,16) = -1; a(7,7) = A11(\ell a, \ell - c); a(7,8) = -a(6,7); a(7,9) = a(6,8); a(7,17) = -1;$
$a(8,7) = -\ell a\hat{}4 * A14(\ell a, \ell - c); a(8,8) = a(7,7); a(8,9) = a(6,7); a(8,18) = -1;$
$a(9,7) = -\ell a\hat{}4 * A13(\ell a, \ell - c); a(9,8) = -a(8,7); a(9,9) = a(7,7); a(9,19) = -1;$
$a(10,10) = -1; a(10,20) = -1; a(11,12) = a(1,2); a(11,14) = a(1,4); a(12,7) = -1;$
$a(12,12) = a(2,2); a(12,14) = a(2,4); a(13,1) = -1; a(13,12) = a(3,2); a(13,14) = a(1,2);$
$a(14,3) = -1; a(14,12) = a(4,2); a(14,14) = a(2,2); a(15,5) = -1; a(15,15) = 1;$
$a(16,6) = -1; a(16,16) = A11(\ell a1, c); a(16,17) = A12(\ell a1, c); a(16,18) = -A13(\ell a1, c);$
$a(16,19) = -A14(\ell a1, c); a(17,16) = \ell a1\hat{}4 * A14(\ell a1, c); a(17,17) = a(16,16);$
$a(17,18) = -a(16,17); a(17,19) = -a(16,18); a(18,11) = -1; a(18,16) = -\ell a1\hat{}4 * A13(\ell a1, c);$
$a(18,17) = -a(17,16); a(18,18) = a(16,16); a(18,19) = a(16,17);$
$a(19,16) = -\ell a1\hat{}4 * A12(\ell a1, c); a(19,17) = a(18,16); a(19,18) = a(17,16);$
$a(19,19) = a(16,16); a(20,13) = -1; a(20,20) = 1;$
$d = \det(a); X1(m,1) = am; Y(m,1) = d; am = am + dam; end;$
% Построение графика $y = d(am)$
$plot(X1, Y); grid \ on$
% Вывод на печать таблицы значений am и d
% $format \ long \ e$
% $[X1 \ Y]$

Программа вначале строит график $|\boldsymbol{A}_*| = f(\omega)$, где можно грубо определить интервалы для частот собственных колебаний.

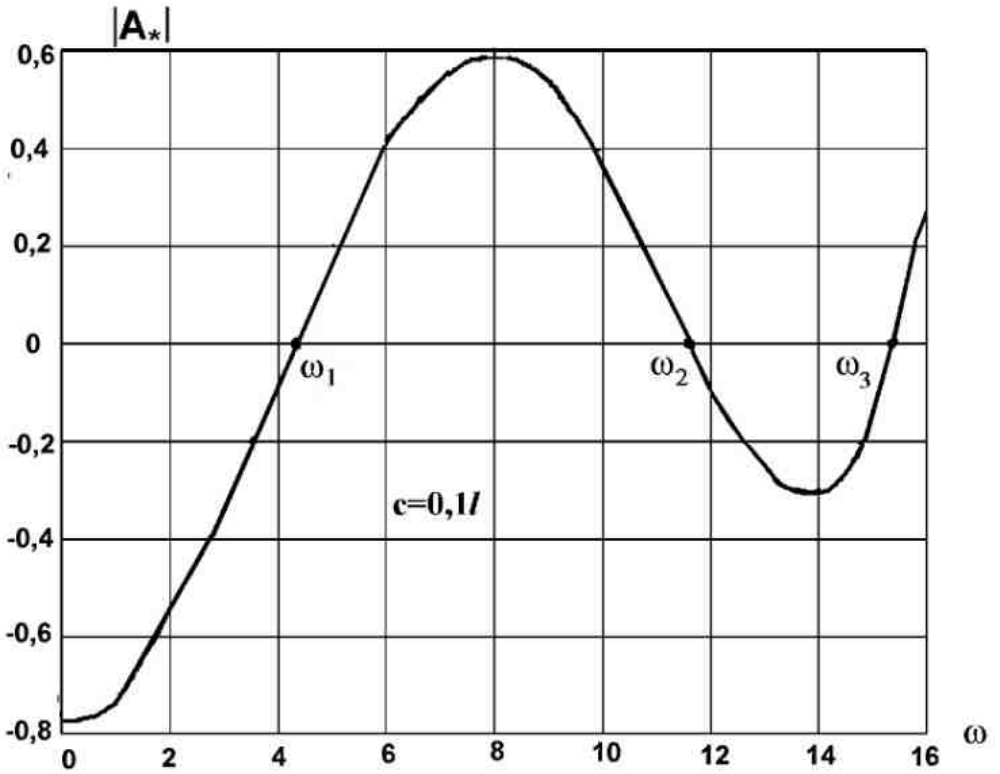


Рисунок 3.8

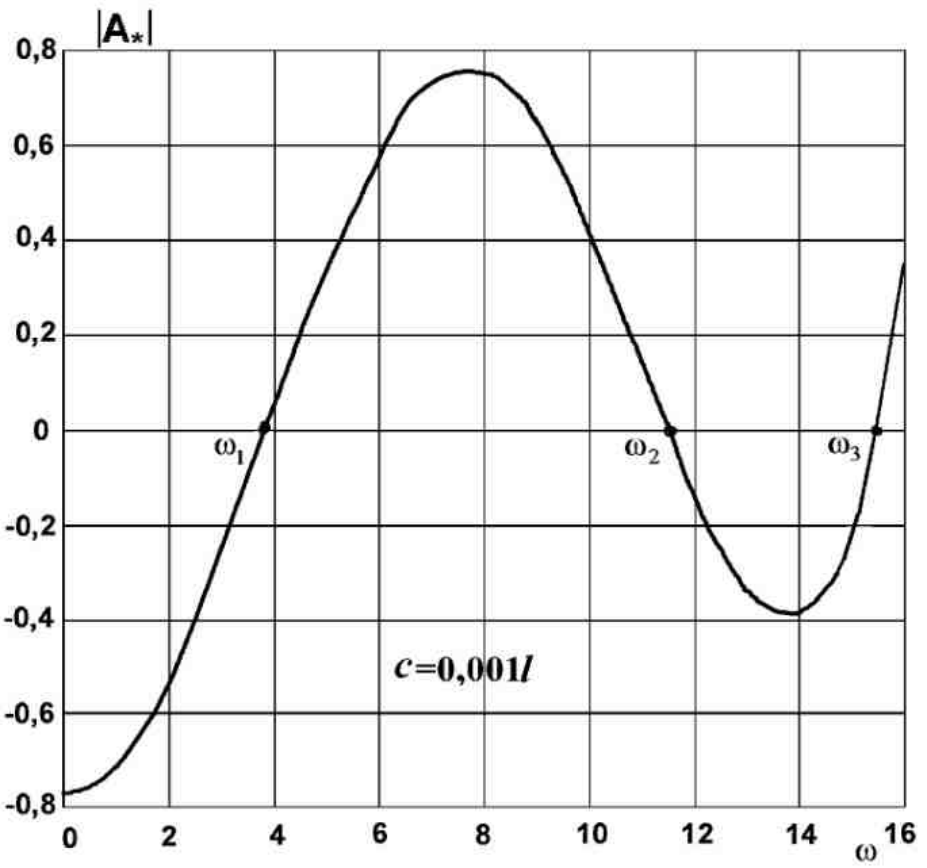


Рисунок 3.9

При $c=0{,}1\ell$ и $c=0{,}001\ell$ фрагменты этих графиков показаны на рисунках 3.8, 3.9. Дальнейшее уменьшение величины c не приводит к уточнению частот, т.е. величина $c=0{,}001\ell$ для распределенной массы может являться достаточно точной моделью сосредоточенной массы.

Уточнение частот при выводе таблицы $[X1\ Y]$, где вектор $X1$ - значения ω, а вектор Y - значения определителя $|\boldsymbol{A}_*|$, приводит к следующим результатам:

$$\lambda_1 \approx 1{,}9867;\ \ \omega_1 = \frac{3{,}947}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\quad \lambda_2 \approx 3{,}3943;\ \ \omega_2 = \frac{11{,}521}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\lambda_3 \approx 3{,}9267;\ \ \omega_3 = \frac{15{,}419}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\quad \lambda_4 \approx 5{,}0552;\ \ \omega_4 = \frac{25{,}555}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}; \qquad (3.28)$$

$$\lambda_5 \approx 6{,}5257;\ \ \omega_{15} = \frac{42{,}585}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \qquad \text{и т.д.}$$

Сопоставляя эти данные с методом перемещений по (3.25)

$$\Delta_1 = 1{,}34\%;\ \Delta_2 = 0{,}18\%;\ \Delta_3 = 17{,}13\%;\ \Delta_4 = 4{,}13\%,$$

можно отметить, что результаты уточненной модели (3.28) существенно лучше согласуются с результатами метода перемещений. Сохраняющееся расхождение по старшим частотам можно объяснить тем, что зависимость $|\boldsymbol{A}_*| = f(\omega)$ в методе перемещений начиная с 3-ей частоты имеет точки разрыва 2-го рода, что не способствует точному определению собственных частот

Таким образом очевидно, что рассмотренный подход не требует усложнения математической модели, но существенно повышает точность и достоверность результатов. Это касается и свободных стержневых систем, где силы инерции линейно подвижных стержней можно учесть с помощью сосредоточенных масс аналогично.

Добавим также, что в алгоритме МГЭ несложно использовать и более точные модели гармоничных колебаний. Для этого в уравнениях краевых задач, подобных уравнению (3.2), нужно заменить фундаментальные функции А.Н. Крылова на фундаментальные функции уравнения С.П. Тимошенко, что дополнительно позволит учесть сдвиг и инерцию вращения стержня.

3.6.2 Расчет неразрезных балок МГЭ и МКЭ

Рассмотрим пример динамического расчета неразрезной балки, расчетная схема которой широко используется в машиностроении и строительстве. К этой схеме приводятся различные валы, оси, балки, роторы турбин, оси гребных винтов, карданные валы и т.п.

Пример 3.6. Определить частоты собственных колебаний и напряженно-деформированное состояние неразрезной балки при заданной динамической нагрузке (рисунок 3.10).

1 Нумеруем узлы и обозначаем стрелками начало и конец всех элементов.

2 Формируем матрицы ***X***, ***Y***, ***B***. Используем уравнение (3.10).

X=

1	$2EIv_{(0)}^{0-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{0-1}$
2	$2EI\varphi_{(0)}^{0-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{1-2}$
3	$M_{(0)}^{0-1}$
4	$Q_{(0)}^{0-1}$
5	$EIv_{(0)}^{1-2}=0;\ 2EI\varphi_{(\ell)}^{2-3}$
6	$EI\varphi_{(0)}^{1-2}$
7	$M_{(0)}^{1-2}$
8	$Q_{(0)}^{1-2}$
9	$2EIv_{(0)}^{2-3}=0;\ Q_{(\ell)}^{2-3}$
10	$2EI\varphi_{(0)}^{2-3}$
11	$M_{(0)}^{2-3}$
12	$Q_{(0)}^{2-3}$

; ***Y***=

1	$2EIv_{(\ell)}^{0-1}=0$
2	$2EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}=2EI\varphi_{(0)}^{1-2}$
3	$M_{(\ell)}^{0-1}=M_{(0)}^{1-2}$
4	$Q_{(\ell)}^{0-1}$
5	$EIv_{(\ell)}^{1-2}=0$
6	$EI\varphi_{(\ell)}^{1-2}=EI\varphi_{(0)}^{2-3}$
7	$M_{(\ell)}^{1-2}=M_{(0)}^{2-3}$
8	$Q_{(\ell)}^{1-2}$
9	$2EIv_{(\ell)}^{2-3}=0$
10	$2EI\varphi_{(\ell)}^{2-3}$
11	$M_{(\ell)}^{2-3}=0$
12	$Q_{(\ell)}^{2-3}$

; ***B***=

1	821,3042
2	487,5471
3	-252,855
4	-151,3181
5	156,0478
6	44,2882
7	-49,4261
8	-53,6240
9	589,7127
10	225,6390
11	-185,6959
12	-149,4157

Элементы матрицы ***B*** вычисляем по выражениям (3.11) при частоте вынужденных колебаний $\theta = 0{,}30779\sqrt{EI/m}$ 1/с.

Коэффициенты фундаментальных функций при $EI = m = 1$ будут равны

$$\lambda^{0-1} = \lambda^{1-2} = \lambda^{2-3} = \sqrt{\omega}\,.$$

Топологическая матрица ***C*** балки примет вид

C=

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2						-2						
3							-1					
4	-1											
5												
6										-0,5		
7											-1	
8		-1										
9												
10					-1							
11												
12									-1			

.

Уравнение МГЭ данной балки запишется следующим образом

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$									$Q_{(\ell)}^{0-1}$		-821,304	3
2			$-A_{12}$	$-A_{13}$		-2							$Q_{(\ell)}^{1-2}$		-487,547	4
3			A_{11}	A_{34}			-1						$M_{(0)}^{0-1}$		252,855	7
4	-1		$\lambda^4 A_{14}$	A_{33}									$Q_{(0)}^{0-1}$		151,3181	1
5						A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$					$2EI\varphi_{(\ell)}^{2-3}$		-156,047	6
6						A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		-0,5			$EI\varphi_{(0)}^{1-2}$		-44,288	8
7						$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}			-1		$M_{(0)}^{1-2}$	=	49,426	11
8		-1				$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}					$Q_{(0)}^{1-2}$		53,624	2
9										A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$Q_{(\ell)}^{2-3}$		-589,712	10
10					-1					A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	$2EI\varphi_{(0)}^{2-3}$		-225,639	5
11										$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}	$M_{(0)}^{2-3}$		185,695	12
12									-1	$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	$Q_{(0)}^{2-3}$		149,415	9

Для поиска частот собственных колебаний балки используем программу на языке *Pascal* в Приложении А.

3 Переставляя строки матрицы $\boldsymbol{A}_*$ в новом порядке, как показано цифрами справа, исследуем поведение ее определителя. Частоты собственных колебаний балки следующие

$\omega_1 = 0{,}31885\sqrt{EI/m}$; $\omega_2 = 0{,}47985\sqrt{EI/m}$; $\omega_3 = 0{,}99225\sqrt{EI/m}$;

$\omega_4 = 1{,}56045\sqrt{EI/m}$; $\omega_5 = 2{,}53035\sqrt{EI/m}$; …

По МКЭ из векового частотного уравнения определены две частоты

$\omega_1 = 0{,}44504\sqrt{EI/m}$; $\omega_2 = 0{,}73265\sqrt{EI/m}$.

Близкими оказались только первые частоты. Известно, что по МКЭ можно определить только приближенный спектр частот, так как в этом методе упругая система с бесконечным числом степеней свободы заменяется системой с конечным числом степеней свободы. В этом и других примерах показано, что МКЭ удовлетворительно точно определяет только первую частоту, и повышение точности расчета достигается дроблением сетки конечных элементов с соответствующим повышением порядка системы разрешающих уравнений [184]. Действительные частоты меньше частот, определенных по МГЭ, но точность спектра достаточно высока. Ниже, в главе «Устойчивость» будет показано, что, например, первая частота по МГЭ для систем с неподвижными узлами имеет погрешность не более 2,0 %.

4 Выполняем расчет неразрезной балки на вынужденную динамическую нагрузку с частотой

$\theta = 0{,}7\omega_1^{МКЭ} = 0{,}7 \cdot 0{,}44504\sqrt{EI/m} = 0{,}30779\sqrt{EI/m}$ 1/с.

Из-за погрешностей в определении спектра частот получился практически резонансный режим, когда амплитуды неограниченно растут. В этом случае объективно может наступить неустойчивость решения системы уравнений $\boldsymbol{A}_* \boldsymbol{X}_* = -\boldsymbol{B}$, так как определитель $|\boldsymbol{A}_*| \to 0$ и параметры напряженно-деформированного состояния получаются недостоверными. Результаты расчета параметров в резонансном режиме и для других значений частоты вынужденных колебаний представлены в таблице 3.3. Использовалась программа на языке *Pascal* примера 2.7, матрицы $\boldsymbol{A}_*$, $\boldsymbol{B}$ вводились с помощью операторов присваивания.

Таблица 3.3

Параметры балки	Динамический расчет					Статический расчет
	Резонансный режим		Нерезонансный режим			
	МГЭ	МКЭ	$\theta = 0{,}7\omega_1^{МГЭ}$	$\theta = 0{,}5\omega_1^{МГЭ}$	$\theta = 0{,}2\omega_1^{МГЭ}$	
$Q_{(\ell)}^{0-1}$, кН	-68,4296	-41,01	-35,8313	-32,9361	-31,2194	-30,9434
$Q_{(\ell)}^{1-2}$, кН	-126,0667	2,99	-36,1800	-31, 5182	-29,2050	-28,8583
$M_{(0)}^{0-1}$, кНм	-285,1143	-101,3	-66,9161	-53,8560	-47,1286	-46,1132
$Q_{(0)}^{0-1}$, кН	184,3333	9,54	54,0433	45,9524	41,7043	41,0566
$2EI\varphi_{(\ell)}^{2-3}$, кНм^2	-1936,4851	-	-255,7103	-172,8050	-134,2930	-128,7924
$EI\varphi_{(0)}^{1-2}$, кНм^2	-224,3246	-	-30,9326	-20,7536	-15,8769	-15,1698
$M_{(0)}^{1-2}$, кНм	141,0263	13,73	-6,6604	-12,8956	-15,4413	-15,7736
$Q_{(0)}^{1-2}$, кН	-203,2924	73,34	-2,6204	6,5925	10,5962	11,1415
$Q_{(\ell)}^{2-3}$, кН	-589,1107	-139,7	-70,6153	-45,0437	-33,1626	-31,4654
$2EI\varphi_{(0)}^{2-3}$, кНм^2	1366,9078	-	167,7506	108,7580	81,4697	77,5849
$M_{(0)}^{2-3}$, кНм	-541,0018	-146,35	-85,6714	-63,2032	-52,7127	-51,2075
$Q_{(0)}^{2-3}$, кН	736,2549	187,20	96,5091	65,1283	50,6045	48,5346

Данные таблицы 3.3 подтверждают достоверность результатов МГЭ по нерезонансным режимам. Чем дальше отстоит частота вынужденных колебаний θ от первой частоты собственных колебаний ω_1, тем ближе значения динамических параметров балки к параметрам статического расчета.

Далее, по уравнению (3.10) и начальным параметрам таблицы 3.3, для $\theta = 0{,}2\omega_1^{МГЭ}$ вычисляем параметры состояния балки во внутренних точках. Результаты вычислений сведены в таблицу 3.4, по данным которой построены эпюры $v(x)$, $\varphi(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$ (рисунок 3.10).

Таблица 3.4

Глобальная координата x, м	Локальная координата x, м	Статические и кинематические параметры			
		Прогиб $EIv(x)$, кНм^3	Угол поворота $EI\varphi(x)$, кНм^2	Изгибающий момент $M_и(x)$, кНм	Поперечная сила $Q(x)$, кН
0,0	0,0	0,0	0,0	-47,1286	41,7043
1,5	1,5	16,0474	15,2676	1,8974	23,6292
3,0	3,0	32,5189	3,9770	23,6314	5,3152
4,5	4,5	24,9906	-13,2867	17,8093	-13,0625
6,0	6,0	0,0	-15,8769	-15,4413	-31,2194 10,5962
7,0	1,0	-9,9227	-5,7359	-4,8366	10,6198
8,0	2,0	-15,0122	-6,2168	5,8068	10,6704 -29,31297
9,0	3,0	-19,2469	2,6299	-23,4881	-29,2570
10,0	4,0	0,0	40,7349	-52,7127	-29,2050 50,6045
11,5	1,5	76,5325	51,8444	22,9755	50,1546
13,0	3,0	127,3474	6,6158	97,3025	49,3454 -31,1581
14,5	4,5	91,4097	-48,5491	49,4453	-32,5766
16,0	6,0	0,0	-67,1465	0,0	-33,1626

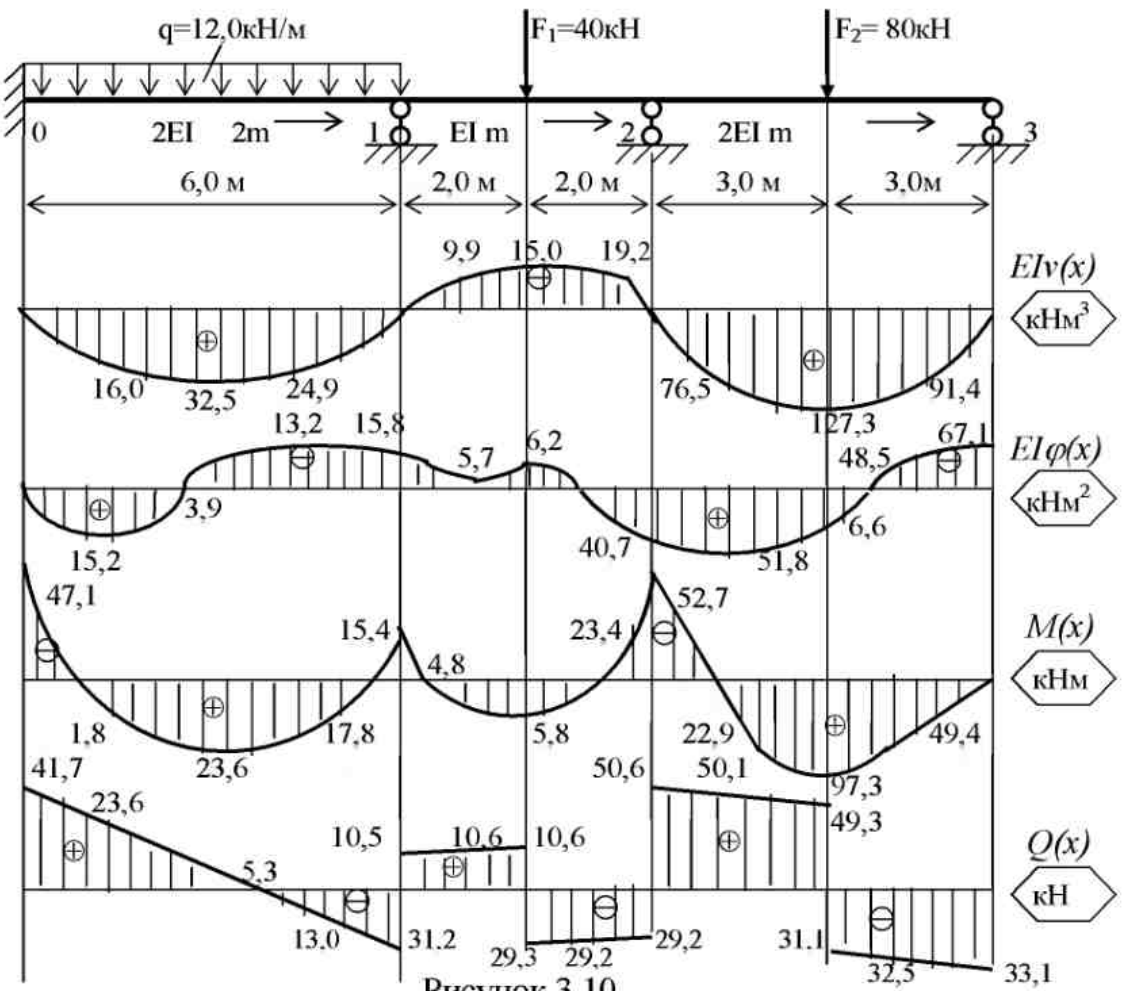


Рисунок 3.10

Представим расчет этой же балки по МКЭ.

Пример 3.7. Расчет динамических параметров выполняем по алгоритму п.1.6.

1 Анализ расчетной схемы и разбивка системы на конечные элементы (рисунок 3.11).

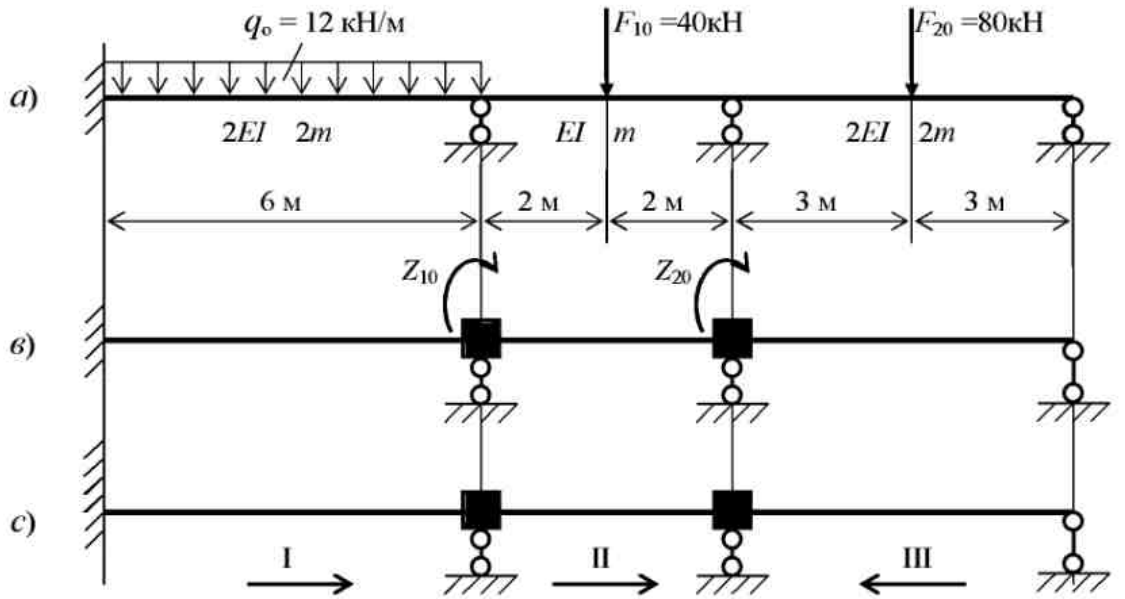


Рисунок 3.11

Степень кинематической неопределимости

$$n_к = n_у + n_л = 2 + 0 = 2$$

2 Выбор основной системы (рисунок 3.11, *в*)

3 Членение системы на конечные элементы (рисунок 3.11, *с*).

4 Определение реакций отдельных стержней от внеузловых воздействий (рисунок 3.12).

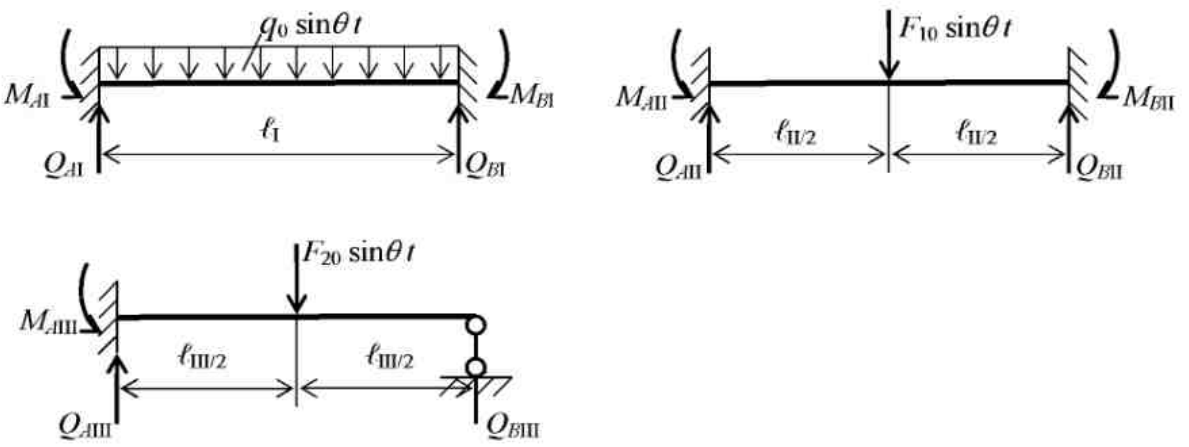


Рисунок 3.12

$$M_{A\text{II}} = \frac{q_0 \ell_{\text{I}}^2}{12} \cdot \psi_{1q}(u_{\text{I}}) = \frac{12 \cdot 36}{12} \psi_{1q}(u_{\text{I}}) = 36 \cdot \psi_{1q}(u_{\text{I}}) = M_{B\text{I}},$$

$$Q_{A\text{II}} = \frac{q_0 \ell_{\text{I}}}{2} \cdot \psi_{2q}(u_{\text{I}}) = \frac{12 \cdot 6}{2} \psi_{2q}(u_{\text{I}}) = 36 \cdot \psi_{2q}(u_{\text{I}}) = Q_{B\text{I}},$$

$$M_{A\text{II}} = \frac{F_{10} \ell_{\text{II}}}{8} \cdot \psi_{1F}(u_{\text{II}}) = \frac{40 \cdot 4}{8} \psi_{1F}(u_{\text{II}}) = 20 \cdot \psi_{1F}(u_{\text{II}}) = M_{B\text{II}},$$

$$Q_{A\text{II}} = \frac{F_{10}}{2} \cdot \psi_{2F}(u_{\text{II}}) = \frac{40}{2} \psi_{2F}(u_{\text{II}}) = 20 \cdot \psi_{2F}(u_{\text{II}}) = Q_{B\text{II}},$$

$$M_{A\text{III}} = \frac{3}{16} F_{20} \ell_{\text{III}} \cdot \psi_{3F}(u_{\text{III}}) = \frac{3 \cdot 80 \cdot 6}{16} \psi_{3F}(u_{\text{III}}) = 90 \psi_{3F}(u_{\text{III}}),$$

$$Q_{A\text{III}} = \frac{11}{16} F_{20} \cdot \psi_{4F}(u_{\text{III}}) = \frac{11 \cdot 80}{16} \psi_{4F}(u_{\text{III}}) = 55 \psi_{4F}(u_{\text{III}}),$$

$$Q_{B\text{III}} = \frac{5}{16} F_{20} \cdot \psi_{5F}(u_{\text{III}}) = \frac{5 \cdot 80}{16} \psi_{5F}(u_{\text{III}}) = 25 \psi_{5F}(u_{\text{III}}).$$

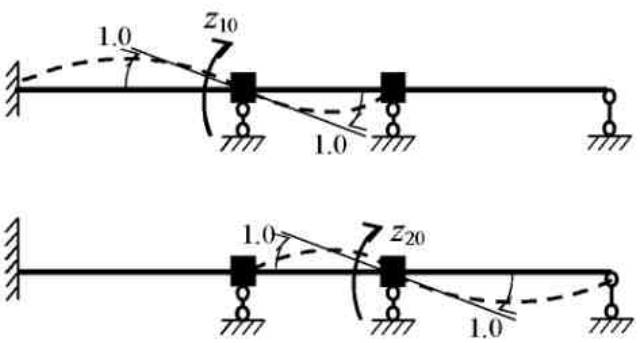
5 Построение исходных матриц

5.1 Матрицы жесткости отдельных элементов, построенные по матрицам жесткости отдельных стержней в зависимости от типа опирания стержней.

$$k_{\text{I}} = EI \begin{bmatrix} 1/9 & 1/3 & -1/9 & 1/3 \\ 1/3 & 4/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/9 & -1/3 & 1/9 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 & 4/3 \end{bmatrix}, \quad k_{\text{II}} = EI \begin{bmatrix} 3/16 & 3/8 & -3/16 & 3/8 \\ 3/8 & 1 & -3/8 & 1/2 \\ -3/16 & -3/8 & 3/16 & -3/8 \\ 3/8 & 1/2 & -3/8 & 1 \end{bmatrix},$$

$$k_{\text{III}} = EI \begin{bmatrix} 1/36 & -1/36 & 1/6 \\ -1/36 & 1/36 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.2 Картины деформаций и матрицы преобразования перемещений к глобальной системе координат (рисунок 3.13).



$$\boldsymbol{C}_{\text{I}} = \begin{array}{c} z_{10}\ z_{20} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}, \quad \boldsymbol{C}_{\text{II}} = \begin{array}{c} z_{10}\ z_{20} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array},$$

$$\boldsymbol{C}_{\text{III}} = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ z_{10}\ z_{20} \end{array}$$

Рисунок 3.13

5.3 Матрицы эквивалентных масс

$$m_{\text{I}} = 2m\begin{pmatrix} 78/35 & 66/35 & 27/35 & 39/35 \\ 66/35 & 72/35 & 39/35 & -54/35 \\ 27/35 & 39/35 & 78/35 & -66/35 \\ -39/35 & -54/35 & -66/35 & 72/35 \end{pmatrix},$$

$$m_{\text{II}} = m\begin{pmatrix} 52/35 & 88/105 & 18/35 & -52/105 \\ 88/105 & 64/105 & 52/105 & -16/35 \\ 18/35 & 52/105 & 52/35 & -88/105 \\ -52/105 & -16/35 & -88/105 & 64/105 \end{pmatrix}, \quad m_{\text{III}} = 2m\begin{pmatrix} 33/35 & 117/140 & -33/35 \\ 117/140 & 102/35 & -108/35 \\ -33/35 & -108/35 & 144/35 \end{pmatrix}$$

6 Последовательность матричных операций

6.1 Матрицы жесткости отдельных элементов в глобальной системе координат

$$\boldsymbol{K}_{\text{I}} = EI\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/9 & 1/3 & -1/9 & 1/3 \\ 1/3 & 4/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/9 & -1/3 & 1/9 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = EI\begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (\boldsymbol{K}_{\text{I}} = C_{\text{I}}^{\text{T}} k_{\text{I}} C_{\text{I}})$$

$$\boldsymbol{K}_{\text{II}} = EI\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/16 & 3/8 & -3/16 & 3/8 \\ 3/8 & 1 & -3/8 & 1/2 \\ -3/16 & -3/8 & 3/16 & -3/8 \\ 3/8 & 1/2 & -3/8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = EI\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{K}_{\text{II}} = C_{\text{II}}' k_{\text{II}} C_{\text{II}})$$

$$\boldsymbol{K}_{\text{III}} = EI \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/36 & -1/36 & 1/6 \\ -1/36 & 1/36 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = EI\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{K}_{\text{III}} = C_{\text{III}}' k_{\text{III}} C_{\text{III}})$$

6.2 Матрица жесткости всей системы

$$\boldsymbol{K} = EI\left(\begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = EI\begin{pmatrix} 7/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_{\text{I}} + \boldsymbol{K}_{\text{II}} + \boldsymbol{K}_{\text{III}})$$

Проверка

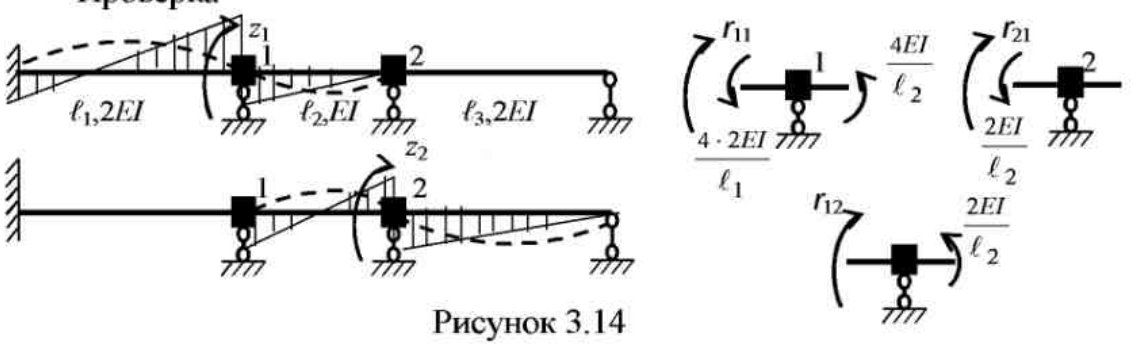


Рисунок 3.14

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow r_{11} = \frac{4 \cdot 2EI}{6} + \frac{4 \cdot EI}{4} = \frac{7}{3} EI$$

$$\sum M_2 = 0, \quad \sum M_1 = 0 \Rightarrow r_{21} = r_{12} = \frac{2EI}{4} = \frac{1}{2} EI.$$

6.3 Матрицы эквивалентных масс в глобальной системе координат

$$\boldsymbol{M}_{\text{I}} = 2m \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 78/35 & 66/35 & 27/35 & 39/35 \\ 66/35 & 72/35 & 39/35 & -54/35 \\ 27/35 & 39/35 & 78/35 & -66/35 \\ -39/35 & -54/35 & -66/35 & 72/35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 144/35 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(M_{\text{I}} = C_{\text{I}}^{\text{T}} m_{\text{I}} C_{\text{I}})$$

$$\boldsymbol{M}_{\text{II}} = m \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 52/35 & 88/105 & 18/35 & -52/105 \\ 88/105 & 64/105 & 52/105 & -16/35 \\ 18/35 & 52/105 & 52/35 & -88/105 \\ -52/105 & -16/35 & -88/105 & 64/105 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 64/105 & -16/35 \\ -16/35 & 64/105 \end{bmatrix}$$

$$(M_{\text{II}} = C_{\text{II}}^{\text{T}} m_{\text{II}} C_{\text{II}})$$

$$\boldsymbol{M}_{\text{III}} = 2m \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 33/35 & 117/140 & -33/35 \\ 117/140 & 102/35 & -108/35 \\ -33/35 & -108/35 & 144/35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 288/35 \end{bmatrix}$$

$$(M_{\text{III}} = C_{\text{III}}^{\text{T}} m_{\text{III}} C_{\text{III}}).$$

6.4 Матрица эквивалентных масс всей системы

$$\boldsymbol{M} = \frac{m}{35} \left(\begin{bmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 64/3 & -16 \\ -16 & 64/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 288 \end{bmatrix} \right) = \frac{m}{35} \begin{bmatrix} 496/3 & -16 \\ -16 & 928/3 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{\text{I}} + \boldsymbol{M}_{\text{II}} + \boldsymbol{M}_{\text{III}})$$

Проверка

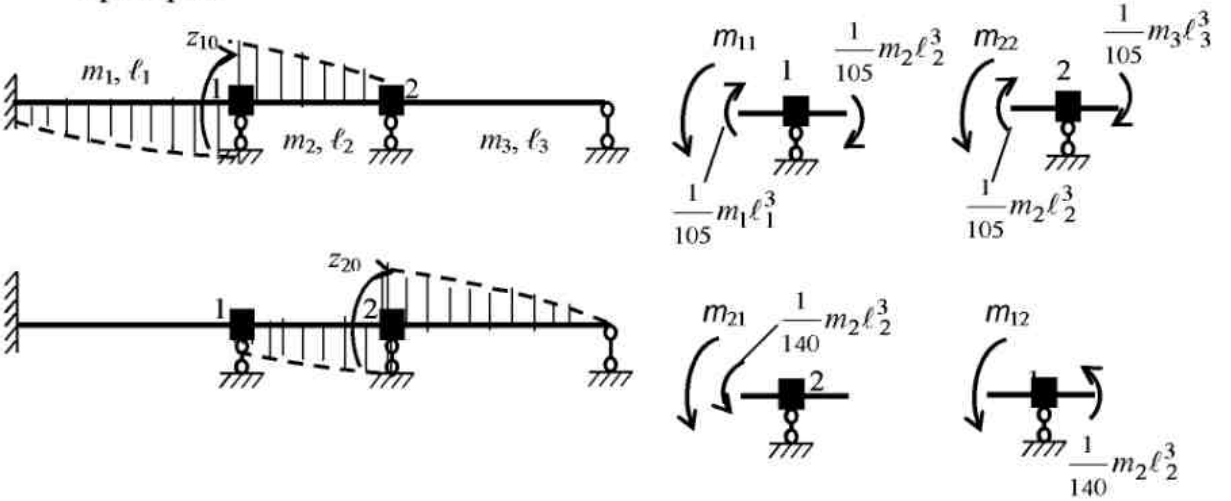


Рисунок 3.15

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow m_{11} = \frac{2m \cdot 36 \cdot 6}{105} + \frac{m \cdot 16 \cdot 4}{105} = \frac{496}{105}m;$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow m_{22} = \frac{m \cdot 16 \cdot 4}{105} + \frac{2m \cdot 2 \cdot 36 \cdot 6}{105} = \frac{928}{105}m;$$

$$\sum M_2 = 0; \quad \sum M_1 = 0; \quad m_{21} = m_{12} = -\frac{16 \cdot 4 \cdot m}{140} = -\frac{16}{35}m.$$

6.5 Составление характеристического уравнения

$$\left|\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M} - \lambda\boldsymbol{E}\right| = 0$$

6.5.1 Обращение матрицы жесткости

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{K}|}\begin{|c|c|}\hline 2 & -1/2 \\ \hline -1/2 & 7/3 \\ \hline\end{|c|c|}, \qquad |\boldsymbol{K}| = \frac{7}{3}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{53}{12},$$

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \frac{12}{53EI}\begin{|c|c|}\hline 2 & -1/2 \\ \hline -1/2 & 7/3 \\ \hline\end{|c|c|}$$

Проверка обращения

$$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{K}^{-1} = \frac{12}{53EI}\cdot EI\begin{|c|c|}\hline 7/3 & 1/2 \\ \hline 1/2 & 2 \\ \hline\end{|c|c|}\begin{|c|c|}\hline 2 & -1/2 \\ \hline -1/2 & 7/3 \\ \hline\end{|c|c|} = \begin{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{|c|c|}$$

6.5.2 Характеристическое уравнение

$$\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M} = \frac{12}{53EI}\begin{|c|c|}\hline 2 & -1/2 \\ \hline -1/2 & 7/3 \\ \hline\end{|c|c|}\cdot\frac{m}{35}\begin{|c|c|}\hline 496/3 & -16 \\ \hline -16 & 928/3 \\ \hline\end{|c|c|} = \frac{m}{EI}\begin{|c|c|}\hline 2{,}1908355 & -1{,}20754 \\ \hline 0{,}7762803 & 4{,}72093 \\ \hline\end{|c|c|}$$

$$\begin{vmatrix} 2{,}1908355\dfrac{m}{EI} - \lambda & -1{,}2075471\dfrac{m}{EI} \\ -0{,}7762803\dfrac{m}{EI} & 4{,}7209342\dfrac{m}{EI} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

6.5.3 Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 6{,}9117697\frac{m}{EI}\lambda + 9{,}405395\left(\frac{m}{EI}\right)^2 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \left(3{,}4558848 \pm \sqrt{11{,}94314 - 9{,}405395}\right)\frac{m}{EI} = \left(3{,}4558848 \pm 1{,}59304\right)\frac{m}{EI}.$$

$$\lambda_{\max} = 5{,}0489248\frac{m}{EI}. \qquad \lambda_{\min} = 1{,}8628448\frac{m}{EI}.$$

6.5.4 Частоты собственных колебаний

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\max}}} = \sqrt{0{,}19806197}\cdot\sqrt{\frac{EI}{m}} = 0{,}44504\cdot\sqrt{\frac{EI}{m}} \quad 1/c;$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}}} = \sqrt{0{,}53681337}\cdot\sqrt{\frac{EI}{m}} = 0{,}73265\cdot\sqrt{\frac{EI}{m}} \quad 1/c.$$

6.6 Собственный вектор для λ_{max}

$$\boldsymbol{A} = \begin{|c|c|}\hline 2{,}1908355 & -1{,}2075471 \\ \hline -0{,}7762803 & 4{,}7209342 \\ \hline\end{|c|c|}.$$

6.6.1 Последовательность получения матриц

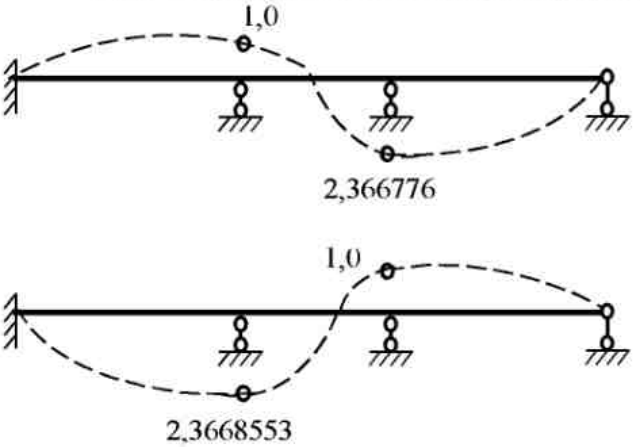
$$S_p\,\boldsymbol{A} = 2{,}1908355 + 4{,}7209342 = 6{,}9117697 = P_1,$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A} - p_1\,\boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} -4{,}7209342 & -1{,}2075471 \\ -0{,}7762803 & -2{,}1908355 \end{vmatrix}.$$

6.6.2 Собственный вектор

$$\overrightarrow{v_{\max}} = \lambda_{\max}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}_1 = \begin{vmatrix} 0{,}3279906 & -1{,}2075471 \\ -0{,}7762803 & -2{,}1908355 \end{vmatrix}.$$

6.6.3 Нормирование вектора и формы колебаний



1-я форма

$$\left\|\overrightarrow{v_{\max}}\right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2{,}366776 & -2{,}3668553 \end{Vmatrix}$$

2-я форма

Рисунок 3.16

6.7 Динамические матрицы жесткости отдельных элементов в локальных системах координат

$$\theta \approx 0{,}7\omega_{\min} = 0{,}30779\sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$\theta^2 = 0{,}094734684\frac{EI}{m}.$$

$$k_{m\mathrm{I}} = EI \begin{vmatrix} 0{,}11111111 & 0{,}33333333 & -0{,}11111111 & 0{,}33333333 \\ 0{,}33333333 & 1{,}33333333 & -0{,}33333333 & 0{,}66666666 \\ -0{,}11111111 & -0{,}33333333 & 0{,}11111111 & -0{,}33333333 \\ 0{,}33333333 & 0{,}66666666 & -0{,}33333333 & 1{,}33333333 \end{vmatrix} -$$

$$-0{,}1894696EI \begin{vmatrix} 2{,}2285714 & 1{,}8857142 & 0{,}77142857 & -1{,}1142857 \\ 1{,}8857142 & 2{,}0571428 & 1{,}1142857 & -1{,}5428571 \\ 0{,}77142857 & 1{,}1142857 & 2{,}2285714 & -1{,}8857142 \\ -1{,}1142857 & -1{,}5428571 & -1{,}8857142 & 2{,}0571428 \end{vmatrix} =$$

$$= EI \begin{vmatrix} -0{,}3111354 & -0{,}0239522 & -0{,}2572734 & 0{,}5444565 \\ -0{,}0239522 & 0{,}9435673 & -0{,}5444565 & 0{,}9589911 \\ -0{,}2572734 & -0{,}5444565 & -0{,}3111354 & 0{,}0239522 \\ 0{,}5444565 & 0{,}9589911 & 0{,}0239522 & 0{,}9435673 \end{vmatrix},$$

$$\left(k_{m\mathrm{I}} = k_1 - \theta^2 m_1\right)$$

$$k_{m\text{II}} = EI \begin{vmatrix} 0{,}1875 & 0{,}375 & -0{,}1875 & 0{,}375 \\ 0{,}375 & 1 & -0{,}375 & 0{,}5 \\ -0{,}1875 & -0{,}375 & 0{,}1875 & -0{,}375 \\ 0{,}375 & 0{,}5 & -0{,}375 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ EI \begin{vmatrix} -0{,}14074884 & -0{,}079366784 & -0{,}048720754 & 0{,}04691628 \\ -0{,}079366784 & -0{,}57743115 & -0{,}04691628 & 0{,}043307336 \\ -0{,}048720754 & -0{,}04691628 & -0{,}14074884 & 0{,}079366784 \\ 0{,}04691628 & 0{,}043307336 & 0{,}079366784 & -0{,}57743115 \end{vmatrix} =$$

$$= EI \begin{vmatrix} 0{,}0467552 & 0{,}2956333 & -0{,}2362207 & 0{,}4219162 \\ 0{,}2956333 & 0{,}9422569 & -0{,}4219162 & 0{,}5433073 \\ -0{,}2362207 & -0{,}4219162 & 0{,}0467552 & -0{,}2956333 \\ 0{,}4219162 & 0{,}5433073 & -0{,}2956333 & 0{,}9422569 \end{vmatrix},$$

$$k_{m\text{III}} = EI \begin{vmatrix} 0{,}2777777 & -0{,}2777777 & 0{,}16666666 \\ -0{,}2777777 & 0{,}2777777 & 0{,}16666666 \\ 0{,}16666666 & -0{,}16666666 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ EI \begin{vmatrix} -0{,}26796414 & 0{,}15834245 & 0{,}26796414 \\ -0{,}15834245 & -0{,}55216854 & 0{,}58464903 \\ 0{,}26796414 & 0{,}58464903 & -0{,}77953206 \end{vmatrix} =$$

$$= EI \begin{vmatrix} -0{,}2401864 & -0{,}1861201 & 0{,}4346307 \\ -0{,}1861201 & -0{,}5243908 & 0{,}4179824 \\ 0{,}4346307 & 0{,}4179824 & 0{,}220468 \end{vmatrix}$$

6.8 Динамическая матрица жесткости всей системы

$$\boldsymbol{K}_{m\text{I}} = EI \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -0{,}3111354 & -0{,}0239522 & -0{,}2572734 & 0{,}5444565 \\ -0{,}0239522 & 0{,}9435673 & -0{,}5444565 & 0{,}9589911 \\ -0{,}2572734 & -0{,}5444565 & -0{,}3111354 & 0{,}0239522 \\ 0{,}5444565 & 0{,}9589911 & 0{,}0239522 & 0{,}9435673 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= EI \begin{vmatrix} 0{,}9435673 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \left(K_{m\text{I}} = C_{\text{I}}^{\text{T}} k_{m\text{I}} C_{\text{I}}\right)$$

$$\boldsymbol{K}_{m\text{II}} = EI \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0{,}0467552 & 0{,}2956333 & -0{,}2362207 & 0{,}4219162 \\ 0{,}2956333 & 0{,}9422569 & -0{,}4219162 & 0{,}5433073 \\ -0{,}2362207 & -0{,}4219162 & 0{,}0467552 & -0{,}2956333 \\ 0{,}4219162 & 0{,}5433073 & -0{,}2956333 & 0{,}9422569 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= EI \begin{vmatrix} 0{,}9422569 & 0{,}5433073 \\ 0{,}5433073 & 0{,}9422569 \end{vmatrix}, \qquad \left(K_{m\text{II}} = C_{\text{II}}^{\text{T}} k_{m\text{II}} C_{\text{II}}\right)$$

$$\boldsymbol{K}_{m\text{III}} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}2401864 & -0{,}1861201 & 0{,}4346307 \\ -0{,}1861201 & -0{,}5243908 & 0{,}4179824 \\ 0{,}4346307 & 0{,}4179824 & 0{,}220468 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= EI \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}220468 \end{bmatrix}, \qquad \left(K_{m\text{III}} = C_{\text{III}}^{\text{T}} k_{m\text{III}} C_{\text{III}}\right)$$

$$\boldsymbol{K}_m = EI \left(\begin{bmatrix} 0{,}9435673 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}9422569 & 0{,}5433073 \\ 0{,}5433073 & 0{,}9422569 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}220468 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= EI \begin{bmatrix} 1{,}8858241 & 0{,}5433073 \\ 0{,}5433073 & 1{,}1627249 \end{bmatrix} \qquad \left(\boldsymbol{K}_m = \boldsymbol{K}_{m\text{I}} + \boldsymbol{K}_{m\text{II}} + \boldsymbol{K}_{m\text{III}}\right)$$

Проверка

$$\boldsymbol{K}_m = EI \left(\begin{bmatrix} 2{,}3333333 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 2 \end{bmatrix} - 0{,}094734884 \begin{bmatrix} 0{,}44750915 & -0{,}04330736 \\ -0{,}04330736 & 0{,}83727518 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= EI \begin{bmatrix} 1{,}8858241 & 0{,}5433073 \\ 0{,}5433073 & 1{,}1627249 \end{bmatrix} \qquad \left(\boldsymbol{K}_m = \boldsymbol{K}\text{-}\theta^2 \boldsymbol{M}\right)$$

6.9 Уравнения для определения перемещений

$$\boldsymbol{K}_m \vec{Z} + \vec{R} = 0$$

6.9.1 Обращение динамической матрицы жесткости всей системы

$$\left|\boldsymbol{K}_m\right| = 1{,}8858241 \cdot 1{,}1627249 - 0{,}5433073^2 = 1{,}8975118$$

$$\boldsymbol{K}_m^{-1} = \frac{1}{1{,}8975118} \cdot \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 1{,}1627249 & -0{,}5433073 \\ -0{,}5433073 & 1{,}8858241 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0{,}61276293 & -0{,}28632617 \\ -0{,}28632617 & 0{,}99384051 \end{bmatrix}$$

Проверка

$$\boldsymbol{K}_m \boldsymbol{K}_m^{-1} \begin{bmatrix} 1{,}155563 - 0{,}155563 & -0{,}53996065 + 0{,}5399608 \\ 0{,}33291856 - 0{,}33291848 & -0{,}15556306 + 1{,}155563 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.9.2 Аргумент частотных коэффициентов

$$u^4 = \ell^4 \frac{m\theta^2}{EI} = 0{,}094734884\ell^4 \Rightarrow$$

$$u^2 = 0{,}30779\ell^2; \qquad u = 0{,}554681 \cdot \ell.$$

6.9.3 Реакции отдельных стержней при поправочных коэффициентах

$$u_1 = 0{,}55468 \cdot 6 = 3{,}32808; \qquad \frac{u_1}{2} = 1{,}66404;$$

$$u_2 = 0{,}55468 \cdot 4 = 2{,}21872; \qquad \frac{u_2}{2} = 1{,}10936;$$

$$u_3 = 0{,}55468 \cdot 6 = 3{,}32808; \qquad \frac{u_3}{2} = 1{,}66404.$$

Поправочные функции

$A_{u_1} = 6{,}51;$ $A_{u_{1/2}} = 1{,}32;$ $A_{u_2} = 2{,}02;$ $A_{u_{2/2}} = 1{,}06;$

$B_{u_1} = 6{,}88;$ $B_{u_{1/2}} = 1{,}77;$ $B_{u_2} = 2{,}67;$ $B_{u_{2/2}} = 1{,}12;$

$C_{u_1} = 7{,}48;\qquad C_{u_{1/2}} = 1{,}41;\qquad C_{u_2} = 2{,}63;\qquad C_{u_{2/2}} = 0{,}63;$

$D_{u_1} = 7{,}04;\qquad D_{u_{1/2}} = 0{,}77;\qquad D_{u_2} = 1{,}87;\qquad D_{u_{2/2}} = 0{,}238;$

$\Delta q_1 = 7{,}48^2 - 6{,}88 \cdot 7{,}04 = 7{,}5152;$

$C_{u1}(A_{u1} - 1) - D_{u1}{}^2 = 7{,}48 \cdot 5{,}51 - 49{,}5616 = -8{,}3468;$

$$\psi_{1q}(u_1) = -\frac{12}{u_1^2 \Delta q_1} \cdot (-8{,}3468) = 1{,}2032979;$$

$$C_{u1} D_{u1} - (A_{u1} - 1) = 7{,}48 \cdot 7{,}04 - 6{,}88 \cdot 5{,}51 = 14{,}7504;$$

$$\psi_{2q}(u_1) = \frac{2}{u_1 \Delta q_1} \cdot 14{,}7504 = \frac{2 \cdot 14{,}7504}{3{,}3208 \cdot 7{,}5152} = 1{,}1795041;$$

$$C_{u_2} \cdot D\left(\frac{u_2}{2}\right) - D_{u_2} \cdot C\left(\frac{u_2}{2}\right) = 2{,}63 \cdot 0{,}238 - 1{,}87 \cdot 0{,}63 = -0{,}55216;$$

$$\Delta^*_{F_2} = C^2(u_2) - B(u_2) \cdot D(u_2) = 2{,}63^2 - 2{,}67 \cdot 1{,}87 = 1{,}924;$$

$$\psi_{1F}(u_2) = -\frac{8}{u_2 \Delta^*_{F2}} \cdot (-0{,}55216 = \frac{8 \cdot 0{,}55216}{2{,}21872 \cdot 1{,}924} = 1{,}0347783;$$

$$C(u_2) \cdot C\left(\frac{u_2}{2}\right) - B(u_2) \cdot D\left(\frac{u_2}{2}\right) = 2{,}63 \cdot 0{,}63 - 2{,}67 \cdot 0{,}238 = 1{,}02144;$$

$$\psi_{2F}(u_2) = \frac{2}{\Delta^*_{F2}} \cdot 1{,}02144 = \frac{2 \cdot 1{,}02144}{1{,}924} = 1{,}0617879;$$

$$-B(u_3) \cdot D\left(\frac{u_3}{2}\right) + D(u_3) \cdot B\left(\frac{u_3}{2}\right) = -6{,}88 \cdot 0{,}77 + 7{,}04 \cdot 1{,}77 = 7{,}1632;$$

$$\Delta^0_{F_2} = A(u_3) \cdot D(u_3) - B(u_3) \cdot C(u_3) = 6{,}51 \cdot 7{,}04 - 6{,}88 \cdot 7{,}48 = -5{,}632;$$

$$\psi_{3F}(u_3) = -\frac{16}{3u_3 \cdot \Delta^0_{F2}} \cdot 7{,}1632 = \frac{16 \cdot 7{,}1632}{3 \cdot 3{,}32808 \cdot 5{,}632} = 2{,}0382121;$$

$$-C(u_3) \cdot B\left(\frac{u_3}{2}\right) + A(u_3) \cdot D\left(\frac{u_3}{2}\right) = -7{,}48 \cdot 1{,}77 + 6{,}51 \cdot 0{,}77 = -8{,}2269;$$

$$\psi_{4F}(u_3) = \frac{16}{11} \cdot \frac{-8{,}2269}{-5{,}632} = 2{,}1247159;$$

$$-B(u_3) \cdot C\left(\frac{u_3}{2}\right) + A(u_3) \cdot D\left(\frac{u_3}{2}\right) = -6{,}88 \cdot 1{,}41 + 6{,}51 \cdot 0{,}77 = -4{,}6881;$$

$$\psi_{5F}(u_3) = \frac{16}{5} \cdot \frac{-4{,}6881}{-5{,}632} = 2{,}6636931;$$

$M_{A1} = 36\psi_{1q}(u_1) = 36 \cdot 1{,}2032979 = 43{,}318724 = M_{B1};$

$M_{A2} = 20\psi_{1F}(u_2) = 20 \cdot 1{,}0347783 = 20{,}695566 = M_{B2};$

$M_{A3} = 90\psi_{3F}(u_3) = 90 \cdot 2{,}0382121 = 183{,}43909;$

$Q_{A1}(u_1) = 36\psi_{2q}(u_1) = 36 \cdot 1{,}1795041 = 42{,}462147 = Q_{B1}(u_1);$

$Q_{A2}(u_2) = 20\psi_{2F}(u_2) = 20 \cdot 1{,}0617879 = 21{,}235758 = Q_{B2}(u_2);$

$Q_{A3}(u_3) = 55\psi_{4F}(u_3) = 55 \cdot 2{,}1247159 = 116{,}85937;$

$Q_{B3}(u_3) = 25\psi_{5F}(u_3) = 25 \cdot 2{,}6636931 = 66{,}592325.$

Матрицы реакций от внеузловых воздействий (рисунок 3.17)

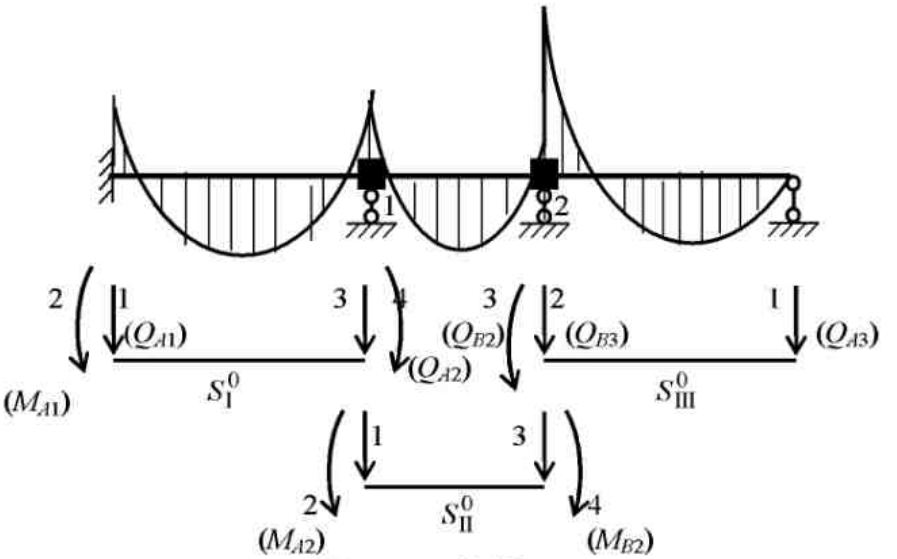
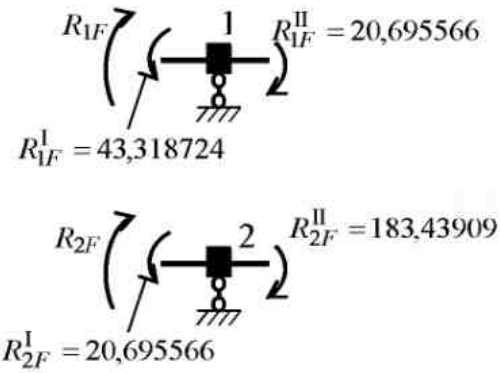


Рисунок 3.17

$$S_{\text{I}}^0 = \begin{vmatrix} 42{,}462147 \\ -43{,}318724 \\ 42{,}462147 \\ 43{,}318724 \end{vmatrix}, \quad S_{\text{II}}^0 = \begin{vmatrix} 21{,}235758 \\ -20{,}695566 \\ 21{,}235758 \\ 20{,}695566 \end{vmatrix}, \quad S_{\text{III}}^0 = \begin{vmatrix} 116{,}85937 \\ 66{,}592325 \\ -183{,}43909 \end{vmatrix}.$$

6.9.4 Векторы реакций связей от амплитудной узловой динамической нагрузки (рисунок 3.18).



$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow$$
$$R_{1F} = -20{,}695566 + 43{,}318724 = 22{,}623158;$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow$$
$$R_{2F} = -183{,}43909 + 20{,}695566 = -162{,}74352.$$

$$\vec{R} = \begin{vmatrix} 22{,}623158 \\ -162{,}74352 \end{vmatrix}.$$

Рисунок 3.18

6.9.5 Решение системы уравнений

$$Z = -\frac{1}{EI}\begin{vmatrix} 0{,}61276293 & -0{,}28632617 \\ -0{,}28632617 & 0{,}99384051 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 22{,}623158 \\ -162{,}74352 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{vmatrix} -60{,}460349 \\ 168{,}21862 \end{vmatrix}.$$

6.10 Перемещения концевых сечений отдельных элементов

$$\Delta_{\text{I}} = \frac{1}{EI}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -60{,}460349 \\ 168{,}21862 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -60{,}460349 \end{vmatrix}, \qquad (\Delta_{\text{I}} = C_{\text{I}} \cdot Z)$$

$$\Delta_{\text{II}} = \frac{1}{EI}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -60{,}460349 \\ 168{,}21862 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{vmatrix} 0 \\ -60{,}460349 \\ 0 \\ 168{,}21862 \end{vmatrix}, \qquad (\Delta_{\text{II}} = C_{\text{II}} \cdot Z)$$

$$\Delta_{\text{III}} = \frac{1}{EI}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -60{,}460349 \\ 168{,}21862 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 168{,}21862 \end{vmatrix}, \qquad (\Delta_{\text{III}} = C_{\text{III}} \cdot Z)$$

6.11 Реакции (поперечные силы и изгибающие моменты) в расчетных сечениях

$$S_{\text{I}} = \begin{vmatrix} -0{,}3111354 & -0{,}0239522 & -0{,}2572734 & 0{,}5444565 \\ -0{,}0239522 & 0{,}9435673 & -0{,}5444565 & 0{,}9589911 \\ -0{,}2572734 & -0{,}5444565 & -0{,}3111354 & 0{,}0239522 \\ 0{,}5444565 & 0{,}9589911 & 0{,}0239522 & 0{,}9435673 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -60{,}460349 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 42{,}462147 \\ -43{,}318724 \\ 42{,}462147 \\ 43{,}318724 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9{,}54344 \\ -101{,}29966 \\ 41{,}013989 \\ -13{,}729684 \end{vmatrix}, \qquad \left(S_{\text{I}} = k_{\text{mI}}\Delta_{\text{I}} + S_{\text{II}}^{0}\right)$$

$$S_{\text{II}} = \begin{vmatrix} 0{,}0467552 & 0{,}2956333 & -0{,}2362207 & 0{,}4219163 \\ 0{,}2956333 & 0{,}9422569 & -0{,}4219162 & 0{,}5433073 \\ -0{,}2362207 & -0{,}4219162 & 0{,}0467552 & -0{,}2956333 \\ 0{,}4219162 & 0{,}5433073 & -0{,}2956333 & 0{,}9422569 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -60{,}460349 \\ 0 \\ 168{,}21862 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 21{,}235758 \\ -20{,}695566 \\ 21{,}235758 \\ 20{,}695566 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 74{,}335826 \\ 13{,}729657 \\ -2{,}986066 \\ -146{,}35218 \end{vmatrix}, \qquad \left(S_{\text{II}} = k_{\text{mII}}\Delta_{\text{II}} + S_{\text{II}}^{0}\right)$$

$$S_{\text{III}} = \begin{vmatrix} -0{,}2401864 & -0{,}1861201 & 0{,}4346307 \\ -0{,}1861201 & -0{,}5243908 & 0{,}4179824 \\ 0{,}4346307 & 0{,}4179824 & 0{,}220468 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 168{,}21862 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 66{,}592325 \\ 116{,}85937 \\ -183{,}43909 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 139{,}7053 \\ 187{,}17179 \\ -146{,}35227 \end{vmatrix}, \qquad \left(S_{\text{III}} = k_{\text{mIII}}\Delta_{\text{III}} + S_{\text{III}}^{0}\right)$$

7 Расчетные эпюры изгибающих моментов

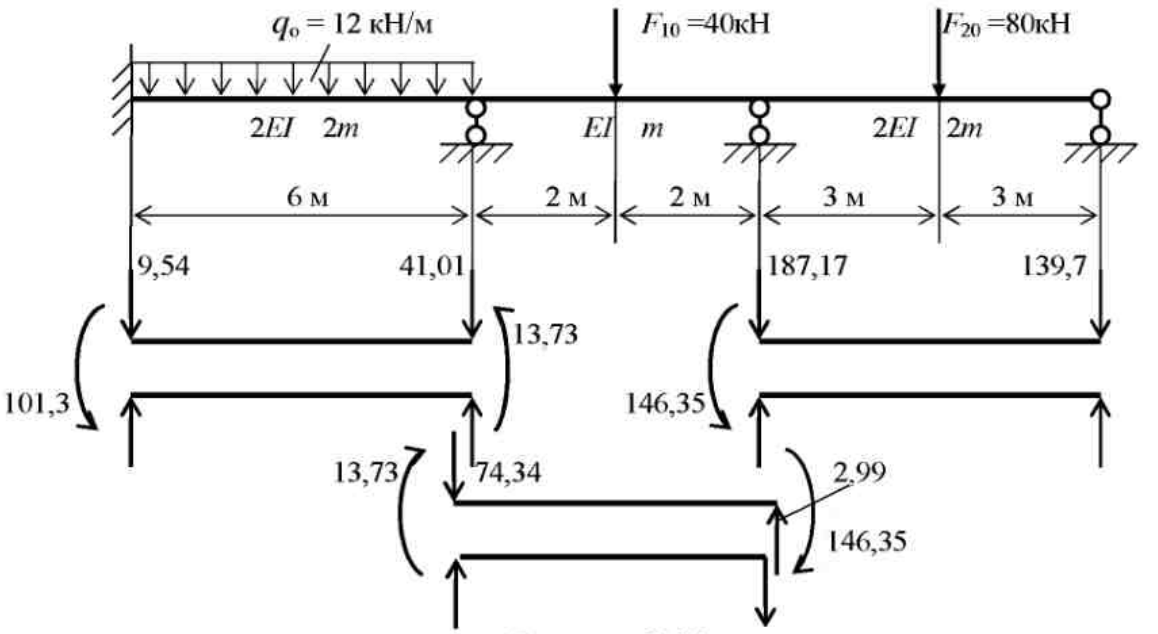


Рисунок 3.19

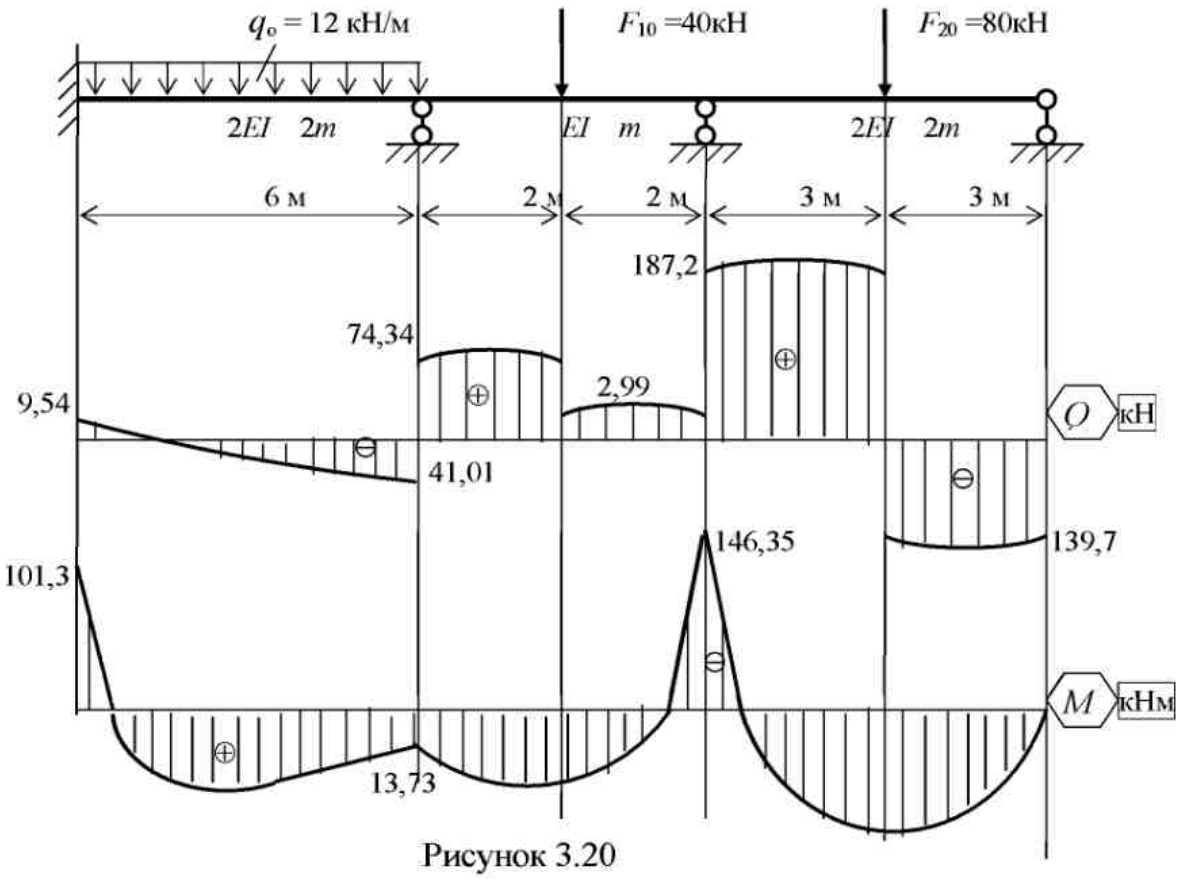


Рисунок 3.20

Сравнение эпюр Q, M и численных результатов по МГЭ (рисунок 3.10) и МКЭ (рисунок 3.20) показывает, что при одинаковой сетке дискретизации балки точность и достоверность динамического расчета у МГЭ значительно выше.

3.6.3 Расчет рам с неподвижными узлами

Покажем применение алгоритма МГЭ для расчета рамы с неподвижными узлами на вынужденную динамическую нагрузку.

Пример 3.8 [184, с.134] Построить эпюры M, Q, N рамы (рисунок 3.21), нагруженной возмущающей силой с частотой

$$\theta = 0{,}39268\sqrt{EI/m} \approx 0{,}7\omega_{\min} \quad 1/\text{с}.$$

1 Разбиваем раму на 3 стержня, нумеруем узлы и обозначаем начало и конец каждого элемента.

2 Формируем уравнение МГЭ. Уравнения равновесия и совместности перемещений узла 1 представлены в матрице **Y**. Граничные точки рамы жестко защемлены. Это приводит к нарушению баланса между независимыми параметрами матрицы **Y** и нулевыми параметрами матрицы **X**. Для восстановления баланса применяем для стержня 0-1 блок уравнений продольных и поперечных колебаний.

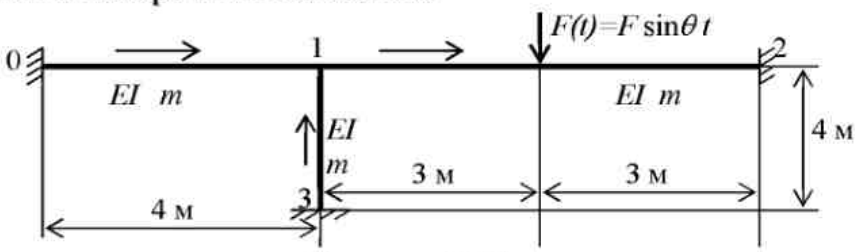


Рисунок 3.21

X=

1	$EI\,v_{(0)}^{0-1}=0;\ M_{(\ell)}^{1-2}$
2	$EI\,\varphi_{(0)}^{0-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{1-2}$
3	$M_{(0)}^{0-1}$
4	$Q_{(0)}^{0-1}$
5	$EI\,u_{(0)}^{0-1}=0;\ N_{(\ell)}^{1-2}$
6	$N_{(0)}^{0-1}$
7	$EI\,v_{(0)}^{1-2}=0;\ M_{(\ell)}^{3-1}$
8	$EI\,\varphi_{(0)}^{1-2}$
9	$M_{(0)}^{1-2}$
10	$Q_{(0)}^{1-2}$
11	$N_{(0)}^{1-2}$
12	$EI\,v_{(0)}^{3-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{3-1}$
13	$EI\,\varphi_{(0)}^{3-1}=0;\ N_{(\ell)}^{3-1}$
14	$M_{(0)}^{1-2}$
15	$Q_{(0)}^{1-2}$
16	$N_{(0)}^{1-2}$

Y=

1	$EI\,v_{(\ell)}^{0-1}=0$
2	$EI\,\varphi_{(\ell)}^{0-1}=EI\,\varphi_{(0)}^{1-2}$
3	$M_{(\ell)}^{0-1}=M_{(0)}^{1-2}-M_{(\ell)}^{3-1}$
4	$Q_{(\ell)}^{0-1}=Q_{(0)}^{1-2}+N_{(\ell)}^{3-1}$
5	$EI\,u_{(\ell)}^{0-1}=0$
6	$N_{(\ell)}^{0-1}=N_{(0)}^{1-2}-Q_{(\ell)}^{3-1}$
7	$EI\,v_{(\ell)}^{1-2}=0$
8	$EI\,\varphi_{(\ell)}^{1-2}=0$
9	$M_{(\ell)}^{1-2}$
10	$Q_{(\ell)}^{1-2}$
11	$N_{(\ell)}^{1-2}$
12	$EI\,v_{(\ell)}^{3-1}=0$
13	$EI\,\varphi_{(\ell)}^{3-1}=EI\,\varphi_{(0)}^{1-2}$
14	$M_{(\ell)}^{3-1}$
15	$Q_{(\ell)}^{3-1}$
16	$N_{(\ell)}^{3-1}$

B=

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	4,567F
8	4,656F
9	-3,313F
10	-1,524F
11	
12	
13	
14	
15	
16	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16			
1			$-\Lambda_{13}$	$-\Lambda_{14}$													$M^{1-2}(\ell)$		3
2			$-\Lambda_{12}$	$-\Lambda_{13}$				-1									$Q^{1-2}(\ell)$		4
3			Λ_{11}	Λ_{12}			1		-1								$M^{0-1}(0)$		9
4			$\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}						-1			-1				$Q^{0-1}(0)$		13
5						4											$N^{1-2}(\ell)$		6
6						1					-1	1					$N^{0-1}(0)$		11
7								Λ_{12}	$-\Lambda_{13}$	$-\Lambda_{14}$	-1						$M^{3-1}(\ell)$	- 4,567	10
8								Λ_{11}	$-\Lambda_{12}$	$-\Lambda_{13}$							$EI\varphi^{1-2}(0)$	- 4,656	8
9	-1							$-\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}	Λ_{12}							$M^{1-2}(0)$	3,313	1
10		-1						$-\lambda^4\Lambda_{13}$	$\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}							$Q^{1-2}(0)$	1,524	2
11					-1						1						$N^{1-2}(0)$		5
12														$-\Lambda_{13}$	$-\Lambda_{14}$		$Q^{3-1}(\ell)$		14
13								-1						$-\Lambda_{12}$	$-\Lambda_{13}$		$N^{3-1}(\ell)$		15
14							-1							Λ_{11}	Λ_{12}		$M^{3-1}(0)$		7
15												-1		$\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}		$Q^{3-1}(0)$		12
16													-1			1	$N^{3-1}(0)$		16

3 Переставив строки матриц $\boldsymbol{A}_*$, $\boldsymbol{B}$ в порядке, показанном цифрами справа, методом Гаусса получаем значения граничные параметров (таблица 3.5).

Таблица 3.5

Величины	МГЭ	МКЭ	Погрешность, %
$M^{1\text{-}2}(\ell)$	-1,812 F	-1,782 F	1,68
$Q^{1\text{-}2}(\ell)$	-1,251 F	-1,228 F	1,84
$M^{0\text{-}1}(0)$	0,385 F	0,372 F	3,44
$Q^{0\text{-}1}(0)$	-0,306 F	-0,295 F	3,72
$N^{1\text{-}2}(\ell)$	-0,159 F	-	-
$N^{0\text{-}1}(0)$	0,0	-	-
$M^{3\text{-}1}(\ell)$	-0,600 F	-0,591 F	1,53
$EI\varphi^{1\text{-}2}(0)$	-0,668 F	-0,653 F	2,25
$M^{1\text{-}2}(0)$	-1,200 F	-1,182 F	1,53
$Q^{1\text{-}2}(0)$	1,111 F	1,089 F	2,01
$N^{1\text{-}2}(0)$	-0,159 F	-	-
$Q^{3\text{-}1}(\ell)$	-0,159 F	-0,160 F	0,84
$N^{3\text{-}1}(\ell)$	-1,270 F	-	-
$M^{3\text{-}1}(0)$	0,385 F	0,372 F	3,44
$Q^{3\text{-}1}(0)$	-0,306 F	-0,295 F	3,72
$N^{3\text{-}1}(0)$	-1,270 F	-	-

Данные таблицы 3.5 показывают, что результаты МКЭ и МГЭ по расчету несвободной рамы на вынужденные колебания практически совпадают. Эпюры *M, Q, N* рамы показаны на рисунке 3.22.

Стержневые системы, у которых узлы имеют угловые и линейные перемещения, называются свободными. Динамический расчет таких конструкций требует учета сил инерции вращательного и поступательного движений отдельных стержней. Существующие методики несовершенны и позволяют учесть такие силы инерции в первом приближении. В МКЭ силы инерции свободных стержней представляются в виде сосредоточенных масс, смещаемых вместе с центром тяжести связанных с ними стержней. Далее эти массы прикладываются к узлам конструкции и учитываются в матрице эквивалентных масс. В МГЭ сосредоточенные массы могут быть учтены формулой (3.21), т.е. сосредоточенные массы приводятся к эквивалентной распределенной массе и их учет приводит к увеличению распределенных масс связанных с ними несвободных стержней.

Отсюда следует, что точный учет сил инерции подвижных стержней является достаточно сложной проблемой. В первом приближении можно рекомендовать следующий порядок учета сил инерции.

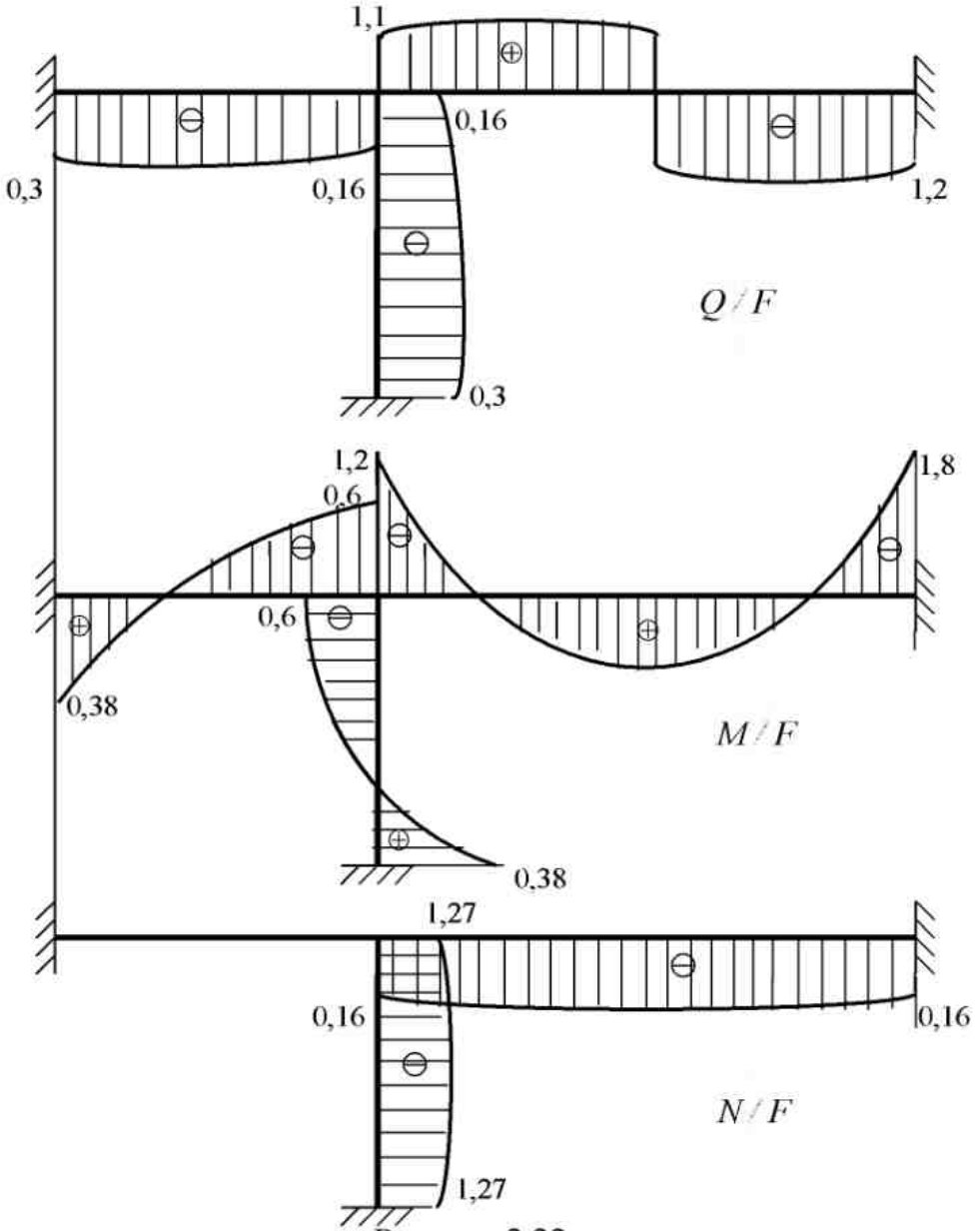


Рисунок 3.22

3.6.4 Учет сил инерции подвижных стержней

Если свободный и несвободный стержни соединены под углом 90^0 (рисунок 3.23), то очевиден переход к схеме *c)*, где m_*^{0-1} определяется по формуле (3.21).

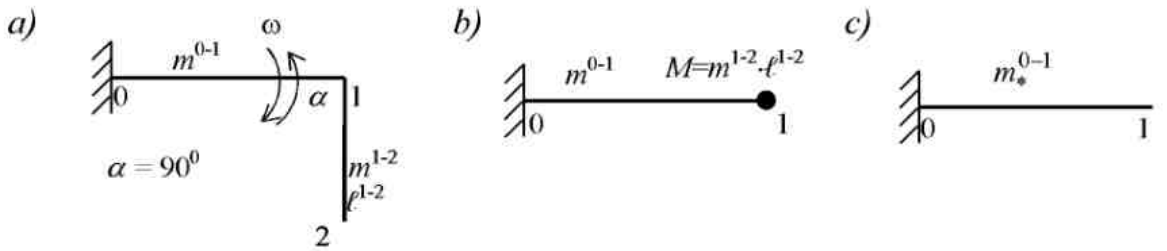


Рисунок 3.23

Если угол α не равен 90^0 (рисунок 3.24), то в узле 1 от силы инерции F возникает еще и момент. Систему сил F и M заменяем одной сосредоточенной силой F_*. Эту замену логично сделать на основе равенства потенциальных энергий схем *b)* и *c)* (рисунок 3.24).

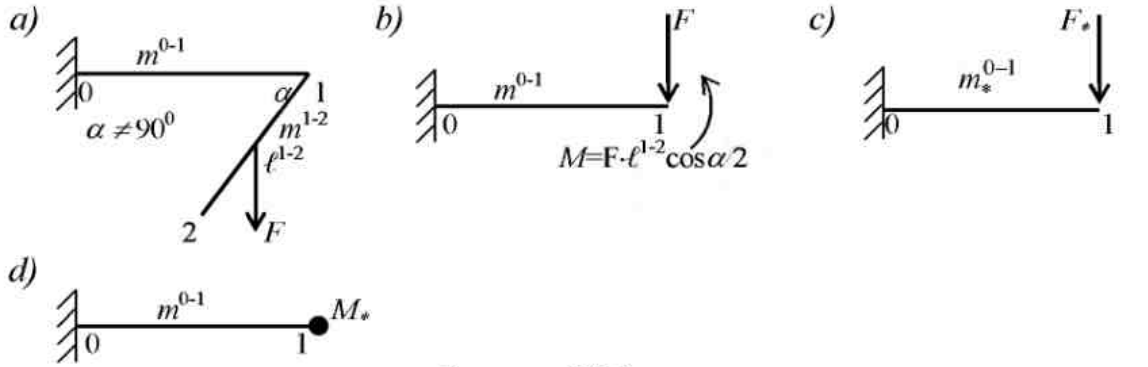


Рисунок 3.24

Потенциальная энергия стержня по рисунку 3.24, *b* будет равна

$$U_b = \int_0^{\ell} M^2(x)dx \Big/ EI = \int_0^{\ell} (-Fx + M)^2 dx \Big/ EI = F^2\ell^3\left(4 - 6\cos\alpha + 3\cos^2\alpha\right)/12EI.$$

Потенциальная энергия стержня по рисунку 3.24, *c*:

$$U_c = \int_0^{\ell} M^2(x)dx \Big/ EI = \int_0^{\ell} (-F_* x)^2 dx \Big/ EI = F_*^2\ell^3/3EI.$$

Из условия $U_b = U_c$ следует, что

$$F_* = F\sqrt{1 + \cos\alpha\left(3\cos\alpha/4 - 1{,}5\right)}. \qquad (3.29)$$

Данную силу можно представить как сосредоточенную массу, равную

$$M_* = F_*/g = m^{1-2}\ell^{1-2}\sqrt{1 + \cos\alpha\left(3\cos\alpha/4 - 1{,}5\right)}. \qquad (3.30)$$

Этим выражением система по рисунку 3.24,*a* сводится к системе по рисунку 3.24,*d*. По формуле (3.21) производится учет сосредоточенной массы M_*. Если узел 1 – шарнир, то в выражении (3.30) нужно принять $\alpha=90^0$. Для пространственного случая выражение для эквивалентной сосредоточенной массы принимает вид

$$M_* = m^{1-2}\ell^{1-2}\sqrt{1 + \cos\alpha\left(3\cos\alpha/4 - 1{,}5\right) + 3EI\cdot\sin^2\alpha/4GI_k}\,. \qquad (3.31)$$

Данным подходом учитывается момент инерции вращательного движения свободного стержня и приближенно задается форма кривой в формуле (3.21). Поэтому достоверность результатов МГЭ при динамическом расчете свободных систем должна оцениваться при сравнении с результатами других методов. Здесь погрешность может достигать 10 % и больше. Рассмотрим примеры динамического расчета свободных стержневых систем.

Пример 3.9 [184, с.131]. Определить частоты собственных колебаний свободной рамы (рисунок 3.25).

1 Разбиваем раму на 4 стержня, нумеруем узлы и определяем начало и конец каждого стержня.

2 Формируем матрицу $\boldsymbol{A}_*$. Ось ОУ каждого стержня направляем «вниз». Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1 и 2 представлены в матрицах $\boldsymbol{X}_*$, $\boldsymbol{Y}$ в соответствии с деформированным состоянием рамы по рисунку 3.25.

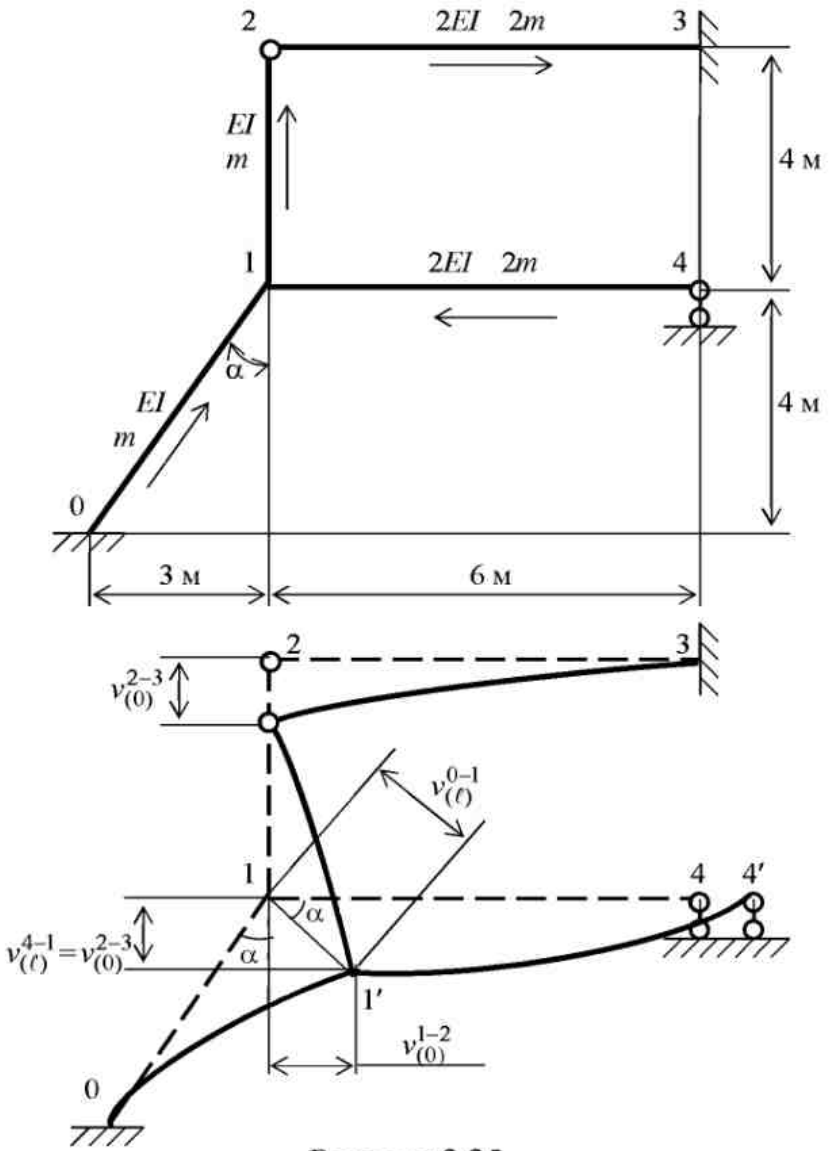


Рисунок 3.25

Используем блоки уравнения (3.10) с добавлением нормальных сил. В матрице $\boldsymbol{A}$ нужно обнулить 1, 2, 11, 13, 16, 18 и 20 столбцы. В раме плоско параллельное движение совершают стержни 1-2 и 4-1.

Для учета сил инерции их линейного движения определяем по формуле (3.30) добавочную сосредоточенную массу стержня 0-1 .

$$M_*^{0-1} = M_*^{1-2} + M_*^{4-1} = m \cdot 4\sqrt{1+\cos(180^0-\alpha)\left(3\cos(180^0-\alpha)/4-1{,}5\right)} +$$

$$+ 2m \cdot 6\sqrt{1+\cos(90^0+\alpha)\left(3\cos(90^0+\alpha)/4-1{,}5\right)} = 24{,}2254m.$$

Принимая форму упругой линии стержня 0-1 в виде $v(x) = \sin\left(\pi x/10{,}0\right)$, по формуле (3.21) получим

$$m_*^{0-1} = m^{0-1} + 2M_*^{0-1}/\ell^{0-1} = 10{,}6902m.$$

Коэффициенты фундаментальных функций матрицы $\boldsymbol{A}_*$ будут равны

$$\lambda^{0-1} = \sqrt[4]{\omega^2 m_*^{0-1}/EI} = 1{,}8082\sqrt[4]{\omega^2 m/EI}\,; \quad \lambda^{1-2} = \lambda^{2-3} = \lambda^{4-1} = \sqrt[4]{\omega^2 m/EI}\,.$$

$\boldsymbol{X}_*=$

1	$EIv_{(0)}^{0-1} = 0;\ M_{(\ell)}^{0-1}$
2	$EI\varphi_{(0)}^{0-1} = 0;\ Q_{(\ell)}^{0-1}$
3	$M_{(0)}^{0-1}$
4	$Q_{(0)}^{0-1}$
5	$N_{(0)}^{0-1}$
6	$EIv_{(0)}^{1-2}$
7	$EI\varphi_{(0)}^{1-2}$
8	$M_{(0)}^{1-2}$
9	$Q_{(0)}^{1-2}$
10	$N_{(0)}^{1-2}$
11	$2EIv_{(0)}^{2-3} = 1{,}5EIv_{(0)}^{1-2};\ N_{(\ell)}^{0-1}$
12	$2EI\varphi_{(0)}^{2-3}$
13	$M_{(0)}^{2-3} = 0;\ EI\varphi_{(\ell)}^{1-2}$
14	$Q_{(0)}^{2-3}$
15	$N_{(0)}^{2-3}$
16	$2EIv_{(0)}^{4-1} = 0;\ M_{(\ell)}^{2-3}$
17	$2EI\varphi_{(0)}^{4-1}$
18	$M_{(0)}^{4-1} = 0;\ Q_{(\ell)}^{2-3}$
19	$Q_{(0)}^{4-1}$
20	$N_{(0)}^{4-1} = 0;\ N_{(\ell)}^{2-3}$

, $\boldsymbol{Y}=$

1	$EIv_{(\ell)}^{0-1} = 1{,}25EIv_{(0)}^{1-2}$
2	$EI\varphi_{(\ell)}^{0-1} = EI\varphi_{(0)}^{1-2}$
3	$M_{(\ell)}^{0-1}$
4	$Q_{(\ell)}^{0-1}$
5	$N_{(\ell)}^{0-1}$
6	$EIv_{(\ell)}^{1-2} = 0$
7	$EI\varphi_{(\ell)}^{1-2}$
8	$M_{(\ell)}^{1-2} = 0$
9	$Q_{(\ell)}^{1-2} = N_{(0)}^{2-3}$
10	$N_{(\ell)}^{1-2} = -\,Q_{(0)}^{2-3}$
11	$2EIv_{(\ell)}^{2-3} = 0$
12	$2EI\varphi_{(\ell)}^{2-3} = 0$
13	$M_{(\ell)}^{2-3}$
14	$Q_{(\ell)}^{2-3}$
15	$N_{(\ell)}^{2-3}$
16	$2EIv_{(\ell)}^{4-1} = -\,1{,}5EIv_{(0)}^{1-2}$
17	$2EI\varphi_{(\ell)}^{4-1} = 2EI\varphi_{(0)}^{1-2}$
18	$M_{(\ell)}^{4-1} = M_{(0)}^{1-2} - M_{(\ell)}^{0-1}$
19	$Q_{(\ell)}^{4-1} = N_{(0)}^{1-2} - 0{,}8N_{(\ell)}^{0-1} + 0{,}6Q_{(\ell)}^{0-1}$
20	$N_{(\ell)}^{4-1} = -Q_{(0)}^{1-2} + 0{,}6N_{(\ell)}^{0-1} + 0{,}8Q_{(\ell)}^{0-1}$

$A_* =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$		-1.25															3
2			$-A_{12}$	$-A_{13}$			-1														7
3	-1		A_{11}	A_{12}																	4
4		-1	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}																	2
5					1						-1										5
6						A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$												6
7						$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$				-1								13
8						$-\lambda^4 A_{13}$	$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}												8
9						$-\lambda^4 A_{12}$	$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}						-1						15
10										1				1							10
11						$1{,}5A_{11}$						A_{12}		$-A_{14}$							14
12						$1{,}5\lambda^4 A_{14}$						A_{11}		$-A_{13}$							12
13						$-1{,}5\lambda^4 A_{13}$						$-\lambda^4 A_{14}$		A_{12}		-1					16
14						$-1{,}5\lambda^4 A_{12}$						$-\lambda^4 A_{13}$		A_{11}				-1			18
15															1					-1	20
16						1,5											A_{12}		$-A_{14}$		17
17							-2										A_{11}		$-A_{13}$		19
18	1							-1									$-\lambda^4 A_{14}$		A_{12}		1
19		-0,6								-1	0,8						$-\lambda^4 A_{13}$		A_{11}		11
20		-0,8							1		-0,6										9

3 Переставив строки матрицы $\boldsymbol{A}_*$ (один из возможных вариантов перестановки показан на матрице $\boldsymbol{A}_*$ справа) и задавая значения ω (при $m = EI = 1$), методом Гаусса вычисляем ее определитель по программе примера 3.6. Фиксируя изменение его знака, получаем частоты собственных колебаний рамы

$$\omega_1 = 0{,}08\sqrt{EI/m}; \qquad \omega_2 = 0{,}25\sqrt{EI/m}; \qquad \omega_3 = 0{,}394\sqrt{EI/m}; \ \ldots$$

Две собственные частоты определены по МКЭ [184]

$$\omega_1 = 0{,}096\sqrt{EI/m}; \qquad \omega_2 = 0{,}543\sqrt{EI/m}.$$

Видно, что первые частоты отличаются на 20 % и значительное расхождение имеет место по вторым частотам.

Отметим, что алгоритм МГЭ не имеет в задачах динамики недостатков, свойственных МКЭ. Проблема точного спектра частот в МГЭ сводится лишь к точному учету сил инерции линейно подвижных элементов.

Рассмотрим пример динамического расчета свободной рамы.

Пример 3.10. Построить эпюры M, Q, N свободной рамы (рисунок 2.17) при вынужденных колебаниях с частотой $\theta = 0{,}09169\sqrt{EI/m}$ 1/с.

Амплитудное значение нагрузки примем равным статическим значениям. Формирование матриц статического расчета данной рамы выполнено в примере 2.9. Для формирования матриц динамического расчета достаточно только заменить фундаментальные функции матриц $\boldsymbol{A}_*$, $\boldsymbol{B}$. Топологическая матрица $\boldsymbol{C}$ остается неизменной.

Масса стержня 4-2 по формулам (3.21), (3.30) будет равна $m_*^{4-2} = 16{,}026m$, а параметр λ

$$\lambda^{4-2} = \sqrt[4]{\theta^2 m_*^{4-2}/2{,}5EI} = 0{,}4818 \text{ м}^{-1}; \qquad (\lambda\ell)^{4-2} = 2{,}409.$$

Элементы матриц $\boldsymbol{A}_*$, $\boldsymbol{B}$ вычисляем по формулам (3.11). Далее методом Гаусса по программе примера 2.7 определяем граничные параметры (после перестановки строк матриц $\boldsymbol{A}_*$, $\boldsymbol{B}$). В таблице 3.6 приведены результаты по МГЭ (с учетом и без учета сил инерции свободных стержней) и по МКЭ (с учетом сил инерции).

Таблица 3.6

Граничные параметры	МГЭ без учета сил инерции	МГЭ с учетом сил инерции	МКЭ с учетом сил инерции
$2EI\varphi_{(\ell)}^{2-3}$, кНм^2	108,551	99,416	-
$Q_{(\ell)}^{2-3}$, кН	-30,742	-30,034	-30,360
$M_{(0)}^{0-1}$, кНм	-79,715	-94,951	-93,971
$Q_{(0)}^{0-1}$, кН	83,699	90,928	90,556
$N_{(0)}^{0-1}$, кН	11,883	15,973	-
$M_{(\ell)}^{4-2}$, кНм	-26,753	-18,736	-15,175
$3EI\varphi_{(0)}^{1-2}$, кНм^2	42,287	36,500	38,117
$M_{(0)}^{1-2}$, кНм	12,495	25,328	25,100

Продолжение таблицы 3.6

$Q_{(0)}^{1-2}$, кН	-11,883	-15,973	-16,246
$N_{(0)}^{1-2}$, кН	-38,106	-31,598	-
$2EIv_{(0)}^{2-3}$, кНм^2	50,153	84,133	81,298
$2EI\varphi_{(0)}^{2-3}$, кНм^2	-51,315	-51,491	-54,322
$M_{(0)}^{2-3}$, кНм	-73,380	-75,215	-73,593
$Q_{(0)}^{2-3}$, кН	54,406	54,014	53,867
$N_{(0)}^{2-3}$, кН	0,0	0,0	-
$Q_{(\ell)}^{4-2}$, кН	-6,292	-13,019	2,028
$N_{(\ell)}^{4-2}$, кН	-71,900	-70,022	-
$M_{(0)}^{4-2}$, кНм	0,379	-21,273	-13,916
$Q_{(0)}^{4-2}$, кН	-5,214	5,408	0,338
$N_{(0)}^{4-2}$, кН	-71,900	-70,022	-
$M_{(0)}^{1-2}$, кНм	12,495	25,328	25,100

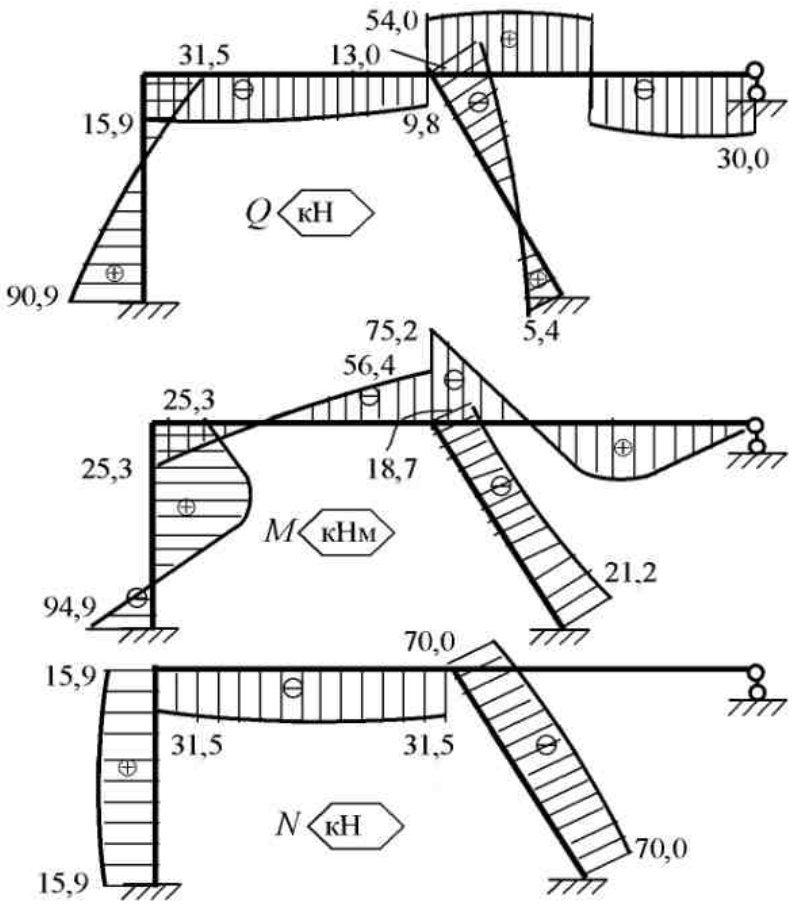


Рисунок 3.26

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20			
1			$-\Lambda_{13}$	$-\Lambda_{14}$							4/3										$2EI\varphi_{(\ell)}^{2-3}$	-320,4	11
2			$-\Lambda_{12}$	$-\Lambda_{13}$			-2/3														$Q^{2-3}(\ell)$	-320,8	4
3			Λ_{11}	Λ_{12}				-1													$M^{0-1}(0)$	241,4	3
4			$\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}						-1											$Q^{0-1}(0)$	122,1	10
5					1				1												$N^{0-1}(0)$		5
6							Λ_{12}	$-\Lambda_{13}$	$-\Lambda_{14}$		-3/2										$M^{4-2}(\ell)$		8
7							Λ_{11}	$-\Lambda_{12}$	$-\Lambda_{13}$			-3/2									$3EI\varphi^{1-2}(0)$		7
8						1	$-\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}	Λ_{12}				-1								$M^{1-2}(0)$		6
9							$-\lambda^4\Lambda_{13}$	$\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}					-1		-0,6	-0,8				$Q^{1-2}(0)$		9
10										1					-1	0,8	-0,6				$N^{1-2}(0)$		17
11											Λ_{11}	Λ_{12}	$-\Lambda_{13}$	$-\Lambda_{14}$							$2EIv^{2-3}(0)$	-360,2	14
12	-1										$\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}	$-\Lambda_{12}$	$-\Lambda_{13}$							$2EI\varphi^{2-3}(0)$	-360,6	1
13											$-\lambda^4\Lambda_{13}$	$-\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}	Λ_{12}							$M^{2-3}(0)$	241,3	13
14		-1									$-\lambda^4\Lambda_{12}$	$-\lambda^4\Lambda_{13}$	$\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}							$Q^{2-3}(0)$	82,2	2
15															1						$N^{2-3}(0)$		15
16											25/12							$-\Lambda_{13}$	$-\Lambda_{14}$		$Q^{4-2}(\ell)$		18
17												-5/4						$-\Lambda_{12}$	$-\Lambda_{13}$		$N^{4-2}(\ell)$		12
18						-1												Λ_{11}	Λ_{12}		$M^{4-2}(0)$		19
19																-1		$\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}		$Q^{4-2}(0)$		16
20																	-1			1	$N^{4-2}(0)$		20

Анализ данных таблицы 3.6 показывает, что результаты МГЭ и МКЭ хорошо согласуются между собой, кроме стержня 4-2. Отметим, что результаты МГЭ по стержню 4-2 являются более достоверными, если сравнивать с результатами статического расчета в таблице 2.5.

Эпюры M, Q, N показаны на рисунке 3.26. Из эпюр следует, что наличие значительной распределенной массы у стержня 4-2 приводит к определенному искажению картины напряженного состояния и по МГЭ.

3.7 Дифференциальные уравнения колебаний кругового стержня в своей плоскости

Для вывода уравнений колебаний кругового стержня в своей плоскости добавляем силы инерции, вызванные продольными, поперечными и угловыми перемещениями (плоский случай), в уравнения равновесия (2.24) – (2.26)

$$\begin{cases} \dfrac{dQ(\alpha,t)}{d\alpha} + N(\alpha,t) - mR\dfrac{d^2v(\alpha,t)}{dt^2} = -q_y(\alpha,t)\cdot R; \\ \dfrac{dN(\alpha,t)}{d\alpha} - Q(\alpha,t) - mR\dfrac{d^2u(\alpha,t)}{dt^2} = -q_x(\alpha,t)\cdot R; \\ \dfrac{dM(\alpha,t)}{d\alpha} - Q(\alpha,t)\cdot R + I\cdot\rho\cdot\left[\dfrac{d^2u(\alpha,t)}{dt^2} + \dfrac{d^3v(\alpha,t)}{d\varphi\cdot dt^2}\right] = 0, \end{cases} \tag{3.32}$$

где ρ – плотность материала стержня;

I – осевой момент инерции;

m – погонная масса.

Момент инерции вращения вычисляется по формуле [312]

$$M_{ин}(\alpha,t) = -\rho I\varepsilon ds = -\rho I\cdot\left[\frac{d^2u(\alpha,t)}{dt^2} + \frac{d^3v(\alpha,t)}{d\varphi\cdot dt^2}\right],$$

где $\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi(\alpha,t)}{dt^2}$ – угловое ускорение угла поворота сечения стержня.

Уравнения (3.32) выражаем через продольное и поперечное перемещения оси стержня как и в п.2.5.1. Далее используем метод Фурье разделения переменных. Система дифференциальных уравнений колебаний кругового стержня в своей плоскости с учетом инерции вращения в амплитудном состоянии примет вид

$$\begin{cases} v^{IV}_{(\alpha)} + \dfrac{\rho IR^2\omega^2}{EI}v''(\alpha) + \dfrac{EAR^2 - m\omega^2R^4}{EI}v(\alpha) + u'''(\alpha) + \dfrac{\rho R^2\omega^2 I - EAR^2}{EI}u'(\alpha) = \\ = \dfrac{R^4}{EI}q_y(\alpha); \\ \left(1 + \dfrac{EAR^2}{EI}\right)u''(\alpha) + \dfrac{\rho R^2\omega^2 I + mR^4\omega^2}{EI}u(\alpha) + v'''(\alpha) + \dfrac{\rho R^2\omega^2 I - EAR^2}{EI}v'(\alpha) = \\ = -\dfrac{R^4}{EI}q_x(\alpha). \end{cases} \tag{3.33}$$

Первое уравнение описывает поперечные колебания, а второе – продольные колебания точки оси кругового стержня. Если пренебречь инерцией вращения, то система уравнений (3.33) несколько упростится

$$\begin{cases} v^{IY}_{(\alpha)} + \dfrac{EAR^2 - m\omega^2 R^4}{EI} v(\alpha) + u'''(\alpha) - \dfrac{EAR^2}{EI} u'(\alpha) = \dfrac{R^4}{EI} q_y(\alpha); \\ \left(1 + \dfrac{EAR^2}{EI}\right) u''(\alpha) + \dfrac{m\omega^2 R^4}{EI} u(\alpha) + v'''(\alpha) - \dfrac{EAR^2}{EI} v'(\alpha) = -\dfrac{R^4}{EI} q_x(\alpha). \end{cases} \tag{3.34}$$

Аналитические решения систем уравнений (3.33), (3.34) до настоящего времени не получены. Один из наиболее простых путей аналитического решения задачи колебаний кругового стержня в своей плоскости состоит в следующем. Кроме инерции вращения можно не учитывать и деформацию растяжения $\varepsilon = \left[u'(\alpha) - v(\alpha)\right] \Big/ R = 0$, тогда $u'(\alpha) = v(\alpha)$ и система (3.34) сведется к одному уравнению 6-го порядка

$$v^{YI}_{(\alpha)} - \frac{m\omega^2 R^4 + EI}{EI} v''(\alpha) - \frac{m\omega^2 R^4}{EI} v(\alpha) = \frac{R^4}{EI}\left[q''_y(\alpha) + q'_x(\alpha)\right]. \tag{3.35}$$

Характеристическое уравнение для этого уравнения предстанет полиномом 6-го порядка

$$k^6 - \frac{m\omega^2 R^4 + EI}{EI} k^2 - \frac{m\omega^2 R^4}{EI} = 0 \to t = k^2, \tag{3.36}$$

который сводится к уравнению третьего порядка

$$t^3 - \frac{m\omega^2 R^4 + EI}{EI} t - \frac{m\omega^2 R^4}{EI} = 0. \tag{3.37}$$

Кубическое уравнение (3.37) будет иметь 2 случая корней:

1 – все корни t_1, t_2, t_3 - действительные;

2 – два корня комплексные $t_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ и один корень действительный $t_3 = \alpha_1$.

Отсюда следует, что полное аналитическое решение задачи колебаний кругового стержня будет иметь множество вариантов (больше 10) фундаментальных функций. Точное решение системы уравнений (3.33) еще больше усложняется.

ГЛАВА 4 УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Расчет на устойчивость стержневых систем сводится к определению критических сил, превышение которых вызывает переход системы из одного равновесного состояния в другое. Такой переход весьма часто приводит к разрушению конструкции или другим формам аварий, поэтому крайне нежелателен и для практики важно знание определенного спектра критических сил и соответствующих им форм потери устойчивости.

Анализ устойчивости стержневой системы может быть проведен на основе качественного подхода, разработанного проф. Р.Р. Матевосяном [182]. В соответствии с этим подходом составляется определитель устойчивости метода перемещений. При произвольном значении сжимающей нагрузки на стержни определитель устойчивости сводят к верхнетреугольному виду, диагональные элементы которого образуют ряд устойчивости. По ряду устойчивости и судят о степени неустойчивости и количестве "пройденных" критических сил. Предварительно вычисляются эйлеровые критические силы отдельных стержней основной системы метода перемещений, которые всегда больше или равны первой критической силе заданной системы.

Такой подход характеризуется минимумом арифметических операций и сложностью логики, включающей операции умножения, транспонирования и обращения матриц. Кроме того, определитель устойчивости метода перемещений имеет, как и в динамике, точки разрыва 2-го рода, что затрудняет поиск спектра критических сил.

Большое распространение для решения задач устойчивости стержневых систем получил МКЭ [184]. В МКЭ рассматривается вековое уравнение, из которого определяются критические силы.

Число критических сил по МКЭ равно степени кинематической неопределимости стержневой системы, а при формировании векового уравнения используются операции сложения, умножения и траспонирования матриц.

Таким образом, решение задач устойчивости стержневых систем имеет тот же алгоритм и те же недостатки существующих методов, что и в задачах динамики. МГЭ позволяет освободить решение задач устойчивости от указанных недостатков. Построение соотношений устойчивости МГЭ проведем при "мертвых" нагрузках. Введем допущения:

1 Стержни системы считаются нерастяжимыми и несжимаемыми.

2 Расстояния между узлами системы после потери устойчивости не изменяются.

3 Деформация сдвига не учитывается.

4.1 Фундаментальные решения для продольно-поперечного изгиба стержня

Основой математических моделей задач устойчивости стержневых систем является решение задачи Коши продольно-поперечного изгиба стержня. Связано это с тем, что потеря устойчивости наступает при появлении изгибных состояний у элементов стержневых систем. Задача Коши продольно-поперечного изгиба прямолинейного стержня в линейной постановке формулируется следующим образом [307]

$$\begin{aligned} &v^{IV}(x)+n^2v^{II}(x)=q_y(x)/EI;\ v(0);\ v^{I}(0)=\varphi(0);\\ &v^{IV}(0)=-M(0)/EI;\ \ v^{III}(0)=-Q(0)/EI, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где коэффициент n определяется по формуле

$$n=\sqrt{\frac{F}{EI}},$$

F – продольная сжимающая сила.

Решение задачи Коши (4.1) по алгоритму п.1.3 можно представить в матричной форме

$$\begin{array}{|c|} \hline EIv(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ \overline{Q}(x) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & x & -A_{13} & -A_{14} \\ & 1 & -A_{23} & -A_{13} \\ & & A_{33} & A_{23} \\ & & A_{43} & A_{33} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ \overline{Q}(0) \\ \hline \end{array} + \int_0^x \begin{array}{|c|} \hline A_{14}(x-\xi) \\ A_{13}(x-\xi) \\ -A_{23}(x-\xi) \\ -A_{44}(x-\xi) \\ \hline \end{array} q_y(\xi)d\xi \tag{4.2}$$

где фундаментальные ортонормированные функции имеют вид

$$A_{13}=(1-\cos nx)/n^2;\ \ A_{14}=(nx-\sin nx)/n^3;\ \ A_{23}=\sin nx/n;\ \ A_{33}=\cos nx; \tag{4.3}$$
$$A_{43}=-n\sin nx.$$

Здесь $\overline{Q}(x)$ - поперечная сила, перпендикулярная к искривленной оси стержня. Когда ось $0y$ стержня направлена "вверх", то в уравнении (4.2) знаки минус опускаются. Если решать задачу Коши (4.1) со сдвиговой силой $Q(x)$, перпендикулярной первоначальной прямолинейной оси стержня, то в уравнении (4.2) изменятся отдельные фундаментальные функции [182, 307]

$$\begin{array}{|c|} \hline EIv(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ & A_{22} & -A_{12} & -A_{13} \\ & -A_{32} & A_{22} & A_{12} \\ & & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \\ \hline \end{array} \tag{4.4}$$

где

$$A_{12}\sin nx/n;\quad A_{13}=(1-\cos nx)/n^2;\quad A_{14}=(nx-\sin nx)/n^3;\quad A_{22}=\cos nx;\quad A_{32}=-n\sin nx; \tag{4.5}$$

$Q(x)$- поперечная сила, перпендикулярная первоначальной прямолинейной оси стержня. Уравнение (4.4) позволяет упрощать статические краевые условия по сравнению с уравнением (4.2).

Решение задачи Коши продольно-поперечного изгиба (4.4) широко используется в методе перемещений и методе начальных параметров для составления трансцендентных уравнений устойчивости [182, 307, 26]. Однако, оно может быть применено для решения задач устойчивости плоских и пространственных стержневых систем в рамках принципиально другого алгоритма –МГЭ. Для упругой системы можно составить уравнение устойчивости МГЭ типа (1.40). Стержни, не загруженные сжимающей силой F, должны иметь в уравнении (1.40) блок фундаментальных функций статического изгиба (2.11), а сжатые стержни – блок фундаментальных функций продольно-поперечного изгиба (4.4) с добавлением нормальных сил (для плоских задач устойчивости).

4.2 Определение спектра критических сил и форм потери устойчивости статическим методом

Для расчета упругой системы на устойчивость необходимо сформировать граничное уравнение и преобразовать его по схеме (1.46). Потеря устойчивости системы характеризуется возникновением продольно-поперечного и поперечного изгибов стержней. В этом случае значения начальных и конечных параметров матрицы $\boldsymbol{X}_*$ отличны от нуля. Тогда, для выполнения условия $\boldsymbol{X}_* \neq 0$ из уравнения (3.1) следует, что

$$\left|\boldsymbol{A}_*(F)\right|=0. \tag{4.6}$$

Данное трансцендентное уравнение является уравнением устойчивости упругой системы по МГЭ. Корни уравнения устойчивости определяют спектр критических сил, число которых (теоретически) бесконечно. Чтобы не пропустить первой критической силы, нужно начинать анализ поведения определителя (4.6) с достаточно малых значений сжимающих сил F. Рекомендуется начальное значение F выбирать из интервала $\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}\right)F_{\min}$, где $F_{\min}$ - минимальная критическая сила отдельных стержней основной системы метода перемещений. Шаг изменения сжимающей силы рекомендуется выбирать равным $\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}\right)$ интервала, на котором выполняется поиск критических сил. Изменение знака определителя (4.6) или равенство его нулю свидетельствует о "прохождении" критической силы. Таким образом, методика определения критических сил

не отличается от методики определения частот собственных колебаний упругих систем. Здесь можно использовать программы на языках Fortran и Pascal примеров 3.4 , 3.6 с соответствующими изменениями обозначений переменных. В рамках принятых допущений МГЭ позволяет определять точный спектр собственных значений (частот или критических сил). Однако, линеаризация дифференциальных уравнений и краевых условий, неучёт деформаций растяжения-сжатия и сдвига, приближенный учет других факторов не позволяют приблизить найденный "точный" спектр собственных значений к действительному спектру. В задачах динамики действительные частоты меньше найденных частот, т.к. реальная упругая система обладает большей податливостью, чем упрощенная расчетная схема. Погрешность меньше у систем с неподвижными узлами и больше у систем с линейно подвижными узлами. Противоположная картина имеет место в задачах устойчивости. Погрешность меньше у систем с линейно подвижными узлами и больше у систем с неподвижными узлами.

Для каждой критической силы можно построить и формы потери устойчивости стержневой системы, аналогично построению форм колебаний (см. п. 3.1). Ниже представлены примеры решения задач устойчивости различных упругих систем по алгоритму МГЭ. Поскольку используются уравнения (2.11), (4.4), относящиеся к статическому деформированию, то вся процедура решения задач устойчивости относится к статическому методу.

4.3 Устойчивость свободных стержней и стержней на жестких и упругих опорах

Пример 4.1 [307, с. 248]. Определить первую критическую силу стержня с кусочно-постоянной жесткостью (рисунок 4.1). Анализ устойчивости многопролетных стержней упрощается по сравнению с плоскими стержневыми системами. Уравнение устойчивости многопролетных стержней не содержит нормальных сил, а линейные перемещения граничных точек стержней равны либо нулю (для жестких опор), либо отношению R_i / c_i (для упругих опор), где c_i - жесткость упругой опоры; R_i - реакция опоры. Случай свободных стержней (без промежуточных опор) также может быть учтен в МГЭ. Решение примера по рисунку 4.1 представим алгоритмом.

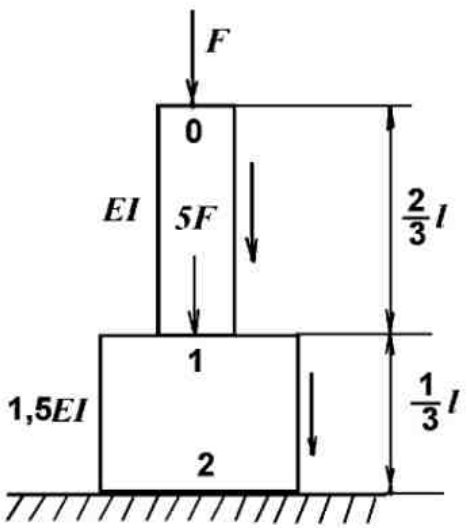


Рисунок 4.1

1 Разбиваем стержень на 2 стержня, нумеруем узлы и обозначаем начало и конец каждого элемента.

2 Формируем матрицу устойчивости $\boldsymbol{A}_*$. Уравнения равновесия и совместности перемещений узла 1 приведены в матрице $\boldsymbol{Y}$. Согласно матрице $\boldsymbol{X}_*$ нужно обнулить 3 и 4 столбцы матрицы $\boldsymbol{A}_*$. После переноса конечных параметров из матрицы $\boldsymbol{Y}$ в матрицу $\boldsymbol{X}_*$ топологическая матрица $\boldsymbol{C}$ примет следующий вид. Сложив матрицы $\boldsymbol{A}_0$ и $\boldsymbol{C}$, получим матрицу устойчивости данного стержня.

$\boldsymbol{X}_* =$

1	$EIv^{0-1}(0)$
2	$EI\varphi^{0-1}(0)$
3	$M^{0-1}(0)=0;\ M^{1-2}(\ell)$
4	$Q^{0-1}(0)=0;\ Q^{1-2}(\ell)$
5	$1{,}5EIv^{1-2}(0)$
6	$1{,}5EI\varphi^{1-2}(0)$
7	$M^{1-2}(0)$
8	$Q^{1-2}(0)$

;

$\boldsymbol{Y} =$

1	$EIv^{0-1}(\ell)=EIv^{1-2}(0)$
2	$EI\varphi^{0-1}(\ell)=EI\varphi^{1-2}(0)$
3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(0)$
4	$Q^{0-1}(\ell)=Q^{1-2}(0)$
5	$1{,}5EIv^{1-2}(\ell)=0$
6	$1{,}5EI\varphi^{1-2}(\ell)=0$
7	$M^{1-2}(\ell)$
8	$Q^{1-2}(\ell)$

;

$\boldsymbol{C}=$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1					-2/3			
2						-2/3		
3							-1	
4								-1
5								
6								
7			-1					
8				-1				

;

$\boldsymbol{A}_*=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1	A_{12}			-2/3				1
2		A_{22}				-2/3			2
3		$-A_{32}$					-1		7
4								-1	8
5					1	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	5
6						A_{22}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	6
7			-1			$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}	3
8				-1				1	4

.

Фундаментальные функции определяются выражениями (4.5), где коэффициенты для стержней 0-1 и 1-2 будут равны

$$n^{0-1} = \sqrt{F/EI};\ n^{1-2} = \sqrt{6F/1{,}5EI} = 2{,}0\sqrt{F/EI}\,.$$

3 Переставляя строки матрицы $\boldsymbol{A}_*$ в новом порядке, как показано цифрами справа, методом Гаусса по программе примера 3.6 вычисляем ее определитель (при $\ell = EI = 1$). Фиксируя изменение его знака, находим, что $F_1 = 2{,}4674EI/\ell^2$. Это значение совпадает с критической силой, полученной методом начальных параметров [307].

Пример 4.2 [274, с.266]. Определить 2 критические силы многопролетного стержня на жестких опорах (рисунок 4.2)

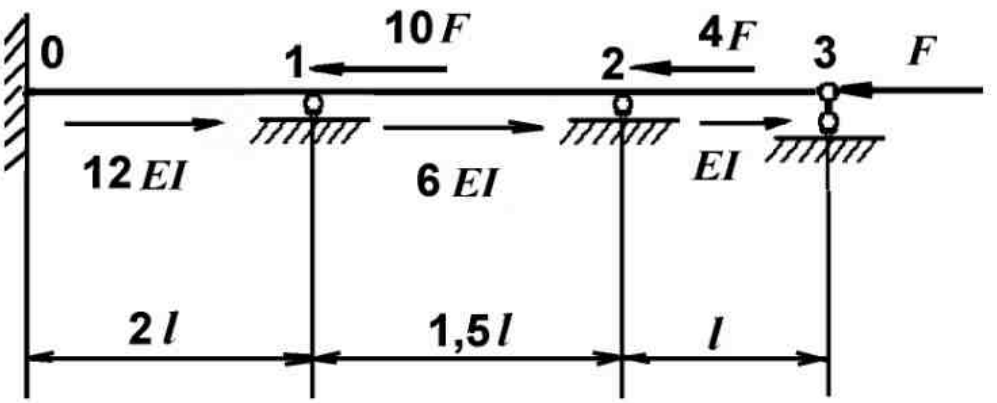


Рисунок 4.2

1 Разбиваем многопролетный стержень на 3 стержня, нумеруем узлы и стрелками обозначаем начало и конец каждого элемента.

2 Формируем матрицу устойчивости $\boldsymbol{A}_*$. Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1 и 2 содержатся в матрице $\boldsymbol{Y}$. Из матрицы $\boldsymbol{X}_*$ следует, что в матрице $\boldsymbol{A}$ нужно обнулить 1, 2, 5 и 9 столбцы. Коэффициенты фундаментальных функций будут равны

$$n^{0-1} = \sqrt{15F/12EI} = 1{,}1180\sqrt{F/EI};\ n^{1-2} = \sqrt{5F/6EI} = 0{,}9129\sqrt{F/EI};$$
$$n^{2-3} = \sqrt{F/EI}\,.$$

$$X = \begin{array}{|c|} \hline 12EIv^{0-1}(0)=0;\ Q^{0-1}(0) \\ \hline 12EI\varphi^{0-1}(0)=0;\ Q^{1-2}(\ell) \\ \hline M^{0-1}(0) \\ \hline Q^{0-1}(0) \\ \hline 6EIv^{1-2}(0)=0;\ EI\varphi^{2-3}(\ell) \\ \hline 6EI\varphi^{1-2}(0) \\ \hline M^{1-2}(0) \\ \hline Q^{1-2}(0) \\ \hline EIv^{2-3}(0)=0;\ Q^{2-3}(0) \\ \hline EI\varphi^{2-3}(0) \\ \hline M^{2-3}(0) \\ \hline Q^{2-3}(0) \\ \hline \end{array} \quad ; \quad Y = \begin{array}{|c|} \hline 12EIv^{0-1}(\ell)=0 \\ \hline 12EI\varphi^{0-1}(\ell)=12EI\varphi^{1-2}(0) \\ \hline M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(0) \\ \hline Q^{0-1}(\ell) \\ \hline 6EIv^{1-2}(\ell)=0 \\ \hline 6EI\varphi^{1-2}(\ell)=6EI\varphi^{2-3}(0) \\ \hline M^{1-2}(\ell)=M^{2-3}(0) \\ \hline Q^{1-2}(\ell) \\ \hline EIv^{2-3}(\ell)=0 \\ \hline EI\varphi^{2-3}(\ell) \\ \hline M^{2-3}(\ell)=0 \\ \hline Q^{2-3}(\ell) \\ \hline \end{array} \quad ;$$

$C=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2						-2						
3							-1					
4	-1										;	
5												
6										-6		
7											-1	
8		-1										
9												
10					-1							
11												
12									-1			

Матрица $\boldsymbol{A}_*$ стержня примет вид

$\boldsymbol{A}_* =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$									3
2			$-A_{12}$	$-A_{13}$		-2							6
3			A_{22}	A_{12}			-1						4
4	-1			1									1
5						A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$					7
6						A_{22}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		-6			10
7						$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}			-1		8
8		-1						1					2
9										A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	12
10					-1					A_{22}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	5
11										$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}	11
12									-1			1	9

3 Поменяв местами строки, как показано цифрами справа, методом Гаусса определим 2 критические силы: $F_1 = 4{,}45EI/\ell^2$; $F_2 = 9{,}55EI/\ell^2$. Данные критические силы практически равны действительным критическим силам, поскольку не учитывалась только деформация сдвига, а наложенные связи не препятствуют появлению изгибных форм. Расхождение с $F_1 = 6{,}35EI/\ell^2$, полученной методом С.А. Рогицкого, составляет 30%.

Пример 4.3 [274, с.271]. Найти 3 критических силы неразрезного стержня на упругих опорах (рисунок 4.3).

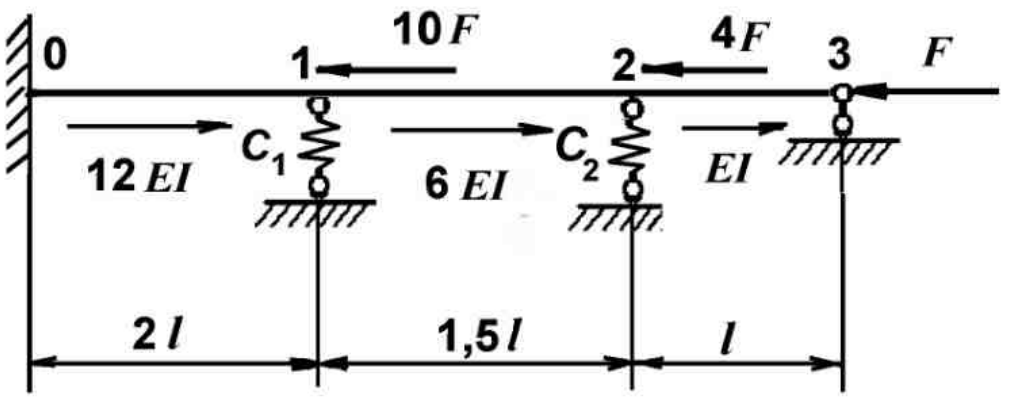


Рисунок 4.3

Этот пример отличается от предыдущего наличием упругих опор 1 и 2, где жесткости равны $c_1 = 8EI/\ell^3$; $c_2 = 4EI/\ell^3$. Уравнения совместности перемещений узлов 1 и 2 запишутся следующим образом

Узел 1 Узел 2

$$v^{0-1}(\ell) = v^{1-2}(0) = \frac{R_1}{c_1} = \frac{R_1\ell^3}{8EI}; \qquad v^{1-2}(\ell) = v^{2-3}(0) = \frac{R_2}{c_2} = \frac{R_2\ell^3}{4EI},$$

где R_1, R_2 - неизвестные реакции опор 1 и 2. Очевидно, что

$$R_1 = Q^{0-1}(\ell) - Q^{1-2}(0); \qquad R_1 = Q^{1-2}(\ell) - Q^{2-3}(0).$$

Тогда

$$v^{0-1}(\ell) = v^{1-2}(0) = \frac{Q^{0-1}(\ell) - Q^{1-2}(0)}{8EI}\ell^3; \quad v^{1-2}(\ell) = v^{2-3}(0) = \frac{Q^{0-1}(\ell) - Q^{1-2}(0)}{4EI}\ell^3,$$

Обнуленная в отдельных столбцах матрица $\boldsymbol{A_0}$ будет совпадать с аналогичной матрицей примера 4.2. Матрицы $\boldsymbol{X_*}, \boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{C}$ примут вид

$\boldsymbol{X_*} =$

1	$12EIv^{0-1}(0) = 0;\ Q^{0-1}(\ell)$
2	$12EI\varphi^{0-1}(0) = 0;\ Q^{1-2}(\ell)$
3	$M^{0-1}(0)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$6EIv^{1-2}(0) = \frac{3}{4}\ell\left[Q^{0-1}(\ell) - Q^{1-2}(0)\right];$ $EI\varphi^{2-3}(\ell)$
6	$6EI\varphi^{1-2}(0)$
7	$M^{1-2}(0)$
8	$Q^{1-2}(0)$
9	$EIv^{2-3}(0) = \frac{1}{4}\ell^3\left[Q^{1-2}(\ell) - Q^{2-3}(0)\right];$ $Q^{2-3}(0)$
10	$EI\varphi^{2-3}(0)$
11	$M^{2-3}(0)$
12	$Q^{2-3}(0)$

; $\boldsymbol{Y} =$

1	$12EIv^{0-1}(\ell) = \frac{3}{2}\ell^3\left[Q^{0-1}(\ell) - Q^{1-2}(0)\right]$
2	$12EI\varphi^{0-1}(\ell) = 12EI\varphi^{1-2}(0)$
3	$M^{0-1}(\ell) = M^{1-2}(0)$
4	$Q^{0-1}(\ell)$
5	$6EIv^{1-2}(\ell) = \frac{3}{2}\ell^3\left[Q^{1-2}(\ell) - Q^{2-3}(0)\right]$
6	$6EI\varphi^{1-2}(\ell) = 6EI\varphi^{2-3}(0)$
7	$M^{1-2}(\ell) = M^{2-3}(0)$
8	$Q^{1-2}(\ell)$
9	$EIv^{2-3}(\ell) = 0$
10	$EI\varphi^{2-3}(\ell)$
11	$M^{2-3}(\ell) = 0$
12	$Q^{2-3}(\ell)$

$C=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$-\frac{3\ell^3}{2}$							$\frac{3\ell^3}{2}$				
2						-2						
3							-1					
4	-1											
5	$\frac{3\ell^3}{4}$	$-\frac{3\ell^3}{2}$						$-\frac{3\ell^3}{4}$				$\frac{3\ell^3}{2}$
6										-6		
7											-1	
8		-1										
9		$\frac{\ell^3}{4}$										$-\frac{\ell^3}{4}$
10					-1							
11												
12									-1			

;

Складывая эту матрицу с обнуленной матрицей $\boldsymbol{A}_0$, получаем матрицу устойчивости неразрезного стержня на упругих опорах $(\ell = EI = 1)$

$A_*=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	$-\frac{3}{2}$		$-A_{13}$	$-A_{14}$				$\frac{3}{2}$					3
2			$-A_{12}$	$-A_{13}$		-2							6
3			A_{22}	A_{12}			-1						4
4	-1			1									1
5	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$				A_{12}	$-A_{13}$	$-\frac{3}{4}-A_{14}$				$\frac{3}{2}$	7
6						A_{22}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		-6			10
7						$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}			-1		8
8		-1						1					2
9		$\frac{1}{4}$								A_{12}	$-A_{13}$	$-\frac{1}{4}-A_{14}$	12
10					-1					A_{22}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	5
11										$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}	11
12									-1			1	9

Переставив строки матрицы $\boldsymbol{A}_*$ и применив метод Гаусса, находим

$F_1 = \frac{1{,}95EI}{\ell^2}$; $F_2 = \frac{4{,}65EI}{\ell^2}$; $F_3 = \frac{9{,}85EI}{\ell^2}$; Первая критическая сила по методу С.А. Рогицкого $F_{1=}\frac{2{,}98EI}{\ell^2}$ отличается на 34,6%.

4.4 Устойчивость стержневых систем с подвижными и неподвижными узлами

У свободных стержневых систем нет связей, препятствующих появлению изгибных форм при потере устойчивости. Поэтому особых трудностей при решении задач устойчивости статическим методом у таких систем не наблюдается. Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 4.4 [37, с.516] Определить 3 первые критические силы свободной рамы (рисунок 4.4).

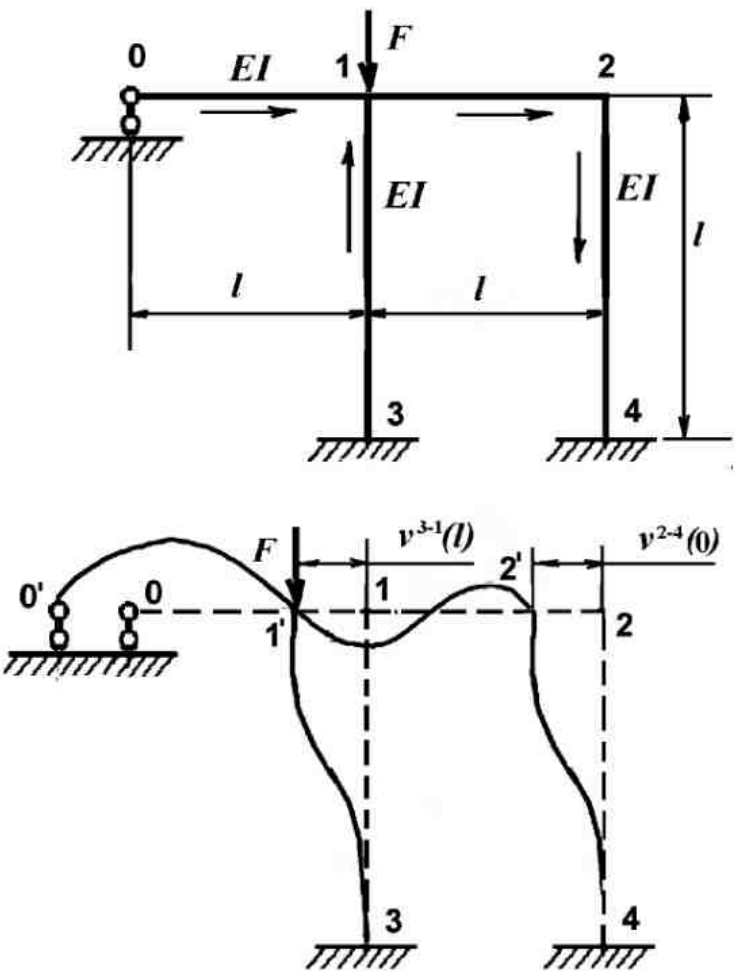


Рисунок 4.4

1 Разбиваем раму на 4 стержня, нумеруем узлы и обозначаем начало и конец каждого стержня.

2 Формируем матрицу устойчивости $\boldsymbol{A}_*$. Матрицы фундаментальных функций для стержней 0-1, 1-2, 2-4 заимствуем из уравнения изгиба (2.11), а для стержня 3-1 - из уравнения (4.4) с добавлением нормальных сил. Уравнения равновесия узлов 1 и 2 составляем для недеформированного состояния рамы, а уравнения совместности перемещений в соответствии с деформированным состоянием по рисунку 4.4.

$\boldsymbol{X}_*=$

1	$EIv^{0-1}(0)=0\,;M^{2-4}(\ell)$
2	$EI\varphi^{0-1}(0)=0$
3	$M^{0-1}(0)=0;\ Q^{2-4}(\ell)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$N^{0-1}(0)=0;\ N^{2-4}(\ell)$
6	$EIv^{1-2}(0)=0;\ M^{3-1}(\ell)$
7	$EI\varphi^{1-2}(0)$
8	$M^{1-2}(0)$
9	$Q^{1-2}(0)$
10	$N^{1-2}(0)$
11	$EIv^{2-4}(0)$
12	$EI\varphi^{2-4}(0)$
13	$M^{2-4}(0)$
14	$Q^{2-4}(0)$
15	$N^{2-4}(0)$
16	$EIv^{3-1}(0)=0;\ Q^{3-1}(\ell)$
17	$EI\varphi^{3-1}(0)=0;\ N^{3-1}(\ell)$
18	$M^{3-1}(0)$
19	$Q^{3-1}(0)$
20	$N^{3-1}(0)$

; $\boldsymbol{Y}=$

1	$EIv^{0-1}(\ell)=0$
2	$EI\varphi^{0-1}(\ell)=EI\varphi^{1-2}(0)$
3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(0)-M^{3-1}(\ell)$
4	$Q^{0-1}(\ell)=Q^{1-2}(0)+N^{3-1}(\ell)$
5	$N^{0-1}(\ell)=N^{1-2}(0)-Q^{3-1}(\ell)$
6	$EIv^{1-2}(\ell)=0$
7	$EI\varphi^{1-2}(\ell)=EI\varphi^{2-4}(0)$
8	$M^{1-2}(\ell)=M^{2-4}(0)$
9	$Q^{1-2}(\ell)=N^{2-4}(0)$
10	$N^{1-2}(\ell)=-Q^{2-4}(0)$
11	$EIv^{2-4}(\ell)=0$
12	$EI\varphi^{2-4}(\ell)=0$
13	$M^{2-4}(\ell)$
14	$Q^{2-4}(\ell)$
15	$N^{2-4}(\ell)$
16	$EIv^{3-1}(\ell)=-EIv^{2-4}(0)$
17	$EI\varphi^{3-1}(\ell)=EI\varphi^{1-2}(0)$
18	$M^{3-1}(\ell)$
19	$Q^{3-1}(\ell)$
20	$N^{3-1}(\ell)$

Из анализа матрицы $\boldsymbol{X}_*$ следует, что в матрице $\boldsymbol{A}$ нужно обнулить 1, 3, 5, 6, 16 и 17 столбцы. В матрице $\boldsymbol{X}_*$ число нулевых параметров равно 6. Столько же независимых параметров в матрице $\boldsymbol{Y}$, так что можно выполнить цепочку преобразований по схеме (1.46). Суммируя топологическую матрицу $\boldsymbol{C}$ с обнуленной матрицей $\boldsymbol{A}_0$, получим матрицу устойчивости рассматриваемой рамы.

3 В матрице $\boldsymbol{A}_*$ нужно переставить строки для исключения нулевых ведущих элементов. Один из возможных вариантов перестановки строк показан на матрице $\boldsymbol{A}_*$ цифрами справа.

$A_* =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1		1		-1/6																	4
2		1		-1/2			-1														2
3				1		1		-1													8
4				1					-1								-1				17
5										-1						1					16
6							1	-1/2	-1/6												7
7							1	-1	-1/2			-1									12
8								1	1				-1								9
9									1						-1						15
10										1				1							10
11											1	1	-1/2	-1/6							14
12												1	-1	-1/2							13
13	-1												1	1							1
14			-1											1							3
15					-1										1						5
16											1							$-A_{13}$	$-A_{14}$		11
17							-1											$-A_{22}$	$-A_{13}$		18
18						-1												A_{22}	A_{12}		6
19																-1			1		19
20																	-1			1	20

Задавая значения F с определенным шагом, с помощью персонального компьютера получаем график зависимости определителя $|\boldsymbol{A}_*(F)|$ (рисунок 4.5).

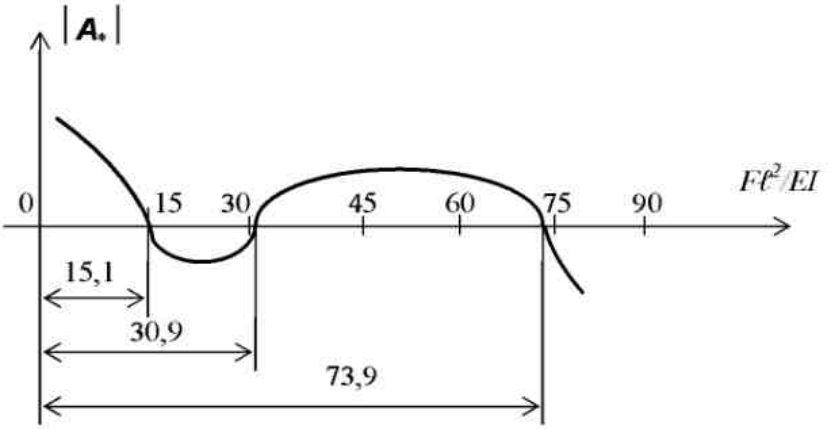


Рисунок 4.5

Как и в задачах динамики, уравнение устойчивости не имеет точек разрыва 2-го рода. Фиксируя изменение знака определителя, получим критические силы F_1=15,1EI / ℓ^2; F_2=30,9EI / ℓ^2; F_3=73,9EI / ℓ^2 и т.д. Эти значения практически равны действительным критическим силам, что подтверждается результатами других методов. Метод перемещений дает значение F_1=15,1EI / ℓ^2 [37]. Критические силы по МКЭ с точной матрицей жесткости равны F_1=15,14EI / ℓ^2; F_2=59,32EI / ℓ^2, когда используется кубический полином - F_1=15,41EI / ℓ^2 [184].

У несвободных стержневых систем опорные связи препятствуют появлению изгибных форм и для точного определения критических сил необходимо учитывать деформацию растяжения-сжатия в условиях продольно-поперечного и статического изгибов. Данная проблема сводится к аналитическому решению соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений, что, в свою очередь, имеет трудности математического порядка. Поэтому обычно при определении критических сил несвободных систем продольными перемещениями (деформациями растяжения-сжатия) пренебрегают. Полученные при этом критические силы точными методами (методы сил, перемещений, начальных параметров, МГЭ) будут заниженными по отношению к действительному спектру. В этом состоят трудности расчета статическим методом несвободных систем на устойчивость. Однако подобные расчеты выполняются, так как критические силы будут иметь определенный запас устойчивости. Рассмотрим примеры определения критических сил несвободных рам.

Пример 4.5 [307, с.289]. Определить первые критические силы симметричной рамы при симметричной и кососимметричной формах потери устойчивости (рисунок 4.6).

В данном случае можно использовать свойство симметрии рамы и рассмотреть только ее левую половину. В расчетной схеме вместо 5 останутся 3 стержня.

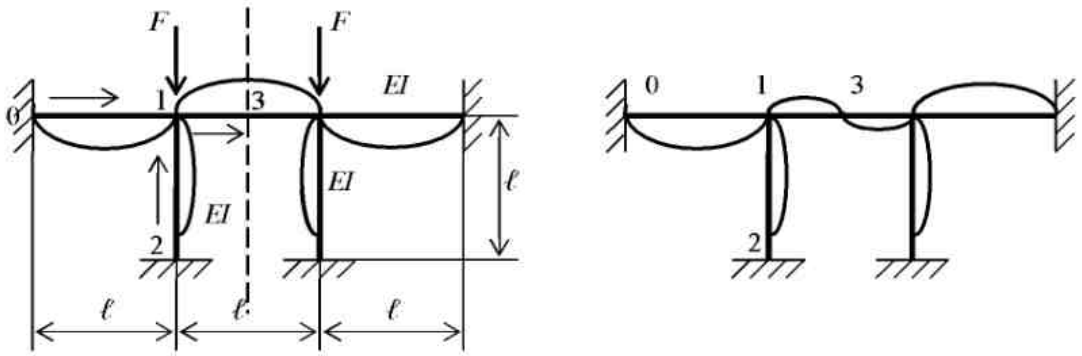


Рисунок 4.6

В плоскости симметрии рамы при симметричной форме потери устойчивости будут равны нулю кососимметричные статические и кинематические параметры

$$\varphi^{1-3}(\ell/2)=0; \qquad Q^{1-3}(\ell/2)=0.$$

При кососимметричной форме потери устойчивости будут равны нулю симметричные параметры

$$v^{1-3}(\ell/2)=0; \qquad M^{1-3}(\ell/2)=0; \qquad N^{1-3}(\ell/2)=0.$$

В соответствии с алгоритмом МГЭ

1 Разбиваем левую половину рамы на 3 стержня, нумеруем узлы и обозначаем стрелками начало и конец каждого элемента.

2 Формируем матрицу устойчивости $\boldsymbol{A}_*$. Матрицы фундаментальных функций для стержней 0-1, 1-3 заимствуем из уравнения статического изгиба (2.11) с добавлением нормальных сил, а для стержня 2-1 - из уравнения продольно-поперечного изгиба (4.4). Для стержня 0-1 добавляем еще уравнение продольных перемещений, что позволит выполнить схему преобразований (1.46).

Матрицы $\boldsymbol{X}_*$, $\boldsymbol{Y}$, в которых представлены заданные краевые условия опирания рамы и уравнения связи между граничными параметрами в узле 1, представлены ниже. Из матрицы $\boldsymbol{X}_*$ следует, что в матрице $\boldsymbol{A}$ нужно обнулить 1, 2, 5, 12 и 13 столбцы. Сложив обнуленную матрицу $\boldsymbol{A}_0$ с топологической матрицей $\boldsymbol{C}$, получим матрицу устойчивости $\boldsymbol{A}_*$.

3 Переставив строки матрицы $\boldsymbol{A}_*$, как показано цифрами справа, методом Гаусса находим, что F_1=30,5498EI / ℓ^2. Этот результат практически совпадает с F_1=30,6EI / ℓ^2; полученным методом перемещений [307].

При кососимметричной форме потери устойчивости изменятся краевые условия стержня 1-3, а число нулевых независимых параметров увеличится на единицу. Тогда можно не добавлять уравнение для продольных перемещений стержня 0-1.

$X_* =$

1	$EIv^{0-1}(0)=0\,;\,EIv^{1-3}(\ell)$
2	$EI\varphi^{0-1}(0)=0\,;\;M^{1-3}(\ell)$
3	$M^{0-1}(0)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$EIu^{0-1}(0)=0\,;\;N^{1-3}(\ell)$
6	$N^{0-1}(0)$
7	$EIv^{1-3}(0)\,;\;M^{2-1}(\ell)$
8	$EI\varphi^{1-3}(0)$
9	$M^{1-3}(0)$
10	$Q^{1-3}(0)$
11	$N^{1-3}(0)$
12	$EIv^{2-1}(0)=0\,;\;Q^{2-1}(\ell)$
13	$EI\varphi^{2-1}(0)=0\,;\;N^{2-1}(\ell)$
14	$M^{2-1}(0)$
15	$Q^{2-1}(0)$
16	$N^{2-1}(0)$

; $Y =$

1	$EIv^{0-1}(\ell)=0$
2	$EI\varphi^{0-1}(\ell)=EI\varphi^{1-3}(0)$
3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-3}(0)-M^{2-1}(\ell)$
4	$Q^{0-1}(\ell)=Q^{1-3}(0)+N^{2-1}(\ell)$
5	$EAu^{0-1}(\ell)=0$
6	$N^{0-1}(\ell)=N^{1-3}(0)-Q^{2-1}(\ell)$
7	$EIv^{1-3}(\ell)$
8	$EI\varphi^{1-3}(\ell)=0$
9	$M^{1-3}(\ell)$
10	$Q^{1-3}(\ell)=0$
11	$N^{1-3}(\ell)$
12	$EIv^{2-1}(\ell)=0$
13	$EI\varphi^{2-1}(\ell)=EI\varphi^{1-3}(0)$
14	$M^{2-1}(\ell)$
15	$Q^{2-1}(\ell)$
16	$N^{2-1}(\ell)$

$A_* =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1			-1/2	-1/6													3
2			-1	-1/2				-1									4
3			1	1			1		-1								9
4				1						-1			-1				13
5						1											6
6						1					-1	1					11
7	-1							1/2	-1/8	-1/48							1
8								1	-1/2	-1/8							8
9		-1							1	1/2							2
10										1							10
11					-1						1						5
12														$-A_{13}$	$-A_{14}$		14
13								-1						$-A_{12}$	$-A_{13}$		15
14							-1							A_{22}	A_{12}		7
15												-1			1		12
16													-1			1	16

Матрица $\boldsymbol{A}_*$ кососимметричной формы потери устойчивости изменится и примет вид

$\boldsymbol{A}_*=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1			-1/2	-1/6												3
2			-1	-1/2			-1									4
3			1	1		1		-1								6
4				1					-1			-1				12
5					1					-1	1					5
6							1/2	-1/8	-1/48							9
7	-1						1	-1/2	-1/8							1
8								1	1/2							8
9		-1							1							2
10					-1					1						10
11													$-A_{13}$	$-A_{14}$		13
12							-1						$-A_{12}$	$-A_{13}$		7
13						-1							A_{22}	A_{12}		14
14											-1			1		11
15												-1			1	15

Переставив строки, как показано цифрами справа, методом Гаусса определяем первую критическую силу $F_1=33,1532EI\ /\ \ell^2$, что совпадает с $F_1=33,18EI\ /\ \ell^2$, найденной методом перемещений [307].

4.5 Динамический метод решения задач устойчивости

Все нагрузки на упругие системы условно можно разделить на консервативные и неконсервативные. К консервативным нагрузкам относятся так называемые «мертвые» силы, когда их линия действия перемещается вместе с конструкцией только параллельно первоначальному направлению. Примеры расчета на устойчивость систем при «мертвых» силах по алгоритму МГЭ представлены выше и проблемы их учета во многом решены. Этого нельзя сказать о неконсервативных силах. Системы с неконсервативными силами широко используются в жизни современного общества. К таким системам можно отнести системы с внутренними источниками энергии, т.е. ракеты, самолеты, космические орбитальные станции, буровые вышки и платформы, автомобили, корабли, подводные лодки, турбины, двигатели внутреннего сгорания, металлорежущие станки, различные краны, приборы и т.д.

Если консервативные задачи устойчивости могут быть решены статическим методом, то неконсервативные задачи решаются только динамическим методом [236]. Основным элементом динамического метода является решение задачи Коши для поперечных колебаний стержня с учетом продольной силы. В отличие от статического метода, критическая сила в динамическом методе определяется в точке, где становятся равными (сливаются) две соседние частоты собственных колебаний.

С этой целью в программу расчета вводится начальное значение сжимающей силы и фиксируются частоты (минимум две) собственных колебаний. Далее значение сжимающей силы увеличивается и отслеживается изменение частот. Процесс продолжается до тех пор, пока с определенной точностью две соседние частоты станут равными. Значение сжимающей силы при этом будет критическим.

Необходимость применения динамического метода существенно усложняет решение неконсервативных задач устойчивости. Здесь требуется весьма эффективный метод определения частот собственных колебаний. Среди других методов в этом отношении выделяется МГЭ. Он позволяет получать точный спектр частот (устраняет недостаток МКЭ), а в трансцендентном частотном уравнении отсутствуют точки разрыва 2-го рода (устраняет недостаток метода перемещений). Дополнительными положительными факторами являются простая логика формирования динамической матрицы устойчивости, отсутствие операций умножения, обращения и сложения матриц, хорошая устойчивость численных операций при вычислении определителя и т.п.

В этой связи покажем, что алгоритм МГЭ идеально подходит для решения подобного типа задач с любой структурой упругой системы. Моделью объекта может быть произвольный набор стержней, каждый из которых может иметь бесконечное число степеней свободы, могут быть учтены сдвиг, инерция вращения, внутреннее и внешнее трение, произвольные законы изменения массы, жесткости, продольных сил и другие факторы. Неконсервативность действующих нагрузок в МГЭ учитывается соответствующей формулировкой граничных условий упругой системы (формированием топологической матрицы **C**). Далее анализу подвергаются изменения частот собственных колебаний. Рассмотрим особенности учета следящих сил.

4.5.1 Методика учета следящих сил

Граничные условия для различных вариантов поведения сжимающих сил являются нелинейными и линеаризуются с учетом малости соответствующих перемещений, т.е. справедливости равенств

$$\sin \psi = \operatorname{tg} \psi = \psi,$$

где ψ - угол между силой F и нормалью к оси стержня (рисунок 4.7).

Выделим практически важные случаи поведения нагрузки.

1 Сила F следует за углом поворота сечения (задача М.Бекка) [236] (рисунок 4.7,*а*).

Такая сила создается реактивным потоком жидкости или газа и относится к неконсервативным силам. Граничные условия весьма просты

$$\psi = \pi/2; \quad EIv(\ell) \neq 0; \quad EI\varphi(\ell) \neq 0; \quad M(\ell) = 0; Q(\ell) = F\cos\psi = 0. \qquad (4.7)$$

2 Сила F имеет фиксированную линию действия (задача проф.В.И.Реута) [236] (рисунок 4.7,*в*).

Такая сила возникает при действии домкрата, в поршневых двигателях, в различных механизмах с направляющими устройствами.

Это другой пример неконсервативной силы. В граничном сечении стержня возникают изгибающий момент и поперечная сила

$$\psi = \pi/2 - \varphi(\ell); \quad EIv(\ell) \neq 0; \quad EI\varphi(\ell) \neq 0; \quad M(\ell) = F\,v(\ell);$$
$$Q(\ell) = F\cos\psi = F\sin\varphi(\ell) = F\,\varphi(\ell) \qquad (4.8)$$

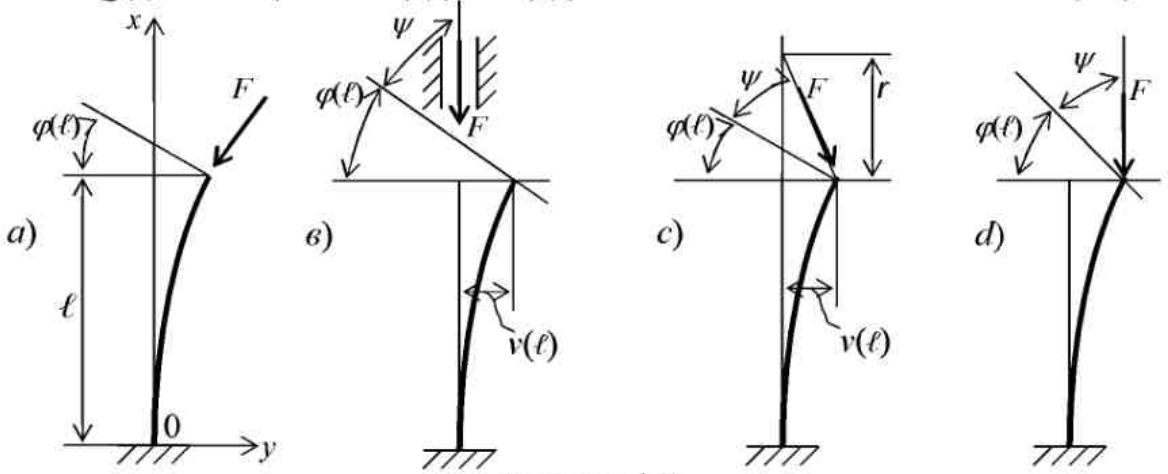


Рисунок 4.7

3 Сила F имеет линию действия, проходящую через фиксированную точку (рисунок 4.7,*c*).

Такое поведение нагрузки может быть вызвано применением тросов и оттяжек. Сила относится к консервативным. Она налагает на упругую систему в деформированном состоянии связь в виде собственной горизонтальной проекции (вертикальная проекция учитывается как параметр F дифференциального уравнения). Система при этом может стать несвободной. Здесь

$$\psi = \pi/2 - [v(\ell)/r + \varphi(\ell)]; \quad EIv(\ell) \neq 0; \quad EI\varphi(\ell) \neq 0; \quad M(\ell) = 0;$$
$$Q(\ell) = F\cos\psi = F\,[v(\ell)/r + \varphi(\ell)] \qquad (4.9)$$

4 "Мертвая сила" (рисунок 4.7, *d*). Являясь консервативной, она ограничивает подвижность упругой системы. Краевые условия предстанут в виде

$$\psi = \pi/2 - \varphi(\ell); \quad EIv(\ell) \neq 0; \quad EI\varphi(\ell) \neq 0; \quad M(\ell) = 0;$$
$$Q(\ell) = F\cos\psi = F\sin\varphi(\ell) = F\,\varphi(\ell) \qquad (4.10)$$

При анализе устойчивости упругих систем необходимо использовать вышеуказанные граничные условия в уравнениях равновесия и совместности перемещений граничных точек (узлов) конструкции. Особо отметим тот факт, что каждый вариант поведения сжимающих сил будет иметь свой набор ненулевых компенсирующих элементов в матрице $\boldsymbol{C}$ (свой вариант топологической матрицы). В этом состоит отличие аналитической идентификации сжимающих сил в МГЭ от МКЭ и других методов.

Отметим также, что для сил по рисунку 4.7, *c*,*d* основными формами потери устойчивости являются изгибные формы. Для следящей силы по рисунку 4.7, *a* стержень теряет устойчивость в форме флаттера, когда амплитуды колебаний неограниченно растут. Если не предпринять мер по ликвидации флаттера, то конструкция достаточно быстро разрушается.

Потеря устойчивости в форме дивергенции (монотонный уход системы от положения равновесия) характерна для схемы по рисунку 4.7, *в*.

Поскольку основой математической модели динамического метода являются фундаментальные функции, то рассмотрим построение решений для ряда важных случаев поперечных колебаний стержней.

4.5.2 Фундаментальные решения для поперечных колебаний с учетом продольной силы

При составлении соответствующего дифференциального уравнения учитываются силы инерции распределенной массы и добавка изгибающего момента от продольной силы. Применив метод Фурье разделения переменных, дифференциальное уравнение поперечных колебаний призматического стержня с учетом продольной сжимающей силы в амплитудном состоянии примет вид

$$EIv^{IV}(x)+Fv''(x)-\omega^2 mv(x)=q_y(x);$$

$$EIv(0);\qquad EIv'(0)=EI\varphi(0);\qquad EIv''(0)=-M(0);\qquad EIv'''(0)=-Q(0). \tag{4.11}$$

По алгоритму п.1.3 уравнение типа (1.40) данного случая запишется следующим образом

$$\begin{array}{|c|}\hline EIv(x)\\ EI\varphi(x)\\ M(x)\\ Q(x)\\ \hline\end{array}=\begin{array}{|cccc|}\hline A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14}\\ A_{21} & A_{11} & -A_{23} & -A_{13}\\ -A_{31} & -A_{21} & A_{33} & A_{23}\\ -A_{41} & -A_{31} & A_{43} & A_{33}\\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline EIv(0)\\ EI\varphi(0)\\ M(0)\\ Q(0)\\ \hline\end{array}+\int_0^x\begin{array}{|c|}\hline A_{14}(x-\xi)\\ A_{13}(x-\xi)\\ -A_{23}(x-\xi)\\ -A_{33}(x-\xi)\\ \hline\end{array}q_y(\xi)d\xi, \tag{4.12}$$

где фундаментальные ортонормированные функции имеют вид

$$A_{11}=\frac{\beta^2 ch\alpha x+\alpha^2\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2};\quad A_{12}=\frac{\beta^3 sh\alpha x+\alpha^3\sin\beta x}{\alpha^3\beta+\alpha\beta^3};\quad A_{13}=\frac{ch\alpha x-\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{14}=\frac{\beta sh\alpha x-\alpha\sin\beta x}{\alpha^3\beta+\alpha\beta^3};\quad A_{21}=\alpha^2\beta^2 A_{14};\quad A_{23}=\frac{\alpha sh\alpha x+\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2};\quad A_{31}=\alpha^2\beta^2 A_{13};$$

$$A_{33}=\frac{\alpha^2 ch\alpha x+\beta^2\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2};\quad A_{41}=\alpha^2\beta^2 A_{23};\quad A_{43}=\frac{\alpha^3 sh\alpha x-\beta^3\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}; \tag{4.13}$$

$$\alpha=\sqrt{-\frac{F}{2EI}+\sqrt{\left(\frac{F}{2EI}\right)^2+\frac{\omega^2 m}{EI}}};\qquad \beta=\sqrt{\frac{F}{2EI}+\sqrt{\left(\frac{F}{2EI}\right)^2+\frac{\omega^2 m}{EI}}}.$$

Выражения (4.13) при $F=0$ переходят в функции А.Н.Крылова (3.11).

Динамические модели упругих систем формируются, исходя из заданных расчетных схем. Пространственные модели должны включать блоки уравнений изгиба, кручения, растяжения и сдвига, т.е. необходимо формировать уравнение типа (2.23). Плоские модели устойчивости упрощаются из-за отсутствия кручения. В расчетной практике часто пренебрегают сдвигом, инерцией вращения и продольными перемещениями, что идет в запас устойчивости [307].

В этой связи ниже формируются и анализируются наиболее простые динамические модели устойчивости упругих систем на основе уравнений

изгиба (3.10) и (4.12) с добавлением нормальных сил. Учет следящих сил выполняется топологической матрицей $\boldsymbol{C}$.

4.5.3 Стержень на упругом основании

В инженерной практике встречаются случаи, когда упругая стержневая система контактирует с упругим основанием. Расчет такой системы должен быть дополнен схемой стержня на упругом основании. Наиболее простой и широко применяемой расчетной схемой является модель Е.Винклера – схема с одним коэффициентом постели. Простота этой модели приводит к недостаточной точности получаемых результатов. Поэтому позже были разработаны более совершенные и точные модели. Здесь отметим модели на основе упругого полупространства [80, 291] (решения получаются весьма громоздкими, а сама методика сводится к набору таблиц, что создает неудобства при ее применении) и модели с двумя коэффициентами постели (проф.П.Л.Пастернак, проф.В.З.Власов, проф.М.М.Филоненко-Бородич [273]).Модель с двумя коэффициентами постели позволяет построить аналитическое решение задачи Коши, учесть деформацию сдвига основания, его неоднородность и много других факторов. В этой связи получим уравнение типа (1.40) для модели с двумя коэффициентами постели. Используя принцип независимости действия сил и дополняя уравнение динамики стержня в амплитудном состоянии на упругом основании слагаемым от продольной силы $F_x v''(x)$, будем иметь

$$v^{IV}(x)+\left[\frac{F_x}{EI}-\frac{E_0 r_{11}}{2(1+\mu_0)EI}\right]v''(x)+\left[\frac{E_0 s_{11}}{(1-\mu_0^2)EI}-\frac{m\omega^2}{EI}\right]v(x)=\frac{q_y(x)}{EI} \qquad (4.14)$$

Это уравнение имеет кинематические и статические параметры [67].

$$v(x);\quad v'(x)=\varphi(x);\quad EIv''(x)=-M(x);\quad EI\left[v'''(x)-\frac{2tv'(x)}{EI}\right]=-Q_*(x), \qquad (4.15)$$

где $Q_*(x)$ – обобщенная поперечная сила. Наличие или равенство нулю начальных и конечных параметров определяется из краевых условий:

a) <u>шарнирное опирание</u>

$$v(0)=v(\ell)=0;\ M(0)=M(\ell)=0;\ \varphi(0)\neq 0;\ \varphi(\ell)\neq 0;\ Q_*(0)\neq 0;\ Q_*(\ell)\neq 0; \qquad (4.16)$$

b) <u>жесткое защемление</u>

$$v(0)=v(\ell)=0;\ \varphi(0)=\varphi(\ell)=0;\ M(0)\neq 0;\ M(\ell)\neq 0;\ Q_*(0)\neq 0;\ Q_*(\ell)\neq 0; \qquad (4.17)$$

c) <u>свободное опирание граничных точек</u> (должны быть учтены условия совместной работы стержня и основания, т.е. $Q(0)=-EIv'''(0)=0;$ $Q(\ell)=-EIv'''(\ell)=0$)

$$v(0)\neq 0;\ v(\ell)\neq 0;\ \varphi(0)\neq 0;\ \varphi(\ell)\neq 0;\ M(0)=0;\ M(\ell)=0;$$
$$Q_*(0)=2tv'(0)\neq 0;\ Q_*(\ell)=2tv'(\ell)\neq 0; \qquad (4.18)$$

Если не учитывать совместную работу стержня и основания в граничных точках, то

$$v(0)\neq 0;\ v(\ell)\neq 0;\ \varphi(0)\neq 0;\ \varphi(\ell)\neq 0;\ M(0)=0;\ M(\ell)=0;$$
$$Q_*(0)=0;\quad Q_*(\ell)=0. \qquad (4.19)$$

В уравнении (4.14) и условиях (4.15)-(4.19) постоянные величины определяются формулами:

$$E_0 = E_{гр} \Big/ \left(1-\mu_{гр}^2\right); \quad \mu_0 = \mu_{гр} \Big/ \left(1-\mu_{гр}\right); \quad r_{11} = \int_0^H \psi^2(y) b dy; \quad s_{11} = \int_0^H [\psi'(y)]^2 b dy;$$

$$t = E_0 r_{11} \Big/ 4\left(1+\mu_0\right); \quad m = m_1 + m_0 = \nu bh \Big/ g + \nu_0 r_{11} \Big/ g, \tag{4.20}$$

где $E_{гр}$, $\mu_{гр}$ – модуль упругости и коэффициент Пуассона основания;

h, b - высота и ширина сечения стержня;

H – глубина (мощность) основания;

γ - коэффициент, характеризующий скорость затухания осадок основания (рекомендуется γ = 1,5-1,0 [67];

m_1, m_0 - распределенные массы стержня и основания;

ν, ν_0 - удельные веса стержня и основания;

g - 9,8 м/с^2;

$\psi(y)$ – безразмерная функция поперечного распределения осадки основания, которая может быть принята линейной или экспоненциальной.

$$\psi(y) = (H-y) \Big/ H; \qquad \psi(y) = sh\gamma(H-y) \Big/ sh\gamma H. \tag{4.21}$$

Если обозначить

$$2r^2 = F_x \Big/ EI - E_0 r_{11} \Big/ 2(1+\mu_0)EI; \qquad s^4 = E_0 s_{11} \Big/ (1-\mu_0^2)EI - m\omega^2 \Big/ EI,$$

то задача Коши модели с двумя коэффициентами постели предстанет в виде

$$v^{IV}(x) + 2r^2 v''(x) + s^4 v(x) = q_y(x) \Big/ EI; \quad v(0); \quad \varphi(0) = v'(0);$$

$$M(0) = -EIv''(0); \qquad Q_*(0) = -EI\left[v'''(0) - 2tv'(0) \Big/ EI\right]. \tag{4.22}$$

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (4.22) является биквадратным

$$k^4 + 2r^2 k^2 + s^4 = 0,$$

корни которого

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}; \qquad k_{3,4} = \pm\sqrt{-r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}. \tag{4.23}$$

Решение задачи Коши (4.22) можно записать в матричной форме по алгоритму п.1.3

$$\begin{vmatrix} EIv(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{33} & A_{23} \\ -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q_*(0) \end{vmatrix} - \int_0^x \begin{vmatrix} A_{14}(x-\xi) \\ A_{13}(x-\xi) \\ -A_{23}(x-\xi) \\ -A_{44}(x-\xi) \end{vmatrix} q_y(\xi) d\xi, \tag{4.24}$$

Представим основные случаи фундаментальных функций и грузовых элементов, определяемые видом корней (4.23).

1 случай. $s^4>0;\ |s|>|r|;\ r^2\neq 0$. Корни (4.23) станут комплексными

$$k_{1-4}=\pm\alpha\pm i\beta;\qquad \alpha=\sqrt{(s^2-r^2)/2};\qquad \beta=\sqrt{(s^2+r^2)/2}.$$

$$\Phi_1=sh\alpha x\cdot\cos\beta x;\quad \Phi_2=ch\alpha x\cdot\cos\beta x;\quad \Phi_3=ch\alpha x\cdot\sin\beta x;\quad \Phi_4=sh\alpha x\cdot\sin\beta x;$$

$$A_{11}=\Phi_2+\frac{r^2\Phi_4}{2\alpha\beta};\quad A_{12}=\frac{\left[\beta\left(s^2-2r^2-2t/EI\right)\Phi_1+\alpha\left(s^2+2r^2+2t/EI\right)\Phi_3\right]}{2\alpha\beta s^2};$$

$$A_{13}=\frac{\Phi_4}{2\alpha\beta};\quad A_{14}=\frac{-\beta\Phi_1+\alpha\Phi_3}{2\alpha\beta s^2};\quad A_{21}=\frac{\left(\beta s^2\Phi_1-as^2\Phi_3\right)}{2\alpha\beta};\quad A_{22}=\Phi_2+\frac{\left(r^2+2t/EI\right)\Phi_4}{2\alpha\beta_1};$$

$$A_{23}=\frac{(\beta\Phi_1+a\Phi_3)}{2\alpha\beta};\quad A_{31}=-\frac{s^4\Phi_4}{2\alpha\beta};\quad A_{32}=\frac{\left[\beta\left(s^2+2t/EI\right)\Phi_1+\alpha\left(-s^2+2t/EI\right)\Phi_3\right]}{2\alpha\beta}$$

$$A_{33}=\Phi_2-\frac{r^2\Phi_4}{2\alpha\beta};\quad A_{41}=\frac{-s^2\left(s^2+2t/EI\right)\Phi_1}{2\alpha}+\frac{s^2\left(-s^2+2t/EI\right)\Phi_3}{2\beta};$$

$$A_{42}=-\frac{\left[\left(s^4+4r^2t/EI\right)+\left(2t/EI\right)^2\right]\Phi_4}{2\alpha\beta};\quad A_{44}=\Phi_2-\frac{\left(r^2+2t/EI\right)\Phi_4}{2\alpha\beta};$$

$$A_{43}=\frac{\left[\beta\left(s^2-2r^2-2t/EI\right)\Phi_1-\alpha\left(s^2+2r^2+2t/EI\right)\Phi_3\right]}{2\alpha\beta};\qquad (4.25)$$

$$B_{11}=F\frac{\left[-\beta\Phi_1(x-a_1)_+ +\alpha\Phi_3(x-a_1)_+\right]}{2\alpha\beta s^2}+M\frac{\Phi_4(x-a_2)_+}{2\alpha\beta}+$$

$$+q\frac{\left\{2\alpha\beta\left[\Phi_2(x-a_3)_+ -H(x-a_3)\right]-2\alpha\beta\left[\Phi_2(x-a_4)_+ -H(x-a_4)\right]+r^2\Phi_4(x-a_4)_+\right\}}{2\alpha\beta s^4};$$

$$B_{21}=F\frac{\Phi_4(x-a_1)_+}{2\alpha\beta}+M\frac{\left[\beta\Phi_1(x-a_2)_+ +\alpha\Phi_3(x-a_2)_+\right]}{2\alpha\beta}+$$

$$+q\frac{\left[-\beta\Phi_1(x-a_3)_+ +\alpha\Phi_3(x-a_3)_+ +\beta\Phi_1(x-a_4)_+ -\alpha\Phi_3(x-a_4)_+\right]}{2\alpha\beta s^2};$$

$$B_{31}=F\frac{\left[\Phi_1(x-a_1)_+ +\alpha\Phi_3(x-a_1)_+\right.}{2\alpha\beta}+M\left[\frac{\beta\Phi_2(x-a_2)_+ -r^2\Phi_{34}(x-a_2)_+}{2\alpha\beta}\right]+$$

$$+q\frac{\left[\Phi_4(x-a_3)_+ -\Phi_4(x-a_4)_+\right]}{2\alpha\beta};$$

$$B_{41}=F\left[\frac{\Phi_2(x-a_1)_+ -\left(r^2+2t/EI\right)\Phi_4(x-a_1)_+}{2\alpha\beta}\right]+$$

$$+M\frac{\left[\beta\left(s^2-r^2-2t/EI\right)\Phi_1(x-a_2)_+ -\alpha\left(s^2+r^2+2t/EI\right)\Phi_3(x-a_2)_+\right]}{2\alpha\beta}+$$

$$+q\frac{\left[\beta\left(s^2+2t/EI\right)\Phi_1(x-a_3)_+ +\alpha\left(s^2-2t/EI\right)\Phi_3(x-a_3)_+ -\beta\left(s^2+2t/EI\right)\Phi_1(x-a_3)_+ -\alpha\left(s^2-2t/EI\right)\Phi_3(x-a_4)_+\right]}{2\alpha\beta s^2}$$

2 случай. $s^4<0;\ \ r^2\neq 0$. Корни (4.23) действительные и мнимые

$$k_{1,2}=\pm\alpha;\qquad k_{3,4}=\pm i\beta;\qquad \alpha=\sqrt{-r^2+\sqrt{r^4-s^4}};\qquad \beta=\sqrt{r^2+\sqrt{r^4-s^4}};$$

$$A_{11}=\frac{\beta^2 ch\alpha x+\alpha^2\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2};\quad A_{12}=\frac{\beta\left(\beta^2+2t/EI\right)sh\alpha x+\alpha\left(\alpha^2-2t/EI\right)\sin\beta x}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)};$$

$$A_{13}=\frac{ch\alpha x-\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2};\quad A_{14}=\frac{\beta^2 sh\alpha x-\alpha\sin\beta x}{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)};\quad A_{21}=\frac{\alpha\beta^2 sh\alpha x-\alpha^2\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{22}=\frac{\left(\beta^2+2t/EI\right)ch\alpha x+\left(\alpha^2-2t/EI\right)\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2};\quad A_{23}=\frac{\alpha sh\alpha x+\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{31}=\frac{(\alpha\beta)^2(ch\alpha x-\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2};\quad A_{32}=\frac{\alpha\left(\beta^2+2t/EI\right)sh\alpha x-\beta\left(\alpha^2-2t/EI\right)\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{33}=\frac{\alpha^2 ch\alpha x+\beta^2\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2};\quad A_{41}=\frac{\alpha\beta^2\left(\alpha^2-2t/EI\right)sh\alpha x+\alpha^2\beta\left(\beta^2+2t/EI\right)\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{42}=\frac{\left(\alpha^2-2t/EI\right)\left(\beta^2+2t/EI\right)(ch\alpha x-\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2};\ A_{43}=\frac{\alpha\left(\alpha^2-2t/EI\right)sh\alpha x-\beta\left(\beta^2+2t/EI\right)\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{44}=\frac{\left(\alpha^2-2t/EI\right)ch\alpha x+\left(\beta^2+2t/EI\right)\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2};\qquad (4.26)$$

$$B_{11}=F\frac{\beta sh\alpha(x-a_1)_+-\alpha\sin\beta(x-a_1)_+}{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}+M\frac{ch\alpha(x-a_2)_+-\cos\beta(x-a_2)_+}{\alpha^2+\beta^2}+$$

$$+q\frac{\beta^2 ch\alpha(x-a_3)_+ +\alpha^2\sin\beta(x-a_3)_+-\beta^2 ch\alpha(x-a_4)_+-\alpha^2\sin\beta(x-a_4)_+}{(\alpha\beta)^2(\alpha^2+\beta^2)};$$

$$B_{21}=F\frac{ch\alpha(x-a_1)_+-\cos\beta(x-a_1)_+}{\alpha^2+\beta^2}+M\frac{\alpha sh\alpha(x-a_2)_+ +\beta\sin\beta(x-a_2)_+}{\alpha^2+\beta^2}+$$

$$+q\frac{\beta sh\alpha(x-a_3)_+-\alpha\sin\beta(x-a_3)_+-\beta sh\alpha(x-a_4)_+ +\alpha\sin\beta(x-a_4)_+}{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)};$$

$$B_{31}=F\frac{\alpha sh\alpha(x-a_1)_+ +\alpha\sin\beta(x-a_1)_+}{\alpha^2+\beta^2}+M\frac{\alpha^2 ch\alpha(x-a_2)_+ +\beta^2\sin\beta(x-a_2)_+}{\alpha^2+\beta^2}+$$

$$+q\frac{ch\alpha(x-a_3)_+-\cos\beta(x-a_3)_+-ch\alpha(x-a_4)_+ +\cos\beta(x-a_4)_+}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$B_{41}=F\frac{\left(\alpha^2-2t/EI\right)ch\alpha(x-a_1)_+ +\left(\beta^2+2t/EI\right)\cos\beta(x-a_1)_+}{\alpha^2+\beta^2}+$$

$$+M\frac{\alpha\left(\alpha^2-2t/EI\right)sh\alpha(x-a_2)_+-\beta\left(\beta^2+2t/EI\right)\sin\beta(x-a_2)_+}{\alpha^2+\beta^2}+$$

$$+q\frac{\beta\left(\alpha^2-2t/EI\right)sh\alpha(x-a_3)_+ +\alpha\left(\beta^2+2t/EI\right)\sin\beta(x-a_3)_+-\beta\left(\alpha^2-2t/EI\right)sh\alpha(x-a_4)_+-}{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$\frac{-\alpha\left(\beta^2+2t/EI\right)\sin\beta(x-a_4)_+}{}.$$

3 случай. $s^4>0;\ |s|<|r|;\ r^2<0$. Корни (4.23) действительные и разные

$$k_{1,2}=\pm\alpha;\qquad k_{3,4}=\pm\beta;\qquad \alpha=\sqrt{-r^2+\sqrt{r^4-s^4}};\qquad \beta=\sqrt{-r^2-\sqrt{r^4-s^4}};$$

$$A_{11}=\frac{-\beta^2 ch\alpha x+\alpha^2 ch\beta x}{\alpha^2-\beta^2};\qquad A_{12}=\frac{-\beta\left(\beta^2-2t/EI\right)sh\alpha x+\alpha\left(\alpha^2-2t/EI\right)sh\beta x}{\alpha\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right)};$$

$$A_{13}=\frac{ch\alpha x-ch\beta x}{\alpha^2-\beta^2};\qquad A_{14}=\frac{\beta sh\alpha x-\alpha sh\beta x}{\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)};\qquad A_{21}=\frac{-\alpha\beta^2 sh\alpha x+\alpha^2\beta sh\beta x}{\alpha^2-\beta^2};$$

$$A_{22}=\frac{-\left(\beta^2-2t/EI\right)ch\alpha x+\left(\alpha^2-2t/EI\right)ch\beta x}{\alpha^2-\beta^2};\qquad A_{23}=\frac{\alpha sh\alpha x-\beta sh\beta x}{\alpha^2-\beta^2};$$

$$A_{31}=\frac{\alpha^2\beta^2(-ch\alpha x+ch\beta x)}{\alpha^2-\beta^2};\quad A_{32}=\frac{-\alpha\left(\beta^2-2t/EI\right)sh\alpha x+\beta\left(\alpha^2-2t/EI\right)sh\beta x}{\alpha^2-\beta^2};$$

$$A_{33}=\frac{\alpha^2 ch\alpha x-\beta^2 ch\beta x}{\alpha^2-\beta^2};\ A_{41}=\frac{-\alpha\beta^2\left(\alpha^2-2t/EI\right)sh\alpha x+\alpha^2\beta\left(\beta^2-2t/EI\right)sh\beta x}{\alpha^2-\beta^2};$$

$$A_{42}=\frac{\left(\alpha^2-2t/EI\right)\left(\beta^2-2t/EI\right)(-ch\alpha x+ch\beta x)}{\alpha^2-\beta^2};\ A_{43}=\frac{\alpha\left(\alpha^2-2t/EI\right)sh\alpha x-\beta\left(\beta^2-2t/EI\right)sh\beta x}{\alpha^2-\beta^2};$$

$$A_{44}=\frac{\left(\alpha^2-2t/EI\right)ch\alpha x-\left(\beta^2-2t/EI\right)ch\beta x}{\alpha^2-\beta^2};\qquad (4.27)$$

$$B_{11}=F\frac{\beta sh\alpha(x-a_1)_+-\alpha sh\beta(x-a_1)_+}{\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)}+M\frac{ch\alpha(x-a_2)_+-ch\beta(x-a_2)_+}{\alpha^2-\beta^2}+$$

$$+q\frac{\beta^2 ch\alpha(x-a_3)_+-\alpha^2 ch\beta(x-a_3)_+-\beta^2 ch\alpha(x-a_4)_++\alpha^2 ch\beta(x-a_4)_+}{\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)};$$

$$B_{21}=F\frac{ch\alpha(x-a_1)_+-ch\beta(x-a_1)_+}{\alpha^2-\beta^2}+M\frac{\alpha sh\alpha(x-a_2)_+-\beta sh\beta(x-a_2)_+}{\alpha^2-\beta^2}+$$

$$+q\frac{\beta sh\alpha(x-a_3)_+-\alpha sh\beta(x-a_3)_+-\beta sh\alpha(x-a_4)_++\alpha sh\beta(x-a_4)_+}{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)};$$

$$B_{31}=F\frac{\alpha sh\alpha(x-a_1)_+-\beta sh\beta(x-a_1)_+}{\alpha^2-\beta^2}+M\frac{\alpha^2 ch\alpha(x-a_2)_+-\beta^2 ch\beta(x-a_2)_+}{\alpha^2-\beta^2}+$$

$$+q\frac{ch\alpha(x-a_3)_+-ch\beta(x-a_3)_+-ch\alpha(x-a_4)_++ch\beta(x-a_4)_+}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$B_{41}=F\frac{\left(\alpha^2-2t/EI\right)ch\alpha(x-a_1)_+-\left(\beta^2-2t/EI\right)cp\beta(x-a_1)_+}{\alpha^2-\beta^2}+$$

$$+M\frac{\alpha\left(\alpha^2-2t/EI\right)sh\alpha(x-a_2)_+-\beta\left(\beta^2+2t/EI\right)sh\beta(x-a_2)_+}{\alpha^2-\beta^2}+$$

$$+q\frac{\beta\left(\alpha^2-2t/EI\right)sh\alpha(x-a_3)_+-\alpha\left(\beta^2-2t/EI\right)sh\beta(x-a_3)_+-\beta\left(\alpha^2-2t/EI\right)sh\alpha(x-a_4)_++}{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$\frac{+\alpha\left(\beta^2-2t/EI\right)sh\beta(x-a_4)_+}{}.$$

4 случай. $s^4>0;\ |s|<|r|;\ r^2>0$. Корни (4.23) мнимые

$$k_{1,2}=\pm i\alpha;\qquad k_{3,4}=\pm i\beta;\qquad \alpha=\sqrt{r^2+\sqrt{r^4-s^4}};\qquad \beta=\sqrt{r^2+\sqrt{r^4-s^4}};$$

$$A_{11}=\frac{-\beta^2\cos\alpha x+\alpha^2\cos\beta x}{\alpha^2-\beta^2};\qquad A_{12}=\frac{-\beta\left(\beta^2=2t/EI\right)\sin\alpha x+\alpha\left(\alpha^2+2t/EI\right)\sin\beta x}{\alpha\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right)};$$

$$A_{13}=\frac{-\cos\alpha x+\cos\beta x}{\alpha^2-\beta^2};\quad A_{14}=\frac{-\beta\sin\alpha x+\alpha\sin\beta x}{\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)};\quad A_{21}=\frac{\alpha\beta^2\sin\alpha x-\alpha^2\beta\sin\beta x}{\alpha^2-\beta^2};$$

$$A_{22}=\frac{-\left(\beta^2+2t/EI\right)\cos\alpha x+\left(\alpha^2+2t/EI\right)\cos\beta x}{\alpha^2-\beta^2};\qquad A_{23}=\frac{\alpha\sin\alpha x-\beta\sin\beta x}{\alpha^2-\beta^2};$$

$$A_{31}=\frac{\alpha^2\beta^2(\cos\alpha x+\cos\beta x)}{\alpha^2-\beta^2};\quad A_{32}=\frac{\alpha\left(\beta^2+2t/EI\right)\sin\alpha x-\beta\left(\alpha^2+2t/EI\right)\sin\beta x}{\alpha^2-\beta^2};$$

$$A_{33}=\frac{\alpha^2\cos\alpha x-\beta^2\cos\beta x)}{\alpha^2-\beta^2};\quad A_{41}=\frac{-\alpha\beta^2\left(\alpha^2+2t/EI\right)\sin\alpha x+\alpha^2\beta\left(\beta^2+2t/EI\right)\sin\beta x}{\alpha^2-\beta^2}$$

$$A_{42}=\frac{\left(\alpha^2+2t/EI\right)\left(\beta^2+2t/EI\right)(\cos\alpha x-\cos\beta x)}{\alpha^2-\beta^2};\ A_{43}=\frac{-\alpha\left(\alpha^2+2t/EI\right)\sin\alpha x+\beta\left(\beta^2+2t/EI\right)\sin\beta x}{\alpha^2-\beta^2}$$

$$A_{44}=\frac{\left(\alpha^2+2t/EI\right)\cos\alpha x-\left(\beta^2+2t/EI\right)\cos\beta x}{\alpha^2-\beta^2};\qquad (4.28)$$

$$B_{11}=F\frac{-\beta\sin\alpha(x-a_1)_+ +\alpha\sin\beta(x-a_1)_+}{\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)}+M\frac{-\cos\alpha(x-a_2)_+ +\cos\beta(x-a_2)_+}{\alpha^2-\beta^2}+$$

$$+q\frac{\beta^2\cos\alpha(x-a_3)_+ -\alpha^2\cos\beta(x-a_3)_+ -\beta^2\cos\alpha(x-a_4)_+ +\alpha^2\cos\beta(x-a_4)_+}{\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)};$$

$$B_{21}=F\frac{-\cos\alpha(x-a_1)_+ +\cos\beta(x-a_1)_+}{\alpha^2-\beta^2}+M\frac{\alpha\sin\alpha(x-a_2)_+ -\beta\sin\beta(x-a_2)_+}{\alpha^2-\beta^2}+$$

$$+q\frac{-\beta\sin\alpha(x-a_3)_+ +\alpha\sin\beta(x-a_3)_+ +\beta\sin\alpha(x-a_4)_+ -\alpha\sin\beta(x-a_4)_+}{\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)};$$

$$B_{31}=F\frac{\alpha\sin\alpha(x-a_1)_+ -\beta\sin\beta(x-a_1)_+}{\alpha^2-\beta^2}+M\frac{\alpha^2\cos\alpha(x-a_2)_+ -\beta^2\cos\beta(x-a_2)_+}{\alpha^2-\beta^2}+$$

$$+q\frac{-\cos\alpha(x-a_3)_+ +\cos\beta(x-a_3)_+ +\cos\alpha(x-a_4)_+ -\cos\beta(x-a_4)_+}{\alpha^2-\beta^2};$$

$$B_{41}=F\frac{\left(\alpha^2+2t/EI\right)\cos\alpha(x-a_1)_+ -\left(\beta^2+2t/EI\right)\cos\beta(x-a_1)_+}{\alpha^2-\beta^2}+$$

$$+M\frac{-\alpha\left(\alpha^2+2t/EI\right)\sin\alpha(x-a_2)_+ +\beta\left(\beta^2+2t/EI\right)\sin\beta(x-a_2)_+}{\alpha^2-\beta^2}+$$

$$+q\frac{\beta\left(\alpha^2+2t/EI\right)\sin\alpha(x-a_3)_+ -\alpha\left(\beta^2+2t/EI\right)\sin\beta(x-a_3)_+ -\beta\left(\alpha^2+2t/EI\right)\sin\alpha(x-a_4)_+ +}{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$\frac{+\alpha\left(\beta^2+2t/EI\right)\sin\beta(x-a_4)_+}{}.$$

Второстепенные случаи фундаментальных функций (s=0, r=0, $|s|=|r|$ и т.п.) имеют место только для отдельных точек интервалов изменения F_x, ω и могут быть построены аналогично. Уравнение (4.24) позволяет решать весьма большой круг задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем, связанных с упругим основанием. Высокую точность результатов и эффективность алгоритма МГЭ проиллюстрируем на тестовом примере.

Пример 4.6 [291, с.437]. Построить эпюры M, Q, N длинной железобетонной рамы с замкнутым контуром (рисунок 4.8), лежащей на упругом основании при следующих данных: коэффициент Пуассона упругого основания μ_0=0,3; коэффициент Пуассона материала рамы μ_0=0,167; модули упругости основания и материала рамы $E_0 = 32\cdot10^3$кПа, E=2,7·10^{7}кПа; ширина и высота стержней рамы $b = 1$ м; $h = 0{,}3$ м; значения коэффициента γ примем равными 1,5; 1,0; 0,5 м$^{-1}$; жесткость при изгибе стержней рамы $EI = Ebh^3/12(1-\mu^2)$; мощность основания примем для случая упругой полуплоскости $H\to\infty$; коэффициенты $r_{11}=b/2\gamma$; $s_{11}=b\gamma/2$ при $H\to\infty$.

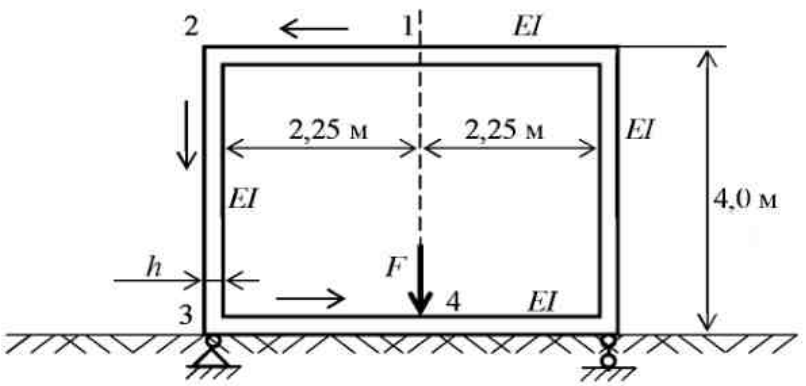


Рисунок 4.8

При заданных значениях исходных данных получаем

$$r^2 = \frac{F_x}{2EI} - \frac{E_0 r_{11}}{4(1+\mu_0)EI} = 0 - \frac{32\cdot10^3\cdot 1/3}{4(1+0{,}3)\cdot 48605{,}56} = -0{,}0422\ 1/\text{м}^2\ ;$$

$$s^2 = \sqrt{\frac{E_0 s_{11}}{(1-\mu_0^2)EI} - \frac{m\omega^2}{EI}} = \sqrt{\frac{32\cdot10^3\cdot 0{,}75}{(1-0{,}3^2)\cdot 48605{,}56} - 0} = 0{,}7366\ 1/\text{м}^2\ .$$

Решается задача статики, поэтому $F_x = \omega = 0$. Получился случай $|s|>|r|$; т.е. 1 случай фундаментальных функций (4.25). Раму можно разбить на 4 стержня, но, вследствие симметрии нагрузки и конструкции, рассмотрим только левую половину из 3-х стержней. Стрелками обозначаем начало и конец каждого элемента. Уравнения равновесия, совместности перемещений узлов 2, 3 и краевые условия представлены в матрицах $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$. Элементы вектора $\boldsymbol{B}$ вычисляем по формулам (4.25) при $F/2$; a_1 = 2,25-0 м; ℓ = 2,25 м.

Матричное уравнение МГЭ для рамы представлено ниже. Переставляя строки матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ в новом порядке для исключения нулевых ведущих элементов, решаем эту систему методом Гаусса (по программе примера 2.7).

$X_*=$

1	$EIv_{(0)}^{1-2}$
2	$EI\varphi_{(0)}^{1-2}=0;\ N_{(\ell)}^{2-3}$
3	$M_{(0)}^{1-2}$
4	$Q_{(0)}^{1-2}=0;\ EIv_{(\ell)}^{3-4}$
5	$N_{(0)}^{1-2}$
6	$EIv_{(0)}^{2-3}=0;\ M_{(\ell)}^{3-4}$
7	$EI\varphi_{(0)}^{2-3}$
8	$M_{(0)}^{2-3}$
9	$Q_{(0)}^{2-3}$
10	$N_{(0)}^{2-3}$
11	$EIv_{(0)}^{3-4}=0;\ N_{(\ell)}^{3-4}$
12	$EI\varphi_{(0)}^{3-4}$
13	$M_{(0)}^{3-4}$
14	$Q_{*(0)}^{3-4}$
15	$N_{(0)}^{3-4}$

; $Y=$

1	$EIv_{(\ell)}^{1-2}=0$
2	$EI\varphi_{(\ell)}^{1-2}=EI\varphi_{(0)}^{2-3}$
3	$M_{(\ell)}^{1-2}=M_{(0)}^{2-3}$
4	$Q_{(\ell)}^{1-2}=-N_{(0)}^{2-3}$
5	$N_{(\ell)}^{1-2}=Q_{(0)}^{2-3}$
6	$EIv_{(\ell)}^{2-3}=0$
7	$EI\varphi_{(\ell)}^{2-3}=EI\varphi_{(0)}^{3-4}$
8	$M_{(\ell)}^{2-3}=M_{(0)}^{3-4}$
9	$Q_{(\ell)}^{2-3}=-N_{(0)}^{3-4}$
10	$N_{(\ell)}^{2-3}$
11	$EIv_{(\ell)}^{3-4}$
12	$EI\varphi_{(\ell)}^{3-4}=0$
13	$M_{(\ell)}^{3-4}$
14	$Q_{*(\ell)}^{3-4}$
15	$N_{(\ell)}^{3-4}$

; $B=$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	$-F/2$
15	

В таблице 4.1 представлены результаты расчетов для различных коэффициентов γ и при отсутствии основания. Данные таблицы свидетельствуют о хорошем соответствии результатов МГЭ (при $\gamma = 1{,}0$) и метода перемещений [291]. Эпюры M, Q, N представлены на рисунке 4.9.

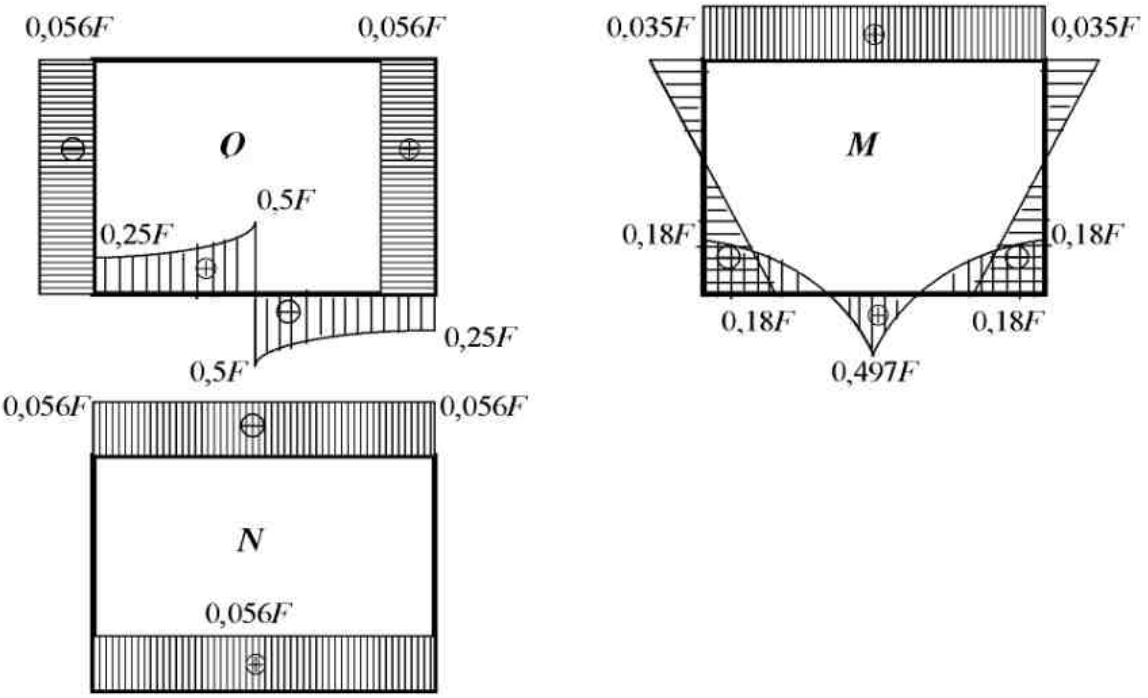


Рисунок 4.9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15				
1	1		-2,5													$EIv_{(0)}^{1-2}$			1
2			-2,2				-1									$N_{(0)}^{2-3}$			3
3			1					-1								$M_{(0)}^{1-2}$			8
4										1						$EIv_{(0)}^{3-4}$			10
5					1				-1							$N_{(0)}^{1-2}$			5
6							4	-8	-10,6							$M_{(0)}^{3-4}$			7
7							1	-4	-8			-1				$EI\varphi_{(0)}^{2-3}$			12
8								1	4				-1			$M_{(0)}^{2-3}$	=		9
9									1						1	$Q_{(0)}^{2-3}$			15
10		-1								1						$N_{(0)}^{2-3}$			2
11				-1								A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$		$N_{(0)}^{3-4}$			4
12												A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{13}$		$EI\varphi_{(0)}^{3-4}$			13
13						-1						$-A_{32}$	A_{33}	A_{23}		$M_{(0)}^{3-4}$			6
14												$-A_{42}$	A_{43}	A_{44}		$Q_{*(0)}^{3-4}$		-0,5	14
15											-1				1	$N_{(0)}^{3-4}$			11

Таблица 4.1

Граничные параметры	Рама без упругого основания	Рама на упругом основании			Результаты метода перемещений [291]
		$\gamma = 1{,}5$	$\gamma = 1{,}0$	$\gamma = 0{,}5$	
$EIv_{(0)}^{1-2}/F$	0,172	0,074	0,089	0,104	-
$N_{(\ell)}^{2-3}/F$	0,0	0,0	0,0	0,0	-
$M_{(0)}^{1-2}/F$	0,068	0,029	0,035	0,041	0,038
$EIv_{(\ell)}^{3-4}/F$	0,972	0,461	0,536	0,610	-
$N_{(0)}^{1-2}/F$	-0,108	-0,047	-0,056	-0,066	-
$M_{(\ell)}^{3-4}/F$	0,759	0,454	0,498	0,537	0,5
$EI\varphi_{(0)}^{2-3}/F$	-0,153	-0,066	-0,079	-0,093	-
$M_{(0)}^{2-3}/F$	0,068	0,029	0,035	0,041	0,038
$Q_{(0)}^{2-3}/F$	-0,108	-0,047	-0,056	-0,066	-
$N_{(0)}^{2-3}/F$	0,0	0,0	0,0	0,0	-
$N_{(\ell)}^{3-4}/F$	0,108	0,047	0,056	0,066	-
$EI\varphi_{(0)}^{3-4}/F$	0,442	0,191	0,229	0,267	0,245
$M_{(0)}^{3-4}/F$	-0,366	-0,158	-0,189	-0,221	-0,203
$Q_{*(0)}^{3-4}/F$	0,5	0,182	0,251	0,357	0,209
$N_{(0)}^{3-4}/F$	0,108	0,047	0,056	0,066	-

Выполним тестирование уравнения (4.24) на задачах динамики и устойчивости стержней. Трансцендентные уравнения строились по алгоритму МГЭ. Например, для стержня с жестко защемленными граничными сечениями схема (1.46) приводит к следующему уравнению для собственных значений

$$\begin{array}{c|cccc|c|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & & \\ 1 & & & -A_{13} & -A_{14} & EIv(0)=0;\quad M(\ell) & EIv(\ell)=0 \\ 2 & & & -A_{23} & -A_{13} & EI\varphi(0)=0;\quad M(\ell) & EI\varphi(\ell)=0 \\ 3 & -1 & & A_{33} & A_{23} & M(0) & M(\ell) \\ 4 & & -1 & A_{43} & A_{44} & Q(0) & M(\ell) \end{array} = 0;$$

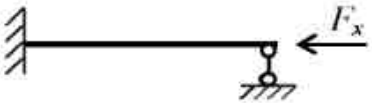
$$\left|\mathbf{A}_*(F_x,\omega)\right| = A_{13}^2 - A_{14}\cdot A_{23} = 0.$$

Уравнение собственных колебаний для стержня, имеющего свободный конец, формировалось с учетом граничных условий

$$M(\ell)=0; \qquad Q_*(\ell)=(F_x+2t)\varphi(\ell).$$

Частоты собственных колебаний и критические силы отдельных стержней представлены в таблице 4.2. Данные таблицы подтверждают представления о существенном влиянии упругого основания на частоты собственных колебаний и критические силы.

Таблица 4.2

Схема опирания стержня на упругом основании	Уравнение для определения собственных колебаний $\lvert \mathbf{A}_*(F_x,\omega)\rvert = 0$	Частоты собственных колебаний $\omega\ell^2\sqrt{m/EI}$; $F_x = 0$		Критические силы потери устойчивости $F_1\ell^2/EI$; $\omega = 0$	
		при отсутствии упругого основания	при наличии упругого основания	при отсутствии упругого основания	при наличии упругого основания
	$A_{13}^2 - A_{14}\cdot A_{23} = 0$	22,37 61,76 120,91 ...	15,855 43,645 85,525 ...	39,478	39,675
	$A_{13}\cdot A_{23} - A_{14}\cdot A_{33} = 0$	15,42 49,97 104,24 ...	10,955 35,375 73,756 ...	20,142	20,395
	$A_{33}\cdot A_{44} - A_{23}\cdot A_{43} + [(F_x + 2l)/EI]\left(-A_{23}^2 + A_{13}A_{33}\right) = 0$	3,52 22,03 61,70 ...	2,6465 15,6575 43,685 ...	2,467	2,785
	$A_{12}\cdot A_{23} - A_{14}\cdot A_{32} = 0$	9,87 39,48 88,83 ...	7,0585 27,965 62,855 ...	9,87	10,095

При единичных исходных данных ($b = h = H = EI = E_0 = \ell = m = m_0 = 1$; $\mu = 0{,}3$; $\mu_0 = 0{,}3$) спектр собственных колебаний смещен влево, а критические силы – вправо относительно спектров стержня без упругого основания.

4.5.4 Модель С.П.Тимошенко

Уравнения (3.10), (4.12) не учитывают деформации сдвига и инерции вращения при колебаниях. Поэтому они достаточно хорошо описывают поперечные колебания стержня с большим отношением длины к высоте сечения ($\ell/h > 10$) и при малых частотах. Однако, для рамных систем фундаментов тяжелого оборудования и подобных конструкций, когда $\ell_{пв}/nh < 6$, где n – номер тона колебаний; h - характерный размер поперечного сечения; $\ell_{пв}$ – длина полуволны упругой линии стержня, уже необходимо учитывать сдвиг и инерцию вращения [150,178]. Проблема построения более точных решений для поперечных колебаний стержня весьма актуальна и в теории устойчивости в связи с применением динамического метода. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний прямолинейного стержня с учетом деформаций сдвига и инерции вращения вывел выдающийся русский ученый проф. С.П.Тимошенко [312]. Его модель ныне утвердилась как наиболее точная и широко применяется в различных задачах механики конструкций. Для применения модели С.П.Тимошенко в задачах устойчивости необходимо дополнить ее продольной силой F_x. С этой целью рассмотрим стержень, сжатый следящей силой F_1 и силой F_2, имеющей фиксированную линию действия (рисунок 4.10).

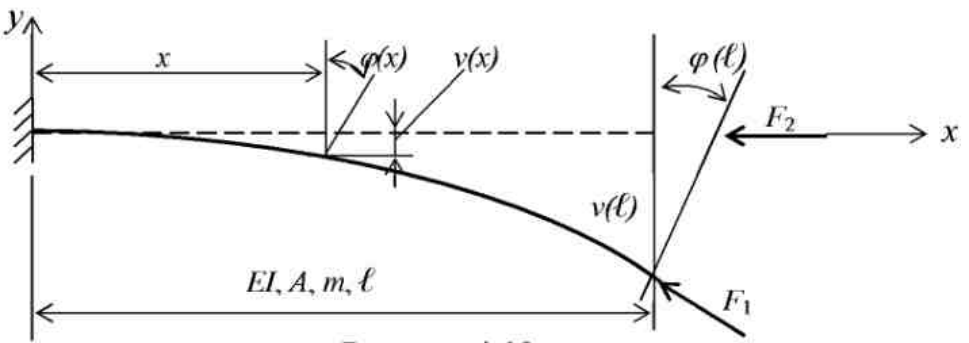


Рисунок 4.10

Из геометрических соотношений деформированного состояния стержня следует выражение для изгибающего момента

$$M_x(x,t) = EI\frac{d\psi_*(x,t)}{dx} + F_x \cdot y(x,t) - F_1 \cdot y(\ell,t) \quad , \qquad (4.29)$$

где $\psi_*(x, t)$ - угол наклона сечения стержня без учета сдвига;

$F_x = F_1 + F_2$ - продольная сила в текущем сечении;

$y(x, t)$, $y(\ell, t)$ – соответственно прогиб текущей и граничной точек.

Здесь не учитывается первая производная прогиба в кривизне стержня и считается, что вследствие малых перемещений

$$\cos\left(dy/dx\right) = 1; \qquad \sin\left(dy/dx\right) = dy/x \, .$$

Для силы F_2 выражение (4.29) является точным, для F_1-приближенным. Полный угол поворота сечения равен сумме [312]

$$\frac{dy(x,t)}{dx} = \psi_*(x,t) + \tau_*(x,t) \ , \tag{4.30}$$

где $\tau_*(x, t)$ – угол поперечного сдвига.

Поперечная сила в рассматриваемом случае предстанет выражением

$$Q_*(x,t) = -kAG\tau_*(x,t) - F_x\frac{dy(x,t)}{dx} + F_1\frac{dy(\ell,t)}{dx} \ , \tag{4.31}$$

где AG - жесткость сечения при сдвиге;

κ – коэффициент, учитывающий влияние формы сечения на деформацию сдвига.

Принципиально не изменятся уравнения (4.29), (4.31) в случае, если стержень будет сжиматься «мертвой» силой по рисунку 4.7,*d*. Далее модель деформированного состояния (4.29)-(4.31) приводится к задаче Коши. Исходными при этом являются уравнения равновесия элементарной части стержня при собственных колебаниях:

сумма моментов

$$-Q_*dx + \frac{dM_*}{dx}dx - \rho I\frac{d^2\psi_*}{dt^2}dx = 0 \tag{4.32}$$

и сумма проекций на вертикальную ось

$$-\frac{dQ_*}{dx}dx - m\frac{d^2y}{dt^2dx} + q_*(x,t)dx = 0 \ , \tag{4.33}$$

где $\rho = m/A$ - плотность материала стержня;

A - площадь сечения;

I - осевой момент инерции сечения;

m - равномерно распределенная масса;

$q_*(x,t)$ – поперечная динамическая нагрузка.

Если исключить функцию $\psi_*(x,t)$ из уравнений (4.32), (4.33), то уравнение С.П.Тимошенко с учетом действия продольной силы F_* примет вид

$$EI\left(1+\frac{F_*}{kAG}\right)\frac{d^4y}{dx^4} + m\frac{d^2y}{dt^2} - \left[\frac{EI}{kG}\rho + \rho I\left(1+\frac{F_*}{kAG}\right)\right]\frac{d^4y}{dx^2dt^2} + F_x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\rho^2I}{kG}\cdot\frac{d^4y}{dt^4} = \tag{4.34}$$
$$= q_* + \frac{\rho^2I}{kAG}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{EI}{kAG}\cdot\frac{d^2q_*}{dx^2}$$

Ограничимся случаем гармонических колебаний, для которых можно разделить линейную и временную координаты в соответствии с методом Фурье, т.е.

$$y(x,t) = v(x)\sin(\omega t + \psi_0); \quad q_*(x,t) = q(x)\sin(\omega t + \psi_0);$$
$$\psi_*(x,t) = \psi(x)\sin(\omega t + \psi_0), \tag{4.35}$$

где $v(x)$, $q(x)$, $\psi(x)$ – амплитуды прогиба, нагрузки и угла наклона;

ω - частота собственных колебаний;

ψ_0 – начальная фаза.

Подставляя (4.35) в (4.29)-(4.31), (4.34), получим дифференциальное уравнение и соответствующие кинематические и статические параметры в амплитудном состоянии

$$\begin{aligned} &v^{IV}(x)+2r^2v''(x)+s^4v(x)=q_y(x)/EI; \qquad v(x); \qquad \varphi(x)=v'(x);\\ &\frac{M(x)}{EI}=a_1v''(x)+a_2v(x)+a_3q(x)-a_4v(\ell);\\ &\frac{Q(x)}{EI}=b_1v'''(x)+b_2v'(x)+b_3q'(x)-b_4\varphi(\ell), \end{aligned} \tag{4.36}$$

где $\varphi(x)$, $M(x)$, $Q(x)$ – амплитудные полный угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила.

Коэффициенты и правая часть принимают вид

$$\begin{aligned} &2r^2=\frac{I\omega^2m(E+kG)+(\rho I\omega^2+kAG)F_x}{EI(kAG+F_x)}; \quad s^4=\frac{\omega^2m(\rho I\omega^2-kAG)}{EI(kAG+F_x)};\\ &q_y(x)=\frac{kAG-\rho I\omega^2}{kAG+F_x}q(x)-\frac{EI}{kAG+F_x}q''(x);\\ &a_1=1+\frac{F_x}{kAG}; \quad a_2=\frac{m\omega^2}{kAG}+\frac{F_x}{EI}; \quad a_3=\frac{1}{kAG}; \quad a_4=\frac{F_1}{EI};\\ &b_1=\frac{kAG+F_x}{kAG-\rho I\omega^2}; \qquad b_2=\frac{I(Em+kAG\rho)\omega^2+(kAG+\rho I\omega^2)F_x}{EI(kAG-\rho I\omega^2)};\\ &b_3=\frac{1}{kAG-\rho I\omega^2}; \qquad b_4=\frac{F_1\rho I\omega^2}{EI(kAG-\rho I\omega^2)}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Сосредоточенные массы стержня могут быть учтены по формуле (3.21) или по методике п.3.6.1.

Решение уравнения (4.36) после нормирования фундаментальных функций удобно представить в матричной форме

$$\begin{array}{|c|} EIv(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{array} = \begin{array}{|cccc|c|} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} & EIv(0) \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{24} & EI\varphi(0) \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{33} & A_{34} & M(0) \\ -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44} & Q(0) \end{array} + \begin{array}{|c|} B_{11} \\ B_{21} \\ -B_{31} \\ -B_{41} \end{array}, \tag{4.38}$$

где знак "- " соответствует направлению оси ОУ "вниз".

Вид фундаментальных функций зависит от корней характеристического уравнения. Представим 4 основных случая фундаментальных функций.

1 случай. $(r^4-s^4)<0$. Корни по формуле (4.23) комплексные

$$\begin{aligned} &k_{1-4}=\pm\alpha\pm i\beta; \qquad \alpha=\sqrt{\left(s^2-r^2\right)/2}; \qquad \beta=\sqrt{\left(s^2+r^2\right)/2};\\ &\Phi_1=ch\alpha x\cdot\sin\beta x; \quad \Phi_2=ch\alpha x\cdot\cos\beta x; \quad \Phi_3=sh\alpha x\cdot\cos\beta x; \quad \Phi_4=sh\alpha x\cdot\sin\beta x;\\ &A_{11}=\Phi_2-\frac{a_2-a_1r^2}{2\alpha\beta a_1}\Phi_4; \qquad A_{12}=\frac{\beta\left[b_2-b_1\left(\beta^2-3\alpha^2\right)\right]\Phi_3-\alpha\left[b_2+b_1\left(\alpha^2-3\beta^2\right)\right]\Phi_1}{2\alpha\beta s^2b_1};\\ &A_{13}=\frac{\Phi_4}{2\alpha\beta a_1}; \qquad A_{14}=\frac{a\Phi_1-\beta\Phi_3}{2\alpha\beta s^2b_1}; \qquad A_{21}=\frac{\beta\left(a_1s^2-a_2\right)\Phi_3-\alpha\left(a_1s^2+a_2\right)\Phi_1}{2\alpha\beta a_1}; \end{aligned}$$

$$A_{22}=\Phi_2-\frac{b_2-b_1r^2}{2\alpha\beta_1}\Phi_4;\quad A_{23}=\frac{a\Phi_1+\beta\Phi_3}{2\alpha\beta a_1};\quad A_{24}=\frac{\Phi_4}{2\alpha\beta b_1};\quad A_{31}=-\frac{\left(a_2-a_1r^2\right)+(2\alpha\beta a_1)^2}{2\alpha\beta a_1}\Phi_4;$$

$$A_{32}=\frac{\left[b_2-b_1\left(\beta^2-3\alpha^2\right)\right]\left(a_2-a_1r^2\right)-2\alpha^2a_1\left[b_2+b_1\left(\alpha^2-3\beta^2\right)\right]}{2\alpha s^2b_1}\Phi_3-$$

$$-\frac{\left[b_2+b_1\left(\alpha^2-3\beta^2\right)\right]\left(a_2-a_1r^2\right)+2\beta^2a_1\left[b_2-b_1\left(\beta^2-3\alpha^2\right)\right]}{2\beta s^2b_1}\Phi_1; \qquad (4.39)$$

$$A_{33}=\Phi_2+\frac{a_2-a_1r^2}{2\alpha\beta a_1}\Phi_4;\qquad A_{34}=\frac{\left[\alpha\left(a_2-a_1r^2\right)+2\alpha\beta^2a_1\right]\Phi_1-\left[\beta\left(a_2-a_1r^2\right)-2\alpha^2\beta a_1\right]\Phi_3}{2\alpha\beta s^2b_1};$$

$$A_{41}=\frac{2\alpha^2a_1\left[b_2+b_1\left(\alpha^2-3\beta^2\right)\right]-\left(a_2-a_1r^2\right)\left[b_2-b_1\left(\beta^2-3\alpha^2\right)\right]}{2\alpha a_1}\Phi_3-$$

$$-\frac{2\beta^2a_1\left[b_2-b_1\left(\beta^2-3\alpha^2\right)\right]+\left(a_2-a_1r^2\right)\left[b_2+b_1\left(\alpha^2-3\beta^2\right)\right]}{2\beta a_1}\Phi_1;$$

$$A_{42}=-\frac{\alpha^2\left[b_2+b_1\left(\alpha^2-3\beta^2\right)\right]^2+\beta^2\left[b_2-b_1\left(\beta^2-3\alpha^2\right)\right]^2}{2\alpha\beta s^2b_1}\Phi_4;$$

$$A_{43}=\frac{\alpha\left[b_2+b_1\left(\alpha^2-3\beta^2\right)\right]\Phi_1+\beta\left[b_2-b_1\left(\beta^2-3\alpha^2\right)\right]\Phi_3}{2\alpha\beta a_1};\quad A_{44}=\Phi_2+\frac{b_2-b_1r^2}{2\alpha\beta b_1}\Phi_4.$$

2 случай. $(r^4-s^4)>0;\ s^4<0.$ Корни (4.23) действительные и мнимые

$$k_{1-2}=\pm\alpha;\qquad k_{3-4}=\pm i\beta;\qquad \alpha=\sqrt{-r^2+\sqrt{r^4-s^4}};\qquad \beta=\sqrt{r^2+\sqrt{r^4-s^4}};$$

$$A_{11}=\frac{-\left(a_2-a_1\beta^2\right)ch\alpha x+\left(a_2+a_1\alpha^2\right)\cos\beta x}{a_1\left(\alpha^2+\beta^2\right)};\ A_{12}=\frac{-\beta\left(b_2-b_1\beta^2\right)sh\alpha x+\alpha\left(b_2+b_1\alpha^2\right)\sin\beta x}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_1};$$

$$A_{13}=\frac{ch\alpha x-\cos\beta x}{a_1\left(\alpha^2+\beta^2\right)};\ A_{14}=\frac{\beta sh\alpha x-\alpha\sin\beta x}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_1};\ A_{21}=\frac{-\left(a_2-a_1\beta^2\right)\alpha sh\alpha x-\beta\left(a_2+a_1\alpha^2\right)\sin\beta x}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_1};$$

$$A_{22}=\frac{-\left(b_2-b_1\beta^2\right)ch\alpha x+\left(b_2+b_1\alpha^2\right)\cos\beta x}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_1};\ A_{23}=\frac{\alpha sh\alpha x+\beta\sin\beta x}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_1};\ A_{24}=\frac{ch\alpha x-\cos\beta x}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_1};$$

$$A_{31}=\frac{\left(a_2+a_1\alpha^2\right)\left(a_2-a_1\beta^2\right)\left(-ch\alpha x+\cos\beta x\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_1}; \qquad (4.40)$$

$$A_{32}=\frac{-\beta\left(a_2+a_1\alpha^2\right)\left(b_2-b_1\beta^2\right)sh\alpha x+\alpha\left(a_2-a_1\beta^2\right)\left(b_2+b_1\alpha^2\right)\sin\beta x}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_1};$$

$$A_{33}=\frac{\left(a_2+a_1\alpha^2\right)ch\alpha x-\left(a_2-a_1\beta^2\right)\cos\beta x}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_1};\ A_{34}=\frac{\beta\left(a_2+a_1\alpha^2\right)sh\alpha x-\alpha\left(a_2-a_1\beta^2\right)\sin\beta x}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_1};$$

$$A_{41}=\frac{-\alpha\left(a_2-a_1\beta^2\right)\left(b_2+b_1\alpha^2\right)sh\alpha x-\beta\left(a_2+a_1\alpha^2\right)\left(b_2-b_1\beta^2\right)\sin\beta x}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_1};$$

$$A_{42}=\frac{\left(b_2+b_1\alpha^2\right)\left(b_2-b_1\beta^2\right)\left(-ch\alpha x+\cos\beta x\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_1};\ A_{43}=\frac{\alpha\left(b_2+b_1\alpha^2\right)sh\alpha x+\beta\left(b_2-b_1\beta^2\right)\sin\beta x}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_1};$$

$$A_{44}=\frac{\left(b_2+b_1\alpha^2\right)ch\alpha x-\left(b_2-b_1\beta^2\right)\cos\beta x}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_1}$$

3 случай. $(r^4 - s^4) > 0;\ s^4>0;\ r^2< 0.$ Случай растягивающей силы ($-F_x$). Корни (4.23) действительные

$$k_{1\text{-}2} = \pm\alpha;\ .\ \ k_{3\text{-}4} = \pm\beta;\quad \alpha = \sqrt{-r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}};\qquad \beta = \sqrt{-r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}};$$

$$A_{11} = \frac{\left(a_2 + a_1\beta^2\right)ch\alpha x - \left(a_2 + a_1\alpha^2\right)ch\beta x}{\left(\beta^2 - \alpha^2\right)a_1};\ A_{12} = \frac{\beta\left(b_2 + b_1\beta^2\right)sh\alpha x - \alpha\left(b_2 + b_1\alpha^2\right)sh\beta x}{\alpha\beta\left(\beta^2 - \alpha^2\right)b_1};$$

$$A_{13} = \frac{-ch\alpha x + ch\beta x}{\left(\beta^2 - \alpha^2\right)a_1};\ A_{14} = \frac{-\beta sh\alpha x + \alpha sh\beta x}{\alpha\beta\left(\beta^2 - \alpha^2\right)b_1};\ A_{21} = \frac{\alpha\left(a_2 + a_1\beta^2\right)sh\alpha x - \beta\left(a_2 + a_1\alpha^2\right)sh\beta x}{\left(\beta^2 - \alpha^2\right)a_1};$$

$$A_{22} = \frac{\left(b_2 + b_1\beta^2\right)ch\alpha x - \left(b_2 + b_1\alpha^2\right)ch\beta x}{\left(\beta^2 - \alpha^2\right)b_1};\ A_{23} = \frac{-\alpha sh\alpha x + \beta sh\beta x}{\left(\beta^2 - \alpha^2\right)a_1};\ A_{24} = \frac{-ch\alpha x + ch\beta x}{\left(\beta^2 - \alpha^2\right)b_1};$$

$$A_{31} = \frac{\left(a_2 + a_1\alpha^2\right)\left(a_2 + a_1\beta^2\right)\left(ch\alpha x - ch\beta x\right)}{\left(\beta^2 - \alpha^2\right)a_1}; \qquad (4.41)$$

$$A_{32} = \frac{\beta\left(a_2 + a_1\alpha^2\right)\left(b_2 + b_1\beta^2\right)sh\alpha x - \alpha\left(a_2 + a_1\beta^2\right)\left(b_2 + b_1\alpha^2\right)sh\beta x}{\alpha\beta\left(\beta^2 - \alpha^2\right)b_1};$$

$$A_{33} = \frac{-\left(a_2 + a_1\alpha^2\right)ch\alpha x + \left(a_2 - a_1\beta^2\right)ch\beta x}{\left(\beta^2 - \alpha^2\right)a_1};\ A_{34} = \frac{-\beta\left(a_2 + a_1\alpha^2\right)sh\alpha x + \alpha\left(a_2 - a_1\beta^2\right)sh\beta x}{\alpha\beta\left(\beta^2 - \alpha^2\right)b_1};$$

$$A_{41} = \frac{\alpha\left(a_2 + a_1\beta^2\right)\left(b_2 + b_1\alpha^2\right)sh\alpha x - \beta\left(a_2 + a_1\alpha^2\right)\left(b_2 + b_1\beta^2\right)sh\beta x}{\left(\beta^2 - \alpha^2\right)a_1};$$

$$A_{42} = \frac{\left(b_2 + b_1\alpha^2\right)\left(b_2 + b_1\beta^2\right)\left(ch\alpha x - ch\beta x\right)}{\left(\beta^2 - \alpha^2\right)b_1};\ A_{43} = \frac{-\alpha\left(b_2 + b_1\alpha^2\right)sh\alpha x + \beta\left(b_2 + b_1\beta^2\right)sh\beta x}{\left(\beta^2 - \alpha^2\right)a_1};$$

$$A_{44} = \frac{-\left(b_2 + b_1\alpha^2\right)ch\alpha x + \left(b_2 + b_1\beta^2\right)ch\beta x}{\left(\beta^2 - \alpha^2\right)b_1}.$$

4 случай. $(r^4 - s^4) > 0;\ s^4>0;\ r^2> 0.$ Корни (4.23) мнимые

$$k_{1\text{-}2} = \pm i\alpha;\ .\ \ k_{3\text{-}4} = \pm\, i\beta;\quad \alpha = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}};\qquad \beta = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}};$$

$$A_{11} = \frac{\left(a_2 - a_1\beta^2\right)\cos\alpha x - \left(a_2 - a_1\alpha^2\right)\cos\beta x}{\left(\alpha^2 - \beta^2\right)a_1};\ A_{12} = \frac{\beta\left(b_2 - b_1\beta^2\right)s\sinh\alpha x - \alpha\left(b_2 - b_1\alpha^2\right)s\sinh\beta x}{\alpha\beta\left(\beta^2 - \alpha^2\right)b_1};$$

$$A_{13} = \frac{-\cos\alpha x + \cos\beta x}{\left(\alpha^2 - \beta^2\right)a_1};\quad A_{14} = \frac{-\beta\sin\alpha x + \alpha\sin\beta x}{\alpha\beta\left(\alpha^2 - \beta^2\right)b_1};$$

$$A_{21} = \frac{-\alpha\left(a_2 - a_1\beta^2\right)\sin\alpha x + \beta\left(a_2 - a_1\alpha^2\right)\sin\beta x}{\left(\alpha^2 - \beta^2\right)a_1}; \qquad (4.42)$$

$$A_{22} = \frac{\left(b_2 - b_1\beta^2\right)\cos\alpha x - \left(b_2 - b_1\alpha^2\right)\cos\beta x}{\left(\alpha^2 - \beta^2\right)b_1};\ A_{23} = \frac{\alpha\sin\alpha x - \beta\sin\beta x}{\left(\alpha^2 - \beta^2\right)a_1};\ A_{24} = \frac{-\cos\alpha x + \cos\beta x}{\left(\alpha^2 - \beta^2\right)b_1};$$

$$A_{31} = \frac{\left(a_2 - a_1\alpha^2\right)\left(a_2 - a_1\beta^2\right)\left(\cos\alpha x - \cos\beta x\right)}{\left(\alpha^2 - \beta^2\right)a_1};$$

$$A_{32} = \frac{\beta\left(a_2 - a_1\alpha^2\right)\left(b_2 - b_1\beta^2\right)\sin\alpha x - \alpha\left(a_2 - a_1\beta^2\right)\left(b_2 - b_1\alpha^2\right)\sin\beta x}{\alpha\beta\left(\alpha^2 - \beta^2\right)b_1};$$

$$A_{33}=\frac{-\left(a_2-a_1\alpha^2\right)\cos\alpha x+\left(a_2-a_1\beta^2\right)\cos\beta x}{\left(\alpha^2-\beta^2\right)a_1};\ A_{34}=\frac{-\beta\left(a_2-a_1\alpha^2\right)s\sinh\alpha x+\alpha\left(a_2-a_1\beta^2\right)\sin\beta x}{\alpha\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right)b_1};$$

$$A_{41}=\frac{-\alpha\left(a_2-a_1\beta^2\right)\left(b_2-b_1\alpha^2\right)\sin\alpha x+\beta\left(a_2-a_1\alpha^2\right)\left(b_2-b_1\beta^2\right)\sin\beta x}{\left(\alpha^2-\beta^2\right)a_1};$$

$$A_{42}=\frac{\left(b_2-b_1\alpha^2\right)\left(b_2-b_1\beta^2\right)(\cos\alpha x-\cos\beta x)}{\left(\alpha^2-\beta^2\right)b_1};\ A_{43}=\frac{\alpha\left(b_2-b_1\alpha^2\right)\sin\alpha x-\beta\left(b_2-b_1\beta^2\right)\sin\beta x}{\left(\alpha^2-\beta^2\right)a_1};$$

$$A_{44}=\frac{-\left(b_2-b_1\alpha^2\right)\cos\alpha x+\left(b_2-b_1\beta^2\right)\cos\beta x}{\left(\alpha^2-\beta^2\right)b_1}.$$

Слагаемые, зависящие от внешней нагрузки и граничных параметров стержня, примут вид

$$B_{11}=\int_0^x A_{14}(x-\xi)q_y(\xi)d\xi-a_3q(0)A_{13}(x)+a_4v(\ell)A_{13}(x)-b_3q'(0)A_{14}(x)+b_4\varphi(\ell)A_{14}(x);$$

$$B_{21}=\int_0^x A_{24}(x-\xi)q_y(\xi)d\xi-a_3q(0)A_{23}(x)+a_4v(\ell)A_{23}(x)-b_3q'(0)A_{24}(x)+b_4\varphi(\ell)A_{24}(x);$$

$$B_{31}=\int_0^x A_{34}(x-\xi)q_y(\xi)d\xi-a_3[q(0)A_{33}(x)-q(x)]+a_4v(\ell)[A_{33}(x)-1]-$$
$$-b_3q'(0)A_{34}(x)+b_4\varphi(\ell)A_{34}(x); \qquad (4.43)$$

$$B_{41}=\int_0^x A_{44}(x-\xi)q_y(\xi)d\xi-a_3q(0)A_{43}(x)+a_4v(\ell)A_{43}(x)-b_3[q'(0)A_{44}(x)-q'(x)]+$$
$$+b_4\varphi(\ell)[A_{44}(x)-1].$$

Интегрирование выражений (4.43) для любой поперечной нагрузки не вызывает трудностей. Другие случаи фундаментальных функций ($r^2=0$; $s^4=0$; $r^4=s^4$ и т.д.) имеют второстепенное значение и здесь не приводятся. Тестирование решения задачи Коши (4.38) выполним на задачах о собственных колебаниях. В этом случае $F_x=0$; $q_y(x)=0$. Частотные уравнения отдельных стержней можно получить при формировании краевой задачи. Например, при жестком защемлении граничных точек будем иметь

	1	2	3	4				
1			-A13	-A14	$EIv(0)=0;\ M(\ell)$		$EIv(\ell)=0$	
2			-A23	-A24	$EI\varphi(0)=0;\ Q(\ell)$	$-$	$EI\varphi(\ell)=0$	$=0\rightarrow$
3	-1		A33	A34	$M(0)$		$M(\ell)$	
4		-1	A43	A44	$Q(0)$		$Q(\ell)$	

$$\left|\boldsymbol{A}_*(\omega)\right|=\mathrm{A}_{13}\cdot\mathrm{A}_{24}-\mathrm{A}_{14}\cdot\mathrm{A}_{23}=0.$$

Аналогично можно получить частотные уравнения для любых условий опирания. Наиболее просто частоты определяются методом последовательного перебора, когда задаются начальное значение и шаг для ω. Результаты вычисления определителя выводятся в виде таблицы. Ее просмотр позволяет выявить изменение знака определителя и грубое

значение собственной частоты. Далее частота может быть уточнена при последующих прогонках программы с измененными начальным значением и шагом ω. Пример такой программы на языке *Fortran* представлен в приложении А. В таблице 4.3 дано сравнение частот по приближенному решению акад. А.Н.Крылова и решению уравнения С.П.Тимошенко. Частоты определялись при следующих исходных данных: коэффициент Пуассона μ=0,3; E=2,1·10^{11}Па; $G=E/2(1+\mu)$=0,8077·10^{11}Па; ρ=7800кг/м^3; l=1,0м; $A=b$ x h = 0,1 x 0,1 = 0,01м^2; $I = hb^3/12$ = 8,3333·10^{-6}м^4; $m = \rho A$ = 78,0кг/м; κ=5/6. Абсолютные значения частот приводились к безразмерной форме $\omega_* = \omega \ell^2 \sqrt{m/EI}$.

Таблица 4.3

Безразмерные частоты собственных колебаний отдельных стержней $\omega_* = \omega \ell^2 \sqrt{m/EI}$

Номер тона колебаний	$D_1 = A_{13}\,A_{24} - A_{14}\,A_{23} = 0$			$D_2 = A_{13}\,A_{34} - A_{14}\,A_{33} = 0$		
	приближенные	уточненные	погрешность, %	приближенные	уточненные	погрешность, %
1	22,3736	21,9260	2,04	15,4184	15,1260	1,93
2	61,6714	57,4781	7,30	49,9652	46,7429	6,89
3	120,9030	105,3970	14,71	104,2480	91,2600	14,23
4	199,8596	161,4254	23,81	178,2700	144,5587	23,32
5	298,5557	222,6361	34,10	272,0311	203,5004	33,68
6	416,9909	287,0476	45,27	385,5317	265,9581	44,96
7	555,1652	353,4163	57,09	518,7714	330,5740	56,93
8	713,0787	420,9801	69,39	671,7503	396,4820	69,43
9	890,7286	489,3061	82,04	844,4094	463,1590	82,32
10	1088,1239	558,2521	94,92	1036,8888	530,3037	95,53
Номер тона колебаний	$D_3 = A_{33}\,A_{44} - A_{34}\,A_{43} = 0$			$D_4 = A_{12}\,A_{34} - A_{14}\,A_{32} = 0$		
	приближенные	уточненные	погрешность, %	приближенные	уточненные	погрешность, %
1	3,5161	3,5143	0,34	9,8699	9,7081	1,67
2	22,0348	21,3926	3,00	39,4786	37,0953	6,42
3	61,8633	56,8754	8,77	88,8265	78,1553	13,65
4	120,9023	103,9317	16,33	157,9138	128,6654	22,73
5	199,8596	158,8897	25,79	246,7403	185,3173	33,14
6	298,5557	218,8186	36,44	355,3060	245,8317	44,53
7	416,9909	281,7821	47,98	483,6108	308,7225	56,65
8	555,1656	346,5089	60,22	631,6547	373,0370	69,33
9	713,0787	412,1571	73,01	799,4384	438,1725	82,45
10	890,7310	478,1448	86,29	986,9472	503,7375	95,92

Из таблицы 4.3 следует, что погрешность приближенного решения быстро нарастает и у 10-й частоты при отношении l/h =10 достигает почти 100 %. О точности частот уравнения (4.38) можно судить по тому факту, что первые 5 частот таблицы 4.3 при шарнирном опирании совпадают с 5-ю частотами работы [333].

4.5.5 Устойчивость систем от следящих консервативных сил

Рассмотрим особенности алгоритма решения задач устойчивости упругих систем при действии следящих консервативных сил. К таким задачам может быть применен статический метод, что упрощает методику их решения.

Пример 4.7. Пусть в раме (рисунок 4.11) стержень 0-1 испытывает воздействие следящей силы с линией действия, проходящей через фиксированную точку, стержень 2-3 нагружен «мертвой» силой, а стержень 1-2 будет испытывать изгиб после потери устойчивости.

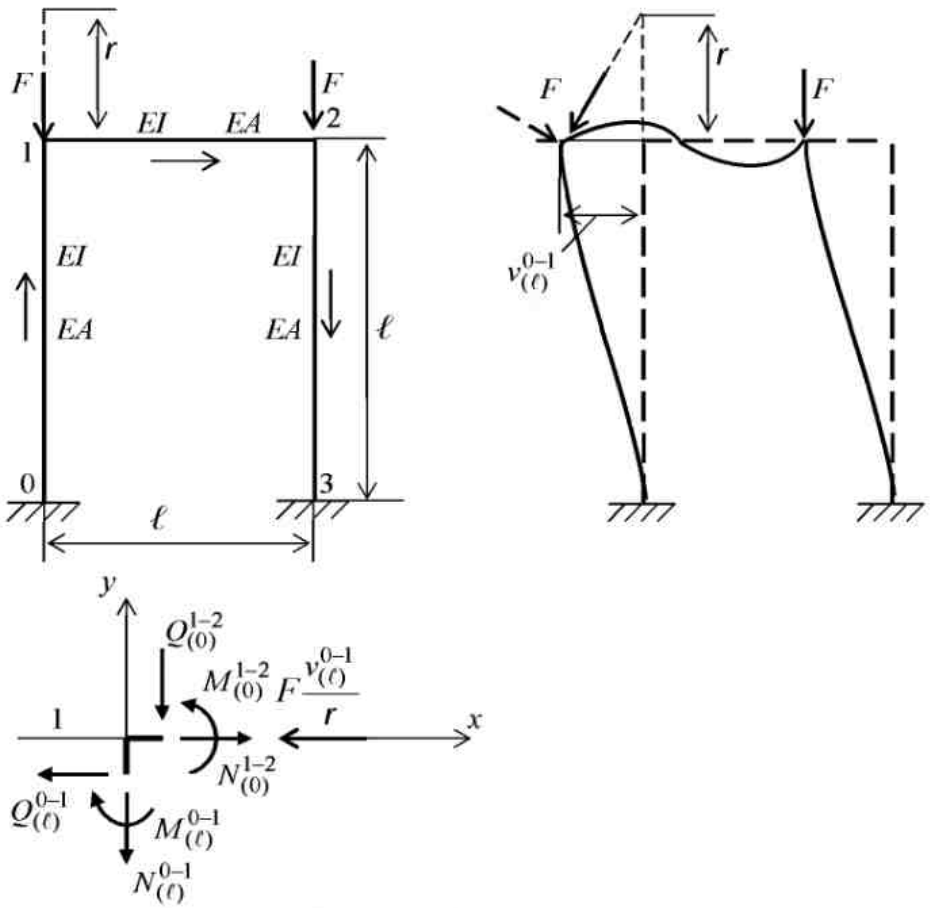


Рисунок 4.11

При бифуркации стержневой системы возникает горизонтальная проекция следящей силы и уравнение равновесия узла 1 будет включать эту проекцию $Q_{(\ell)}^{0-1}=N_{(\ell)}^{0-1}\pm F\,v_{(\ell)}^{0-1}/r$, где знак минус, когда проекция уменьшает устойчивость системы (направлена в сторону смещения рамы), и знак плюс, когда она направлена в противоположную сторону.

Формируем матрицы $\boldsymbol{X}_*$, $\boldsymbol{Y}$.

$\boldsymbol{X}_*=$

1	$EIv^{0-1}(0)=0\,;M^{2-3}(\ell)$
2	$EI\varphi^{0-1}(0)=0\,;\ Q^{2-3}(\ell)$
3	$M^{0-1}(0)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$N^{0-1}(0)$
6	$EIv^{1-2}(0)=0;\ N^{4-2}(\ell)$
7	$EI\varphi^{1-2}(0)$
8	$M^{1-2}(0)$
9	$Q^{1-2}(0)$
10	$EAu^{1-2}(0)=12EIu^{1-2}(0)$
11	$N^{1-2}(0)$
12	$EIv^{2-3}(0)$
13	$EI\varphi^{2-3}(0)$
14	$M^{2-3}(0)$
15	$Q^{2-3}(0)$
16	$N^{2-3}(0)$

; $\boldsymbol{Y}=$

1	$EIv^{0-1}(\ell)=EIu^{1-2}(0)$
2	$EI\varphi^{0-1}(\ell)=EI\varphi^{1-2}(0)$
3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(0)$
4	$Q^{0-1}(\ell)=N^{1-2}_{(0)}\pm Fv^{0-1}_{(\ell)}/r=N^{1-2}(0)\pm Fu^{1-2}_{(0)}v^{0-1}_{(\ell)}/r$
5	$N^{0-1}(\ell)=-\,Q^{1-2}(0)$
6	$EIv^{1-2}(\ell)=0$
7	$EI\varphi^{1-2}(\ell)=EI\varphi^{2-3}(0)$
8	$M^{1-2}(\ell)=M^{2-3}(0)$
9	$Q^{1-2}(\ell)=N^{2-3}(0)$
10	$EAu^{1-2}(0)=EAv^{2-3}(0)=12EIv^{2-3}(0)$
11	$N^{1-2}(\ell)=-\,Q^{2-3}(0)$
12	$EIv^{2-3}(\ell)=0$
13	$EI\varphi^{2-3}(\ell)=0$
14	$M^{2-3}(\ell)$
15	$Q^{2-3}(\ell)$
16	$N^{2-3}(\ell)$

Для стержней 0-1 и 2-3 использованы блоки продольно-поперечного изгиба (4.4), для стержня 1-2 - изгиба и растяжения. Матрица $\boldsymbol{A}_*$ рамы примет вид, приведенный далее.

Учет следящей силы осуществляется компенсирующим элементом A(4,10) = A = $\mp F/12EIr$. При вычислении определителя $|\boldsymbol{A}_*|$ принято $EA/EI = 12$; $EI=\ell=r=1$. Фиксируя изменение его знака, получим значения критических сил. Первые 4 значения их следующие:

а) следящая сила уменьшает устойчивость системы

$F_1= 2{,}425\ EI/\ell^2$; $F_2= 24{,}825\ EI/\ell^2$; $F_3= 30{,}475\ EI/\ell^2$; $F_4= 51{,}775\ EI/\ell^2$;

в) следящая сила увеличивает устойчивость системы

$F_1= 25{,}6\ EI/\ell^2$; $F_2= 30{,}6\ EI/\ell^2$; $F_3= 64{,}6\ EI/\ell^2$; $F_4= 70{,}2\ EI/\ell^2$;

с) кососимметричная потеря устойчивости (две силы F «мертвые»)

$F_1= 5{,}05\ EI/\ell^2$; $F_2= 14{,}95\ EI/\ell^2$; $F_3= 29{,}75\ EI/\ell^2$; $F_4= 49{,}45\ EI/\ell^2$.

Из этих результатов следует, что сжимающая сила с линией действия, проходящей через фиксированную точку, весьма опасна. Она может существенно уменьшить первую критическую силу конструкции. Данный вывод относится и к различным грузоподъемным машинам и устройствам, где используется схема силы по рисунку 4.7,с. Добавим, что, в отличие от всех рассмотренных выше задач устойчивости, учет следящей силы F приводит к формированию матрицы $\boldsymbol{A}_*$ с переменной топологией (элемент A).

$\boldsymbol{A}_*=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$						-1/12							3
2			$-A_{12}$	$-A_{13}$			-1										7
3			A_{21}	A_{12}				-1									8
4				1						A	-1						4
5					1				1								5
6							1	-1/2	-1/6								9
7							1	-1	-1/2				-1				13
8								1	1					-1			14
9									1							-1	16
10										1	1	-12					10
11											1				1		11
12												1	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$		12
13													A_{21}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		15
14	-1												$-A_{31}$	A_{21}	A_{12}		1
15		-1													1		2
16						-1										1	6

4.5.6 Устойчивость систем от неконсервативных сил

Рассмотрим динамические модели устойчивости упругих систем. Решение задачи Коши поперечных колебаний прямолинейного стержня с учетом продольной силы F_x представлено уравнением (4.12).

Классическим примером является консольный стержень с равномерно распределенной массой m и следящей силой на конце (рисунок 4.7, а) – задача М.Бекка [236]. Частотное уравнение МГЭ этой задачи примет вид

	1	2	3	4			
1	-1		$-A_{13}$	$-A_{14}$	$EIv(0)=0$	$\leftarrow$	$EIv(\ell)$
2		-1	$-A_{23}$	$-A_{13}$	$EI\varphi(0)=0$	$\leftarrow$	$EI\varphi(\ell)$
3			A_{33}	A_{23}	$M(0)$	$-$	$M(0)=0$
4			A_{43}	A_{33}	$Q(0)$		$M(0)=0$

$= 0 \rightarrow$

$$\left|\boldsymbol{A}_*(F_x,\omega)\right| = A_{33}^2 - A_{23}\cdot A_{43} = 0\,. \qquad (4.44)$$

Уравнение (4.44) после небольших преобразований совпадает с частотным уравнением М.Бекка [236, с.122]. Это свидетельствует о том, что М.Бекк при решении своей задачи непроизвольно использовал общий алгоритм МГЭ для отдельного стержня. Очевидно, что корни уравнения (4.44) и частотного уравнения М.Бекка одинаковы и 2 соседние частоты сольются в одной и той же точке. М.Бекк определил только первую критическую силу F_1=20,05EI/ℓ^2, которая позже подтверждена экспериментально [193]. Если рассмотреть с помощью уравнения (4.44) изменение большего числа частот собственных колебаний консольного стержня, то получается весьма интересная картина.

Графики $\omega_i = f(F)$ для первых 6 частот показаны на рисунке 4.12.

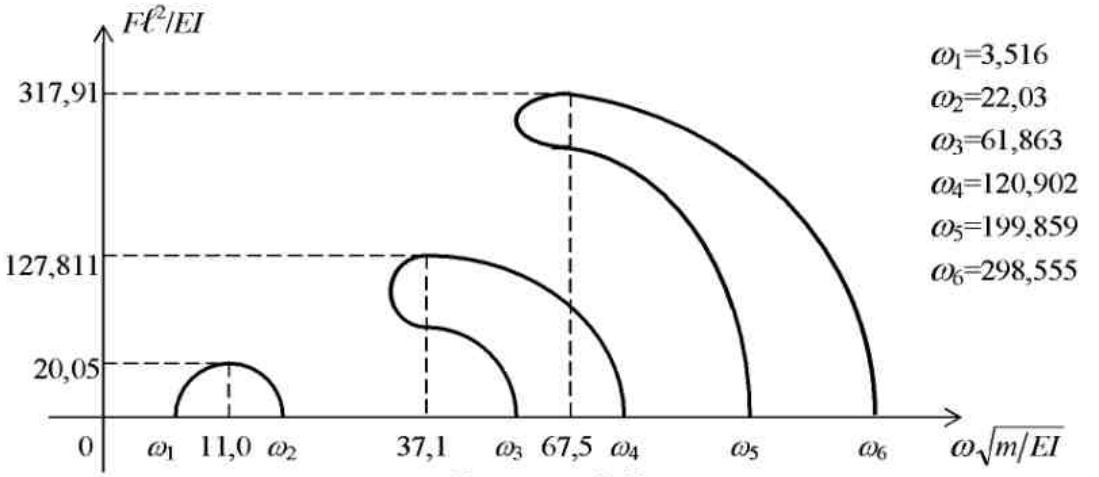


Рисунок 4.12

Первая форма равновесия (прямолинейная) устойчива до $F_1=20{,}05EI/\ell^2$. При F_1 прямолинейная форма теряет устойчивость и малые возмущения приводят к флаттеру. Если ничего не предпринимать, то стержень быстро разрушится. При дальнейшем увеличении сжимающей силы первая форма равновесия переходит во вторую форму (криволинейную), которая устойчива до $F_1=127{,}811EI/\ell^2$. Затем равновесие стержня переходит в третью форму, устойчивую до $F_1=317{,}91EI/\ell^2$ и т.д., как это имеет место при бифуркации с «мертвыми» силами. Такое поведение консольного стержня позволяет рекомендовать метод борьбы с флаттером. Флаттер прекратится, если перевести стержень во вторую (криволинейную) форму равновесия.

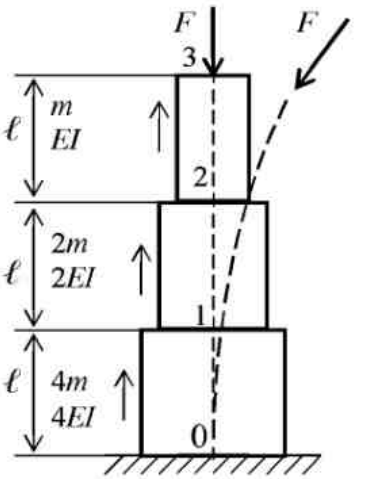
Графики изменения частот ω от сжимающих сил F позволяют наглядно проследить поведение конструкции. Если частоты стремятся слиться в одной точке, то система теряет устойчивость в форме флаттера или дивергенции, а сама задача устойчивости будет относится к неконсервативным задачам. Если частоты монотонно стремятся к нулю, то система будет терять устойчивость по Эйлеру (появятся изгибные формы), а значения F, при которых $\omega = 0$, будут критическими.

Представим решения более сложных неконсервативных задач устойчивости различных упругих систем.

Пример 4.8. Определить критические силы консольного стержня с кусочно-постоянной жесткостью, нагруженного следящей силой (рисунок 4.13).

Данная схема может служить моделью буровой вышки, когда произошла авария, и поток жидкости или газа вырвался из-под контроля.

Матрицы $\boldsymbol{X}_*$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{A}_*$ показаны ниже. С помощью компьютера установлено, что поведение частот стержня аналогично поведению частот по рисунку 4.12. При этом $F_1=4{,}55EI/\ell^2$ при $\omega_1=\omega_2=1{,}75\sqrt{EI/m}$; $F_2=22{,}95EI/\ell^2$ при $\omega_3=\omega_4=4{,}5\sqrt{EI/m}$. При «мертвой» силе $F_1=0{,}7085EI/\ell^2$; $F_2=4{,}545EI/\ell^2$, т.е. неконсервативные критические силы примерно в 6 раз больше эйлеровых критических сил.



ω_1=0,6615$\sqrt{EI/m}$
ω_2=2,75
ω_3=6,75
ω_4=13,65

Рисунок 4.13

X_*=

1	$4\,EIv^{0-1}(0)=0;\ \ EIv^{2-3}(\ell)$
2	$4\,EI\varphi^{0-1}(0)=0;\ \ EI\varphi^{2-3}(\ell)$
3	$M^{0-1}(0)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$2\,EIv^{1-2}(0)$
6	$2\,EI\varphi^{1-2}(0)$
7	$M^{1-2}(0)$
8	$Q^{1-2}(0)$
9	$EIv^{2-3}(0)$
10	$EI\varphi^{2-3}(0)$
11	$M^{2-3}(0)$
12	$Q^{2-3}(0)$

;

Y=

1	$4EIv^{0-1}(\ell)=4EIv^{1-2}(0)$
2	$4EI\varphi^{0-1}(\ell)=4EI\varphi^{1-2}(0)$
3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(0)$
4	$Q^{0-1}(\ell)=Q^{1-2}(0)$
5	$2EIv^{1-2}(\ell)=2EIv^{2-3}(0)$
6	$2EI\varphi^{1-2}(\ell)=2EI\varphi^{2-3}(0)$
7	$M^{1-2}(\ell)=M^{2-3}(0)$
8	$Q^{1-2}(\ell)=Q^{2-3}(0)$
9	$EIv^{2-3}(\ell)$
10	$EI\varphi^{2-3}(\ell)$
11	$M^{2-3}(\ell)=0$
12	$Q^{2-3}(\ell)=0$

A_*=

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$	-2								5
2			$-A_{23}$	$-A_{13}$		-2							6
3			A_{33}	A_{23}			-1						3
4			A_{43}	A_{33}				-1					4
5					A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	-2				9
6					A_{21}	A_{11}	$-A_{23}$	$-A_{13}$		-2			10
7					$-A_{31}$	$-A_{21}$	A_{33}	A_{23}			-1		7
8					$-A_{41}$	$-A_{31}$	A_{43}	A_{33}				-1	8
9	-1								A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	1
10		-1							A_{21}	A_{11}	$-A_{23}$	$-A_{13}$	2
11									$-A_{31}$	$-A_{21}$	A_{33}	A_{23}	11
12									$-A_{41}$	$-A_{31}$	A_{43}	A_{33}	12

Пример 4.9. Определить неконсервативные критические силы неразрезного стержня (рисунок 4.14) при действии следящей силы F.

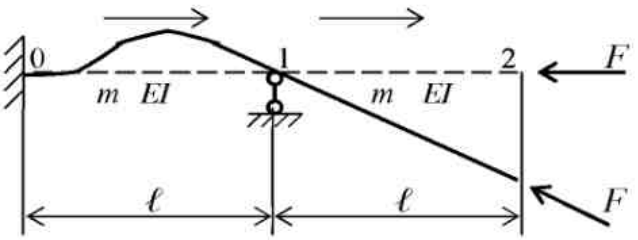


Рисунок 4.14

Топологическую матрицу $\boldsymbol{C}$ формируем по матрицам $\boldsymbol{X_*}$, $\boldsymbol{Y}$, а динамическая матрица устойчивости имеет 8-ой порядок. Учет следящей силы, как и у консольного стержня, производится с помощью граничных условий $Q^{1-2}(\ell)=$ $=M^{1-2}(\ell)=0$.

$\boldsymbol{X_*}=$

1	$EIv^{0-1}(0)=0;\ Q^{0-1}(\ell)$
2	$EI\varphi^{0-1}(0)=0;\ EIv^{1-2}(\ell)$
3	$M^{0-1}(0)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$EIv^{1-2}(0)=0;\ EI\varphi^{1-2}(\ell)$
6	$EI\varphi^{1-2}(0)$
7	$M^{1-2}(0)$
8	$Q^{1-2}(0)$

;

$\boldsymbol{Y}=$

1	$EIv^{0-1}(\ell)=0$
2	$EI\varphi^{0-1}(\ell)=EI\varphi^{1-2}(0)$
3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(0)$
4	$Q^{0-1}(\ell)$
5	$EIv^{1-2}(\ell)$
6	$EI\varphi^{1-2}(\ell)$
7	$M^{1-2}(\ell)=0$
8	$Q^{1-2}(\ell)=0$

$\boldsymbol{A_*}=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$					3
2			$-A_{23}$	$-A_{13}$		-1			4
3			A_{33}	A_{23}			-1		7
4	-1		A_{43}	A_{33}					1
5		-1				A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	2
6					-1	A_{11}	$-A_{23}$	$-A_{13}$	5
7						$-A_{21}$	A_{33}	A_{23}	6
8						$-A_{31}$	A_{43}	A_{33}	8

Изменения первых 7 частот неразрезного стержня показаны на рисунке 4.15. Видно, что поведение частот уже простейшей системы качественно отлично от поведения частот консольного стержня. Первая частота $\omega_1=2{,}465\sqrt{EI/m}$ стремится к нулю при $F_{Э1}=20{,}1905EI/\ell^2$, где $F_{Э1}$ - эйлерова критическая сила участка стержня 0-1. Это означает, что неразрезной стержень при росте следящей силы вначале теряет устойчивость с появлением изгибных форм. К комплексному значению собственной частоты стремятся $\omega_2=15{,}415\sqrt{EI/m}$ и $\omega_3=22{,}205\sqrt{EI/m}$ (у отдельных комплексных частот действительные части одинаковы). Первая критическая неконсервативная сила $F_1=24{,}3557EI/\ell^2$ приводит систему к флаттеру. Четвертая $\omega_4=49{,}95\sqrt{EI/m}$ и пятая $\omega_5=61{,}65\sqrt{EI/m}$ частоты стремятся к нулю

(эйлеров тип потери устойчивости), а ко второй комплексной частоте стремятся ω_6=104,25$\sqrt{EI/m}$ и ω_7=121,95$\sqrt{EI/m}$. Здесь F_2= 133,354EI/ℓ^2.

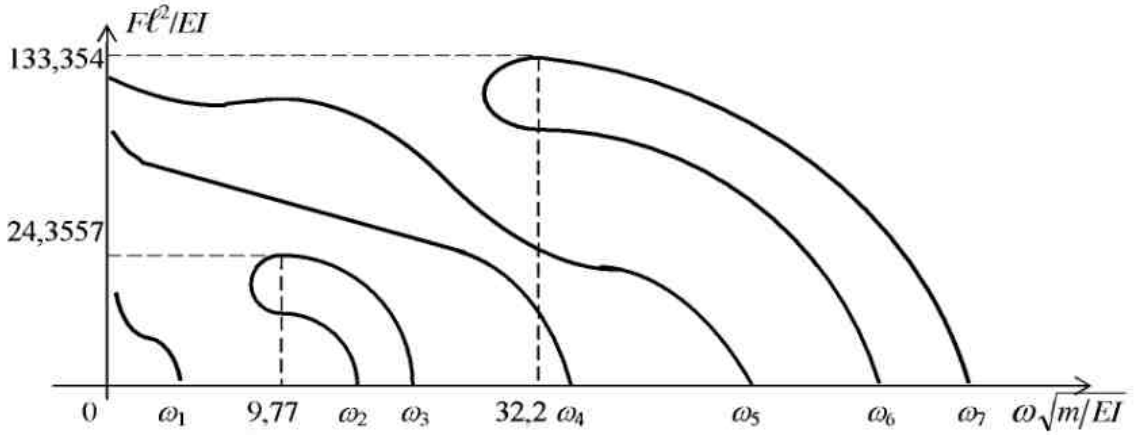


Рисунок 4.15

Данное исследование поведения системы показывает, что действие неконсервативных следящих сил приводит к взаимному наложению спектров эйлеровых и неконсервативных критических сил, т.е. поведение упругой системы существенно сложнее случаев, когда действуют консервативные силы. Более того, действие неконсервативных сил может приводить к потере устойчивости при значительно меньших критических силах, равных или меньших эйлеровым критическим силам.

Отметим еще одну особенность поведения неразрезного стержня. В данной расчетной схеме стержень 1 – 2 является моделью консольного стержня с нежесткой заделкой $\left(\varphi_{(0)}^{1-2} \neq 0\right)$. Утакого стержня флаттер наступает при большей критической силе, чем у консольного стержня с жесткой заделкой (F_{1*}= 24,3557EI/ℓ^2 и F_1= 20,05EI/ℓ^2. В условиях неучета сдвига и инерции вращения эти силы несколько меньше действительных критических сил). При «мертвой» силе картина противоположная (F_{1*}= 1,55EI/ℓ^2 и F_1= 2,467EI/ℓ^2).

Пример 4.10. Исследовать поведение частот собственных колебаний свободной рамы (рисунок 4.16), нагруженной следящей силой в узле 1.

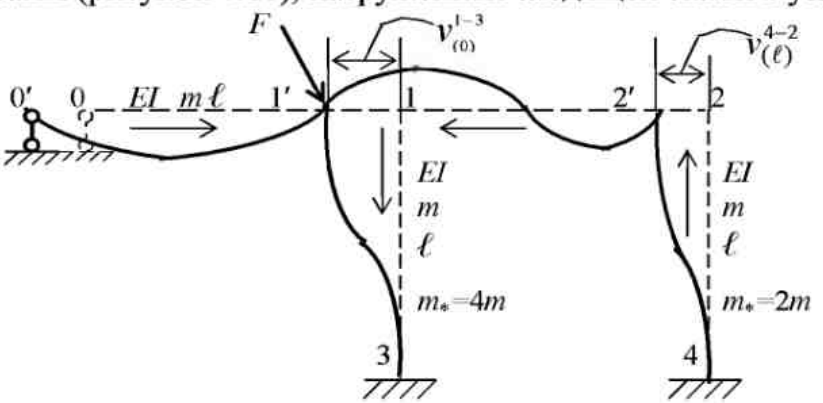


Рисунок 4.16

1 Разбиваем раму на 4 стержня, нумеруем узлы и указываем стрелками начало и конец каждого стержня.

2 Формируем динамическую матрицу устойчивости $\boldsymbol{A}_*$ рамы. Матрицы $\boldsymbol{X}_*$, $\boldsymbol{Y}$ с уравнениями равновесия и совместности перемещений узлов 1,2 представлены ниже. Используем блоки уравнений (4.12), (3.10) с добавлением нормальных сил. В данной раме имеются линейно подвижные стержни 0-1 и 1-2. При колебаниях рамы массы этих стержней вызывают силы инерции. Учет таких сил инерции выполняем по формуле (3.21). К началу стержня 1-3 прикладываем сосредоточенную массу $1{,}5m\ell$, а к концу стержня 4-2 - $0{,}5m\ell$. Тогда по формуле (3.21) при $v(x)=\sin(\pi x/2\ell)$ будем иметь $m_*^{1-3}=4m$ и $m_*^{4-2}=2m$. Уравнения, учитывающие эффект слежения сжимающей силы, представлены в 3 и 5 строках матрицы $\boldsymbol{Y}$ (в узле 1 будет отсутствовать горизонтальная проекция следящей силы F). Эти уравнения порождают компенсирующие элементы $A(3,18)$= -1; $A(3,1)$=1; $A(5,19)$=1; $A(5,5)$= -1, которыми и обеспечивается учет следящей силы. Координаты таких элементов не являются строго определенными. При другом ориентированном графе расчетной схемы и другом порядке начальных блоков матрицы $\boldsymbol{X}_*$ положение компенсирующих элементов в матрице $\boldsymbol{A}_*$ изменится.

$\boldsymbol{X}_*=$

1	$EIv^{0-1}(0)=0;\ M^{2-1}(\ell)$
2	$EI\varphi^{0-1}(0)$
3	$M^{0-1}(0);\ Q^{2-1}(\ell)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$N^{0-1}(0)=0;\ N^{2-1}(\ell)$
6	$EIv^{1-2}(0)=0;\ M^{1-3}(\ell)$
7	$EI\varphi^{2-1}(0)$
8	$M^{2-1}(0)$
9	$Q^{2-1}(0)$
10	$N^{2-1}(0)$
11	$EIv^{4-2}(0)=0;\ Q^{1-3}(\ell)$
12	$EI\varphi^{4-2}(0)=0;\ N^{1-3}(\ell)$
13	$M^{4-2}(0)$
14	$Q^{4-2}(0)$
15	$N^{4-2}(0)$
16	$EIv^{1-3}(0)$
17	$EI\varphi^{1-3}(0)$
18	$M^{1-3}(0)$
19	$Q^{1-3}(0)$
20	$N^{1-3}(0)$

; $\boldsymbol{Y}=$

1	$EIv^{0-1}(\ell)=0$
2	$EI\varphi^{0-1}(\ell)=EI\varphi^{1-3}(0)$
3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-3}(0)-M^{2-1}(\ell)$
4	$Q^{0-1}(\ell)=N^{1-3}(0)+Q^{2-1}(\ell)$
5	$N^{0-1}(\ell)=-\,Q^{1-3}(0)+N^{2-1}(\ell)$
6	$EIv^{2-1}(\ell)=0$
7	$EI\varphi^{2-1}(\ell)=EI\varphi^{1-3}(0)$
8	$M^{2-1}(\ell)$
9	$Q^{2-1}(\ell)$
10	$N^{2-1}(\ell)$
11	$EIv^{4-3}(\ell)=-\,EIv^{1-3}(0)$
12	$EI\varphi^{4-2}(\ell)=EI\varphi^{2-1}(0)$
13	$M^{4-2}(\ell)=M^{2-1}(0)$
14	$Q^{4-2}(\ell)=-\,N^{2-1}(0)$
15	$N^{4-2}(\ell)=Q^{2-1}(0)$
16	$EIv^{1-3}(\ell)=0$
17	$EI\varphi^{1-3}(\ell)=0$
18	$M^{1-3}(\ell)$
19	$Q^{1-3}(\ell)$
20	$N^{1-3}(\ell)$

$A_* =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1		A_{12}		$-A_{14}$																	2
2		A_{11}		$-A_{13}$													-1				4
3	1	$-\lambda^4 A_{14}$		A_{12}														-1			18
4		$-\lambda^4 A_{13}$	-1	A_{11}																-1	20
5					-1														1		5
6							A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$												9
7							A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$								-1				7
8	-1						$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}												1
9			-1				$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}												3
10					-1					1											10
11													$-A_{13}$	$-A_{14}$		1					16
12							-1						$-A_{12}$	$-A_{13}$							14
13								-1					A_{11}	A_{12}							8
14										1			$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}							13
15								-1							1						15
16																A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$		19
17																A_{21}	A_{11}	$-A_{23}$	$-A_{13}$		17
18						-1										$-A_{31}$	$-A_{21}$	A_{33}	A_{23}		6
19											-1					$-A_{41}$	$-A_{31}$	A_{43}	A_{33}		11
20												1								1	12

В целом все компенсирующие элементы обеспечивают связь кинематических и статических граничных параметров стержней рамы при действии следящей силы. В расчетах изменения частот принято $EI=m=\ell=1$, так что аргументы фундаментальных функций запишутся так

стержень 1-3

$$\alpha=\sqrt{-F/2+\sqrt{F^2/4+4\omega^2}}\;; \qquad \beta=\sqrt{F/2+\sqrt{F^2/4+4\omega^2}}\;;$$

стержни 0-1, 2-1, 4-2

$$\lambda^{0-1}=\lambda^{2-1}=\sqrt{\omega}\;; \quad \lambda^{4-2}=\sqrt[4]{2\omega^2}\;.$$

Поведение частот рамы изображено на рисунке 4.17. Критическая сила $F_1=121{,}78EI/\ell^2$ в 8 раз больше критической силы при «мертвой» силе ($F_{Э1}=15{,}1EI/\ell^2$, см.п.4.4; $F_1/F_{Э1}=8{,}065$).

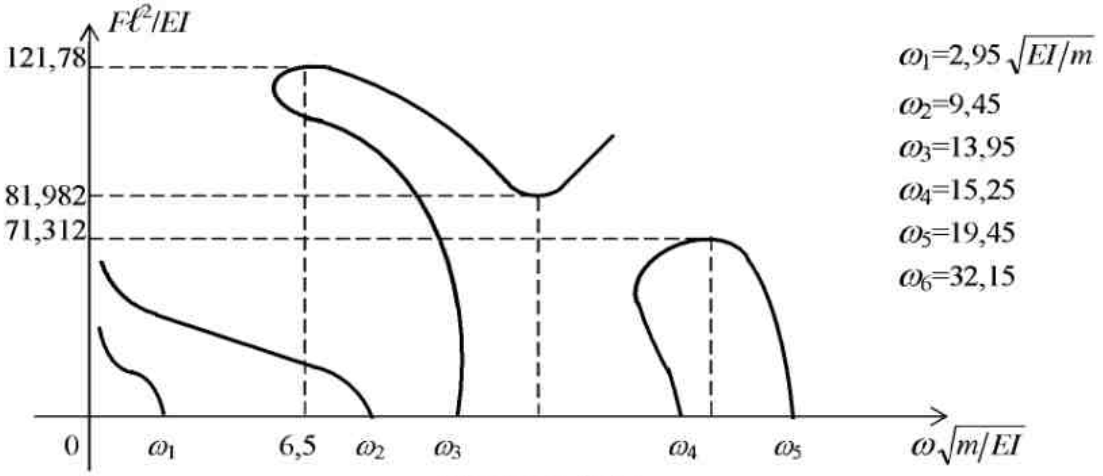


Рисунок 4.17

В данной раме стержень 1-3 отличается от консольного стержня присоединенными массами и упругими связями других стержней. Поэтому отношение $F_1/F_{Э1}$ у рамы и консольного стержня должно быть одинаковым. Для консольного стержня с распределенной массой $F_1/F_{Э1}=20{,}05/2{,}467=8{,}127$, что практически совпадает с аналогичным отношением для рамы. Это свидетельствует как о достоверности результатов МГЭ, так и о точности определения эквивалентных масс по формуле (3.21).

Из рисунка 4.17 видно, что при $F\in[71{,}312;\ 81{,}982]EI/\ell^2$ возникает скрытая потеря устойчивости. Стоит только системе при данной силе каким-то образом проскочить 3-ю форму колебаний, как она сорвется во флаттер (в этом интервале имеются точки слияния ω_4 и ω_5), т.е. в упругой системе существуют условия внезапного возникновения флаттера.

В заключение данного параграфа представим решения неконсервативных задач М.Бекка и В.И.Реута для консольного стержня на упругом основании. Применяя граничные условия (4.18), (4.19) к уравнению (4.24), получим частотные уравнения задачи М.Бекка

$$A_{33}A_{44}-A_{23}A_{43}+(2\iota/EI)\left(-A_{23}^2+A_{13}A_{33}\right)=0\;;$$

$$A_{33}A_{44}-A_{23}A_{43}=0\;.$$

Поиск критических сил приводит к следующим результатам:

граничные условия (4.18)

$$F_1 = 20{,}16\, EI/\ell^2 \quad \text{при} \quad \omega = 7{,}83\sqrt{EI/m}\,;$$

граничные условия (4.19)

$$F_1 = 20{,}25\, EI/\ell^2 \quad \text{при} \quad \omega = 7{,}85\sqrt{EI/m}\,.$$

Граничные условия задачи В.И.Реута для стержня на упругом основании

$$M(\ell) = F_x v(\ell)\,; \qquad Q_*(\ell) = (F_x + 2t)\varphi(\ell)$$

приводят к следующему уравнению для критических сил

$$A_{33}A_{44} - A_{23}A_{43} + (F_x + 2t)\left(-A_{23}^2 + A_{13}A_{33}\right)/EI - (F_x + 2t)\left(-A_{13}A_{44} + A_{14}A_{43}\right)/EI + \\ + \left(A_{13}^2 - A_{14}A_{23}\right)\left[(F_x + 2t)/EI\right]^2 = 0.$$

При единичных исходных данных ($b=h=\gamma=H=EI=E_0=\ell=m=m_0=1$; $\mu=0{,}3$; $\mu_0=0{,}3$) коэффициенты r^2, s^4, t примут значения $r^2 = 0{,}5F_x - 0{,}0566$; $s^4 = 1{,}1193 - 2\omega^2$; $t = 0{,}0566$.

Критическая сила задачи В.И.Реута

$$F_1 = 20{,}25\, EI/\ell^2 \quad \text{при} \quad \omega = 7{,}85\sqrt{EI/m}\,.$$

В этих результатах незначительное влияние упругого основания объясняется малым значением коэффициента t при единичных исходных данных.

4.5.7 Неконсервативные комбинированные задачи устойчивости

Под комбинированными будем понимать задачи устойчивости, когда в одной конструкции имеется сочетание разных вариантов поведения сжимающих сил. В качестве примера рассмотрим определение критических сил свободной рамы при сочетании следящей силы с разными вариантами поведения сжимающих сил.

Пример 4.11. Пусть в узле 1 рамы (рисунок 4.18) приложена следящая сила, а в узле 2 – сила с фиксированной линией действия. В данном случае это будет комбинация неконсервативных задач М.Бекка и В.И.Реута.

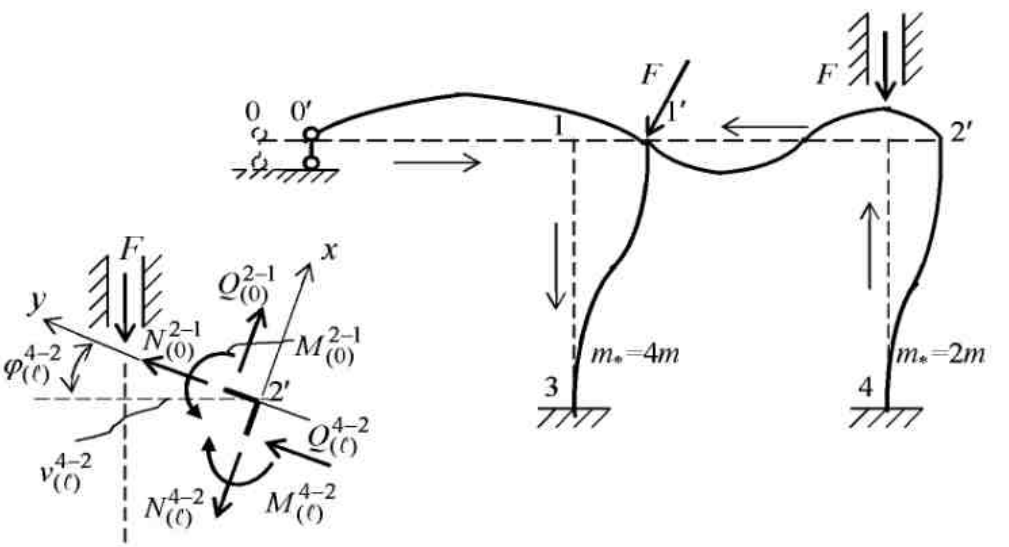


Рисунок 4.18

По сравнению с примером 4.10 изменятся уравнения равновесия узла 2. Они примут вид

$$M_{(\ell)}^{4-2} = M_{(0)}^{2-1} + F\left[v_{(\ell)}^{4-2} = -v_{(0)}^{1-3}\right]; \quad Q_{(\ell)}^{4-2} = -N_{(0)}^{2-1} + F\left[\varphi_{(\ell)}^{4-2} = \varphi_{(0)}^{1-3}\right]; \quad N_{(\ell)}^{4-2} = Q_{(0)}^{2-1}.$$

Как результат, в динамической матрице устойчивости $\boldsymbol{A}_*$ примера 4.10 добавятся 2 компенсирующих элемента $A(13,16) = F/EI$ и $A(14,7) = -F/EI$, т.е. возникает переменная топология, как в примере 4.7, но за счет 2-х элементов. Изменяя пропорционально параметр F стержней 1-3 и 4-2 (в матрице $\boldsymbol{A}_*$ для стержня 4-2 необходимо использовать блок фундаментальных функций уравнения (4.12)), фиксируем изменения частот рамы. Графики $\omega_i = f(F)$ представлены на рисунке 4.19.

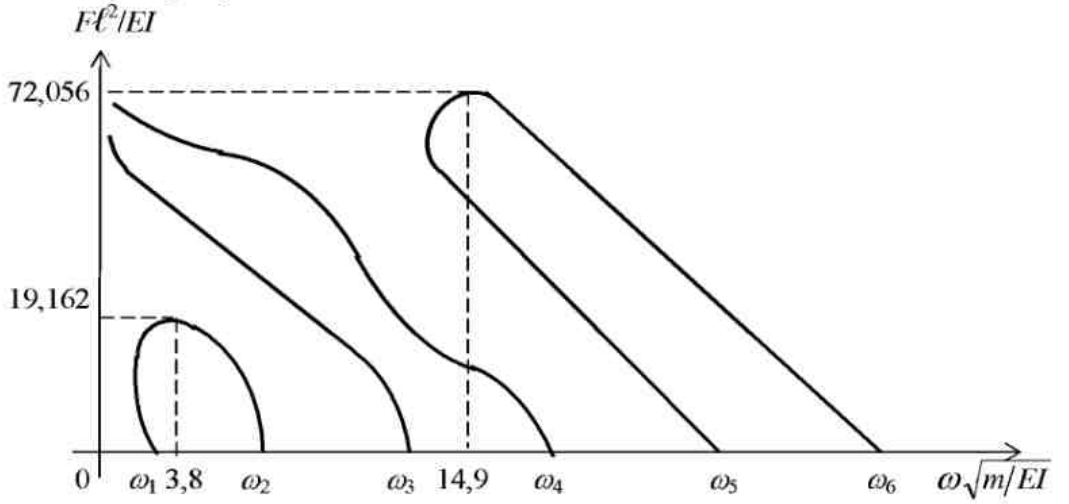


Рисунок 4.19

В данном случае рама вначале попадает во флаттер и $F_1 = 19{,}162EI/\ell^2$ при $\omega = 3{,}8\sqrt{EI/m}$, затем имеет место эйлеров тип потери устойчивости, далее второй раз наступает флаттер при $F_2 = 72{,}056EI/\ell^2$ и т.д. Видно, что две неконсервативные силы существенно понижают первую критическую силу ($F_1 = 121{,}78EI/\ell^2$) примера 4.10, а $F_1 = 19{,}162EI/\ell^2$ всего в 2.5 раза больше первой критической силы при мертвых силах ($F_{Э1} = 7{,}66EI/\ell^2$; $F_{Э2} = 27{,}35EI/\ell^2$).

Если в узле 2 рамы приложить силу с линией действия, проходящей через фиксированную точку, то его уравнения равновесия предстанут так

$$M_{(\ell)}^{4-2} = M_{(0)}^{2-1}; \quad Q_{(\ell)}^{4-2} = -N_{(0)}^{2-1} + F\left[v_{(\ell)}^{4-2}/r + \varphi_{(\ell)}^{4-2}\right]; \quad N_{(\ell)}^{4-2} = Q_{(0)}^{2-1}.$$

Тогда компенсирующие элементы $A(13,16) = 0$; $A(14,16) = F/rEI$. Остальные ненулевые элементы матрицы $\boldsymbol{A}_*$ не изменятся. Исследование поведения частот показало, что все они стремятся к нулю, каждая отдельно, т.е. имеет место только эйлеров тип потери устойчивости.

Прикладывая в узле 2 «мертвую» силу F, получим уравнения его равновесия

$$M_{(\ell)}^{4-2} = M_{(0)}^{2-1}; \quad Q_{(\ell)}^{4-2} = -N_{(0)}^{2-1} + F\varphi_{(\ell)}^{4-2}; \quad N_{(\ell)}^{4-2} = Q_{(0)}^{2-1}.$$

По сравнению с предыдущим случаем $A(14,16) = 0$. В данном случае частоты собственных колебаний рамы (каждая в отдельности) стремятся к нулю. Следовательно, сочетание в упругой системе неконсервативных и

консервативных сил, когда параметр F растет пропорционально, не приводит к флаттеру или дивергенции.

МГЭ могут решаться и более сложные задачи неконсервативной устойчивости, описываемые дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Такие задачи встречаются в авиа- и ракетостроении, когда переменными являются жесткость, масса стержня или продольная сжимающая сила. В этом случае стержень дискретизируется на отдельные части, в пределах которых считается верным дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, т.е. система с распределенными параметрами заменяется множеством систем с постоянными параметрами. Далее проводится анализ поведения частот собственных колебаний дискретизированной системы.

4.5.7.1 Применение модели С.П.Тимошенко

Более точные решения дифференциальных уравнений открывают новые возможности при решении различных задач, в том числе и задач устойчивости. Применительно к неконсервативным задачам устойчивости прямолинейного стержня можно отметить, что задачи М.Бекка и В.И.Реута достаточно хорошо исследованы только на основе приближенных решений (4.12). Стремление уточнить существующие результаты привело к появлению работ [353-356], где применялась модель С.П.Тимошенко. В этих работах исследовалась только задача М.Бекка, причем в неполной мере. В этой связи вызывает научный и практический интерес более полное и подробное решение неконсервативных задач, которые рассмотрим в комбинированной форме (рисунок 4.10).

Пример 4.12.

1 Одновременное действие сил F_1, F_2. Линеаризованные граничные условия этой задачи весьма просты

$$EIv(0) = EI\varphi(0) = 0; \qquad M(\ell) = F_2 v(\ell); \qquad Q(\ell) = F_2 \varphi(\ell).$$

При $x = \ell$ и данных граничных условиях уравнение (4.38) приводится по схеме (1.38) к виду ($\boldsymbol{B} = 0$).

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1 & -1 + a_4 A_{13}/EI & b_4 A_{14}/EI & -A_{13} & -A_{14} & EIv(\ell) \\ 2 & a_4 A_{23}/EI & -1 + b_4 A_{24}/EI & -A_{23} & -A_{24} & EI\varphi(\ell) \\ 3 & \left[-F_2 + a_4(A_{33} - 1)\right]/EI & b_4 A_{34}/EI & A_{33} & A_{34} & M(0) \\ 4 & a_4 A_{43}/EI & \left[-F_2 + b_4(A_{44} - 1)\right]/EI & A_{43} & A_{44} & Q(0) \end{array} = 0 \qquad (4.45)$$

При F_2 =0 уравнение $\left|\boldsymbol{A}_*(\omega, F_x)\right| = 0$ представляет задачу М.Бекка, при F_1= 0 – задачу В.И.Реута на основе модели С.П.Тимошенко, т.е. дополнительно учитываются сдвиг, инерция вращения и деформированное состояние стержня. Определяя методом последовательного перебора корни уравнения (3.2) и координаты точек слияния двух первых частот, можно найти критические силы различных неконсервативных задач устойчивости. Полученные результаты сведены в таблицу 4.4.

Таблица 4.4

Задачи устойчивости	Координаты точек слияния первых двух частот	Отношение высоты к ширине сечения h/b; $A = b\,h = 0{,}01$ м^2					
		1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
М.Бекка $F_1 = F$; $F_2 = 0$	$\dfrac{F_g \ell^2/EI}{\omega \ell^2 \sqrt{m/EI}}$	$\dfrac{20{,}57}{11{,}35}$	$\dfrac{20{,}33}{11{,}05}$	$\dfrac{20{,}25}{10{,}099}$	$\dfrac{20{,}21}{10{,}09}$	$\dfrac{20{,}16}{11{,}05}$	$\dfrac{20{,}15}{10{,}96}$
	$\dfrac{F_z \ell^2/EI}{\omega \ell^2 \sqrt{m/EI}}$	$\dfrac{20{,}99}{10{,}68}$	$\dfrac{20{,}52}{10{,}95}$	$\dfrac{20{,}37}{10{,}99}$	$\dfrac{20{,}30}{10{,}96}$	$\dfrac{20{,}23}{11{,}05}$	$\dfrac{20{,}21}{10{,}96}$
В.И.Реута $F_1 = 0$; $F_2 = F$	$\dfrac{F_g \ell^2/EI}{\omega \ell^2 \sqrt{m/EI}}$	$\dfrac{9{,}12}{16{,}02}$	$\dfrac{9{,}31}{16{,}52}$	$\dfrac{9{,}38}{16{,}66}$	$\dfrac{9{,}42}{16{,}70}$	$\dfrac{9{,}42}{16{,}57}$	$\dfrac{9{,}44}{16{,}68}$
	$\dfrac{F_z \ell^2/EI}{\omega \ell^2 \sqrt{m/EI}}$	$\dfrac{19{,}34}{12{,}02}$	$\dfrac{19{,}72}{11{,}42}$	$\dfrac{19{,}85}{11{,}34}$	$\dfrac{19{,}91}{11{,}22}$	$\dfrac{19{,}92}{11{,}20}$	$\dfrac{19{,}95}{11{,}12}$
Комбинированная $F_1 = F$; $F_2 = F$; $F_g = 2F$	$\dfrac{F_g \ell^2/EI}{\omega \ell^2 \sqrt{m/EI}}$	$\dfrac{12{,}62}{14{,}69}$	$\dfrac{12{,}76}{15{,}11}$	$\dfrac{12{,}81}{15{,}15}$	$\dfrac{12{,}83}{15{,}10}$	$\dfrac{12{,}83}{15{,}08}$	$\dfrac{12{,}84}{15{,}21}$

Если в коэффициентах $a_1 - a_4$, $b_1 - b_4$ выражений (4.37) не учитывать продольные силы ($F_1 = F_2 = 0$), то уравнение (4.38) будет описывать модель жесткого стержня, когда максимальные прогибы лежат в пределах (1/100 – 1/1000)ℓ. При больших прогибах продольные силы F_1, F_2 оказывают влияние на изгибающий момент и поперечную силу. В этой связи в таблице 4.4 приведены критические силы по двум моделям стержня – жесткой (F_z) и условно гибкой (F_g), а также при разных отношениях высоты и ширины сечения. Площадь сечения $A = b\,h = 0{,}01$ м^2 при этом не изменялась. Данные таблицы 4.4 позволяют сделать ряд интересных выводов.

Задача М.Бекка. Учет сдвига, инерции вращения и деформированного состояния стержня незначительно увеличивают критическую силу. По жесткой модели при $\ell/h = 10$ уточнение составляет 4,69 %, по гибкой – 2,59%. Изменение отношения h/b мало влияет на величину критической силы.

Задача В.И.Реута. Гибкая модель приводит к существенному снижению критической силы (в 2,12 раза) по сравнению с жесткой моделью. Таким образом, сила с фиксированной линией действия более опасна, чем следящая за углом поворота сила.

Комбинированная задача. Совместное действие сил F_1 и F_2 приводит к большей критической силе, чем случай действия одной силы F_2, что невозможно при консервативных сжимающих силах. В жесткой модели все частоты в отдельности стремятся к нулю, т.е. определенная комбинация неконсервативных сил может приводить к консервативным задачам.

2 Свободный стержень нагружен в граничных точках силами F_1 и F_2 (рисунок 4.20).



Рисунок 4.20

Краевые условия этой задачи

$$M(0)=F_2 v(0);\quad Q(0)=F_2\varphi(0);\quad M(\ell)=F_2 v(\ell);\quad Q(\ell)=F_2\varphi(\ell)$$

в преобразованиях (1.46) приводят к матрице устойчивости вида:

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1 & A_{11}-F_2A_{13}/EI & A_{12}-F_2A_{14}/EI & -1+a_4A_{13}/EI & b_2A_{14}/EI & 3 \\ 2 & A_{21}-F_2A_{23}/EI & A_{22}-F_2A_{24}/EI & a_4A_{23}/EI & -1+b_2A_{24}/EI & 4 \\ 3 & -A_{31}+F_2A_{33}/EI & -A_{32}+F_2A_{34}/EI & \left[-F_2+a_4(A_{33}-1)\right]/EI & b_2A_{34}/EI & 1 \\ 4 & -A_{41}+F_2A_{43}/EI & -A_{42}+F_2A_{44}/EI & a_4A_{43}/EI & \left[-F_2+b_2(A_{44}-1)\right]/EI & 2 \end{array} \qquad (4.46)$$

Для исключения нулевых ведущих элементов этой матрицы (в жесткой модели), ее строки необходимо переставить в новом порядке, как показано цифрами справа. Критические силы данной задачи при квадратном сечении и $\ell/h=10$ принимают значения

$$F_1=0;\quad F_2=F$$

$$F_g=1{,}982EI/\ell^2 \quad \text{при} \quad \omega=2{,}87\sqrt{EI/m}\,; \qquad (4.47)$$

$$F_z=30{,}88EI/\ell^2 \quad \text{при} \quad \omega=9{,}48\sqrt{EI/m}\,,$$

т.е. для свободного стержня отношение критических сил жесткой и гибкой моделей резко увеличивается по сравнению с консольным стержнем,

$$F_1=F_2=F$$

$$F_g=3{,}028EI/\ell^2 \quad \text{при} \quad \omega=2{,}67\sqrt{EI/m}\,. \qquad (4.48)$$

Остальные случаи действия сжимающих сил по рисунку 4.20 приводят к консервативным задачам.

3 Консольный стержень с дискретным расположением сил F_1 и F_2

Для определенности положим, что одна сила приложена в середине пролета, другая на свободном конце. Стержень дискретизируется на две части, где стрелками показаны их начало и конец, а цифрами отмечены граничные точки (рисунок 4.21).

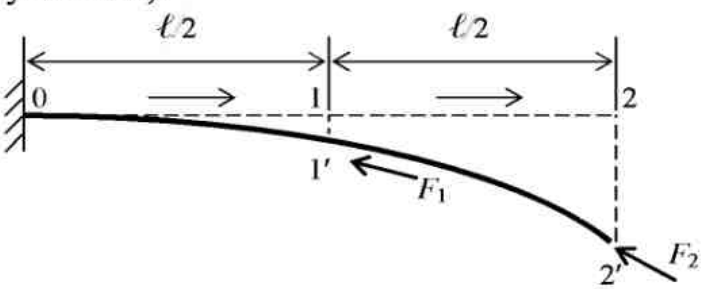


Рисунок 4.21

$\boldsymbol{X_*}=$

1	$EIv^{0-1}(0)=0;\ EIv^{1-2}(\ell)$
2	$EI\varphi^{0-1}(0)=0;\ EI\varphi^{1-2}(\ell)$
3	$M^{0-1}(0)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$EIv^{1-2}(0)$
6	$EI\varphi^{1-2}(0)$
7	$M^{1-2}(0)$
8	$Q^{1-2}(0)$

; $\boldsymbol{Y}=$

1	$EI\left[v_{(\ell)}^{0-1}=v_{(0)}^{1-2}\right]-a_4A_{13}^{0-1}\cdot v_{(0)}^{1-2}-b_2A_{14}^{0-1}\cdot\varphi_{(0)}^{1-2}$
2	$EI\left[\varphi_{(\ell)}^{0-1}=\varphi_{(0)}^{1-2}\right]-a_4A_{23}^{0-1}\cdot v_{(0)}^{1-2}-b_2A_{24}^{0-1}\cdot\varphi_{(0)}^{1-2}$
3	$\left[M_{(\ell)}^{0-1}=M_{(0)}^{1-2}\right]-a_4\left(A_{33}^{0-1}-1\right)\cdot v_{(0)}^{1-2}-b_2A_{34}^{0-1}\cdot\varphi_{(0)}^{1-2}$
4	$\left[Q_{(\ell)}^{0-1}=Q_{(0)}^{1-2}\right]-a_4A_{43}^{0-1}\cdot v_{(0)}^{1-2}-b_2\left(A_{44}^{0-1}-1\right)\cdot\varphi_{(0)}^{1-2}$
5	$EIv_{(\ell)}^{1-2}-a_4A_{13}^{1-2}\cdot v_{(\ell)}^{1-2}-b_2A_{14}^{1-2}\cdot\varphi_{(\ell)}^{1-2}$
6	$EI\varphi_{(\ell)}^{1-2}-a_4A_{23}^{1-2}\cdot v_{(\ell)}^{1-2}-b_2A_{24}^{1-2}\cdot\varphi_{(\ell)}^{1-2}$
7	$\left[M_{(\ell)}^{1-2}=0\right]-a_4\left(A_{33}^{1-2}-1\right)\cdot v_{(\ell)}^{1-2}-b_2A_{34}^{1-2}\cdot\varphi_{(\ell)}^{1-2}$
8	$\left[Q_{(\ell)}^{1-2}=0\right]-a_4A_{43}^{1-2}\cdot v_{(\ell)}^{1-2}-b_2\left(A_{44}^{1-2}-1\right)\cdot\varphi_{(\ell)}^{1-2}$

После переноса параметров из матрицы $\boldsymbol{Y}$ в матрицу $\boldsymbol{X_*}$, частотное уравнение задачи по рисунку 4.21 примет вид,

$|\boldsymbol{A_*}|=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$	A_{15}^*	A_{16}^*			5
2			$-A_{23}$	$-A_{24}$	A_{25}^*	A_{26}^*			6
3			A_{33}	A_{34}	A_{35}^*	A_{36}^*	A_{37}^*		3
4			A_{43}	A_{44}	A_{45}^*	A_{46}^*		A_{48}^*	4
5	A_{51}^*	A_{52}^*			A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	1
6	A_{61}^*	A_{62}^*			A_{21}	A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{24}$	2
7	A_{71}^*	A_{72}^*			$-A_{31}$	$-A_{32}$	A_{33}	A_{34}	7
8	A_{81}^*	A_{82}^*			$-A_{41}$	$-A_{42}$	A_{43}	A_{44}	8

стержень 0-1

стержень 1-2

$=0$ (4.49)

где компенсирующие элементы определяются выражениями:

стержень 0-1

$$A_{15}^*=-1+a_4A_{13}/EI;\quad A_{16}^*=b_2A_{14}/EI;\quad A_{25}^*=a_4A_{23}/EI;$$
$$A_{26}^*=-1+b_2A_{24}/EI;\quad A_{35}^*=a_4(A_{33}-1)/EI;\quad A_{36}^*=b_2A_{34}/EI; \qquad (4.50)$$
$$A_{37}^*=-1;\quad A_{45}^*=b_2A_{43}/EI;\quad A_{46}^*=b_2(A_{44}-1)/EI;\quad A_{48}^*=-1;$$

стержень 1-2

$$A_{51}^*=-1+a_4A_{13}/EI;\quad A_{52}^*=b_2A_{14}/EI;\quad A_{61}^*=a_4A_{23}/EI;$$
$$A_{62}^*=-1+b_2A_{24}/EI;\quad A_{71}^*=a_4(A_{33}-1)/EI;\quad A_{72}^*=b_2A_{34}/EI; \qquad (4.51)$$
$$A_{81}^*=a_4\,A_{43}/EI;\quad A_{82}^*=b_2(A_{44}-1)/EI.$$

3.1 Стержень сжат двумя силами F_1 (рисунок 4.21).

Для квадратного сечения и $\ell/h=10$ из уравнения (4.49) следует, что

$$F_g=13{,}79EI/\ell^2 \quad \text{при} \quad \omega=10{,}08\sqrt{EI/m}; \qquad (4.52)$$
$$F_z=15{,}02EI/\ell^2 \quad \text{при} \quad \omega=10{,}62\sqrt{EI/m}.$$

3.2 Стержень сжат двумя силами F_2.

В этом случае изменятся компенсирующие элементы матрицы (4.49):

стержень 0-1

$$A^*_{15}=-1;\quad A^*_{16}=A^*_{25}=A^*_{36}=A^*_{45}=0;\quad A^*_{26}=-1;\quad A^*_{35}=-F_2/EI;\qquad (4.53)$$

$$A^*_{37}=-1;\quad A^*_{46}=-F_2/EI;\quad A^*_{48}=-1;$$

стержень 1-2

$$A^*_{51}=-1;\quad A^*_{52}=A^*_{61}=A^*_{72}=A^*_{81}=0;\quad A^*_{62}=-1;\quad A^*_{71}=-F_2/EI;\qquad (4.54)$$

$$A^*_{82}=-F_2/EI.$$

Критические силы этой задачи будут равны

$$F_g=6{,}60EI/\ell^2 \quad \text{при} \quad \omega=14{,}55\sqrt{EI/m};\qquad (4.55)$$

$$F_z=13{,}11EI/\ell^2 \quad \text{при} \quad \omega=12{,}02\sqrt{EI/m}.$$

3.3 Стержень сжат в точке 1 силой F_1, в точке 2 силой F_2.

Компенсирующие элементы матрицы (4.49) будут равны выражениям (4.50) для стержня 0-1 и выражениям (4.54) для стержня 1-2. Критическую силу удается определить только для гибкой модели

$$F_g=7{,}68EI/\ell^2 \quad \text{при} \quad \omega=14{,}55\sqrt{EI/m}.\qquad (4.56)$$

3.4 Стержень сжат в точке 1 силой F_2, в точке 2 силой F_1.

Компенсирующие элементы стержня 0-1 будут равны выражениям (4.53), а стержня 1-2 – (4.51). Критическая сила определяется только для гибкой модели

$$F_g=10{,}57EI/\ell^2 \quad \text{при} \quad \omega=11{,}82\sqrt{EI/m}.\qquad (4.57)$$

Для сравнения приведем критическую силу при двух мертвых силах:

$$F_1=2{,}067EI/\ell^2$$

Из представленных результатов следует, что в комбинированных задачах наблюдается снижение критических сил в различной степени по сравнению с задачами М.Бекка и В.И.Реута.

4.6 Расчет рам на устойчивость МКЭ

Представим пример решения задачи устойчивости плоской рамы по алгоритму МКЭ в форме метода перемещений (см. п.1.6).

Пример 4.13. Определить 2 критические силы потери устойчивости рамы с элементами разной жесткости (рисунок 4.22).

1 Выполняем анализ расчетной схемы и разбиваем раму на КЭ (рисунок 4.23).

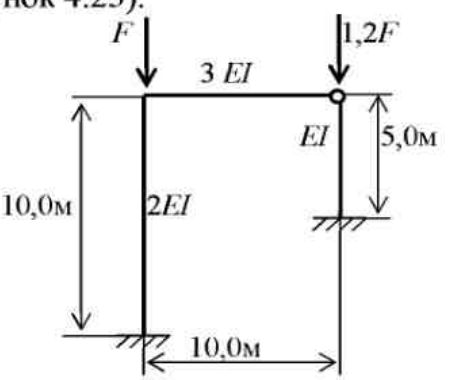


Рисунок 4.22

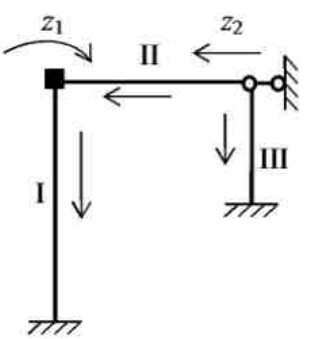


Рисунок 4.23

2 Формируем исходные матрицы

2.1 МЖ отдельных КЭ в локальных системах координат

$$k_{\text{I}} = EI \begin{bmatrix} 0{,}024 & 0{,}12 & -0{,}024 & 0{,}12 \\ 0{,}12 & 0{,}8 & -0{,}12 & 0{,}4 \\ -0{,}024 & -0{,}12 & 0{,}024 & -0{,}12 \\ 0{,}12 & 0{,}4 & -0{,}12 & 0{,}8 \end{bmatrix}; \quad k_{\text{II}} = EI \begin{bmatrix} 0{,}009 & -0{,}009 & 0{,}09 \\ -0{,}009 & 0{,}009 & -0{,}09 \\ 0{,}09 & -0{,}09 & 0{,}9 \end{bmatrix};$$

$$k_{\text{III}} = EI \begin{bmatrix} 0{,}024 & -0{,}024 & 0{,}12 \\ -0{,}024 & 0{,}024 & -0{,}12 \\ 0{,}12 & -0{,}12 & 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

2.2 Матрицы преобразований перемещений к глобальной системе координат

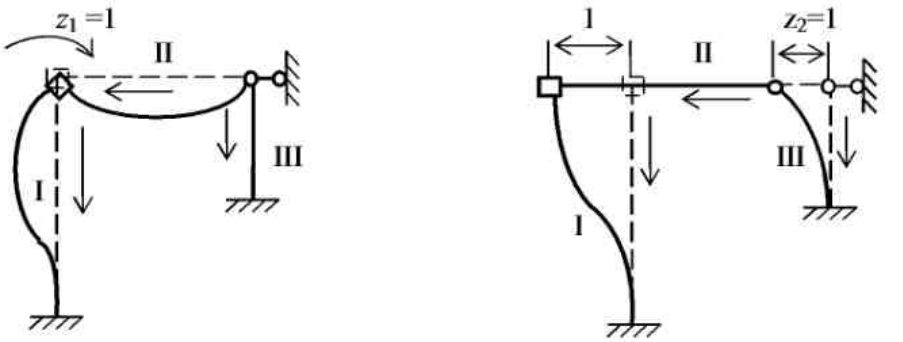


Рисунок 4.24

$$C_{\text{I}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} z_1=1 & z_2=1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}; \quad C_{\text{II}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} z_1=1 & z_2=1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}; \quad C_{\text{III}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} z_1=1 & z_2=1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

2.3 Матрицы потенциала нагрузки в локальной системе координат

$$P_{\text{I}} = F \begin{bmatrix} 0{,}12 & 0{,}1 & -0{,}12 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 1{,}33 & -0{,}1 & -0{,}33 \\ -0{,}12 & -0{,}1 & 0{,}12 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}33 & -0{,}1 & 1{,}33 \end{bmatrix}; \quad P_{\text{II}} = 0; \; P_{\text{III}} = F \begin{bmatrix} 0{,}288 & -0{,}288 & 0{,}24 \\ -0{,}288 & 0{,}288 & -0{,}24 \\ 0{,}24 & -0{,}24 & 1{,}2 \end{bmatrix}$$

2.4 МЖ рамы в глобальной системе координат

$$K_{\text{I}} = C_{\text{I}}^T k_{\text{I}} C_{\text{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} 0{,}024 & 0{,}12 & -0{,}024 & 0{,}12 \\ 0{,}12 & 0{,}8 & -0{,}12 & 0{,}4 \\ -0{,}024 & -0{,}12 & 0{,}024 & -0{,}12 \\ 0{,}12 & 0{,}4 & -0{,}12 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}12 \\ 0{,}12 & 0{,}014 \end{bmatrix}$$

$$K_{\text{II}} = C_{\text{II}}^T k_{\text{II}} C_{\text{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} 0{,}009 & -0{,}009 & 0{,}09 \\ -0{,}009 & 0{,}009 & -0{,}09 \\ 0{,}09 & -0{,}09 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$K_{III} = C_{III}^T k_{III} C_{III} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} 0{,}024 & -0{,}024 & 0{,}12 \\ -0{,}024 & 0{,}024 & -0{,}12 \\ 0{,}12 & -0{,}12 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}024 \end{bmatrix};$$

$$K = K_I + K_{II} + K_{III} = EI \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}12 \\ 0{,}12 & 0{,}014 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}024 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1{,}7 & 0{,}12 \\ 0{,}12 & 0{,}038 \end{bmatrix}.$$

2.5 Матрица потенциала нагрузки рамы в глобальной системе координат

$$P_I = C_I^T P_I C_I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} 0{,}12 & 0{,}1 & -0{,}12 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 1{,}33 & -0{,}1 & -0{,}33 \\ -0{,}12 & -0{,}1 & 0{,}12 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}33 & -0{,}1 & 1{,}33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} 1{,}33 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}12 \end{bmatrix};$$

$$P_{II} = C_{II}^T P_{II} C_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_{III} = C_{III}^T P_{III} C_{III} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} 0{,}288 & -0{,}288 & 0{,}24 \\ -0{,}288 & 0{,}288 & -0{,}24 \\ 0{,}24 & -0{,}24 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}288 \end{bmatrix};$$

$$P = P_I + P_{II} + P_{III} = F \begin{bmatrix} 1{,}33 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}12 \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}288 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} 1{,}33 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}408 \end{bmatrix}.$$

3 Формируем вековое уравнение устойчивости и находим критические силы

$$|K - P| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} (1{,}7EI - 1{,}33F) & (0{,}12EI - 0{,}1F) \\ (0{,}12EI - 0{,}1F) & (0{,}038EI - 0{,}408F) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$F^2 - 1{,}385EI \cdot F + 0{,}1258(EI)^2 = 0 \rightarrow F_{\min} = 0{,}0977EI \text{ кН};$$

$F_{max} = 1{,}287\ EI$ кН.

5 ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ MATLAB

Данная глава посвящена иллюстрации возможностей одной из самых эффективных систем компьютерного программного обеспечения – пакета универсальных интегрированных программ **MATLAB**. Любознательному читателю предлагается ознакомиться в первом приближении с основами языка программирования и комплексной визуализации результатов решения ряда научных и инженерных задач. Рассматриваются такие проблемы как табулирование функций, решение нелинейных уравнений, поиск оптимальных решений, решение задач Коши, численное интегрирование и другие задачи, традиционно включаемые в курс численных методов. Алгоритм этих задач хорошо известен и разработчики системы **MATLAB** (фирма Math Works, Inc., U.S.A) учли опыт численного решения и программирования задач вычислительной математики за все время существования вычислительной техники. Поэтому в системе **MATLAB** по каждой проблеме имеется несколько программ (иногда их больше 10), предназначенных для её решения в зависимости от особенностей данной задачи.

Кроме чисто научных задач, средствами **MATLAB** могут быть успешно решены и довольно сложные инженерные проблемы, такие как поиск спектра частот собственных колебаний и критических сил потери устойчивости стержневых, пластинчатых и оболочечных систем, решение краевых задач для упругих систем и задач сейсмостойкости сооружений и др.

Численные результаты таких задач должны сопровождаться соответствующими графиками, т.е. визуализацией расчетов. **MATLAB** обеспечивает решение и этой проблемы, что очень привлекательно для учебного процесса, где студенты тратят достаточно много времени на графическую часть курсовых и дипломных проектов. Кроме **MATLAB** существуют и другие, довольно мощные среды программирования и визуализации, такие как Visual Digital Fortran, Delphi, Visual C+ + и т.п. Однако, по мнению авторов, в системе **MATLAB** получаются наиболее простые и в то же время эффективные программы. Читателю предлагается самому убедиться в этом, сравнив приведенные в данной книге программы с программами других сред. Вероятно, нельзя создать в других средах программирования программы более простые, чем в системе **MATLAB.**

В качестве инженерных задач в главе рассматриваются задачи строительной механики – науки о расчетах сооружений на статическую, динамическую нагрузки и устойчивость. Для решения задач строительной механики разработано множество методов-методы сил и перемещений, метод конечных элементов, метод конечных разностей, метод R-функций, метод граничных элементов и др.

Здесь для иллюстрации возможностей **MATLAB** выбран один из наиболее эффективных методов – метод граничных элементов (МГЭ), позволяющий существенно упростить алгоритм решаемых задач.

Объединение возможностей **MATLAB** и МГЭ позволят на качественно более высоком уровне представлять решения инженерных задач, что существенно повышает их научное и практическое содержание. В этой связи материал данной главы опирается на идеи и теорию предыдущих глав книги.

Слово " **MATLAB"** состоит из начальных букв двух слов MATrix LABoratory - матричная лаборатория. Это действительно матричная лаборатория, где начальным кирпичиком является не простая переменная или константа, а матрица и ее частные случаи –вектор-строка, вектор-столбец.

Систему разработал Молер (C.B. Moler) в 70-х годах XX века, которая использовалась на больших ЭВМ. В начале 80-х годов Джон Литл (John Little) из фирмы MathWorks, Inc. модернизировал эту систему для персональных компьютеров типа IBM PC, VAX и Macintosh. Далее к расширению системы были привлечены крупнейшие ученые и научные школы в математике, программировании и естествознании. Это позволило **MATLAB** стать признанным лидером в решении различных проблем науки и техники среди других подобных систем. Этому способствовало создание языка программирования, который вобрал в себя преимущества традиционных языков (Fortran, Pascal, Basic, C++) и достаточно мощных средств визуализации и моделирования. Более подробно о преимуществах и возможностях системы **MATLAB** можно узнать в специализированных изданиях [105-108, 195]. Как ниже будет показано, реализация МГЭ в пакете **MATLAB** исключает какое-либо программирование численных процессов. Сами программы представляют собой лишь процесс введения исходных матриц и вызов численных процедур, т.е. реализуются в полном объеме идеи структурного и модульного программирования, что значительно уменьшает количество ошибок. Дальнейшая графическая визуализация результатов расчетов логически завершает постановку задач и их решение.

5.1 Основы языка программирования и визуализации результатов расчетов

Здесь приведены в кратком изложении основные правила и операторы языка программирования **MATLAB.**

Алфавит языка программирования

В **MATLAB**, как и в других системах, используются все буквы латинского алфавита от A до Z и арабские цифры от 0 до 9. Как и в C++, большие и малые буквы это разные переменные и константы. Кроме букв латинского алфавита используются все специальные символы клавиатуры компьютера.

Арифметические и логические операторы

Число арифметических операторов в **MATLAB** значительно расширено и включает в себя матричные и арифметические операции. В таблице 5.1 приводится список арифметических операторов

Таблица 5.1

Функция	Оператор (синтаксис)
Сложение	+ (M1 +M2)
Вычитание	– (M1-M2)
Матричное умножение	* (M1*M2)
Поэлементное умножение массивов	• * (M1• *M2)
Возведение матрицы в степень	^ (M1 ^ ***x***)
Поэлементное возведение массива в степень	• ^ (M1• ^ ***x***)
Деление матриц слева направо	/ (M1 / M2)
Поэлементное деление массивов слева направо	•/ (M1• / M2)
Деление матриц справа налево	\ (M1 \ M2)
Поэлементное деление массивов справа налево	•\ (M1• \ M2)

В математических выражениях операторы имеют определенный приоритет исполнения. В приоритет логических операторов выше, чем арифметических, приоритет возведения в степень выше приоритетов умножения и деления, приоритет умножения и деления выше сложения и вычитания. Для повышения приоритета операций нужно использовать круглые скобки Степень вложения скобок не ограничивается.

Операторы отношения служат для сравнения двух величин, векторов или матриц. Все операторы отношения имеют две сравниваемые величины и записываются, как показано в таблице 5.2

Таблица 5.2

Функция	Оператор (синтаксис)
Равно	$==\ (x == y)$
Не равно	$\sim=\ (x \sim= y)$
Меньше	$<\ (x < y)$
Больше	$>\ (x > y)$
Меньше или равно	$<=\ (x <= y)$
Больше или равно	$>=\ (x >= y)$

Данные операторы выполняют поэлементное сравнение векторов или матриц одинакового размера и логическое выражение принимает значение 1 (True), если элементы идентичны, и значение 0 (False) в противном случае.

Логические операторы служат для реализации поэлементных логических операций над элементами одинаковых по размеру массивов согласно таблице 5.3.

Таблица 5.3

Функция	Оператор (синтаксис)
Логическое И	&; and (and (a,b))
Логическое ИЛИ	|; or (or (a,b))
Логическое НЕ	~; not (not (a,b))
Исключающее ИЛИ	xor (xor (a,b))
Верно, если все элементы вектора равны нулю	any (any(a))
Верно, если все элементы вектора не равны нулю	all (all(a))

Элементарные функции

Набор элементных функций представим их описанием. В тригонометрических функциях углы измеряются в радианах.

Таблица 5.4

Функция	Синтаксис
$\|x\|$ – модуль	abs(x)
e^x – экспонента	exp(x)
$\ln x$ - натуральный логарифм	log(x)
$\log_2 x$ - логарифм по основанию 2	log2(x)
$\lg x$ - десятичный логарифм	log10(x)
2^x - 2 в степени x	pow(x)
$\sqrt{x}$ - квадратный корень	sqrt(x)
$\arccos x$ - арккосинус	acos(x)
$\operatorname{arcctg} x$ - арккотангенс	acot(x)
$\operatorname{arccosec} x$ - арккосеканс	acsc(x)
$\operatorname{arcsec} x$ - арксеканс	asec(x)

Продолжение таблицы 5.4

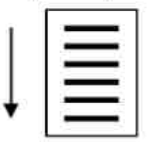
Функция	Синтаксис
arcsin x - арксинус	asin(x)
arctg x - арктангенс	atan(x)
cos x - косинус	cos(x)
ctg x - котангенс	cot(x)
cosec x - косеканс	csc(x)
sec x - секанс	sec(x)
sin x - синус	sin(x)
tg x - тангенс	tan(x)
arcch - арккосинус гиперболический	acosh(x)
arcc th x - арккотангенс гиперболический	acoth(x)
arccosech x - арккосеканс гиперболический	acsch(x)
arcsech x - арксеканс гиперболический	asech(x)
arcsh x - арксинус гиперболический	asinh(x)
arctgh x - арктангенс гиперболический	atanh(x)
ch x - косинус гиперболический	cosh(x)
ctgh x - котангенс гиперболический	coth(x)
cosech x - косеканс гиперболический	csch(x)
sech x - секанс гиперболический	sech(x)
sh x - синус гиперболический	sinh(x)
tgh x - тангенс гиперболический	tanh(x)

Следует помнить, что все элементарные функции должны записываться в программах малыми буквами. Существуют также специальные математические функции, на которых мы не будем останавливаться. Их описание см. в [105-108].

Понятие о файлах-сценариях и файлах-функциях

При загрузке системы **MATLAB** на мониторе появляется основное окно системы, в котором можно выделить окно команд (Command Window). Система готова к проведению вычислений и созданию программ в командном режиме. Для этого можно на языке **MATLAB** записывать программы. Операторы заканчиваются символом [;] - точка с запятой.

Одновременно точка с запятой блокирует вывод численного значения результата этого оператора в окне команд. В одной строке можно записать несколько операторов, а сами строки автоматически нумеруются при нажатии клавиши Enter. Если программа полностью записана и выходные величины не имеют символа ;, то после нажатия клавиши Enter она выполняется. Ниже программы появляется ее результат. В таком режиме выполнять решения задач не целесообразно, т.к. исправить возможные ошибки после нажатия клавиши Enter уже нельзя. Поэтому записывать программы, их редактировать и отлаживать необходимо в так называемых М- файлах. М-файл создается при выполнении команды New меню File. Для ускорения этой команды выведена специальная пиктограмма в виде белой странички с загнутым уголком на панели инструментов. Щелкнув по пиктограмме стрелкой мышки, получаем окно М- файла, на котором можно записывать, редактировать и отлаживать любые программы решения научных и инженерных задач. Данный М- файл по умолчанию имеет название Untitled (Безымянный).Чтобы дать ему имя необходимо в меню этого окна File выполнить команду Save as и в другом окне указать папку и имя этого файла. После указания имени и сохранения М-файла он готов для выполнения записанной программы. Для этого необходимо щелкнуть мышкой по пиктограмме Выполнить.

Она выполнена в виде страницы со стрелкой, направленной вниз 

Результат выполнения программы или сообщение об ошибках появится в окне команд. Описанный процесс называется созданием М-файла сценария сессии. Файл-сценарий, именуемый также Script - файлом, имеет весьма простую структуру:

```
% Основной комментарий, если необходимо
% Дополнительный комментарий, если необходимо
Тело программы с любыми выражениями
```

Возможными являются следующие свойства файлов сценариев:

1 Они не имеют входных и выходных аргументов;

2 Работают с данными из рабочей области;

3 В процессе выполнения не компилируются;

4 Представляют собой последовательность операций, аналогичную той, что используется в сессии.

Кроме М-файла сценария, в **MATLAB** существует М-файл функция. Отличие М-файла функции от сценария состоит в том, что он является аналогом подпрограммы типа function в языке Pascal.

Структура М-файла функции с одним выходным параметром имеет вид

```
function var = f-name (Список параметров)
% Основной комментарий, если необходимо
% Дополнительный комментарий, если необходимо
Тело программы с любыми выражениями
var = выражение
```

М-файл функция обладает такими свойствами:

1 Он начинается с ключевого слова function, после которого указывается имя переменной var – выходного параметра, имя самой функции f-name и список её входных параметров, отделенных запятой.

Внимание. Имя М-файла функции должно совпадать с именем f-name (именем самой функции). **MATLAB** автоматически присваивает данное имя при выполнении команды Save as .

2 Результат выполнения М-файла функции присваивается имени функции, которое может использоваться в математических выражениях подобно функциям $\sin(x)$, $\log(x)$ и т.п.

3 Все переменные, используемые в файле-функции, являются локальными, т.е. действуют только в пределах тела функции.

4 Файл-функция является самостоятельным программным модулем, который связан с другими модулями и головной программой через входные и выходные параметры.

5 При обнаружении файла-функции он компилируется и затем исполняется.

Ниже показаны примеры создания и использования в практических расчетах М-файлов сценариев и функций.

Основы программирования

Программирование, т.е. создание определенного набора команд, в системе **MATLAB** является средством ее расширения и использования в решении специфических проблем. Отдельные вопросы программирования изложены выше, здесь рассмотрим правила, дополняющие синтаксис языка **MATLAB.**

Оператор присваивания

Программы оперируют переменными и константами. Переменные – это имеющие имена объекты, способные хранить разные по значению данные. В

зависимости от этих данных переменные могут быть числовыми или символьными, векторными или матричными.

Для задания переменным определенных значений используется оператор присваивания, вводимый знаком равенства [=].

Имя переменной = Выражение;

Типы переменных заранее не декларируются. Они определяются выражением, значение которого присваивается переменной. Имя переменной может содержать сколько угодно символов, но идентифицируются только 31 начальный символ. Имя должно начинаться с буквы, может содержать буквы, цифры и символ подчеркивания _. Недопустимо включать в имена пробелы и специальные знаки.

Перенос строки

Если математическое выражение выходит за размер экрана монитора, то целесообразно перенести его часть на следующую строку. Для этого используется символ многоточие [...] - три и более точки. В командном режиме число возможных символов в одной строке – 4096, М-файле – не ограничено, но с такими длинными строками работать неудобно. Поэтому применение в файлах-сценариях символа переноса строки улучшает наглядность программ.

Ввод и вывод данных

В языке **MATLAB** нет явных операторов ввода и вывода данных. Эта проблема решается для ввода данных оператором присваивания и использованием системных констант. Вывод данных осуществляется еще проще. Для этого необходимо после математического выражения не ставить символ [;] - точку с запятой. К системным константам относятся:

pi = 3.1415... - число "пи";

i или *j* - мнимые единицы;

NaN - неопределенность в виде $\frac{0}{0}$;

Inf - бесконечность типа $\frac{a}{0}$;

ans - результат последней операции и др.

Форматы чисел

При вычислениях в **MATLAB** используется режим двойной точности. Однако, при выводе результатов, по умолчанию выдаются числа с 4 цифрами

после десятичной точки в действительной форме. Чтобы изменить данную форму вывода необходимо в программе перед выводимой величиной использовать команду format name , где name – имя формата. Для числовых данных name может быть следующим сообщением:

short – короткое представление в фиксированном формате (5знаков);

short e - короткое представление в экспоненциальной форме (5 знаков мантиссы и 3 знака порядка);

long - длинное представление в фиксированном формате (15 знаков);

bank - представление с двумя числами после точки;

long e - длинное представление в экспоненциальной форме (15 знаков мантиссы и 3 знака порядка).

В качестве примера рассмотрим вывод вектора, содержащий 2 числа:

format name

$x = [5/3 \;\; 1.2783e-7]$

В различных форматах вывод вектора x будет иметь следующий вид:

short	1.6667	0.0000
short e	1.6667E + 000	1.2783E - 007
long	1.66666666666667	0.00000012783000
long e	1.66666666666667E + 000	1.27830000000000E - 007
bank	1.67	0.00

Задание формата сказывается только на форме вывода чисел. Вычисления же происходят в режиме двойной точности, а ввод чисел осуществляется в любом удобном виде.

Формирование векторов и матриц

Описанные правила вычислений распространяются и на более сложные вычисления, которые при использовании обычных языков программирования (типа Pascal, Fortran, C++ и др.) требуют составления специальных программ. **MATLAB** специально предназначен для проведения сложных вычислений с векторами и матрицами. При этом по умолчанию предполагается, что каждая переменная – это вектор или матрица. Например, если задано $x = 1$, то это значит, что x - это вектор с одним элементом, равным 1. Если надо задать вектор из трех элементов, то их значения надо перечислить в квадратных скобках, разделяя пробелами.

```
>> V = [1 2 3]
   V =
       1  2  3
```

В данном случае задан вектор - строка. Если разделить элементы точкой с запятой, то получится вектор столбец.

```
>> V = [1; 2; 3]
  V =
       1
       2
       3
```

Задание матрицы требует указания нескольких строк. Для разграничения строк используют символ ; (точка с запятой).

```
>> T = [1 2 3 ; 4 5 6; 7 8 9]
  T =
       1 2 3
       4 5 6
       7 8 9
```

Для указания отдельного элемента вектора или матрицы используются выражения вида $V(i)$ или $T(i, j)$. Например:

```
>> T(3,2)
  ans =
       8
```

Если элементу $T(i, j)$ нужно присвоить новое значение x, то используют оператор присвоения

$T(3,2) = x;$

Выражение $T(i)$ с одним индексом дает доступ к элементам матрицы, развернутым в один столбец. Такая матрица образуется из исходной, если подряд выписать ее столбцы. Например

```
>> T(3)
  ans =
       7
>> T(8)
  ans =
       6
```

Наряду с операциями над отдельными элементами матриц и векторов **MATLAB** позволяет производить арифметические операции сразу над всеми элементами. Для этого перед знаком операции ставится точка.

Имеются также ряд особых функций для задания векторов и матриц. Отметим функции *ones* и *zeros*. Эти функции служат для создания одномерных и многомерных массивов. Функция *ones* создает массив с единичными элементами

```
>> a = ones(3,2)
   a =
      1   1
      1   1
      1   1
```

Функция *zeros* создает массив с нулевыми элементами

```
>> b = zeros(2,3)
   b =
      0   0   0
      0   0   0
```

В краевых задачах поиска частот собственных колебаний и критических сил потери устойчивости упругих систем функция *zeros* находит широкое применение, что существенно упрощает тексты соответствующих программ

Типы данных

Структура типов данных **MATLAB** представлена схемой на рисунке 5.1

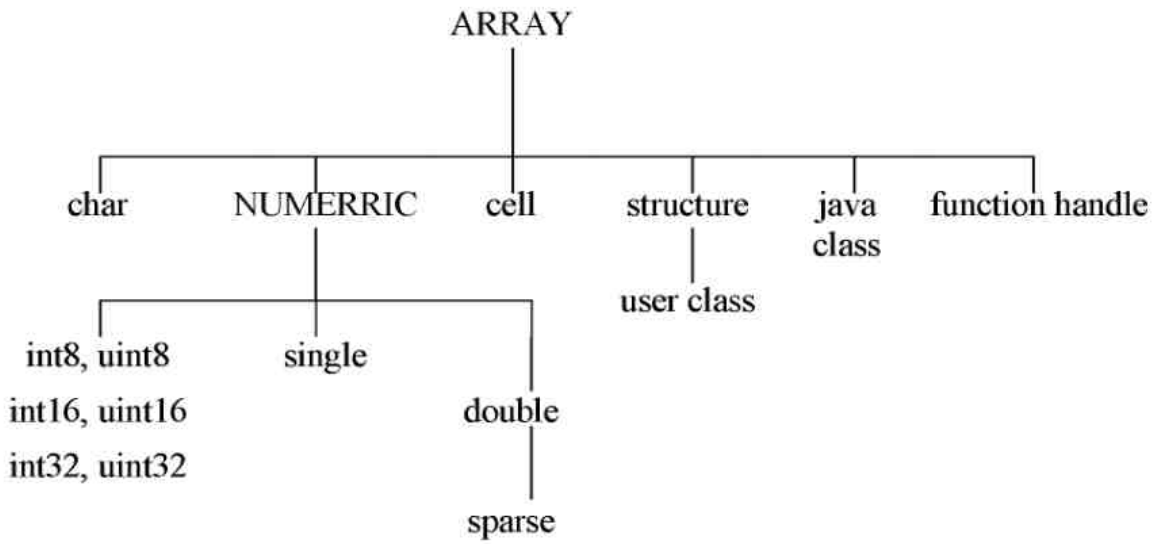


Рисунок 5.1

Типы данных array и numerric являются виртуальными ("кажущимися"), т.к. к ним нельзя отнести какие-либо переменные. Они служат для определения и комплектования некоторых типов данных. Таким образом, в **MATLAB** определены типы данных, представляющие собой многомерные массивы:

1 single – числовые массивы с числами одинарной точности;

2 double - числовые массивы с числами удвоенной точности;

3 char – строчные массивы с элементами-символами;

4 sparse – разреженные матрицы с элементами-числами двойной точности;

5 cell – массивы ячеек;

6 structure – массивы структур с полями;

7 function handle – дескрипторы функций;

8 int8,…, uint32 – массивы 8-, 16-, 32- разрядных целых чисел со знаками и без знаков.

Оператор двоеточие **:**

Весьма часто необходимо выполнить формирование упорядоченных числовых последовательностей. Такие последовательности нужны для создания векторов или значений аргументов x при построении графиков. В **MATLAB** для этого используется оператор двоеточие **:**, который представляется следующим образом

x = Начальное_значение **:** Шаг **:** Конечное_значение **;**

Эта конструкция создает возрастающую последовательность чисел, которая начинается с начального значения, изменяется на заданный шаг и завершается конечным значением. Если шаг не задан, то он принимает значение 1. Если конечное значение указано меньшим, чем начальное значение, - то выдается сообщение об ошибке.

Примеры

```
>> x = 0:5
x =
    0  1  2  3  4  5
>> cos(x)
ans =
  1.0000   0.5403   -0.4161  -0.9900  -0.6536  0.2837
>> x = 1:-0.2:0
x =
    1.0000   0.8000  0.6000  0.4000  0.2000  0
```

и т.д.

Оператор разветвления if

Условный оператор *if* в **MATLAB** записывается в общем виде так

```
if Логическое условие Оператор 1 elseif Логическое условие
Оператор 2 else Оператор 3 end;
```

Эта конструкция имеет несколько частных вариантов

```
if Логическое условие Оператор 1 end;
```

```
if Логическое условие Оператор 1 else Оператор 2 end;
```

Логическое условие записывается в виде

```
Выражение 1 Оператор отношения Выражение 2
```

В качестве операторов отношения используются операторы : ==, <, >, <=, > =, ~ =. Если логическое условие принимает значение 1 (true -истина), то выполняются соответствующие операторы. Если логическое условие принимает значение 0 (false - ложь), то операторы, следующие за логическим условием, не выполняются. Оператор end указывает на конец условного оператора if. В понятие Оператор 1 входят один или несколько операторов. В последнем случае они разделяются символами **,** (запятой) или **;** (точкой с запятой).

Как и в других алгоритмических языках, оператор if позволяет осуществить разветвление процесса вычислений в зависимости от какого-либо условия. Примеры применения этого оператора представлены ниже.

Операторы циклов

В **MATLAB** существует 3 типа операторов цикла. С оператором **:** (двоеточие) мы познакомились выше. Следующий оператор for…end используется для организации цикла с фиксированным числом повторений. Он имеет вид

```
for var = Выражение Операторы end;
```

Здесь var – счетчик цикла – любая переменная, обычно это i, j, k, l, m и т.д. Выражение записывается в виде s:d:e, где s – начальное значение счетчика цикла var, d - шаг изменения и e – конечное значение var. Возможна запись в виде s:e, тогда d = 1. Список операторов завершается ключевым словом end. Оператор continue передает управление в следующую итерацию

цикла, пропуская операторы, которые записаны за ним. Оператор break используется для досрочного прерывания цикла. Возможны вложенные циклы >>for i =1:3 for j = 1:3 a(i, j)=i*j; end; end;.

В результате выполнения этого цикла формируется матрица a

```
>> a
a =
   1  2  3
   2  4  6
   3  6  9
```

Циклы типа while…end выполняются до тех пор, пока выполняется заданное условие. Оператор записывается в виде

while Логическое условие Операторы end;

Сообщения об ошибках и исправление ошибок

Система **MATLAB** контролирует правильность написания программ и, при наличии ошибок, выдает соответствующее сообщение в окне команд. При этом указывается номер строки, где допущена ошибка, и характер ошибки. После уяснения сути ошибки ее необходимо исправить в тексте программы, запомнить М-файл командой save и снова выполнить программу. Перед этим желательно очистить окно команд от сообщения об ошибках (чтобы не загромождать полученную картинку) с помощью команды Clear Command Windows (Очистить окно команд) в меню Edit.

Вычисление определителя квадратной матрицы

Для вычисления определителя квадратной матрицы используется функция det(*a*). Если матрица *a* содержит только целые числа, то результат – тоже целое число. Определитель вычисляется на основе треугольного разложения методом исключения Гаусса. Пример:

```
>> a = [2  3  6;  1  8  4;  3  6  7]
a =
   2  3  6
   1  8  4
   3  6  7
>> det(a)
ans =
   -29
```

Данная функция широко используется в задачах поиска спектров частот собственных колебаний и критических сил потери устойчивости упругих систем.

Обращение матриц

Обращение матриц – одна из наиболее распространенных операций задач строительной механики и других наук. Обратной называют матрицу, получаемую в результате деления единичной матрицы E на исходную матрицу *x*, т.е $x^{-1} = E / x$. Эту процедуру выполняет функция $\mathrm{inv}(x)$, которая вычисляет элементы обратной матрицы для исходной квадратной матрицы x. Выдается предупреждающее сообщение, если матрица x плохо масштабирована или близка к вырожденной. На практике вычисление обратной матрицы не так уж необходимо. Чаще обращение применяют для решения систем линейных алгебраических уравнений вида $ax = b$. Один из путей решения этой системы - $x = \mathrm{inv}(a) * b$, хотя лучше использовать метод исключения Гаусса без формирования обратной матрицы, например $x = a \setminus b$ или $x = b / a$.

Основы графической визуализации вычислений

Во многих областях науки и техники численное решение задач недостаточно для анализа результатов. Необходима еще графическая интерпретация в виде эпюр параметров напряженно-деформированного состояния элементов упругих систем, форм колебаний и потери устойчивости, поведение решений на заданном интервале и т.п. **MATLAB** позволяет решить эти задачи достаточно простыми процедурами. Вначале необходимо задать интервал изменения аргумента *x* от начального значения x_0 до конечного $x_к$ с шагом Δx, что осуществляется оператором двоеточие: $x_0 : \Delta x : x_k$. Далее используется команда построения графика какой-либо функции $y = f(x)$, которая носит имя plot. plot строит не истинный график функции $f(x)$, а лишь заданное числом элементов вектора *x* число точек. Эти точки затем соединяются отрезками прямых, т.е. выполняется кусочно-линейная интерполяция данных графика. Если число точек достаточно велико, то полученная кривая воспринимается как вполне истинный график функции $y = f(x)$, при 10-20 точках получается ломаная кривая.

Построение графиков отрезками прямых

Для построения графика функции $y = f(x)$ необходимо задать совокупность точек *x* и *y*. Для аргумента *x* это выполняется оператором цикла, для *y* – надлежащим программированием выражения для функции, т.е. необходимо применять знаки арифметических операций над массивами

: •*; •/; •^. Для отображения таких функций используется декартовая прямоугольная система координат. Команда построения графика функции $y = f(x)$ plot имеет ряд параметров, которые рассмотрены ниже.

plot (x, y) – строит график функции $y = f(x)$, координаты точек (x, y)которой берутся из векторов одинакового размера x и y.

plot (x, y, s) - аналогична команде plot (x, y), но тип линии графика можно задавать с помощью строковой константы s, значения которой представлены в таблице 5.5.

Таким образом, с помощью строковой константы s можно менять цвет линии, представлять узловые точки различными отметками и менять тип линии графика. Рассмотрим пример построения графиков трех функций $y_1 = \sin x;\ y_2 = \sin^2 x;\ y_3 = \sin^3 x$ с различным стилем:

$$>> x = -2 * pi : 0.01 * pi : 2 * pi;\quad y1 = \sin(x);\ y2 = \sin(x).^2;\ y3 = \sin(x).^3;$$
$$>> \text{plot}(x, y1, '-m', x, y2, '-.+r', x, y3, '--ok')$$

Здесь график функции $y1$ строится сплошной фиолетовой линией, график $y2$ строится штрих пунктирной линией с точками в виде знака "+" красного цвета, график $y3$ строится штриховой линией с кружками черного цвета.

Таблица 5.5

Цвет линии	Тип точки	Тип линии
s = y – желтый	s = • – точка	s= – – сплошная
m – фиолетовый	O – окружность	: – двойной пунктир
c – голубой	x – крест	–• – штрих-пунктир
r – красный	+ – плюс	– – штриховая
g – зеленый	* – звездочка	
b – синий	s – квадрат	
w – белый	d – ромб	
k – черный	∨ – треугольник(вниз)	
	∧ – треугольник(вверх)	
	< – треугольник(влево)	
	> – треугольник(вправо)	
	p – пятиугольник	
	h – шестиугольник	

График дискретных отсчетов функции

В сопротивлении материалов и строительной механике принято графики параметров напряженно-деформированного состояния закрашивать (штриховать). Для построения подобных графиков используется команда stem(…).

$\text{stem}(x, y)$ – строит график с закрашенными частями между нулевой линией и кривой $y = f(x)$.

$\text{stem}(..., 'LINESPEC')$ – аналогична команде $\text{stem}(x, y)$, но имеет спецификацию линий $,'LINESPEC'$, подобную строковой константе s команды plot (x, y, s).

$\text{stem}(..., 'filled')$строит график функции $y = f(x)$ с закрашенными маркерами.

Создание массивов данных для трехмерной графики

Трехмерные поверхности описываются функцией двух переменных $z = f(x, y)$. Построение трехмерных графиков требует определения для x и y двумерных массивов – матриц. Для создания таких массивов служит функция meshgrid, которая записывается следующим образом

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \text{meshgrid}(x, y);$$

В основном она используется совместно с функциями построения графиков трехмерных поверхностей. Функция преобразует область, заданную векторами x и y, в массивы **X** и **Y**, которые могут быть использованы для вычисления функции двух переменных и построения трехмерных графиков. Строки выходного массива **X** являются копиями вектора x, а столбцы **Y** – копиями вектора y.

Пример:

$>> [\mathbf{X}\ \mathbf{Y}] = \text{meshgrid}(4:7,\ 9:13)$

X =

4	5	6	7
4	5	6	7
4	5	6	7
4	5	6	7
4	5	6	7

Y =

9	9	9	9
10	10	10	10
11	11	11	11
12	12	12	12
13	13	13	13

Приведем еще пример применения функции meshgrid:

$>> [\mathbf{X}\ \mathbf{Y}] = \text{meshgrid}(-1:0.1:1,\ -1:0.1:1);$

Такой вызов функции создает опорную плоскость для построения трехмерной поверхности при изменении x и y от –1 до 1 с шагом 0,1.

Построение графиков поверхностей

Для построения графиков функции $z = f(x, y)$ используется команда plot3(…), которая является аналогом команды plot(…). Она строит аксонометрическое изображение трехмерной поверхности и имеет следующие формы:

plot3(*x, y, z*), – строит массив точек, представленных векторами *x, y, z* и соединяет их отрезками прямых.

plot3(**X,Y,Z**), где **X,Y,Z** – три матрицы одинакового размера, строит точки с координатами **X**(*i, :*), **Y**(*i, :*) и **Z**(*i, :*), и соединяет их отрезками прямых.

Пример построения графика трехмерной поверхности $z = x^2 + y^2$:

$>> [\text{X}\ \text{Y}] = \text{meshgrid}([-3:0.15:3]);$

$>> \text{Z} = \text{X}.\text{^}2 + \text{Y}.\text{^}2;$

>> plot3(X,Y,Z)

plot3(**X,Y,Z,S**) – обеспечивает построение графика поверхности, но со спецификацией стиля линий и точек, соответствующей спецификации команды plot.

Включение и выключение масштабной сетки

При построении графиков наряду с разметкой осей часто необходимо иметь масштабную сетку. Команды grid позволяют управлять этим процессом. Если после команды построения графиков добавить команду включения или выключения масштабной сетки, то можно получить график с требуемым видом.

grid on – добавляет сетку к текущему графику;

grid off – отключает сетку;

grid – последовательно производит включение и отключение сетки.

Представление нескольких графиков в одном окне

Иногда необходимо в одном окне поместить несколько графиков без наложения их друг на друга. Особенно удобно такое представление при построении эпюр напряженно-деформированного состояния элементов стержневых и пластинчатых систем. Для этого служит команда subplot, которую необходимо записывать перед командой plot .

subplot(m, n, p) – разбивает графическое окно на m x n подокон, при этом m – число подокон по горизонтали, n – число окон по вертикали, p – номер подокна, в которое будет вводиться текущий график.

Ввод текста на график с помощью мыши

Для маркировки графиков можно ввести любой текст с помощью мыши командой gtext. Команда помещается после команды plot.

gtext('string') – выводит на график перемещенный мышкой маркер в виде крестика. Установив маркер в нужное место и щелкнув кнопкой мыши, получим текст на графике.

Управление свойствами осей графиков

Если не задавать масштаб графика, то он строится командой plot автоматически. Не всегда этот масштаб удовлетворяет пользователя. Команда axis позволяет установить любой масштаб.

axis([$x$min. $x$max. $y$min. $y$max]) – устанавливает нужный диапазон координат графика по осям x и y

В заключение параграфа отметим, что более полно о возможностях графической визуализации **MATLAB** можно узнать в специализированных изданиях [105-108].

5.2 Задачи вычислительной математики

Система **MATLAB**, как следует из первого параграфа этой главы, обладает большими возможностями программирования и комплексной визуализации результатов инженерных расчетов и научных исследований. В этой связи покажем применение богатых возможностей **MATLAB** в решении задач вычислительной математики. Развитие многих наук привело

исследователей к необходимости численного решения различных проблем, т.е. применению численных методов. Численные методы создаются и исследуются высококвалифицированными специалистами-математиками и, как в системе **MATLAB**, предлагаются для применения в виде готового инструмента. Поэтому задачей данного параграфа является изложение основных идей численных методов и ознакомление с последовательностью применения численных процессов в современных компьютерных системах.

Программы, реализующие какой-либо численный метод необходимо записывать в М-файле. Если не дать имени М-файлу, то он запишется при выполнении программы в рабочую папку под именем Untitled(Безымянный). Такой ситуации следует избегать для исключения появления множества файлов с неопределенным именем. Рассмотрим решение ряда проблем вычислительной математики, имеющих важное значение при изучении различных разделов механики деформируемого твердого тела и строительной механики. Для более глубокого усвоения методики применения программ численных методов приведены задания для самостоятельной работы.

Табулирование функций

Данная задача широко используется в экологии, теплофизике, сопротивлении материалов, строительной механике, теории упругости и других науках. Обычно функции, описывающие какой-либо процесс, весьма громоздки и создание таблиц их значений требует большого объема вычислений.

Рассмотрим два случая табулирования функций:

1 С постоянным шагом изменения аргументов.

2 С произвольным набором значений аргумента.

Алгоритм реализуется путем организации какого-либо цикла.

Пример 5.1

Вычислить $y_i = R\sqrt[3]{\left|\ln\left(1-\lambda^{x_i}\right)^2 - x_i^3\right|}$ при $R = 4.28\cdot 10^{-2};\ \ \lambda = 2.87;$

x_i изменяется с шагом $\Delta x = 2;\ x_н = 2;\ x_н = 10.$

Введем обозначение

$\lambda \rightarrow la = 2.87;$

Протокол программы

$R = 4.28\text{e}{-}02;\ la = 2.87;$

% Задается начальное значение x, шаг dx и конечное значение x

$x = 2.0 : 2.0 : 10.0;$

$y = R * \left(abs\left(\log\left(\left(1 - la.\text{\^{}}x\right).\text{\^{}}2\right) - x.\text{\^{}}3\right)\right).\text{\^{}}\left(1/3\right); [x; y]$

% Для вывода значения y в конце строки символ **;** не ставится!

В окне команд появляется после нажатия кнопки ВЫПОЛНИТЬ значения функции y, которые затем можно скопировать в какой-либо файл.

Результат вычислений

ans =

2.0000	4.0000	6.0000	8.0000	10.0000
0.0682	0.1634	0.2517	0.3386	0.4250

Пример 5.2

$$y_i = \frac{1+\sin^2\left(b^2+x_i^2\right)}{\sqrt[3]{a^2+x_i^2}};$$

$x_1 = 12.8;\ x_2 = 23.4; x_3 = 27.2;\ x_4 = 17.8; x_5 = 16.3; x_6 = 14.9; a = 1.35;\ b = 0.98.$

Данную задачу можно программировать не изменяя обозначения переменных. Цикл организуется для одномерного массива.

Протокол программы

$a = 1.35;\ b = 0.98.\ x(1) = 12.8;\ x(2) = 23.4; x(3) = 27.2;\ x(4) = 17.8; x(5) = 16.3;\ x(6) = 14.9$
for $m = 1:6\ \ y = (1+\sin(b\text{^}2 + x(m).\text{^}2).\text{^}2)/(a\text{^}2 + x(m).\text{^}2).\text{^}(1/3)$, end;

% В конце строки вычисления функции y символ **;** не ставится!

Результаты вычислений

$y =$

0.3609

$y =$

0.2327

$y =$

0.1473

$y =$

0.1800

$y =$

0.1771

$y =$

0.1658

Данные вычисления можно вывести в виде таблицы, если использовать запись $[x; y]$ или $[x\ \ y]$ без точки с запятой.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Составить программу вычисления значений функции y_i для значений аргумента x_i. Данные взять из таблицы 5.6

Таблица 5.6

Функция $y_i = f(x_i)$		Задача А					Задача В				
		a	b	x_H	x_K	Δx	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	$y = \frac{1+\sin^2(b^3+x^3)}{\sqrt[3]{b^3+x^3}}$	–	2.5	1.28	3.28	0.4	1.1	2.4	3.6	1.7	3.9
2	$y = \frac{\sqrt[3]{ax+b}}{\lg^2 x}$	1.35	0.98	1/14	4/24	0/62	0/35	1/28	3.51	5/21	4.16
3	$y = \frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{a}}{b-e^{\frac{x}{a}}}$	2.0	0.95	1.25	2.75	0.3	2.2	3.78	4.51	6.58	1.2
4	$y = \begin{cases} \frac{\ln^2(a^2+x)}{(a+x)^2}, x<5 \\ \frac{(a+bx)^{2.5}}{1.8+\cos^3(ax)}, x \ge 5 \end{cases}$	-2.5	3.4	3.5	6.5	0.6	2.89	3.54	5.21	6.28	3.48
5	$y = \sqrt[4]{\lvert x^2-2{,}5\rvert} + \sqrt[3]{\ln x^2}$	–	–	1.25	3.25	0.4	1.84	2.71	3.81	4.56	5.62
6	$y = \begin{cases} 1{,}2^x - x^{1.2}, \lvert x\rvert \ge 1 \\ \arccos x, \lvert x\rvert < 1 \end{cases}$	–	–	0.2	2.2	0.4	0.1	0.9	1.2	1.5	2.3
7	$y = \frac{a^x - b^x}{\lg\frac{a}{b}}\sqrt[3]{ab}$	0.4	0.8	3.2	6.2	0.6	4.48	3.56	2.78	5.28	3.21
8	$y = \frac{b^3+\sin^2 ax}{\arccos(xbx)+e^{-x/2}}$	1.2	0.048	0.7	2.2	0.3	0.25	0.36	0.56	0.94	1.28
9	$y = \frac{\lg(x^2 1)}{\log_5(ax^2-b)}$	1.1	0.09	1.2	2.2	0.2	1.21	1.76	2.53	3.48	4.52
10	$y = \frac{\arccos(x^2-b^2)}{\arcsin(x^2-a^2)}$	0.05	0.06	0.2	0.95	0.15	0.15	0.26	0.37	0.48	0.56
11	$y = \arcsin(x^a) + \arccos(x^b)$	2.0	3.0	0.11	0.36	0.05	0.08	0.26	0.35	0.41	0.53

Продолжение таблицы 5.6

Функция $y_i = f(x_i)$		Задача А					Задача В				
		a	b	x_H	x_K	Δx	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
12	$y = a^{x^2-1} - \lg(x^2-1) + \sqrt[3]{x^2-1}$	1.6	–	1.2	3.7	0.5	1.28	1.36	2.47	3.68	4.56
13	$y = \frac{a\sqrt{x} - b\log_5 x}{\lg\lvert x-1\rvert}$	4.1	2.7	1.2	5.2	0.8	1.9	2.15	2.34	2.73	3.16
14	$y = \sqrt{\frac{\lvert a-bx\rvert}{\lg^3 x}}$	7.2	4.2	1.81	5.31	0.7	2.4	2.8	3.9	4.7	3.16
15	$y = (\arcsin^2 x + \arccos^4 x)^3$	–	–	0.26	0.66	0.08	-.1	0.35	0.4	0.55	0.6
16	$y = \frac{\ln_a\lvert b^2 - x^2\rvert}{\sqrt[5]{\lvert x^2 - a^2\rvert}}$	2.0	1.1	0.08	1.08	0.2	0.1	0.3	0.4	0.45	0.65
17	$y = \frac{a + \operatorname{tg}^2 bx}{b + \operatorname{ctg}^2 ax}$	0.1	0.5	0.15	1.37	0.25	0.2	0.3	0.44	0.6	0.56
18	$y = \frac{(a+bx)^{2.5}}{1 + \lg(a+bx)}$	2.5	4.6	1.1	3.6	0.5	1.2	1.28	1.36	1.46	2.35
19	$y = \frac{\lg^2(a+x)}{(a+x)^2}$	2.0	-	1.2	4.2	0.6	1.16	1.32	1.47	1.65	1.93

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса

К решению систем линейных уравнений сводятся многочисленные практические задачи, например, различные краевые задачи для обыкновенных и в частных производных дифференциальных уравнений. Можно с полным основанием утверждать, что данная проблема является одной из самых распространенных и важных задач вычислительной математики.

Пусть задана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (5.1)$$

Система уравнений (5.1) в матричной форме представляется следующим образом

$$\mathbf{AX=B} \quad (5.2)$$

где **A** – квадратная матрица коэффициентов, размером n x n строк и столбцов; **X** – вектор –столбец неизвестных; **B** – вектор-столбец правых частей. Систему уравнений (5.2) можно решить различными методами. Одним из наиболее простых и эффективных методов является метод исключения Гаусса и его модификации. Алгоритм метода основан на приведении матрицы **A** к треугольному виду (прямой ход) и последовательном вычислении неизвестных (обратный ход). Эти процедуры можно выполнять над невырожденными матрицами, в противном случае метод Гаусса неприменим.

Недостатком метода является накапливание погрешностей в процессе округления, поэтому метод Гаусса без выбора главных элементов используется обычно для решения сравнительно небольших ($n \leq 100$) систем уравнений с плотно заполненной матрицей и не близким к нулю определителем. Если матрица **A** сильно разрежена, а ее определитель не близок к нулю, то метод Гаусса пригоден для решения больших систем уравнений.

В **MATLAB** имеется обширный арсенал методов решения систем уравнений (5.2) методом исключения Гаусса. Для этого применяются следующие операторы

`/` - правое деление;

`\` - левое деление;

`^-1` – возведение в степень –1;

`inv(A)` – обращение матрицы **A**.

Выражения

X = B/A

X = B*A^-1

X = B*inv(A)

X = A\B

дают решения ряда систем линейных уравнений **AX = B**, где **A** – матрица размером m x n, **B** - матрица размером n x k.

Более сложные случаи решения систем уравнений (5.2) с плохо обусловленной матрицей **A** освещены в работах [105-108, 195].

Пример 5.3

Решить систему 4-х линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1.1161x_1 + 0.1397x_2 + 0.1254x_3 + 0.1490x_4 = 1.5471; \\ 0.1582x_1 + 0.1768x_2 + 1.1675x_3 + 0.1871x_4 = 1.6471; \\ 0.1968x_1 + 1.2168x_2 + 0.2071x_3 + 0.2271x_4 = 1.7471; \\ 0.2368x_1 + 0.2568x_2 + 0.2471x_3 + 1.2671x_4 = 1.8471; \end{cases}$$

Протокол программы (в М-файле)

```
a =  [1.1161   0.1397   0.1254   0.1490;
      0.1582   0.1768   1.1675   0.1871;
      0.1968   1.2168   0.2071   0.2271;
      0.2368   0.2568   0.2471   1.2671];
b =  [1.5471;  1.6471;  1.7471;  1.8471];
X4 = a\b
```

Эта программа выдает решение заданной системы с помощью четвертого оператора в виде матрицы-столбца.

```
X4 =
    1.0406
    0.9351
    0.9870
    0.8813
```

Внимание. В м-файле матрица ***a*** набирается по строкам. а элементы матрицы правых частей ***b*** отделяются символом **;**, т.е. тоже набираются по строкам. Решение другими операторами системы уравнений (5.2) требует набора матрицы ***a*** по столбцам, а элементы правых частей ***b*** отделяются только пробелами!

```
a =  [1.1161   0.1582   0.1968   0.2368;
      0.1397   0.1768   1.2168   0.2568;
      0.1254   1.16758  0.2071   0.2471;
      0.1490   0.1871   0.2271   1.2671];
b =  [1.5471   1.6471   1.7471   1.8471];
X1 = b / a
X2 = b * a^-1
```

$X3 = b * \mathrm{inv}(a)$

Результат решения

X1=

1.0406 0.9351 0.9870 0.8813

X2=

1.0406 0.9351 0.9870 0.8813

X3=

1.0406 0.9351 0.9870 0.8813

Варианты заданий. Решить систему линейных алгебраических уравнений с помощью 4-х операторов. Данные взять из таблицы 5.7.

Таблица 5.7

1 $a_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & -3 \\ 10 & -2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 7 \\ -24 \\ 34 \\ -6 \end{bmatrix}$	2 $a_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 & -2 \\ 10 & 3 & -4 & 2 \\ 7 & -5 & 8 & -10 \\ 4 & 5 & -8 & 10 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$
3 $a_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$	4 $a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & 4 \\ 3 & -1 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$
5 $a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 7 & 14 & 20 & 27 \\ 5 & 10 & 16 & 19 \\ 3 & 5 & 6 & 13 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$	6 $a_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 6 \\ 6 & -3 & 7 & 8 \\ 8 & -4 & 9 & 10 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}$
7 $a_{ij=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 18 \\ -12 \end{bmatrix}$	8 $a_{ij=} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \\ 8 & -6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & 7 & 17 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 4 \\ 17 \end{bmatrix}$
9 $a_{ij=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 15 & 11 \\ -2 & 4 & 3 & 61 \\ -3 & -8 & 11 & -4 \\ 15 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 18 \\ -12 \end{bmatrix}$	10 $a_{ij=} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \\ 8 & -6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & 7 & 17 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 4 \\ 17 \end{bmatrix}$

Продолжение таблицы 5.7

11 $a_{ij=}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 9 & 11 \\ -5 & 6 & 5 & 3 \\ -4 & -7 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix}$	12 $a_{ij=}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -11 \\ 2 & -6 & -3 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 6 & 2 & 20 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 15 \\ -9 \end{bmatrix}$
13 $a_{ij=}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & 2 & 17 \\ 12 & 26 & 1 & 5 \\ 5 & 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -5 \\ -9 \end{bmatrix}$	14 $a_{ij=}\begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 & -19 \\ 5 & 9 & 12 & 3 \\ -4 & -3 & 1 & -8 \\ 2 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ -14 \\ 22 \end{bmatrix}$
15 $a_{ij=}\begin{bmatrix} 12 & 8 & 24 & -5 \\ 16 & 25 & 9 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 21 & -9 & -7 & 6 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 5 \\ -17 \\ 22 \\ 3 \end{bmatrix}$	16 $a_{ij=}\begin{bmatrix} -3 & -7 & 16 & 8 \\ -4 & 6 & 12 & 13 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 18 & -14 & 1 & 2 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ -31 \\ 41 \end{bmatrix}$
17 $a_{ij=}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 & 6 \\ 11 & 16 & 3 & 1 \\ 25 & 14 & -38 & 7 \\ -8 & 9 & -16 & -42 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$	18 $a_{ij=}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$
19 $a_{ij=}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$	20 $a_{ij=}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$
21 $a_{ij=}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 9 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 40 \\ 37 \end{bmatrix}$	22 $a_{ij=}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -8 \\ -8 \end{bmatrix}$
23 $a_{ij=}\begin{bmatrix} 3.2 & 5.4 & 4.2 & 2.2 \\ 2.1 & 3.2 & 3.1 & 1.1 \\ 1.2 & 0.4 & -0.8 & -0.8 \\ 4.7 & 10.4 & 9.7 & 9.7 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 2.6 \\ 4.8 \\ 3.6 \\ -8.4 \end{bmatrix}$	24 $a_{ij=}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 22 \end{bmatrix}$

Продолжение таблицы 5.7

25 $a_{ij=}\begin{bmatrix}1 & 1 & -6 & -4\\ 3 & -1 & -6 & -4\\ 2 & 3 & 9 & 2\\ 3 & 2 & 3 & 8\end{bmatrix};b_i=\begin{bmatrix}6\\ 2\\ 6\\ -7\end{bmatrix}$	26 $a_{ij=}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 2\\ 6 & -4 & 2 & 4\\ 6 & -3 & 4 & 8\\ 4 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix};b_i=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 9\\ 1\end{bmatrix}$
27 $a_{ij=}\begin{bmatrix}12 & 14 & -15 & 24\\ 16 & 18 & -22 & 29\\ 18 & 20 & -21 & 32\\ 10 & 12 & -16 & 20\end{bmatrix};b_i=\begin{bmatrix}5\\ 8\\ 9\\ 4\end{bmatrix}$	28 $a_{ij=}\begin{bmatrix}24 & 14 & 30 & 40\\ 36 & 25 & 45 & 61\\ 48 & 28 & 60 & 82\\ 60 & 35 & 75 & 99\end{bmatrix};b_i=\begin{bmatrix}28\\ 43\\ 58\\ 69\end{bmatrix}$
29 $a_{ij=}\begin{bmatrix}5 & -3 & 2 & 4\\ 4 & -2 & 3 & 7\\ 8 & -6 & -1 & -5\\ 7 & -3 & 7 & 17\end{bmatrix};b_i=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 9\\ 15\end{bmatrix}$	30 $a_{ij=}\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & 4\\ 4 & -8 & 5 & 6\\ 6 & -5 & 7 & 8\\ 12 & -4 & -9 & 10\end{bmatrix};b_i=\begin{bmatrix}5\\ 7\\ 9\\ 13\end{bmatrix}$

Аппроксимация функций

Одним из распространенных и практически важных случаев связи между аргументом и функцией является задание этой связи в виде некоторой таблицы $\{x_i;y_i\}$, например, экспериментальные данные. На практике часто приходится использовать табличные данные для приближенного вычисления y при любом значении аргумента x (из некоторой области). Этой цели служит задача о приближении (аппроксимации) функцией: данную функцию $f(x)$ требуется приближенно заменить некоторой функцией $g(x)$ так, чтобы отклонение $g(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция $g(x)$ при этом называется аппроксимирующей. Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$, то аппроксимация называется точечной. К ней относятся интерполирование, среднеквадратичное приближение и др. При построении приближения на непрерывном множестве точек (например, на отрезке $[a,b]$) аппроксимация называется непрерывной или интегральной. **MATLAB** имеет мощные средства точечной и непрерывной аппроксимации с визуализацией результата. Рассмотрим наиболее важную точечную аппроксимацию (обработка экспериментальных данных).

Пример 5.4

Используя линейную и полиномиальную аппроксимации, получить эмпирические формулы для функции $y=f(x)$, заданной в табличном виде:

x_i	0.75	1.50	2.25	3.00	3.75
y_i	2.50	1.20	1.12	2.25	4.28

Оценить погрешность эмпирических формул.

Протокол программы.

В окне команд набираются значения x_i и y_i. Далее выполняется команда построения графика только узловых точек.

```
>> x=[0.75,1.50,2.25,3.00,3.75];
>> y=[2.50,1.20,1.12,2.25,4.28];
>> plot(x,y,'0');
```

Появляется окно с символами ‘o’ на месте узловых точек (рисунок 5.2).

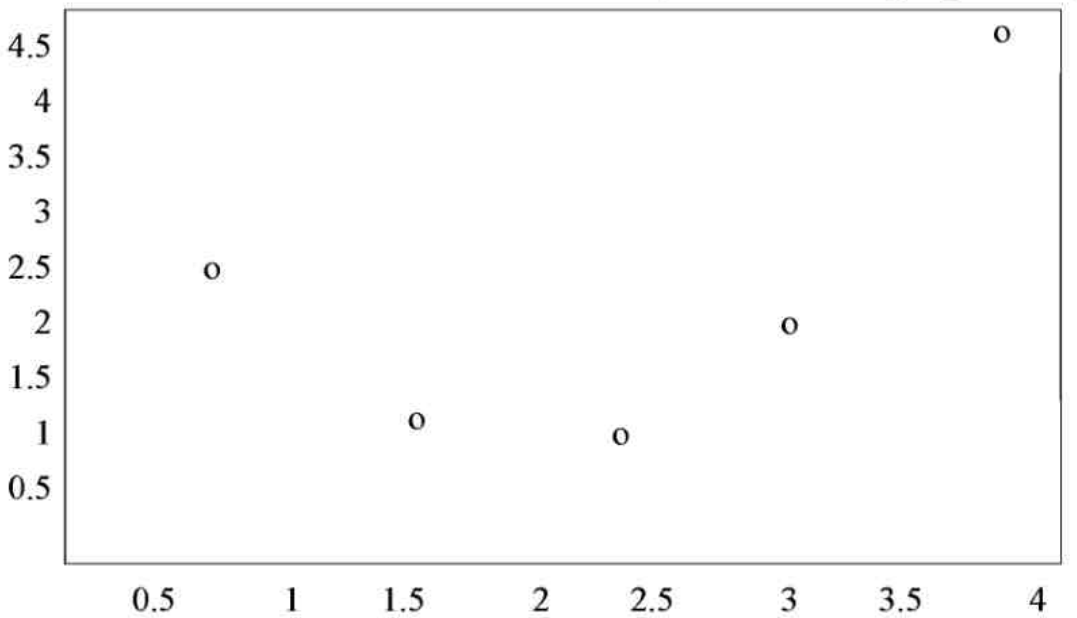


Рисунок 5.2

Внимание. Следует помнить, что при полиномиальной аппроксимации максимальная степень полинома на 1 меньше числа экспериментальных точек.

На панели инструментов окна графика узловых точек в меню Tools исполняем команду Basic Fitting. Появится окно Основной Монтаж. В этом окне птичкой отмечаются необходимые данные аппроксимации. В частности, можно задать следующие операции:

- показать уравнения аппроксимирующей функции $y = g(x)$;

- выбрать метод подбора: сплайн интерполяция
  эрмитовская интерполяция
  линейный
  квадратные
  кубический
  ……..
  многочлен 10-й степени.

В нашей задаче выбираем линейную и полиномиальную аппроксимации. В окне графика появится соответствующие графики разным цветом и формулы аппроксимирующих функций (рисунок 5.3).

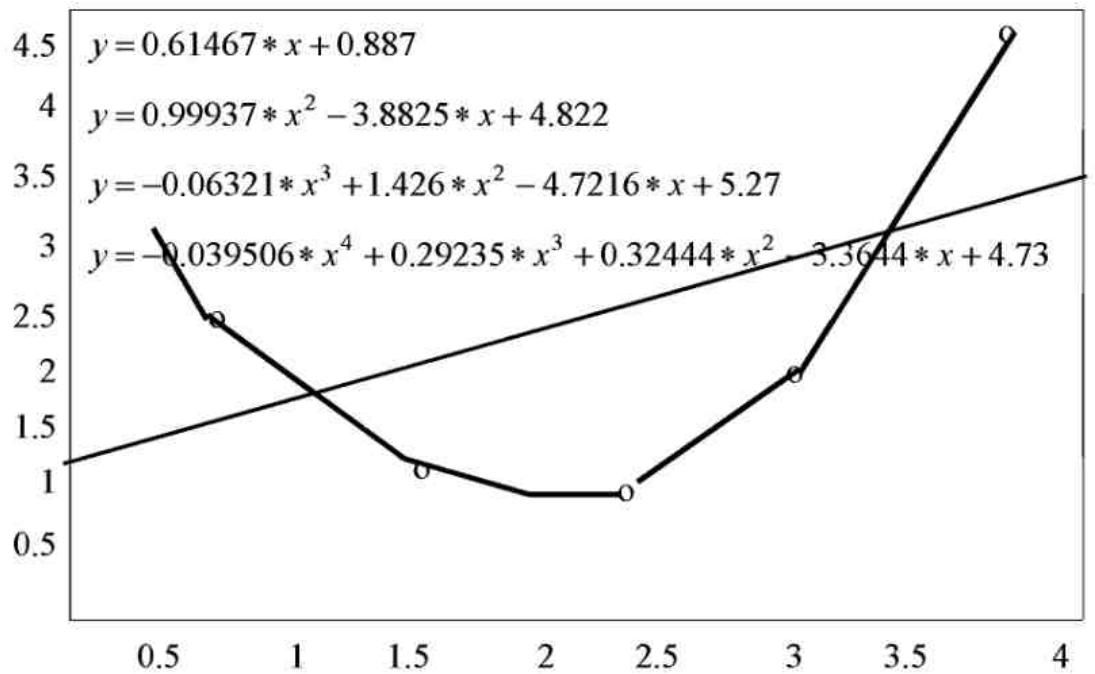


Рисунок 5.3

Чтобы узнать погрешность аппроксимации, надо отметить птичкой параметр График остатка в окне Основной Монтаж и Показать норму остатков. График погрешностей с нормами можно вынести в отдельное окно, или вместе с графиками аппроксимирующих функций – суб-график. Норма погрешностей указывает на статистическую оценку среднеквадратичной погрешности. Чем она меньше, тем точнее полученная аппроксимирующая функция $y = g(x)$. В нашем примере:

Linear : norm of residuals *(норма погрешности)* = 2.1061

Quadratic : norm of residuals = 0.10736

Cubic : norm of residuals = 0.035857

4 th degree : norm of residuals = 9.6305e– 015 .

График погрешностей можно выводить в виде диаграмм (зоны), линий (линии) или отдельных точек (фрагменты). Сам график погрешностей представляет собой зависимость разности $g(x)-f(x)$ в узловых точках, соединенных прямыми линиями.

Кроме линейной и полиномиальной аппроксимации можно выбрать сплайн-аппроксимацию – когда на каждом интервале приближения используется кубический полином с новыми коэффициентами. В этом случае нельзя получить выражение для аппроксимирующей функции, т.е. такая аппроксимация является неполной. Аналогичными свойствами обладает и Эрмитовая аппроксимация. Она имеет только графическую интерпретацию.

Варианты заданий. Получить эмпирические формулы и оценить их погрешность для функции $y=f(x)$, заданной таблично. Данные взять из таблицы 5.8.

Таблица 5.8

1	x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y_i	-0.71	-0.01	0.51	0.82	0.88	0.51	049
2	x_i	-6.6-	-5.38	-3.25	-1ю76	2.21	3.6	4.5
	y_i	2.89	1.41	0.29	-0.41	-0.69	-0.7	1.2
3	x_i	0	1	2	3	4	6	
	y_i	-0.31	0.9	2.11	3.3	4.51	5.73	6.93
4	x_i	-2	-1	0	1	2	3	4
	y_i	7.1	3.9	1.1	0.8	3.1	4.5	5.3
5	x_i	-2	-1	-0.5	0	1.5	2	3.5
	y_i	5.9	2.8	2.1	3.2	6.1	7.6	4.3
6	x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y_i	3.1	0.9	0.9	2.8	7.1	6.5	4.1
7	x_i	0	1	2	3	4	5	6
	y_i	10.0	7.5	5.5	4.0	3.0	2.0	2.24
8	x_i	-2	-1	0	1.5	2.3	2.6	2.9
	y_i	4.2	5.6	6.8	7.2	9.4	10.5	11.8
9	x_i	10.0	12.0	13.0	15.0	18.0	20.0	21.0
	y_i	0.66	0.89	1.24	1.36	1.56	1.76	1.92
10	x_i	22.0	24.0	27.0	30.0	31.0	35.0	40.0
	y_i	1.24	1.37	1.46	1.26	1.66	1.84	1.99
11	x_i	-7.0	-6.0	-5.0	-4.0	-3.0	-2.0	-1.0
	y_i	22.6	24.7	25.6	24.6	23.5	21.8	19.3

Продолжение таблицы 5.8

12	x_i	-25.0	-23.0	-21.0	-18.0	-17.2	-15.4	-14.0
	y_i	0.76	0.74	0.61	0.58	0.84	0.92	1.22
13	x_i	-4.0	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
	y_i	1.71	1.56	1.24	1.36	1.78	2.21	4.31
14	x_i	-22.0	-20.0	-18.0	-16.0	-14.0	-12.0	-10.0
	y_i	-2.26	-1.84	-1.92	-1.76	-1.56	-1.64	-1.34
15	x_i	23.0	24.0	25.0	26.0	27.0	28.0	29.0
	y_i	1.26	1.37	1.44	1.56	1.15	1.28	1.06
16	[redacted]	30.0	33.0	35.0	37.0	39.0	41.0	43.0
	y_i	-2.6	-3.7	-2.5	-4.3	-2.3	-5.6	-1.9
17	x_i	44.0	45.0	46.0	47.0	48.0	49.0	50.0
	y_i	2.24	3.46	5.36	1.89	1.76	1.54	2.12
18	x_i	52.0	54.0	56.0	58.0	60.0	62.0	64.0
	y_i	-1.28	-1.33	-1.44	-1.67	-1.77	-2.81	-2.16
19	x_i	2.2	2.6	3.0	3.4	3.8	4.2	4.6
	y_i	1.88	1.65	1.61	1.73	1.56	1.24	1.99
20	x_i	5.1	5.3	5.5	5.7	5.9	6.1	6.3
	y_i	-2.8	-3.6	-5.7	-3.4	-1.9	-1.7	-1.5
21	x_i	7.15	7.35	7.55	7.75	7.95	8.15	8.35
	y_i	-2.2	-3.6	-1.7	-2.8	-1.6	-4.5	-2.2
22	x_i	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7
	y_i	1.48	2.16	2.08	1.96	1.81	2.31	5.61
23	x_i	-10.2	-10.1	-10.0	-9.9	-9.8	-9.7	-9.6
	y_i	-6.5	-7.8	-10.2	-5.4	-4.6	-9.5	10.3
24	x_i	11.0	14.0	17.0	20.0	23.0	26.0	29.0
	y_i	1.2	1.6	1.9	1.1	1.16	1.24	1.36
25	x_i	-50.0	-48.0	-46.0	-44.0	-42.0	-40.0	-38.0
	y_i	1.23	1.32	1.57	1.19	1.16	1.10	2.28
26	x_i	-36.0	-34.0	-32.0	-30.0	-28.0	-26.0	-24.0
	y_i	1.1	1.3	2.1	1.9	1.7	1.5	1.8
27	x_i	21.0	23.0	24.0	28.0	31.0	32.0	36.0
	y_i	1.24	1.37	1.56	1.64	1.84	1.26	1.14
28	x_i	10.0	13.0	17.0	22.0	28.0	35.0	43.0
	y_i	1.21	1.36	1.51	1.84	1.06	1.21	1.36

Продолжение таблицы 5.8

29	x_i	-1.0	0.0	3.0	5.0	8.0	12.0	15.0
	y_i	-2.1	-3.6	1.2	-4.3	1.8	2.6	-0.2
30	x_i	-8.0	-7.0	-5.0	-3.0	-1.0	2.0	5.0
	y_i	1.36	1.88	2.45	-2.1	-10.2	-4.4	1.16

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Многие задачи физики, химии, экологии, механики и других разделов науки и техники при их математическом моделировании сводятся к дифференциальным уравнениям. Поэтому решение дифференциальных уравнений является одной из важнейших математических задач. В вычислительной математике изучаются численные методы решения дифференциальных уравнений, которые особенно эффективны в сочетании с использованием персональных компьютеров.

Среди множества численных методов решения дифференциальных уравнений наиболее простые – это явные одношаговые методы. К ним относятся различные модификации метода Рунге-Кутта.

Постановка задачи:

Требуется найти функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \qquad (5.3)$$

и принимающую при $x = x_0$ заданное значение y_0:

$$y(x_0) = y_0 \qquad (5.4)$$

При этом решение необходимо получить в интервале $x_0 \le x \le x_k$. Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение $y(x)$ задачи Коши (5.3), (5.4) существует, единственно и является гладкой функцией, если правая часть $F(x, y)$ удовлетворяет некоторым условиям гладкости. Численное решение задачи Коши методом Рунге-Кутта 4-го порядка заключается в следующем. На заданном интервале $[x_0, x_k]$ выбираются узловые точки. Значение решения в нулевой точке известно $y(x_0) = y_0$. В следующей точке $y(x_1)$ определяется по формуле

$$y_1 = y_0 + (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)/6, \qquad (5.5)$$

здесь

$$k_0 = hF(x_0, y_0);\ \ k_1 = hF(x_0 + h/2,\ y_0 + k_0/2); \qquad (5.6)$$

$k_2 = hF(x_0 + h/2,\ y_0 + k_1/2);\ k_3 = hF(x_0 + h,\ y_0 + k_2);\ \ h$ - шаг сетки;

т.е. данный вариант метода Рунге-Кутта требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнения (5.3). Этот алгоритм реализован в программе ode 45. Кроме этой программы **MATLAB** располагает обширным набором аналогичных программ, позволяющих успешно решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Пример 5.5

Решить задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(x^2 + y^2\right) \text{ на } [0;1] \text{ при } y(0) = 1. \qquad (5.7)$$

Точное решение имеет вид

$$y(x) = 1.5e^{2x} - x^2 - x - 0.5.$$

Приведем решение данной задачи численно с помощью программы ode 45. Вначале в М-файле записываем правую часть уравнения (5.7), сам М-файл оформляется как файл-функция, даем ему имя **F:**

$$function\ \ dydx = F(x, y)$$

$$dydx = zeros(1,1);$$

$$dydx(1) = 2 * \left(x\hat{}\,2 + y(1)\right);$$

Для численного решения задачи Коши в окне команд набираются следующие операторы

Протокол программы

>>[X Y] = ode 45(@F, [0 1], [1]);

% Дескриптор @ обеспечивает связь с файлом-функцией правой части

% [0 1] – интервал, на котором необходимо получить решение

% [1] – начальное значение решения

>>plot (X,Y);

>> % Построение графика численного решения задачи Коши (5.7)

>>hold on; gtext ('y (x)')

% Команда позволяет с помощью мыши нанести на график надпись y(x)

>>[X Y]

>> % Последняя команда выводит таблицу численного решения задачи

Результаты решения. График решения задачи Коши (5.7) показан на рисунке 5.4. Численное решение представлено в таблице 5.9, где приведены только отдельные точки. В программе ode45 по умолчанию интервал разбивается на 40 точек с шагом $h = 1/40 = 0.025$.

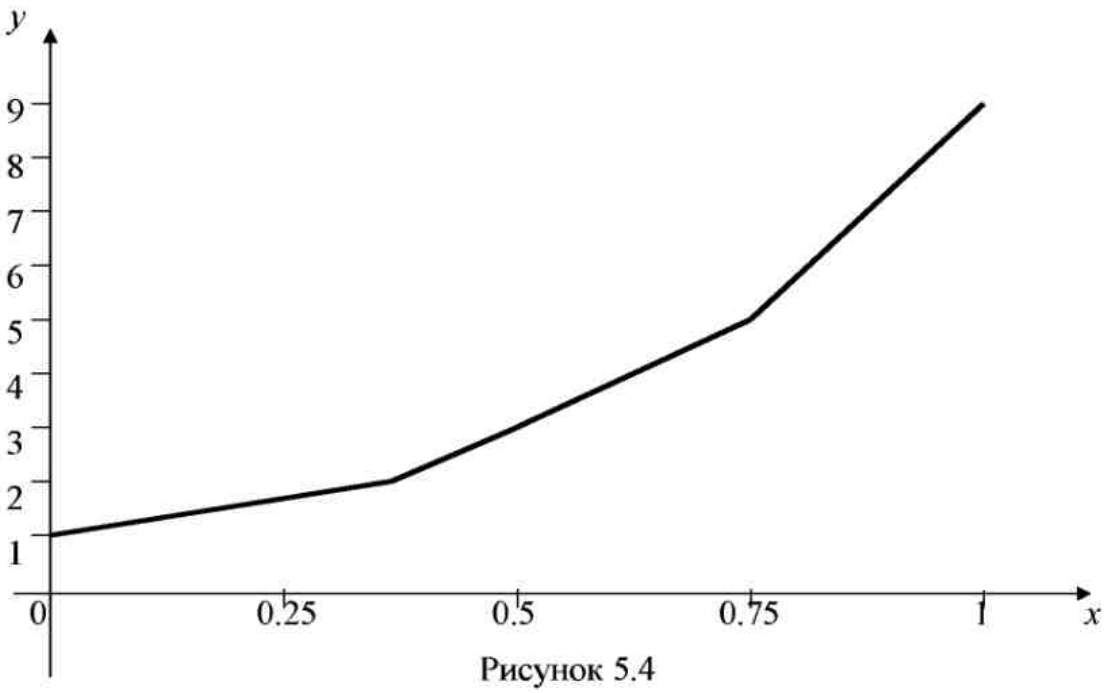


Рисунок 5.4

Таблица 5.9

x_i	Метод Рунге-Кутта	Точное решение
0.0	1.0	1.0
0.1	1.2221	1.2221
0.2	1.4977	1.4977
0.3	1.8432	1.8432
0.4	2.2783	2.2783
0.5	2.8274	2.8274
0.6	3.5202	3.5202
0.7	4.3928	4.3928
0.8	5.4895	5.4895
0.9	6.8645	6.8645
1.0	8.5836	8.5836

Как следует из таблицы 5.9 численное решение программой ode 45 является точным.

Варианты заданий. Построить график и вывести в виде таблицы решение задачи Коши на интервале [0;1] методом Рунге-Кутта 4-го порядка.

Данные взять из таблицы 5.10

	$f(x,y)$	y_0
1	$x^3 \sin y + 1$	0.0
2	$x^2 \sin y - 1$	0.1
3	$e^{+x} + 3y$	2.0

Продолжение таблицы 5.10

	$f(x,y)$	y_0
4	y^2+x^3	0.3
5	y^3+x^2	0.4
6	$1/(1+y^2)+x^2$	0.0
7	$1/(1+y^2)+xy$	0.1
8	$\cos y+xy$	0.2
9	$x^2\cos y+0.1$	0.3
10	$x^3\cos y+0.1$	0.4
11	$\cos(xy)-0.5$	0.5
12	$e^{-y}+e^x-2$	0.0
13	$e^{-y}-e^x-0.1$	0.5
14	$e^{-xy}+1$	0.4
15	y^2+x^4	0.3
16	$(xy^2+\sqrt{x})$	0.2
17	$\cos(x+y)+x^2$	0.1
18	$\sin(x+y)-x^2$	0.0
19	$\sin(xy)+1$	0.1
20	$\sin y+xy$	0.2
21	$(x^2+y^2)\cdot x$	0.3
22	$e^x(1+xy)$	0.4
23	$e^y(1+xy)$	0.5
24	$\mathrm{Ln}(1+x^2)+y$	0.6
25	$1+ye^{x^2}$	0.7
26	$\sin x^2+y^2$	0.0
27	$\cos x^2+xy$	0.1
28	$\sin[y/(1+x^2)]+1$	0.2
29	$\mathrm{Ln}(1+y^2)+x$	0.3
30	$1+xe^{y^2}$	0.4

Приближенное вычисление определенных интегралов

К вычислениям определенных интегралов сводятся многие практические задачи физики, химии, экологии, механики и других естественных наук. На практике формулой Ньютона-Лейбница не всегда

удается воспользоваться. В этом случае используются методы численного интегрирования. Они основаны на следующих соображениях: с геометрической точки зрения определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции. Идея методов численного интегрирования сводится к разбиению интервала $[a;b]$ на множество меньших интервалов и нахождению искомой площади как совокупности элементарных площадей, полученных на каждом частичном промежутке разбиения. В зависимости от использованной аппроксимации получаются различные формулы численного интегрирования, имеющие различную точность. Рассмотрим методы трапеций и Симпсона (парабол).

Метод трапеций

Здесь используется линейная аппроксимация, т.е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющей точки y_i. Формула трапеций при постоянном шаге $h = \frac{b-a}{n}$, где n - число участков, имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) \qquad (5.8)$$

В **MATLAB** данную формулу реализует программа trapz(x,y).

Метод Симпсона

Если подынтегральную функцию заменить параболой, то формула Симпсона с постоянным шагом интегрирования предстанет в виде

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots y_{n-2}) + y_n] \qquad (5.9)$$

В **MATLAB** формула Симпсона реализуется программой quad. Подынтегральная функция может задаваться с помощью дескриптора @, тогда она программируется в файле-функции, или с помощью апострофов, тогда она записывается в самой программе quad. Точность вычисления интегралов по умолчанию принята равной $1 \cdot 10^{-6}$.

Пример 5.6. Вычислить и вывести на печать по методам трапеций и Симпсона значения интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Протокол программы метода трапеций

```
>> x = 0:0.0001:1.0;
>> y = 1./(1+x.^2);
>> z = trapz(x,y)
```

Результат вычислений

```
z =
    0.7854
```

Протокол программы метода Симпсона

```
>> quad('(1./(1+x.^2))',0,1)
```

Результат вычислений

```
ans =
    0.7854
```

Точное значение интеграла равно 0.785398163. Как видно из примера 5.6 полученные результаты являются практически точными, а сами протоколы весьма просты.

Варианты заданий. Вычислить и вывести на печать значения определенного интеграла методами трапеций и Симпсона. данные взять из таблицы 5.11.

Таблица 5.11

	Подынтегральная функция $f(x)$	Интервал интегрирования $[a;b]$	Точность вычислений интеграла
1	$\ln x / x\sqrt{1+\ln x}$	$[1;3.5]$	0.001
2	$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x$	$[\pi/6;\pi/3]$	0.002
3	$1/x \cdot \ln x$	$[1.5;\ 3.0]$	0.0001
4	$\ln^2 x / x$	$[1.0;\ 4.0]$	0.003
5	$\sqrt{e^x - 1}$	$[0;\ ln2]$	0.0015
6	$xe^x \sin x$	$[1.0;\ 4.0]$	0.002
7	$x\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$[0.0;\ 2.0]$	0.001
8	$1/\sqrt{9+x^3}$	$[2.0;\ 5.0]$	0.001
9	$\sin(1/x)/x^4$	$[1.0;\ 2.5]$	0.0005

Продолжение таблицы 5.11

	Подынтегральная функция $f(x)$	Интервал интегрирования $[a;b]$	Точность вычислений интеграла
10	$x^3 \operatorname{arctg} x$	$[0.0;\ \sqrt{3}]$	0.003
11	$\arcsin\sqrt{x/(1+x)}$	$[0.0;\ 3.0]$	0.001
12	$x^2(1+\ln x)$	$[1.5;\ 3.0]$	0.0025
13	$1/\sqrt{1+3x+2x^2}$	$[0.0;\ 5.0]$	0.001
14	$\sqrt{x^2-0.14}/x$	$[2.3;\ 6.0]$	0.002
15	$2^{3x}\ln\lvert\cos x\rvert$	$[0.0;\pi/2]$	0.001
16	$(e^{3x}+1)/(e^x+1)$	$[0.0; 2.0]$	0.0015
17	$x\operatorname{arctg} x/\sqrt{1+x^2}$	$[0.0; 2.0]$	0.002
18	$\sin\ x/\ln(1+x^3)$	$[0.0;\pi/4]$	0.001
19	$x^2\sqrt{4-x^2}$	$[0.0; 1.8]$	0.0006
20	$e^x\cos^2 x$	$[0.0;\pi]$	0.0016
21	$(1.5x^2+x)/(x^3+2)$	$[0.0; 1.2]$	0.002
22	$(\sin x - x^3)/(x^2+2.7)$	$[2.0; 4.4]$	0.0014
23	$(3.5\operatorname{tg} x + x)/(x^3+3.7)$	$[0.0; 1.2]$	0.002
24	$(1.2-3.2x^2)/(1+\sin^2 x)$	$[2.0; 4.4]$	0.0011
25	$(3.17x+4.2)/\cos^2 x$	$[1.0; 2.2]$	0.0023
26	$(x^2+3.2)/(x^5+4.7)$	$[0.0; 1.8]$	0.0015
27	$(1.5x^2+x)/(x^3+2)$	$[0.0; 1.2]$	0.001
28	$e^x\ln\lvert\sin x^2\rvert$	$[1.0;\ 3.0]$	0.002
29	$\operatorname{tg} x^2/e^{-x^2}$	$[0.0; 1.0]$	0.0013
30	$(1/6x-2.7)/(1.5x^3+3.9$	$[1.0; 2.2]$	0.0025

Численное решение нелинейных уравнений

Задача нахождения корней нелинейных уравнений встречается в различных областях научно-технических исследований. Проблема формулируется следующим образом. Пусть задана непрерывная функция $f(x)$ и требуется найти корень уравнения

$$f(x) = 0.$$

Будем предполагать, что имеется интервал изменения x $[a; в]$, на котором необходимо исследовать функцию $f(x)$ и найти значение x_0, при котором $f(x_0)$ равно или весьма мало отличается от нуля.

Данная задача в системе MATLAB может быть решена следующим образом. Вначале необходимо построить график функции $f(x)$ на заданном интервале и убедиться в существовании корня или нескольких корней. Затем применить программы поиска корней. Если существует один корень и график $f(x)$ пересекает ось OX, то можно применить программу fzero. Если $f(x)$ имеет больше одного корня и может касаться и пересекать ось OX, то следует применить более мощную программу fsolve из пакета Optimization Toolbox, которая решает задачу методом наименьших квадратов. Программа fzero использует известные численные методы: деление отрезка пополам, секущей и обратной квадратичной интерполяции.

Пример 5.7. Найти корень нелинейного уравнения $10^x + 2x - 100 = 0$ на интервале [1.0; 2.0].

Протокол программы

```
>> % Строим график заданной функции
>> x = 1.0:0.001:2.0;  y = 10.0.^x + 2.0*x - 100.0;
>> plot(x,y); grid on
```

Появляется окно с графиком функции $y = 10^x + 2x - 100$ (рисунок 5.5), из которого следует, что корень функции на заданном интервале существует. Для точного определения корня применяем программы *fzero* и *fsolve*.

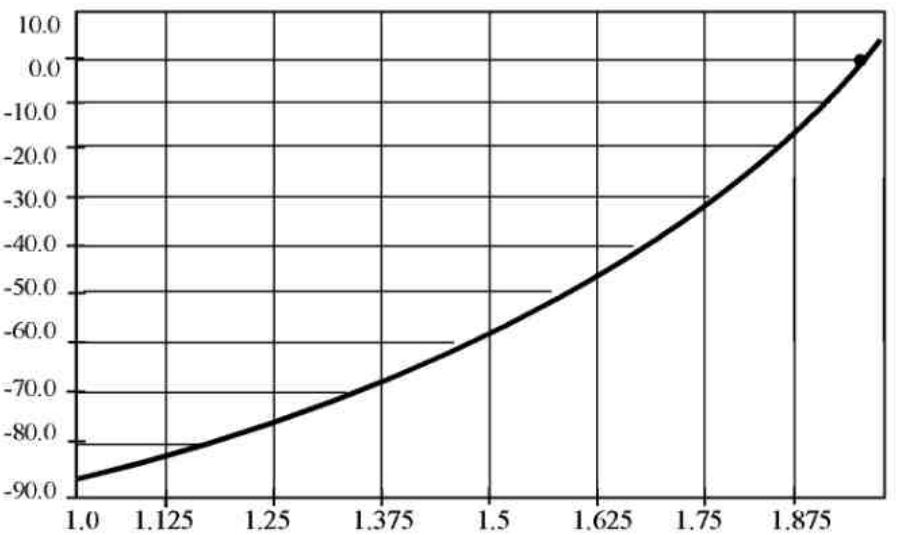


Рисунок 5.5

>> *x*1 = *fzero* ('(10.0.^*x* + 2.0**x* – 100.0)', [1.0 2.0])

Результат решения

*x*1 =

1.9824

>> *x*2 = *fsolve* ('(10.0.^*x* + 2.0**x* – 100.0)', 1.0 : 2.0)

Результат решения

*x*2 =

1.9824 1.9824

Варианты заданий. Построить график и найти корень нелинейного уравнения. Данные взять из таблицы 5.12.

Таблица 5.12

	Уравнение $f(x) = 0$	Отрезок $[a;\ в]$
	1	2
1	$x\,\mathrm{arctg}\,x - 1 = 0$	$[1.0;\ \sqrt{3}]$
2	$e^{x-2} - \ln(x+2) = 0$	[2.0; 3.0]
3	$x^3 - 9x^2 + 5x - 6 = 0$	[8.0; 9.0]
4	$e^x - \frac{1}{x} - 1 = 0$	[0.5; 1.0]
5	$\mathrm{arctg}2x - \frac{1}{1+x} = 0$	[0.0; 1.0]
6	$e^x - \ln x - 20 = 0$	[3.0; 3.2]
7	$\sqrt{x} - tgx(1-x) = 0$	[0.0; 1.0]
8	$\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 0$	[0.0; 0.2]
9	$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$	[0.8; 1.0]
10	$x^3 - e^{4x} - 5.5 = 0$	[2.6; 3.0]
11	$x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0$	[1.0; 1.5]
12	$\sqrt[3]{5-x} - x = 0$	[1.0; 2.0]
13	$x^2 - \ln x = 0$	[0.0; 1.0]
14	$x^2 - \cos x = 0$	[0.0; 1.0]
15	$\ln x - \mathrm{arctg}x = 0$	[3.0; 4.0]
16	$x^2\mathrm{arctg}x - 1 = 0$	[1.0; 1.2]
17	$x^2 + \ln x - 4 = 0$	[1.0; 2.0]
18	$x - \mathrm{arctg}\sqrt[3]{x} = 0$	[0.0; 1.0]
19	$x^2 - e^x - 2 = 0$	[-0.2; -0.1]
20	$x^2 - \ln(x+1) = 0$	[0.1; 0.9]
21	$x^5 - x - 2 = 0$	[1.0; 1.4]
22	$x - 2 - \sqrt[4]{x} = 0$	[3.0; 4.0]
23	$x - tgx = 0$	[0.0; 1.5]
24	$x + \ln x - 0.5 = 0$	[0.0; 1.0]

Продолжение таблицы 5.12

1		2
25	$\ln x + \sqrt{x} = 0$	[0.1; 1.0]
26	$\sqrt{x} - \cos\sqrt{x} = 0$	[0.4; 0.6]
27	$x^2 - \ln(1 + x^2) - 9.75 = 0$	[3.0; 4.0]
28	$x + \sqrt[3]{x} - 6.09 = 0$	[4.0; 5.0]
29	$x^3 - \sqrt{x} - 9.5 = 0$	[2.0; 3.0]
30	$\arccos 2x - x^2 - 0.35 = 0$	[0.0; 0.48]

Численное решение оптимизационных задач

Под оптимизацией понимают процесс выбора наилучшего варианта из всех возможных. С точки зрения инженерных расчетов методы оптимизации позволяют выбрать наилучший вариант конструкции, наилучшее распределение ресурсов, минимальный урон природной среде и т.п. В процессе решения задачи оптимизации необходимо найти оптимальные значения некоторых параметров, их называют проектными параметрами. Выбор оптимального решения проводится с помощью некоторой функции, называемой целевой функцией.

Целевую функцию можно записать в виде:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (5.10)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – проектные параметры.

Можно выделить 2 типа задач оптимизации – безусловные и условные. Безусловная задача оптимизации состоит в отыскании максимума или минимума функции (5.10) от n действительных переменных и определении соответствующих значений аргументов на некотором множестве G n-мерного пространства. Обычно рассматриваются задачи минимизации; к ним легко сводятся и задачи на поиск максимума путем замены знака целевой функции на противоположный. Условные задачи оптимизации – это такие, при формулировке которых задаются некоторые условия (ограничения) на множестве G. Здесь рассмотрим только безусловные задачи оптимизации.

Поиск минимума функции одной переменной

Для решения этой задачи используется методы золотого сечения или параболической интерполяции (в зависимости от формы задания функции), реализованные в программе fminbnd.

Пример 5.8. Найти и вывести на печать минимальное значение функции $f(x) = 24 - 2x/3 + x^2/30$ на [5; 20].

Строим график этой функции, чтобы убедиться в наличии минимума на заданном интервале.

Протокол программы

```
>> x = 5.0:0.001:20.0;  y = 24 - 2*x/3 +x.^2/30;
>> plot (x,y);  grid  on
```

Появляется окно с графиком этой функции (рисунок 5.6), где отмечаем наличие минимума.

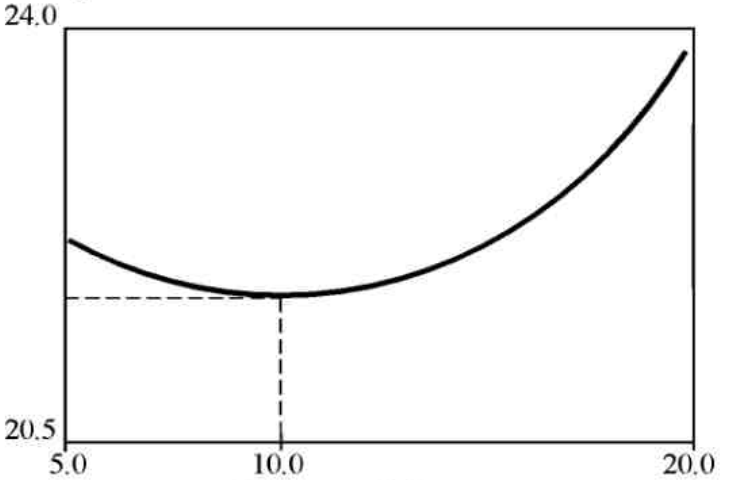


Рисунок 5.6

Далее, для точного определения координаты и значения минимума привлекаем программу fminbnd.

```
>> x2 = fminbnd ('(24.0 - 2*x/3 +x.^2/30)', 5.0 : 20.0)
```

Результат поиска

```
x =
    10.0000
y =
    20.6667
```

Варианты заданий. Найти и вывести на печать координату и минимальное значение $f(x)$ на $[a; в]$. Данные взять из таблицы 5.13.

Таблица 5.13

	Функция $f(x)$	Отрезок $[a;\ в]$
	1	2
1	$f(x) = x / \ln x$	[1.2; 4.0]
2	$f(x) = x - 2\sin x$	[0; π/2]
3	$f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$	[-2.0; 2.0]
4	$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 1$	[-2.0; 2.0]
5	$f(x) = x - 2\ln x$	[1.0; 3.0]
6	$f(x) = e^x \cos x$	[π; 3π/2]
7	$f(x) = (1 - x + x^2)/(1 + x - x^2)$	[0.0; 1.0]
8	$f(x) = -\sqrt{2x - x^2}$	[0.0; 2.0]
9	$f(x) = (x - 2)^5 (2x + 1)^4$	[-0.5; 1.5]
10	$f(x) = x^x$	[0.1; 1.0]
11	$f(x) = e^{-1/x^2}$	[-0.5; 0.5]
12	$f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$	[-1.0; 0]

Продолжение таблицы 5.13

1		2
13	$f(x)=((e^{x}+e^{-x})/2)^{3}+1$	[-0.5; 0.5]
14	$f(x)=-x/(x^{3}+2)$	[0.5; 1.5]
15	$f(x)=x^{2}/\sqrt[3]{x^{3}-4}$	[1.6; 2.2]
16	$f(x)=\sqrt{\lvert x^{2}-3\rvert}/x$	[1.0; 2.0]
17	$f(x)=x^{2}\sqrt{\lvert x^{2}-1\rvert}$	[1.1; 1.6]
18	$f(x)=1/(\sin x+\cos x)$	[0; π/3]
19	$f(x)=x/2+\operatorname{arctg} x$	[0.5; 1.2]
20	$f(x)=xe^{-x^{2}/2}$	[-1.5; -0.5]
21	$f(x)=e^{-1/x^{2}}/x$	[-2.0; -1.0]
22	$f(x)=-\lvert x\rvert^{3}e^{-x^{2}/2}$	[-2.0; -1.0]
23	$f(x)=x^{2}\ln x$	[0.1; 1.0]
24	$f(x)=x\ln^{2}\lvert x\rvert$	[-0.05; -0.2]
25	$f(x)=x\operatorname{arctg} x$	[-0.5; 0.5]
26	$f(x)=\sin x+\cos x$	[π; 3π/2]
27	$f(x)=-\ln x/x^{2}$	[1.0; 2.0]
28	$f(x)=x^{2}\ln^{2} x$	[0.1; 0.5]
29	$f(x)=\sin x/x$	[π; 2π]
30	$f(x)=-x^{1/x}$	[2.0; 3.0]

Поиск минимума функций нескольких переменных

Данная задача значительно сложнее первой. Рассмотрим ее решение на примере функции двух переменных. Алгоритм может быть распространен на функции большего числа переменных. Для минимизации функций нескольких переменных MATLAB использует симплекс-метод Нелдера-Мида. Данный метод является одним из лучших методов поиска минимума функций многих переменных, где не вычисляются производные или градиент функции. Он сводится к построению симплекса в *n*-мерном пространстве, заданного *n* +1 вершиной. В двумерном пространстве симплекс является треугольником, а в трехмерном – пирамидой. На каждом шаге итераций выбирается новая точка решения внутри или вблизи симплекса. Она сравнивается с одной из вершин симплекса. Ближайшая к этой точке вершина симплекса заменяется этой точкой. Таким образом, симплекс перестраивается и позволяет найти новое, более точное положение точки решения. Алгоритм поиска повторяется, пока размеры симплекса по всем переменным не станут меньше заданной погрешности решения.

Программу, реализующую симплекс-методы Нелдера-Мида, удобно использовать в следующей записи:

$$[x,\ min\ f] = fminsearch(\ldots),$$

где x – вектор координат локального минимума;

$min\ f$ – значение целевой функции в точке минимума.

Саму целевую функцию удобно представить с помощью дескриптора @ в М-файле.

Пример 5.9. Найти и вывести на печать координаты и значение минимума функции двух переменных

$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 3)^2 + (x^2 + y^2 - 2x - 3)^2 + 1,$

если начальная точка поиска имеет координаты $M_0(1; 1)$.

Анализ функции показывает, что $min\ f = 1$ при $x = 0$, $y = \sqrt{3} = 1{,}73205$.

Строим трехмерный график этой функции, чтобы убедиться в наличии минимума. Возьмем интервалы $x \in [-1; 1]$, $y \in [1; 3]$

Протокол программы

```
>> [X,Y]= mesh grid ([-1:1,  1:3]);
>> Z = (X.^2 + Y.^2 – 3).^2 + (X.^2 + Y.^2 - 2*X – 3).^2 + 1;
>> plot 3 (X,Y,Z)
```

После построения трехмерного графика выполняем поиск минимума. В М-файле программируем целевую функцию

```
function  f = F xy(x)
f = (x(1)^2 + x(2)^2 – 3)^2 + (x(1)^2 + x(2)^2 - 2*x(1) – 3)^2 + 1;
```

Решаем поставленную задачу в окне команд

```
>> [x min,  minf] = f min search (@Fxy, [1  1])
```

Результаты поиска

```
x min =
        -0.0000       1.7320
min f =
         1.0000
```

Как видно, результаты решения задачи точные.

Варианты заданий. Найти и вывести на печать координаты и минимальное значение функции двух переменных. Поиск начать с точки $M_0(x_0,\ y_0)$. Данные взять из таблицы 5.14.

Таблица 5.14

	Функция $f(x, y)$	Координаты начальной точки $M_0(x_0,\ y_0)$.
	1	2
1	$\left(2x^2 - y - 3\right)^2 + x^2 + 2x + 2$	(1; 1)
2	$(xy + 3)^2 + y^2 + 2y + 4$	(2; 2)
3	$\left(x^2y^2 - y + 2\right)^2 + x^2 + 1$	(2; 2)

Продолжение таблицы 5.14

1		2
4	$\left(3x^2+2y^2-1\right)^2+(xy-3)^2$	(2; 2)
5	$\left(2x^2-7y^2-2\right)^2+(x^2+y^2-20)^2+3$	(2; 2)
6	$\left(x^2+y^2-2x-3\right)^2+(x^2+y^2-2y-3)^2$	(2; 2)
7	$\left(x^2-6x+y^2+8\right)^2+x^2y^2+1$	(2; 2)
8	$\left(x^2-y^2-2\right)^2+(x-y+3)^2$	(2; 2)
9	$\ln\left(1+x^2+y^2\right)^2+(x-y-1)^2$	(2; 2)
10	$\left(x^2+y^2-1\right)^2+(x^2-6x+y^2+8)^2$	(0.5; 0.5)
11	x^3+y^3-3xy	(0.5; 0.5)
12	$x^2+xy+y^2-3x-6y$	(0.5; 3.5)
13	$-xy^2(1-x-y)$	(0; 0)
14	$3x^2-x^3+3y^2+4y$	(0.1; -1.0)
15	$xy+50/x+20/y$	(4; 4)
16	$x^2+y^2-3\ln x-18\ln y$	(0.5; 2.5)
17	$x^3+3xy^2-15x-12y$	(1.5; 0.5)
18	$2x^3-xy^2+5x^2+y^2$	(0.5; 0.5)
19	$\left(2x^2+y^2\right)e^{-(x^2+y^2)}$	(0.3; 0.3)
20	$-2+\sqrt[3]{x^2+y^2}$	(0.25; 0.25)
21	$(x-1)^2+(y-2)^2-1$	(0.5; 1.5)
22	$\sin(x^2+y^2)-0.5$	(0.5; 0.5)
23	$x^2-xy+y^2+2x-2y+1$	(-1.0; 0.5)
24	$xy(x+y-4)$	(1.0; 1.0)
25	$x^3y^2(x+y-5)$	(2.0; 1.5)
26	$x^2+xy+y^2+1/x+1/y$	(0.2; 0.3)
27	$-(\sin x+\sin y+\sin(x+y))$	(π/4; π/4)
28	$-\sin x\sin y\sin(x+y))$	(π/4; π/4)
29	$x^3+y^3-9xy+1$	(2.5; 2.5)
30	$x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2+1)$	(1.0; -1.0)

В заключение отметим, что представленные примеры использования возможностей MATLAB в решении различных научно-технических проблем являются лишь небольшой иллюстрацией значительно большего потенциала системы, а материал параграфа может служить некоторым введением при самостоятельном изучении и применении интегрированного пакета математического моделирования.

5.3 Расчет статически определимой балки

Балка – это стержень с опорами, нагруженный поперечной нагрузкой. Она испытывает деформацию изгиба, поэтому для ее расчета нужно использовать уравнения (2.11), (2.13). Статически определимые балки являются наиболее простыми конструкциями, однако при большом числе нагрузок полный их расчет довольно громоздок. Алгоритм МГЭ позволяет существенно упростить получение численных и графических результатов. Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 5.10. Дать анализ напряженно-деформированного состояния статически определимой балки (рисунок 5.7) и подобрать сечение двутавра из условий прочности и жесткости, если расчетное сопротивление $R = 21$ кН/см^2; допускаемые прогибы в пролете $[f]_{пр}=\ell_{пр}/250$ см, на консоли - $[f]_к=\ell_к/125$ см.

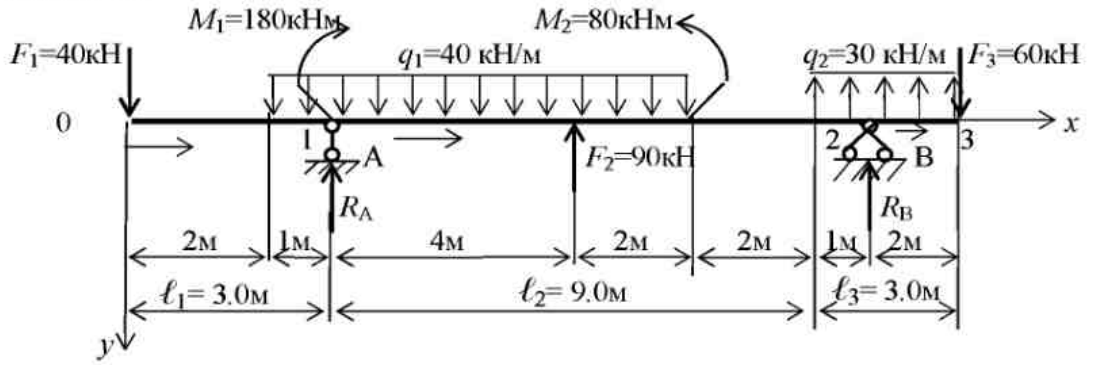


Рисунок 5.7

Исходные данные расчета:

ℓ_1=3.0м; ℓ_2=9.0м; ℓ_3=3.0м; F_1= 40.0кН; F_2= –90.0кН; F_3= 60.0кН; M_1 = –180.0кНм; M_2 = 80.0кНм; q_1 =40.0 кН/м; q_2 =– 30.0 кН/м; a_{F1}=0.0м; a_{F2}=4.0м; a_{F3}= 2.0м; a_{M1}=3.0м; a_{M2}= 6.0м; $a_{н1}$= 2.0м; $a_{к1}$=3.0м; $a_{н2}$=0.0м; $a_{к2}$=6.0м; $a_{н3}$=8.0м; $a_{к3}$=9.0м; $a_{н4}$=0.0м; $a_{к4}$= 2.0м.

Формирование матриц краевой задачи для балки

Для формирования матриц краевой задачи выполняем ряд элементарных процедур:

1 Разбиваем балку на 3 стержня, нумеруем узлы, стрелками указываем начало и конец каждого стержня.

2 Формируем матрицы начальных параметров $\boldsymbol{X}_*$, конечных параметров $\boldsymbol{Y}$ и нагрузки $\boldsymbol{B}$ на основе уравнения (2.11). В матрицах $\boldsymbol{X}_*$, $\boldsymbol{Y}$ учитываем краевые условия стержней, уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1 и 2. После переноса граничных параметров разрешающее уравнение балки примет вид системы уравнений (1.46). При использовании программы решения системы уравнений $\boldsymbol{A}_*\cdot\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{B}$ в среде MATLAB не нужно переставлять строки матриц $\boldsymbol{A}_*,\boldsymbol{B}$ в новом порядке для исключения нулевых ведущих элементов. Эту процедуру выполняет сама программа, что является большим преимуществом MATLAB по сравнению со средами Visial Fortran, Delphi, C++ и др.

$X_*=$

1	$EIv_{(0)}^{0-1}$
2	$EI\varphi_{(0)}^{0-1}$
3	$M_{(0)}^{0-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{0-1}$
4	$Q_{(0)}^{0-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{1-2}$
5	$EIv_{(0)}^{1-2}=0;\ EI_{(\ell)}^{2-3}$
6	$EI\varphi_{(0)}^{1-2}$
7	$M_{(0)}^{1-2}$
8	$Q_{(0)}^{1-2}$
9	$EIv_{(0)}^{2-3}=0;\ EI\varphi_{(\ell)}^{2-3}$
10	$EI\varphi_{(0)}^{2-3}$
11	$M_{(0)}^{2-3}$
12	$Q_{(0)}^{2-3}$

$;Y=$

1	$EIv_{(\ell)}^{0-1}=0$
2	$EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}=EI\varphi_{(0)}^{1-2}$
3	$M_{(\ell)}^{0-1}=M_{(0)}^{1-2}$
4	$Q_{(\ell)}^{0-1}$
5	$EIv_{(\ell)}^{1-2}=0$
6	$EI\varphi_{(\ell)}^{1-2}=EI\varphi_{(0)}^{2-3}$
7	$M_{(\ell)}^{1-2}=M_{(0)}^{2-3}$
8	$Q_{(\ell)}^{1-2}$
9	$EIv_{(\ell)}^{2-3}$
10	$EI\varphi_{(\ell)}^{2-3}$
11	$M_{(\ell)}^{2-3}=0$
12	$Q_{(\ell)}^{2-3}=0$

$;B=$

1	$-B_{11}^{0-1}(\ell_1)$
2	$-B_{21}^{0-1}(\ell_1)$
3	$B_{31}^{0-1}(\ell_1)$
4	$B_{41}^{0-3}(\ell_1)$
5	$-B_{11}^{1-2}(\ell_2)$
6	$-B_{21}^{1-2}(\ell_2)$
7	$B_{31}^{1-2}(\ell_2)$
8	$B_{41}^{1-2}(\ell_2)$
9	$-B_{11}^{2-3}(\ell_3)$
10	$-B_{21}^{2-3}(\ell_3)$
11	$B_{31}^{2-3}(\ell_3)$
12	$B_{41}^{2-3}(\ell_3)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
1	1	ℓ_1												$EIv_{(0)}^{0-1}$	$-B_{11}^{0-1}(\ell_1)$
2		1				-1								$EI\varphi_{(0)}^{0-1}$	$-B_{21}^{0-1}(\ell_1)$
3							-1							$Q_{(\ell)}^{0-1}$	$B_{31}^{0-1}(\ell_1)$
4			-1											$Q_{(\ell)}^{1-2}$	$B_{41}^{0-3}(\ell_1)$
5						ℓ_2	$-\ell_2^2/2$	$-\ell_2^3/6$						$EI_{(\ell)}^{2-3}$	$-B_{11}^{1-2}(\ell_2)$
6						1	$-\ell_2$	$-\ell_2^2/2$		-1				$EI\varphi_{(0)}^{1-2}$	$-B_{21}^{1-2}(\ell_2)$
7							1	ℓ_2			-1			$M_{(0)}^{1-2}$	$B_{31}^{1-2}(\ell_2)$
8				-1				1						$Q_{(0)}^{1-2}$	$B_{41}^{1-2}(\ell_2)$
9					-1					ℓ_3	$-\ell_3^2/2$	$-\ell_3^3/6$		$EI_{(\ell)}^{2-3}$	$-B_{11}^{2-3}(\ell_3)$
10									-1	1	$-\ell_3$	$-\ell_3^2/2$		$EI\varphi_{(0)}^{2-3}$	$-B_{21}^{2-3}(\ell_3)$
11											1	ℓ_3		$M_{(0)}^{2-3}$	$B_{31}^{2-3}(\ell_3)$
12												1		$Q_{(0)}^{2-3}$	$B_{41}^{2-3}(\ell_3)$

Элементы матрицы нагрузки запишутся следующим образом:

стержень 0 – 1

$$B_{11}^{0-1} = F_1 \frac{(\ell_1 - a_{F1})^3}{6} + q_1 \frac{(\ell_1 - a_{н1})^4}{24} - q_1 \frac{(\ell_1 - a_{к1})^4}{24} + M_1 \frac{(\ell_1 - a_{M1})^2}{2};$$

$$B_{21}^{0-1} = F_1 \frac{(\ell_1 - a_{F1})^2}{2} + q_1 \frac{(\ell_1 - a_{н1})^3}{6} - q_1 \frac{(\ell_1 - a_{к1})^3}{6} + M_1(\ell_1 - a_{M1});$$

$$B_{31}^{0-1} = F_1(\ell_1 - a_{F1}) + q_1 \frac{(\ell_1 - a_{н1})^2}{2} - q_1 \frac{(\ell_1 - a_{к1})^2}{2} + M_1;$$

$$B_{41}^{0-1} = F_1 + q_1(\ell_1 - a_{н1}) - q_1(\ell_1 - a_{к1});$$

стержень 1 – 2

$$B_{11}^{1-2} = q_1 \frac{(\ell_2 - a_{н2})^4}{24} - q_1 \frac{(\ell_2 - a_{к2})^4}{24} + F_2 \frac{(\ell_2 - a_{F2})^3}{6} + M_2 \frac{(\ell_2 - a_{M2})^2}{2} +$$

$$+ q_2 \frac{(\ell_2 - a_{н3})^4}{24} - q_2 \frac{(\ell_2 - a_{к3})^4}{24};$$

$$B_{21}^{1-2} = q_1 \frac{(\ell_2 - a_{н2})^3}{6} - q_1 \frac{(\ell_2 - a_{к2})^3}{6} + F_2 \frac{(\ell_2 - a_{F2})^2}{3} + M_2(\ell_2 - a_{M2}) +$$

$$+ q_2 \frac{(\ell_2 - a_{н3})^3}{6} - q_2 \frac{(\ell_2 - a_{к3})^3}{6};$$

$$B_{31}^{1-2} = q_1 \frac{(\ell_2 - a_{н2})^2}{2} - q_1 \frac{(\ell_2 - a_{к2})^2}{2} + F_2(\ell_2 - a_{F2}) + M_2 + q_2 \frac{(\ell_2 - a_{н3})^2}{2} -$$

$$- q_2 \frac{(\ell_2 - a_{к3})^2}{2};$$

$$B_{41}^{1-2} = q_1(\ell_2 - a_{н2}) - q_1(\ell_2 - a_{к2}) + F_2 + q_2(\ell_2 - a_{н3}) - q_2(\ell_2 - a_{к3});$$

стержень 2 – 3

$$B_{11}^{2-3} = q_2 \frac{(\ell_3 - a_{н4})^4}{24} - q_2 \frac{(\ell_3 - a_{к4})^4}{24} + F_3 \frac{(\ell_3 - a_{F3})^3}{6};$$

$$B_{21}^{2-3} = q_2 \frac{(\ell_3 - a_{н4})^3}{6} - q_2 \frac{(\ell_3 - a_{к4})^3}{6} + F_3 \frac{(\ell_3 - a_{F3})^2}{2};$$

$$B_{31}^{2-3} = q_2 \frac{(\ell_3 - a_{н4})^2}{2} - q_2 \frac{(\ell_3 - a_{к4})^2}{2} + F_3(\ell_3 - a_{F3});$$

$$B_{41}^{2-3} = q_2(\ell_3 - a_{н4}) - q_2(\ell_3 - a_{к4}) + F_3.$$

Результаты решения краевой задачи, определения начальных параметров и реакций балки

Для решения поставленной задачи требуется решить систему 12 алгебраических уравнений. Такую систему уравнений необходимо решать на персональном компьютере. Поэтому используем среду программирования MATLAB. Программа, реализующая алгоритм решения системы уравнений и построения эпюр прогибов $EIv(x)$, углов поворота $EI\varphi(x)$, изгибающих моментов $M(x)$ и поперечных сил $Q(x)$ представлена ниже.

Выражения для параметров напряженно-деформированного состояния балки по рисунку 5.7 в форме метода начальных параметров принимают вид:

прогиб $EIv(x)$

$$EIv(x) = EIv(0) + EI\varphi(0)\cdot x - M(0)\frac{x^2}{2} - Q(0)\frac{x^3}{6} + \underset{x\rangle 2м}{\left|q_1\frac{(x-2)^4}{24}\right.} - \underset{x\rangle 9м}{\left|q_1\frac{(x-9)^4}{24}\right.} -$$

$$- \underset{x\rangle 3м}{\left|R_A\frac{(x-3)^3}{6}\right.} + \underset{x\rangle 3м}{\left|M_1\frac{(x-3)^2}{2}\right.} + \underset{x\rangle 7м}{\left|F_2\frac{(x-7)^3}{6}\right.} + \underset{x\rangle 9м}{\left|M_2\frac{(x-9)^2}{2}\right.} +$$

$$+ \underset{x\rangle 11м}{\left|q_2\frac{(x-11)^4}{24}\right.} - \underset{x\rangle 14м}{\left|q_2\frac{(x-14)^4}{24}\right.} - \underset{x\rangle 12м}{\left|R_B\frac{(x-12)^3}{6}\right.};$$

угол поворота $EI\varphi(x)$

$$EI\varphi(x) = EI\varphi(0) - M(0)\cdot x - Q(0)\frac{x^2}{2} + \underset{x\rangle 2м}{\left|q_1\frac{(x-2)^3}{6}\right.} - \underset{x\rangle 9м}{\left|q_1\frac{(x-9)^3}{6}\right.} -$$

$$- \underset{x\rangle 3м}{\left|R_A\frac{(x-3)^2}{2}\right.} + \underset{x\rangle 3м}{\left|M_1(x-3)\right.} + \underset{x\rangle 7м}{\left|F_2\frac{(x-7)^2}{2}\right.} + \underset{x\rangle 9м}{\left|M_2(x-9)\right.} +$$

$$+ \underset{x\rangle 11м}{\left|q_2\frac{(x-11)^3}{6}\right.} - \underset{x\rangle 14м}{\left|q_2\frac{(x-14)^3}{6}\right.} - \underset{x\rangle 12м}{\left|R_B\frac{(x-12)^2}{2}\right.};$$

изгибающий момент $M(x)$

$$M(x) = M(0) + Q(0)\cdot x - \underset{x\rangle 2м}{\left|q_1\frac{(x-2)^2}{2}\right.} + \underset{x\rangle 9м}{\left|q_1\frac{(x-9)^2}{2}\right.} - \underset{x\rangle 3м}{\left|R_A(x-3)\right.} - M_1H(x-3) -$$

$$- \underset{x\rangle 7м}{\left|F_2(x-7)\right.} - M_2H(x-9) - \underset{x\rangle 11м}{\left|q_2\frac{(x-11)^2}{2}\right.} + \underset{x\rangle 14м}{\left|q_2\frac{(x-14)^2}{2}\right.} + \underset{x\rangle 12м}{\left|R_B(x-12)\right.};$$

поперечная сила $Q(x)$

$$Q(x) = Q(0) - \underset{x\rangle 2м}{\left|q_1(x-2)\right.} + \underset{x\rangle 9м}{\left|q_1(x-9)\right.} + R_AH(x-3) - F_2H(x-7) - \underset{x\rangle 11м}{\left|q_2(x-11)\right.} +$$

$$+ \underset{x\rangle 14м}{\left|q_2(x-14)\right.} + R_BH(x-12);$$

Для построения эпюр напряженно-деформированного состояния балки необходимо использовать единичную функцию Хевисайда $H(x\text{-}a)$. В среде MATLAB нет такой встроенной функции. Поэтому формируем единичную функцию $H(t)$, которую записываем в рабочую папку Work на жестком диске C.

```
% Подпрограмма, реализующая единичную функцию Хевисайда
function  f = H(t)
if  t< 0.0  f = 0.0;  else  f = 1.0;  end;
```

Далее следует текст программы с комментариями

```
a = zeros (12,12);  X = zeros (12,1);  в = zeros (12,1);
% Исходные данные расчета балки
```

$\ell 1 = 3.0$; $\ell 2 = 9.0$; $\ell 3 = 2.0$; $f1 = 40.0$; $f2 = -90.0$; $f3 = 60.0$; $m1 = -180.0$; $m2$=80.0; $q1$= 40.0; $q2$= –30.0; $af1 = 0.0$; $af2 = 4.0$; $af3 = 2.0$; $am1$= 3.0; $am2$=6.0; $an1$= 2.0; $ak1$= 3.0; $an2$= 0.0; $ak2$= 6.0; $an3$= 8.0; $ak3$= 9.0; $an4$= 0.0; $ak4 = 2.0$;

% Ввод матриц $a(12,12)$, $в\ (12,1)$ с помощью операторов присваивания

$a(1,1)=1;\ a(1,2)=\ell 1;$

$в(1,1)=-\left(f1*(\ell 1-af1)\text{^}\ 3/6+q1*(\ell 1-an1)\text{^}\ 4/24-q1*(\ell 1-ak1)\text{^}\ 4/24+m1*(\ell 1-am1)\text{^}\ 2/2\right);$

$a(2,2)=1;\ a(2,6)=-1;$

$в(2,1)=-\left(f1*(\ell 1-af1)\text{^}\ 2/2+q1*(\ell 1-an1)\text{^}\ 3/6-q1*(\ell 1-ak1)\text{^}\ 3/6+m1*(\ell 1-am1)\right);$

$a(3,7)=-1;$

$в(3,1)=f1*(\ell 1-af1)+q1*(\ell 1-an1)\text{^}\ 2/2-q1*(\ell 1-ak1)\text{^}\ 2/2+m1*H(\ell 1-am1);$

$a(4,3)=1;\quad в(4,1)=f1*H(\ell 1-af1)+q1*(\ell 1-an1)-q1*(\ell 1-ak1);$

$a(5,6)=\ell 2;\ a(5,7)=-\ell 2\text{^}2/2;\ a(5,8)=-\ell 2\text{^}3/6;$

$в(5,1)=-\left(q1*(\ell 2-an2)\text{^}\ 4/24-q1*(\ell 2-ak2)\text{^}\ 4/24+f2*(\ell 2-af2)\text{^}\ 3/6+m2*(\ell 2-am2)\text{^}\ 2/2+\ldots\right.$

$\left.q2*(\ell 2-an3)\text{^}\ 4/24-q2*(\ell 2-ak3)\text{^}\ 4/24\right);$

$a(6,6)=1;\ a(6,7)=-\ell 2;\ a(6,8)=-\ell 2\text{^}2/2;\ a(6,10)=-1;$

$в(6,1)=-\left(q1*(\ell 2-an2)\text{^}\ 3/6-q1*(\ell 2-ak2)\text{^}\ 3/6+f2*(\ell 2-af2)\text{^}\ 2/2+m2*(\ell 2-am2)+\ldots\right.$

$\left.q2*(\ell 2-an3)\text{^}\ 3/6-q2*(\ell 2-ak3)\text{^}\ 3/6\right);$

$a(7,7)=1;\ a(7,8)=\ell 2;\ a(7,11)=-1;$

$в(7,1)=q1*(\ell 2-an2)\text{^}\ 2/2-q1*(\ell 2-ak2)\text{^}\ 2/2+f2*(\ell 2-af2)+m2*H(\ell 2-am2)+\ldots$

$q2*(\ell 2-an3)\text{^}\ 2/2-q2*(\ell 2-ak3)\text{^}\ 2/2;$

$a(8,4)=-1;\ a(8,8)=1;$

$в(8,1)=q1*(\ell 2-an2)-q1*(\ell 2-ak2)+f2*H(\ell 2-af2)+q2*(\ell 2-an3)-q2*(\ell 2-ak3);$

$a(9,5)=-1;\ a(9,10)=\ell 3;\ a(9,11)=-\ell 3\text{^}2/2;\ a(9,12)=-\ell 3\text{^}3/6;$

$в(9,1)=-\left(q2*(\ell 3-an4)\text{^}\ 4/24-q2*(\ell 3-ak4)\text{^}\ 4/24+f3*(\ell 3-af3)\text{^}\ 3/6\right);$

$a(10,9)=-1;\ a(10,10)=1;\ a(10,11)=\ell 3;\ a(10,12)=-\ell 3\text{^}2/2;$

$в(10,1)=-\left(q2*(\ell 3-an4)\text{^}\ 3/6-q2*(\ell 3-ak4)\text{^}\ 3/6+f3*(\ell 3-af3)\text{^}\ 2/2\right);$

$a(11,11)=1;\ a(11,12)=\ell 3;$

$в(11,1)=q2*(\ell 3-an4)\text{^}\ 2/2-q2*(\ell 3-ak4)\text{^}\ 2/2+f3*(\ell 3-af3);$

$a(12,12)=1;$

$в(12,1)=q2*(\ell 3-an4)-q2*(\ell 3-ak4)+f3*(\ell 3-af3);$

% Решение системы уравнений (4) и вывод значений параметров

$X=a\setminus в$

% Вычисление и вывод реакций балки

$RA=-X(3,1)+X(8,1)$

$RB=-X(4,1)+X(12,1)$

$n=28;\ EIv=zeros(n,1);\ EIfi=zeros(n,1);\ M=zeros(n,1);\ Q=zeros(n,1);$

$x=0.0;\quad dx=(\ell 1+\ell 2+\ell 3)/n;;\ X1=zeros(n,1);$

% Вычисление параметров напряженно-деформированного состояния балки

for $m=1:n+1$

$X1(m,1)=x;$

```
EIv(m,1) = -(X(1,1) + X(2,1)*x + 40.0*x^3/6 + q1*(x-2)^4*H(x-2)/24 - ...
q1*(x-9)^4*H(x-9)/24 - RA*(x-3)^3*H(x-3)/6 + m1*(x-3)^2*H(x-3)/2 + ...
f2*(x-7)^3*H(x-7)/6 + m2*(x-9)^2*H(x-9)/2 + q2*(x-11)^4*H(x-11)/24 - ...
q2*(x-14)^4*H(x-14)/24 - RB*(x-12)^3*H(x-12)/6);
EIfi(m,1) = -(X(2,1) + 40.0*x^2/2 + q1*(x-2)^3*H(x-2)/6 - ...
q1*(x-9)^3*H(x-9)/6 - RA*(x-3)^2*H(x-3)/2 + m1*(x-3)*H(x-3) + ...
f2*(x-7)^2*H(x-7)/2 + m2*(x-9)*H(x-9) + q2*(x-11)^3*H(x-11)/6 - ...
q2*(x-14)^3*H(x-14)/6 - RB*(x-12)^2*H(x-12)/2);
M(m,1) = -(- 40.0*x - q1*(x-2)^2*H(x-2)/2 + q1*(x-9)^2*H(x-9)/2 + ...
RA*(x-3)*H(x-3) - m1*H(x-3) + f2*(x-7)*H(x-7) - m2*H(x-9) - ...
q2*(x-11)^2*H(x-11)/2 + q2*(x-14)^2*H(x-14)/2 + RB*(x-12)*H(x-12));
Q(m,1) = -(- 40.0 - q1*(x-2)*H(x-2) + q1*(x-9)*H(x-9) + RA*H(x-3) - ...
f2*H(x-7) - q2*(x-11)*H(x-11) + q2*(x-14)*H(x-14) + RB*H(x-12));
    x = x + dx;    end;
```

% Построение эпюр *Q, M, EIfi, EIv;*

```
% stem(X1, EIv, 'filled'); axis ([0  14.0  -1400  1400]); grid on
% stem(X1, EIfi, 'filled'); axis ([0  14.0  -600  600]); grid on
% stem(X1, M, 'filled'); axis ([0  14.0  -200  200]); grid on
% stem(X1, Q, 'filled'); axis ([0  14.0  -110  110]); grid on
```

% Вывод таблицы значений параметров балки

```
[X1  -Q  -M  -EIfi  -EIv]
```

Замечания к тексту программы

Для визуализации результатов расчетов (построения эпюр) данную программу необходимо прогнать несколько раз. После первого прогона программы на экране монитора появятся вектор X, реакции балки R_A, R_B и таблица параметров *Q(x), M(x), EIφ(x)* и *EIv(x).*

После этого необходимо заблокировать вывод численных данных оператором точка с запятой [;] и снять символ комментария % с какого-либо графика, значение n можно поменять на n = 1000. 4 раза прогоняя данную программу (снимая символ % с параметров), получаем эпюры напряженно-деформированного состояния балки, которые представлены на рисунке 5.8.

Начальными параметрами балки являются значения:

EIv(0)=X(1,1); *EIφ*(0)=X(2,1); $M(0)$ =0.0 кНм; $Q(0)$ = - 40.0 кН,

а реакции балки

$$R_A = -Q_{(\ell)}^{0-1} + Q_{(0)}^{1-2} = -X(3,1) + X(8,1);$$

$$R_B = -Q_{(\ell)}^{1-2} + Q_{(0)}^{2-3} = -X(4,1) + X(12,1);$$

Значения граничных параметров балки заносим в таблицу 5.15.

Таблица 5.15

$X_*=$

1	$EIv_{(0)}^{0-1} = X(1,1) = -1364.6$ кНм^3
2	$EI\varphi_{(0)}^{0-1} = X(2,1) = 394.3$ кНм^2
3	$Q_{(\ell)}^{0-1} = X(3,1) = -80.0$ кН
4	$Q_{(\ell)}^{1-2} = X(4,1) = -13.9$ кН
5	$EIv_{(\ell)}^{2-3} = X(5,1) = -473.1$ кНм^3
6	$EI\varphi_{(0)}^{1-2} = X(6,1) = 581.0$ кНм^2
7	$M_{(0)}^{1-2} = X(7,1) = 40.0$ кНм
8	$Q_{(0)}^{1-2} = X(8,1) = 106.1$ кН
9	$EI\varphi_{(\ell)}^{2-3} = X(9,1) = -206.5$ кНм^2
10	$EI\varphi_{(0)}^{2-3} = X(10,1) = -286.5$ кНм^2
11	$M_{(0)}^{2-3} = X(11,1) = -60.0$ кНм
12	$Q_{(0)}^{2-3} = X(12,1) = 0.0$ кН

Реакции балки равны

$R_A = -X(3,1) + X(8,1) = 186.11$ кН; $R_B = -X(4,1) + X(12,1) = 13.89$ кН;

Сумма реакций опор $R_A+R_B = 200.0$ кН точно равна равнодействующей внешней нагрузки 200.0 кН.

Значения параметров балки заносим в таблицу 5.16.

Таблица 5.16

Параметры напряженно-деформированного состояния стержней балки					
	Координата x, м Вектор $X1$	Поперечная сила Q, кН Вектор Q	Изгибающий момент M, кНм Вектор M	Угол поворота $EI\varphi$, кНм^2 Вектор $EIfi$	Прогиб EIv, кНм^3 Вектор EIv
1	2	3	4	5	6
1	0.0	-40.0	0.0	394.3	-1364.6
2	0.5	-40.0	-20.0	399.3	-1166.6
3	1.0	-40.0	-40.0	414.3	-963.6
4	1.5	-40.0	-60.0	439.3	-750.6
5	2.0	-40.0	-80.0	474.3	522.6
6	2.5	-60.0	-105.0	520.1	-274.5
7	3.0	106.1	40.0	581.0	0.0
8	3.5	86.1	88.1	548.5	283.4
9	4.0	66.1	126.1	494.6	545.0
10	4.5	46.1	154.2	424.1	775.2
11	5.0	26.1	172.2	342.1	967.1
12	5.5	6.1	180.3	253.5	1116.2
13	6.0	-13.9	178.3	163.5	1220.4
14	6.5	-33.9	166.4	76.9	1280.3
15	7.0	36.1	144.4	-1.2	1298.7
16	7.5	16.1	157.5	-77.2	1279.4
17	8.0	-3.9	160.6	-157.1	1220.9
18	8.5	-23.9	153.6	-236.0	1122.5

Продолжение таблицы 5.16

1	2	3	4	5	6
19	9.0	-43.9	56.7	-309.0	985.8
20	9.5	-43.9	34.7	-331.9	825.2
21	10.0	-43.9	12.8	-343.8	655.8
22	10.5	-43.9	-9.2	-344.7	483.2
23	11.0	-43.9	-31.1	-334.6	313.0
24	11.5	-28.9	-49.3	-314.2	150.4
25	12.0	0.0	-60.0	-286.5	0.0
26	12.5	15.0	-56.2	-257.2	-135.8
27	13.0	30.0	-45.0	-231.5	-257.8
28	13.5	45.0	-26.2	-213.4	-368.6
29	14.0	60.0	0.0	-206.5	-473.1

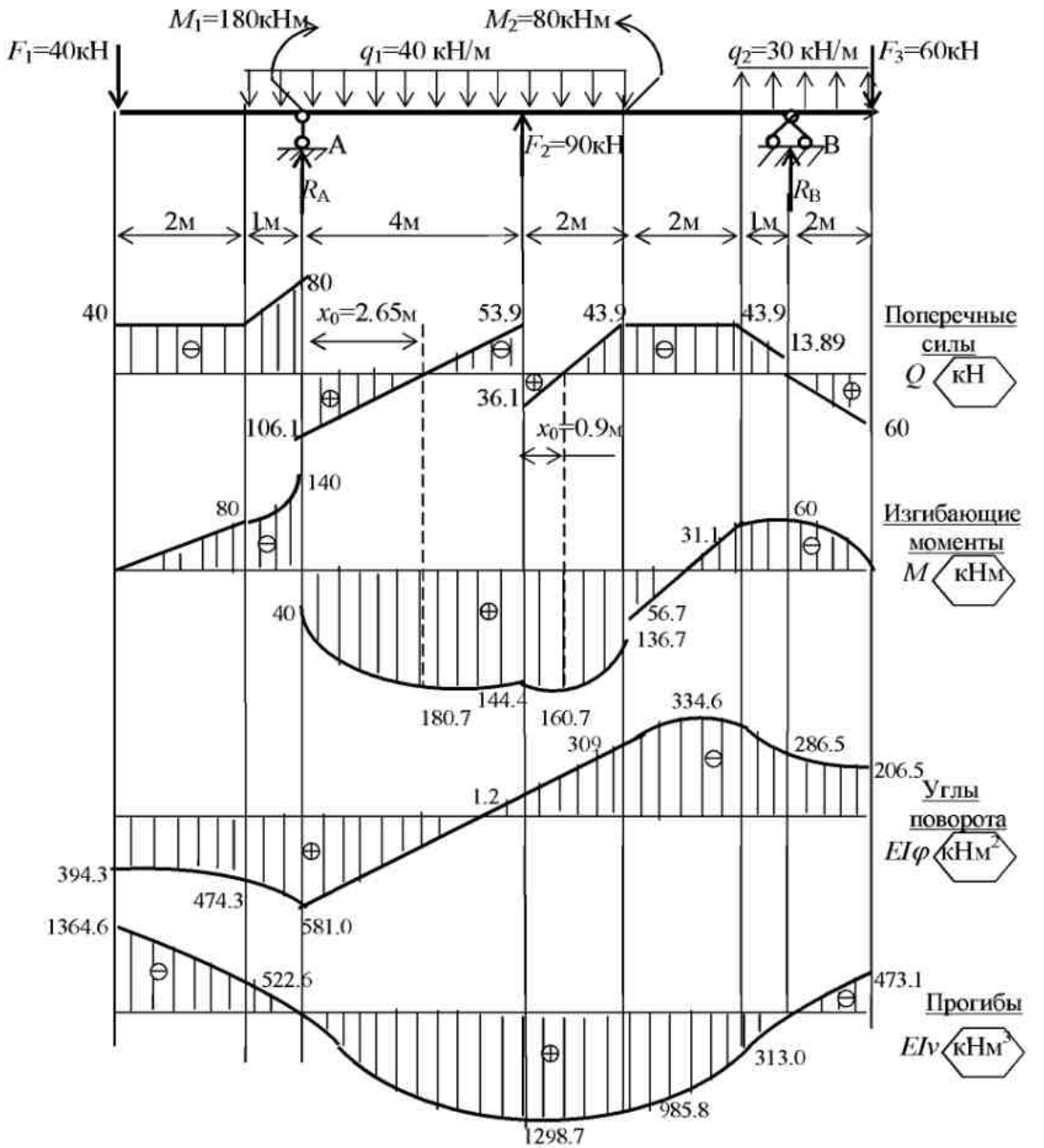


Рисунок 5.8

Анализ напряженного состояния

Подбор сечения балки из условия прочности

$$\sigma_{\max}=\frac{|M_{\max}|}{W}\le R\to W=\frac{|M_{\max}|}{R}=\frac{180.7\cdot 100}{21}=860.5\,\text{см}^3$$

По сортаменту выбираем двутавр №40, у которого :

$h=40.0$ см; $b=15.5$ см; $d=0.8$ см; $t=1.3$ см; $A=71.4\,\text{см}^2$; $I_Z=18930.0\,\text{см}^4$;

$W_Z=947.0\,\text{см}^3$; $S_Z^{OTC(2)}=540.0\,\text{см}^3$;

Анализ эпюр Q,M (см. рисунок 5.8) показывает, что опасным является сечение A, где значительных величин достигают Q и M :

$Q=-80.0\,\text{кН}$; $M=-140.0\,\text{кНм}$

Проверяем подобранное сечение по касательным напряжениям

$$\tau_{\max}=\frac{|Q_{\max}|\cdot S_Z^{OTC(2)}}{I_Z\cdot d}=\frac{106.1\cdot 540.0}{18930.0}=3.78\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}\ \langle\ R_{cp}=11\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

Проверяем подобранное сечение по IY теории прочности в опасном сечении (опора А)

Изображаем сечение двутавра №40 и определяем нормальные и касательные напряжения в точках 1,2,3 (рисунок 5.9).

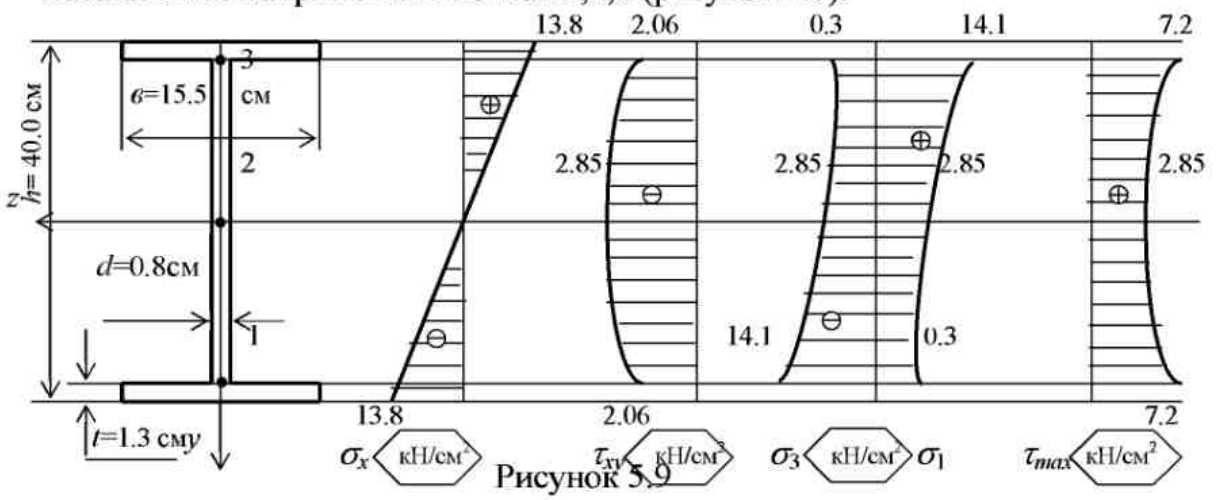


Рисунок 5.9

Точка 1

$$\sigma_x^{(1)}=\frac{M\cdot y^{(1)}}{I_z}=\frac{-140\cdot(20-1.3)\cdot 100}{18930.0}=-13.8\frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

$$\tau_{xy}^{(1)}=\frac{Q\cdot S_z^{OTC}}{I_z\cdot d}=\frac{-80\cdot 15.5\cdot 1.3(20-\frac{1.3}{2})}{18930.0\cdot 0.8}=-2.06\frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

Точка 2

$$\sigma_x^{(2)}=0;\qquad \tau_{xy}^{(2)}=\frac{-80\cdot 540}{18930.0\cdot 0.8}=-2.85\frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

Точка 3

$$\sigma_x^{(3)} = 13.8\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \qquad \tau_{xy}^{(3)} = -2.06\frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

Главные напряжения определяем по формуле:

$$\sigma_{1/3} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \qquad \sigma_2 = \sigma_z = 0;$$

$$\sigma_{1/3}^{(1)} = -\frac{13.8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13.8}{2}\right)^2 + 2.06^2} = -\frac{13.8}{2} \pm 7.2\frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

$$\sigma_1^{(1)} = -6.9 + 7.2 = 0.3\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \qquad \sigma_3^{(1)} = -6.9 - 7.2 = -14.1\frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

$$\sigma_1^{(3)} = 6.9 + 7.2 = 14.1\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \qquad \sigma_3^{(3)} = 6.9 - 7.2 = -0.3\frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

$$\sigma_{1/3}^{(2)} = 0 \pm \sqrt{\tau_{xy}^2} = \pm\tau_{xy}^2 = \pm 2.85\frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

По результатам этих расчетов построены эпюры $\sigma_{1/3}$ (см. рисунок 5.9).

Проверяем прочность в наиболее опасных точках 1, 3 по формуле:

$$\sigma_{np}^{IV} = \sqrt{\sigma_x^{2(1)} + 3\tau_{xy}^{2(1)}} = \sqrt{13.8^2 + 3\cdot 2.06^2} = 14.25\frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \langle 21\frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

Условие прочности по IY теории прочности выполняется.

Определяем положения главных площадок

$$tg2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x}$$

Точка 1

$$tg2\alpha^{(1)} = tg2\alpha^{(3)} = \frac{2\cdot 2.06}{13.8} = 0.3; \qquad \alpha^{(1)} = \alpha^{(3)} = 8.3^0$$

$$tg2\alpha^{(2)} = \frac{2\cdot 2.06}{0} = \infty; \qquad \alpha^{(2)} = 45^0.$$

Изображаем положения главных площадок на рисунке 5.10.

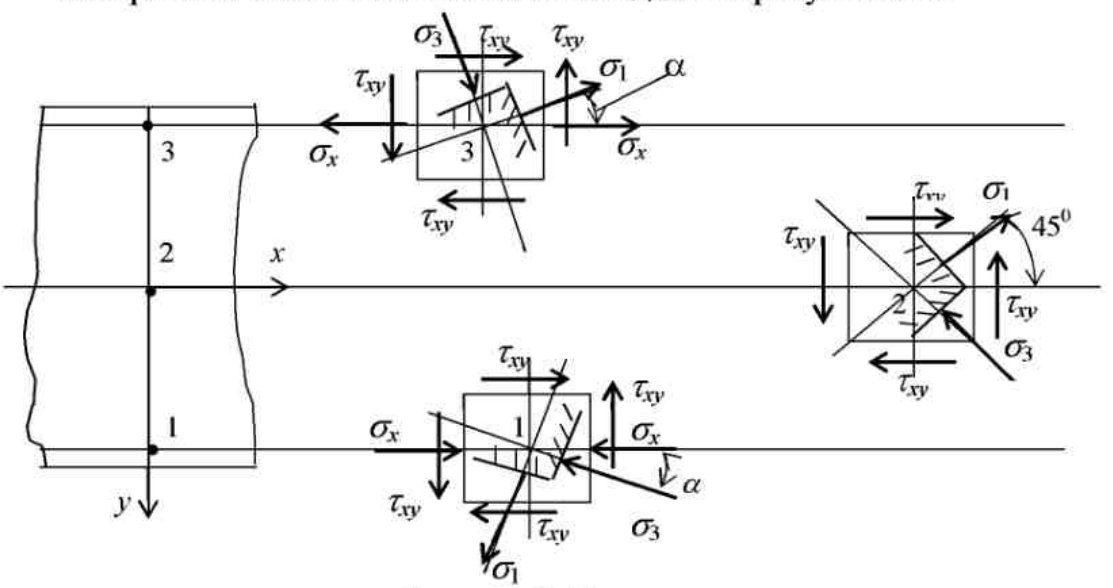


Рисунок 5.10

Вычисляем значения максимальных касательных напряжений

Максимальные касательные напряжения возникают на площадках, наклоненных к главным под углом 45^0, и определяются по формуле

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Для точек 1-3 они равны:

$$\tau_{max}^{(1)} = \tau_{max}^{(3)} = \frac{14.1 + 0.3}{2} = 7.2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \qquad \tau_{max}^{(2)} = \frac{2.85 + 2.85}{2} = 2.85 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

На рисунке 5.9 представлена эпюра τ_{max}.

Проверяем условие жесткости в пролете

$$f_{\max} = \frac{1300 \cdot 10^6}{EI_z} = \frac{1300 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 18930.0} = 3.43 \text{ см};$$

Допускаемый прогиб в пролете

$$[f]_{пр} = \frac{\ell_{пр}}{250} = \frac{900}{250} = 3.6 \text{ см}$$

Жесткость пролета обеспечена, так как f_{max} =3.43 см <$[f]_{пр}$=3.6 см.

Проверяем условие жесткости на консоли

$$f_{\max} = \frac{1364.6 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 18930.0} = 3.6 \text{ см};$$

Допускаемый прогиб на консоли

$$[f]_к = \frac{\ell_к}{125} = \frac{300}{125} = 2.4 \text{ см},$$

т.е. жесткость консоли не обеспечена, так как f_{max} =3.6 см >$[f]_к$ =2.4 см.

Подбираем сечение из условия жесткости на консоли

$$f_{\max} = \frac{1364.6 \cdot 10^6}{EI_z} \le \frac{\ell_к}{125}$$ – условие жесткости, откуда

$$I_z \ge \frac{1364.6 \cdot 10^6 \cdot 125}{E \cdot \ell_к} = \frac{1364.6 \cdot 10^6 \cdot 125}{2 \cdot 10^4 \cdot 300} = 28429.2 \text{ см}^4$$

По сортаменту выбираем двутавр №50, у которого I_z =3929.0см^4.

Окончательно принимаем для данной балки двутавр №50, при котором все условия прочности и жесткости будут выполняться.

5.3.1 Использование диалогового режима

Диалоговый режим позволяет упростить ввод исходных данных и облегчить управление работой программы расчета. По этой причине следует стремиться задействовать возможности диалогового режима при составлении программ и выполнении всевозможных расчетов. Ниже представлена программа расчета статически определимой балки по рисунку 5.7, где представлен диалоговый режим в простейшей форме, в виде вопросов и соответствующих ответов. Данный вариант программы разработан старшим преподавателем кафедры сопротивления материалов Одесской государственной академии холода Ковровым А.В. и реализует метод начальных параметров.

Текст программы

disp (' Программа расчета балки*)

% Исходные данные расчета балки

L=input ('Введите значение длины балки L=');
n= input ('Введите количество участков n=');
XL=input('Введите координату левой опоры XL=');
XP=input (' Введите координату правой опоры XP=');
m1=input (' Введите значение первого момента m1=');
m2=input (' Введите значение второго момента т2=');
m3=input (' Введите значение третьего момента т3=');
f1=input('Введите значение первой силы f1=');
f2=input (' Введите значение второй силы f2=');
f3=input ('Введите значение третьей силы f3=');
q1=input (' Введите значение первой распределенной нагрузки q1='}/
q2=input (' Введите значение первой распределенной нагрузки q2=');
q3=input {' Введите значение первой распределенной нагрузки q3=');
a 1=input (' Введите координату первого момента a1=');
a2=input (' Введите координату второго момента a2=');
a3=input (' Введите координату третьего момента a3=');
b1=input {' Введите координату первой силы b1 =');
b2=input ('Введите координату второй силы b2=');
b3=input (' Введите координату третьей силы b3=');
c1=input (' Введите координату начала первой распределенной нагрузки c1 =');
d1=input (' Введите координату конца первой распределенной нагрузки d1=');
c2= input ('Введите координату начала второй распределенной нагрузки c2=');
d2=input ('Введите координату конца второй распределенной нагрузки d2=');
c3= input ('Введите координату начала третьей распределенной нагрузки c3=');
d3= input ("Введите координату конца третьей распределенной нагрузки d3=');

%Вычисление и вывод реакций опор балки

RA=1/ (XP-XL) * (m1 + m2 + m3 + f1* (XP-b1) + f2*(XP-b2) + f3*(XP-b3) +...

.q1*(d1-c1)* (XP-(d1 + c1)/2) + q2*(d2-c2)*(XP-(d2 + c2)/2) + q3*(d3-c3)* (XP-(d3 + c3)/2) ;

RB=-1/ (XP-XL) *(m1+m2+m3+ f1* (XL-b1)+ f2* (XL-b2)+ f3* (XL-b3)+...

q1*(d1-c1)* (XP-(d1+c1)/2)+q2*(d2-c2)*(XP-(d2+c2)/2)+ q3*(d3-c3)* (XP-(d3+c3)/2);

$$EIfi(0) = \left((-RA*(XP-XL)\text{^}3*H(XP-XL)/6 - RB*(XP-XP)\text{^}3*H(XP-XP)/6 + \ldots\right.$$

$$m1*(XP-a1)\text{^}2*H(XP-a1)/2 + m2*(XP-a2)\text{^}2*H(XP-a2)/2 + \ldots$$

$$m3*(XP-a3)\text{^}2*H(XP-a3)/2 + f1*(XP-b1)\text{^}3*H(XP-b1)/6 + \ldots$$

$$f2*(XP-b2)\text{^}3*H(XP-b2)/6 + f3*(XP-b3)\text{^}3*H(XP-b3)/6 + \ldots$$

$$q1*(XP-c1)\text{^}4*H(XP-c1)/24 - q1*(XP-d1)\text{^}4*H(XP-d1)/24 + \ldots$$

$$q2*(XP-c2)\text{^}4*H(XP-c2)/24 - q2*(XP-d2)\text{^}4*H(XP-d2)/24 + \ldots$$

$$q3*(XP-c3)\text{^}4*H(XP-c3)/24 - q3*(XP-d3)\text{^}4*H(XP-d3)/24 - \ldots$$

$$(-RA*(XL-XL)\text{^}3*H(XL-XL)/6 - RB*(XL-XP)\text{^}3*H(XL-XP)/6 + \ldots$$

$$m1*(XL-a1)\text{^}2*H(XL-a1)/2 + m2*(XL-a2)\text{^}2*H(XL-a2)/2 + \ldots$$

$$m3*(XL-a3)\text{^}2*H(XL-a3)/2 + f1*(XL-b1)\text{^}3*H(XL-b1)/6 + \ldots$$

$$f2*(XL-b2)\text{^}3*H(XL-b2)/6 + f3*(XL-b3)\text{^}3*H(XL-b3)/6 + \ldots$$

$$q1*(XL-c1)\text{^}4*H(XL-c1)/24 - q1*(XL-d1)\text{^}4*H(XL-d1)/24 + \ldots$$

$$q2*(XL-c2)\text{^}4*H(XL-c2)/24 - q2*(XL-d2)\text{^}4*H(XL-d2)/24 + \ldots$$

$$\left.q3*(XL-c3)\text{^}4*H(LP-c3)/24 - q3*(XL-d3)\text{^}4*H(XL-d3)/24\right)/(XL-XP);$$

$$EIv(0)=((-RA*(XP-XL)\text{^}3*H(XP-XL)/6-RB*(XP-XP)\text{^}3*H(XP-XP)/6+\ldots$$
$$m1*(XP-a1)\text{^}2*H(XP-a1)/2+m2*(XP-a2)\text{^}2*H(XP-a2)/2+\ldots$$
$$m3*(XP-a3)\text{^}2*H(XP-a3)/2+f1*(XP-b1)\text{^}3*H(XP-b1)/6+\ldots$$
$$f2*(XP-b2)\text{^}3*H(XP-b2)/6+f3*(XP-b3)\text{^}3*H(XP-b3)/6+\ldots$$
$$q1*(XP-c1)\text{^}4*H(XP-c1)/24-q1*(XP-d1)\text{^}4*H(XP-d1)/24+\ldots$$
$$q2*(XP-c2)\text{^}4*H(XP-c2)/24-q2*(XP-d2)\text{^}4*H(XP-d2)/24+\ldots$$
$$q3*(XP-c3)\text{^}4*H(XP-c3)/24-q3*(XP-d3)\text{^}4*H(XP-d3)/24*XL-\ldots$$
$$(-RA*(XL-XL)\text{^}3*H(XL-XL)/6-RB*(XL-XP)\text{^}3*H(XL-XP)/6+\ldots$$
$$m1*(XL-a1)\text{^}2*H(XL-a1)/2+m2*(XL-a2)\text{^}2*H(XL-a2)/2+\ldots$$
$$m3*(XL-a3)\text{^}2*H(XL-a3)/2+f1*(XL-b1)\text{^}3*H(XL-b1)/6+\ldots$$
$$f2*(XL-b2)\text{^}3*H(XL-b2)/6+f3*(XL-b3)\text{^}3*H(XL-b3)/6+\ldots$$
$$q1*(XL-c1)\text{^}4*H(XL-c1)/24-q1*(XL-d1)\text{^}4*H(XL-d1)/24+\ldots$$
$$q2*(XL-c2)\text{^}4*H(XL-c2)/24-q2*(XL-d2)\text{^}4*H(XL-d2)/24+\ldots$$
$$q3*(XL-c3)\text{^}4*H(LP-c3)/24-q3*(XL-d3)\text{^}4*H(XL-d3)/24)*XP)/(XP-XL);$$

$$EIv=zeros(n,1);\ EIfi=zeros(n,1);M=zeros(n,1);\ Q=zeros(n,1);\ X1=zeros(n,1);$$
$$x=0.0;\quad dx=L/n;;$$
$$for\quad m=1:n+1$$
$$X1(m,1)=x;$$
$$EIv(m,1)=-(EIv(0)+EIfi(0)*x-\ldots$$
$$RA*(x-XL)\text{^}3*H(x-XL)/6-RB*(x-XP)\text{^}3*H(x-XP)/6+\ldots$$
$$m1*(x-a1)\text{^}2*H(x-a1)/2+m2*(x-a2)\text{^}2*H(x-a2)/2+\ldots$$
$$m3*(x-a3)\text{^}2*H(x-a3)/2+f1*(x-b1)\text{^}3*H(x-b1)/6+\ldots$$
$$f2*(x-b2)\text{^}3*H(x-b2)/6+f3*(x-b3)\text{^}3*H(x-b3)/6+\ldots$$
$$q1*(x-c1)\text{^}4*H(x-c1)/24-q1*(c-d1)\text{^}4*H(c-d1)/24+\ldots$$
$$q2*(x-c2)\text{^}4*H(x-c2)/24-q2*(x-d2)\text{^}4*H(x-d2)/24+\ldots$$
$$q3*(x-c3)\text{^}4*H(x-c3)/24-q3*(x-d3)\text{^}4*H(x-d3)/24;$$
$$EIfi(m,1)=-(EIfi(0)-\ldots$$
$$RA*(x-XL)\text{^}2*H(x-XL)/2-RB*(x-XP)\text{^}2*H(x-XP)/2+\ldots$$
$$m1*(x-a1)*H(x-a1)+m2*(x-a2)*H(x-a2)+m3*(x-a3)*H(x-a3)+\ldots$$
$$f1*(x-b1)\text{^}2*H(x-b1)/2+f2*(x-b2)\text{^}2*H(x-b2)/2+f3*(x-b3)\text{^}2*H(x-b3)/2+\ldots$$
$$q1*(x-c1)\text{^}3*H(x-c1)/6-q1*(c-d1)\text{^}3*H(c-d1)/6+\ldots$$
$$q2*(x-c2)\text{^}3*H(x-c2)/6-q2*(x-d2)\text{^}3*H(x-d2)/6+\ldots$$
$$q3*(x-c3)\text{^}3*H(x-c3)/6-q3*(x-d3)\text{^}3*H(x-d3)/6;$$

```
M(m,1) = -(-m1*H(x-a1)-m2*H(x-a2)-m3*H(x-a3)+...
RA*(x-XL)*H(x-XL)+RB*(x-XP)*H(x-XP)-...
f1*(x-b1)*H(x-b1)-f2*(x-b2)*H(x-b2)-f3*(x-b3)*H(x-b3)-...
q1*(x-c1)^2*H(x-c1)/2+q1*(c-d1)^2*H(c-d1)/2-...
q2*(x-c2)^2*H(x-c2)/2+q2*(x-d2)^2*H(x-d2)/2-...
q3*(x-c3)^2*H(x-c3)/2+q3*(x-d3)^2*H(x-d3)/2;
Q(m,1) = -(RA*H(x-XL)+RB*H(x-XP)-f1*H(x-b1)-f2*H(x-b2)-f3*H(x-b3)-...
q1*(x-c1)*H(x-c1)+q1*(c-d1)*H(c-d1)-q2*(x-c2)*H(x-c2)+...
q2*(x-d2)*H(x-d2)-q3*(x-c3)*H(x-c3)+q3*(x-d3)*H(x-d3);
    end;
    % Вывод таблицы значений параметров балки
    format bank
    [X1  -Q  -M  -Eifi  -EIv]

    % Построение эпюр Q M Eifi EIv
V1 = input ('Построить эпюру поперечных сил? Ведите 1(да) или 2(нет)');
    switch V1
    case 1
    Qmax = input ('Максимальное значение поперечной силы Qmax =');
    Qmin = input ('Минимальное значение поперечной силы Qmin =');
    Qmax = Qmax +50;
    Qmin = Qmin +50;
    stem(X1, Q, 'filled'); axis ([0 L -Qmax Qmin ); grid on
    end
V2 = input ('Построить эпюру изгибающих моментов? Ведите 1(да) или
2(нет)');
    switch V2
    case 1
    Mmax = input ('Максимальное значение изгибающего момента Mmax =');
    Mmin = input ('Минимальное значение изгибающего момента Mmin =');
    Mmax = Mmax +50;
    Mmin = Mmin +50;
    stem(X1, M, 'filled'); axis ([0 L -Mmax Mmin ); grid on
    end
V3 = input ('Построить эпюру углов поворота? Ведите 1(да) или 2(нет)');
    switch V3
    case 1
    EIfimax = input ('Максимальное значение угла поворота EIfimax =');
    EIfimin = input ('Минимальное значение угла поворота EIfimin =');
    EIfimax = EIfimax +50;
    EIfimin = EIfimin +50;
    stem(X1, Elfi, 'filled'); axis ([0 L -EIfimax EIfimin); grid on
    end
```

```
V4 = input ('Построить эпюру прогибов? Ведите 1(да) или 2(нет)');
    switch V4
    case 1
    EIv_max = input ('Максимальное значение прогиба EIv_max =');
    EIv_min = input ('Минимальное значение прогиба EIv_min =');
    EIv_max = EIv_max +50;
    EIv_min = EIv_min +50;
    stem(X1, EIv, 'filled'); axis ([0 L – EIv_max EIv_min); grid on
    end;
```

Данная программа приводит к тем же результатам, что и программа МГЭ, т.е. совпадают данные в таблице 5.16 и эпюры по рисунку 5.8.

5.4 Расчет неразрезной балки

Рассмотрим расчет неразрезной балки (2 раза статически неопределимой) на статическую нагрузку.

Пример 5.11. Определить напряженно-деформированное состояние и построить эпюры прогибов $EIv(x)$, углов поворота $EI\varphi(x)$, изгибающих моментов $M(x)$ и поперечных сил $Q(x)$ балки по рисунку 5.11.

Расчетная схема балки и основные уравнения

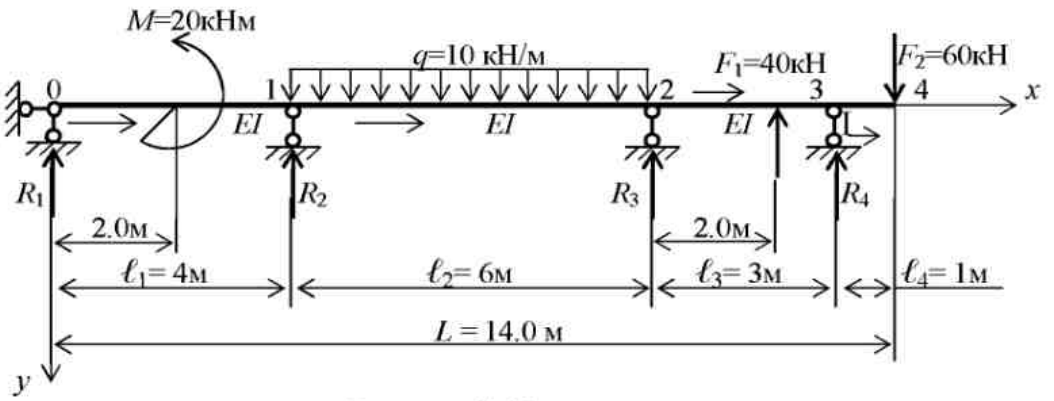


Рисунок 5.11

Формирование матриц краевой задачи

Формируем матрицы начальных параметров $\boldsymbol{X}_*$, конечных параметров $\boldsymbol{Y}$ и нагрузки $\boldsymbol{B}$, на основе уравнения (2.11). В матрицах $\boldsymbol{X}_*$, $\boldsymbol{Y}$ учитываем краевые условия стержней, уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1,2,3.

$$
\boldsymbol{X}_*=\begin{array}{|c|}\hline
1\ \ EIv_{(0)}^{0-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{0-1} \\ \hline
2\ \ EI\varphi_{(0)}^{0-1} \\ \hline
3\ \ M_{(0)}^{0-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{1-2} \\ \hline
4\ \ Q_{(0)}^{0-1} \\ \hline
5\ \ EIv_{(0)}^{1-2}=0;\ Q_{(\ell)}^{2-3} \\ \hline
6\ \ EI\varphi_{(0)}^{1-2} \\ \hline
7\ \ M_{(0)}^{1-2} \\ \hline
8\ \ Q_{(0)}^{1-2} \\ \hline
9\ \ EIv_{(0)}^{2-3}=0;\ EIv_{(\ell)}^{3-4} \\ \hline
10\ \ EI\varphi_{(0)}^{2-3} \\ \hline
11\ \ M_{(0)}^{2-3} \\ \hline
12\ \ Q_{(0)}^{2-3} \\ \hline
13\ \ EIv_{(0)}^{3-4}=0;EI\varphi_{(\ell)}^{3-4} \\ \hline
14\ \ EI\varphi_{(0)}^{3-4} \\ \hline
15\ \ M_{(0)}^{3-4} \\ \hline
16\ \ Q_{(0)}^{3-4} \\ \hline
\end{array}
;\boldsymbol{Y}=
\begin{array}{|c|}\hline
1\ \ EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}=0 \\ \hline
2\ \ EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}=EI\varphi_{(0)}^{1-2} \\ \hline
3\ \ M_{(\ell)}^{0-1}=M_{(0)}^{1-2} \\ \hline
4\ \ Q_{(\ell)}^{0-1} \\ \hline
5\ \ EIv_{(\ell)}^{1-2}=0 \\ \hline
6\ \ EI\varphi_{(\ell)}^{1-2}=EI\varphi_{(0)}^{2-3} \\ \hline
7\ \ M_{(\ell)}^{1-2}=M_{(0)}^{2-3} \\ \hline
8\ \ Q_{(\ell)}^{1-2} \\ \hline
9\ \ EIv_{(\ell)}^{2-3}=0 \\ \hline
10\ \ EI\varphi_{(\ell)}^{2-3}=EI\varphi_{(0)}^{3-4} \\ \hline
11\ \ M_{(\ell)}^{2-3}=M_{(0)}^{3-4} \\ \hline
12\ \ Q_{(\ell)}^{2-3} \\ \hline
13\ \ EIv_{(\ell)}^{3-4} \\ \hline
14\ \ EI\varphi_{(\ell)}^{3-4} \\ \hline
15\ \ M_{(\ell)}^{3-4}=0 \\ \hline
16\ \ Q_{(\ell)}^{3-4}=0 \\ \hline
\end{array}
;\boldsymbol{B}=
\begin{array}{|c|}\hline
1\ \ -e_{11}^{0-1}(\ell_1) \\ \hline
2\ \ -e_{21}^{0-1}(\ell_1) \\ \hline
3\ \ e_{31}^{0-1}(\ell_1) \\ \hline
4\ \ e_{41}^{0-3}(\ell_1) \\ \hline
5\ \ -e_{11}^{1-2}(\ell_2) \\ \hline
6\ \ -e_{21}^{1-2}(\ell_2) \\ \hline
7\ \ e_{31}^{1-2}(\ell_2) \\ \hline
8\ \ e_{41}^{1-2}(\ell_2) \\ \hline
9\ \ -e_{11}^{2-3}(\ell_3) \\ \hline
10\ \ -e_{21}^{2-3}(\ell_3) \\ \hline
11\ \ e_{31}^{2-3}(\ell_3) \\ \hline
12\ \ e_{41}^{2-3}(\ell_3) \\ \hline
13\ \ -e_{11}^{3-4}(\ell_4) \\ \hline
14\ \ -e_{21}^{3-4}(\ell_4) \\ \hline
15\ \ e_{31}^{3-4}(\ell_4) \\ \hline
16\ \ e_{41}^{3-4}(\ell_4) \\ \hline
\end{array}
$$

Согласно краевым условиям в матрице $\boldsymbol{X}_*$ нулевыми оказались строки 1, 3, 5, 9 и 13. Поэтому обнуляем столбцы матрицы фундаментальных функций $\boldsymbol{A}_*$ с теми же номерами. На место нулевых строк матрицы $\boldsymbol{X}_*$ переносим независимые конечные параметры $Q_{(\ell)}^{0-1}$, $Q_{(\ell)}^{1-2}$, $Q_{(\ell)}^{2-3}$, $EIv_{(\ell)}^{3-4}$ и $EI\varphi_{(\ell)}^{3-4}$. Зависимые параметры матрицы $\boldsymbol{Y}$ переносим в соответствии с уравнениями их связи.

В матрице $\boldsymbol{A}_*$ появятся компенсирующие элементы на месте (i, j), где i – номер строки матрицы $\boldsymbol{Y}$, где находится параметр; j – номер строки матрицы $\boldsymbol{X}_*$, где будет находиться параметр.

Матричное уравнение краевой задачи неразрезной балки с элементами матрицы нагрузки по формулам (2.13) примет вид:

	A_*																X_*		Y		B
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16					
1		l_1		$-l_1^3/6$													$EIv^{0-1}(0)=0, EIQ^{0-1}(l)$		$EIv^{0-1}(l)=0$		$-M(l_1-a_m)^2/2$
2		1		$-l_1^2/2$		-1											$EI\varphi^{0-1}(0)$		$EI\varphi^{0-1}(l)=EI\varphi^{1-2}(0)$		$-M(l_1-a_m)$
3				l_1			-1										$M^{0-1}(0)=Q^{1-2}(l)$		$M^{0-1}(l)=M^{1-2}(0)$		M
4	-1			1													$Q^{0-1}(0)$		$Q^{0-1}(l)$		0
5						l_2	$-l_2^2/2$	$-l_2^3/6$									$EIv^{1-2}(0)=0, EIQ^{2-3}(l)$		$EIv^{1-2}(l)=0$		$-q(l_2-a_n)^4/24$
6						1	$-l_2$	$-l_2^2/2$									$EI\varphi^{1-2}(0)$		$EI\varphi^{1-2}(l)=EI\varphi^{2-3}(0)$		$-q(l_2-a_n)^3/6$
7							1	l_2									$M^{1-2}(0)$		$M^{1-2}(l)=M^{2-3}(0)$		$q(l_2-a_n)^2/2$
8			-1					1									$Q^{1-2}(0)$		$Q^{1-2}(l)$		$q(l_2-a_n)$
9										l_3	$-l_3^2/2$	$-l_3^3/6$					$EIv^{2-3}(0)=0, EIv^{3-4}(l)$		$EIv^{2-3}(l)=0$		$-F_1(l_3-a_{F_1})^3/6$
10										1	$-l_3$	$-l_3^2/2$		-1			$EI\varphi^{2-3}(0)$		$EI\varphi^{2-3}(l)=EI\varphi^{3-4}(0)$		$-F_1(l_3-a_{F_1})^2/2$
11											1	l_3			-1		$M^{2-3}(0)$		$M^{2-3}(l)=M^{3-4}(0)$		$F_1(l_3-a_{F_1})$
12					-1							1					$Q^{2-3}(0)$		$Q^{2-3}(l)$		F_1
13									-1					l_4	$-l_4^2/2$	$-l_4^3/6$	$EIv^{3-4}(0)=0, EI\varphi^{3-4}(l)$		$EIv^{3-4}(l)$		$-F_2(l_4-a_{F_2})^3/6$
14													-1	1	$-l_4$	$-l_4^2/2$	$EI\varphi^{3-4}(0)$		$EI\varphi^{3-4}(l)$		$-F_2(l_4-a_{F_2})^2/2$
15															1	l_4	$M^{3-4}(0)$		$M^{3-4}(l)=0$		$F_2(l_4-a_{F_2})$
16																1	$Q^{3-4}(0)$		$Q^{3-4}(l)=0$		F_2

Программа решения краевой задачи и построения эпюр напряженно-деформированного состояния балки

Для решения краевой задачи требуется решить систему 16 алгебраических уравнений.

Текст программы с комментариями

```
a = zeros (16,16);  X = zeros (16,1);  в = zeros (16,1);
% Исходные данные краевой задачи
ℓ1 = 4.0;  ℓ2 = 6.0;  ℓ3 = 3.0; ℓ4 = 1.0;  F1 = – 40.0;  F2 = 60.0; M = 20.0;
q= 10.0; aM= 2.0; aF1= 2.0; aF2 = 1.0; an= 0.0; ak= 6.0;
% Исходные данные для построения эпюр
ℓ = 14.0;  ℓM = 2.0;  ℓn = 4.0;  ℓк = 10.0;  ℓF1 = 12.0;  ℓR2 = 4.0;
ℓR3 = 10.0;  ℓR4 = 13.0;
% Ввод матриц a(16,16),  в (16,1) с помощью операторов присваивания
a(1,2)=ℓ1;  a(1,4)= –ℓ1^3/6;  a(2,2)=1;  a(2,4)= –ℓ1^2/2;  a(2,6)= –1;  a(3,4)= ℓ1; a(3,7)= –1;
a(4,1)= –1;  a(4,4)= 1;
в(1,1) = –M*(ℓ1–aM)^2/2;  в(2,1) = –M*(ℓ1–aM); в(3,1) = M;
a(5,6)=ℓ2;  a(5,7)= –ℓ2^2/2;  a(5,8)= –ℓ2^3/6;  a(6,6)= 1;  a(6,7)= –ℓ2;  a(6,8)= –ℓ2^2/2;
a(6,10)= –1;  a(7,7)= 1;  a(7,8)=ℓ2;  a(7,11)= –1;  a(8,31)= –1;  a(8,8)= 1;
в(5,1)= –q*(ℓ2–an)^4/24; в(6,1) = –q*(ℓ2–an)^3/6; в(7,1) = q*(ℓ2–an)^2/2; в(8,1) = q*(ℓ2–an);
a(9,10)=ℓ3; a(9,11)= –ℓ3^2/2;  a(9,12)= –ℓ3^3/6; a(10,10)= 1; a(10,11)= –ℓ3; a(10,12)= –ℓ3^2/2;
a(10,14)= –1;  a(11,11)= 1; a(11,12)=ℓ3;  a(11,15)= –1;  a(12,5)= –1; a(12,12)= 1;
в(9,1) = –F1*(ℓ3–aF1)^3/6; в(10,1) = –F1*(ℓ3–aF1)^2/2; в(11,1) = F1*(ℓ3–aF1); в(12,1)= F1;
a(13,9)= –1; a(13,14)=ℓ4; a(13,15)= –ℓ4^2/2;  a(13,16)= –ℓ4^3/6;  a(14,13)= –1; a(14,14)= 1;
a(14,15)= –ℓ4; a(14,16)= –ℓ4^2/2;  a(15,15)= 1;  a(15,16)= ℓ4; a(16,16)= 1;
в(13,1)= –F2*(ℓ4–aF2)^3/6; в(14,1) = –F2*(ℓ4–aF2)^2/2; в(15,1) = F2*(ℓ4–aF2); в(16,1)= F2
% Решение системы уравнений и вывод значений параметров
X = a \ в
% Вычисление и вывод реакций
R1= X(4,1)
R2= – X(1,1) + X(8,1)
R3= – X(3,1) + X(12,1)
R4= – X(5,1) + X(16,1)
% Начальные параметры балки
EIvn = 0.0; EIfin = X(2,1);  Mn = 0.0;  Qn = X(4,1);
n=28;  EIv = zeros(n,1);  EIfi = zeros(n,1);  Me = zeros(n,1);  Qe = zeros(n,1);
x = 0.0;  dx = (ℓ1 + ℓ2 + ℓ3 + ℓ4)/n;;  X1 = zeros(n,1);
% Вычисление параметров состояния балки по формулам
for  m=1 : n +1
X1(m,1) = x;
EIv(m,1) = –(EIvn+ EIfin* x – Mn* x^ 2 / 2 – Qn* x^ 3 / 6 + M * (x – ℓM)^ 2 * H(x – ℓM) / 2 –…
R2 * (x – ℓR2)^ 3 * H(x – ℓR2) / 6 + q * (x – ℓn)^ 4 * H(x – ℓn) / 24 – q * (x – ℓk)^ 4 * H(x – ℓk) / 24 –…
R3 * (x – ℓR3)^ 3 * H(x – ℓR3) / 6 + F1 * (x – ℓF1)^ 3 * H(x – ℓF1) / 6 –…
R4 * (x – ℓR4)^ 3 * H(x – ℓR4) / 6)
```

```
EIfi(m,1) = -(EIfin-Mn*x-Qn*x^2/2+M*(x-ℓM)*H(x-ℓM)-...
R2*(x-ℓR2)^2*H(x-ℓR2)/2+q*(x-ℓn)^3*H(x-ℓn)/6-q*(x-ℓk)^3*H(x-ℓk)/6-...
R3*(x-ℓR3)^2*H(x-ℓR3)/2+F1*(x-ℓF1)^2*H(x-ℓF1)/2-...
R4*(x-ℓR4)^2*H(x-ℓR4)/2);
Me(m,1) = -(Mn+Qn*x-M*H(x-ℓM)+R2*(x-ℓR2)*H(x-ℓR2)-...
q*(x-ℓn)^2*H(x-ℓn)/2+q*(x-ℓk)^2*H(x-ℓk)/2+R3*(x-ℓR3)*H(x-ℓR3)-...
F1*(x-ℓF1)*H(x-ℓF1)+R4*(x-ℓR4)*H(x-ℓR4));
Qe(m,1) = -(Qn+R2*H(x-ℓR2)-q*(x-ℓn)*H(x-ℓn)+q*(x-ℓk)*H(x-ℓk)+...
R3*H(x-ℓR3)-F1*H(x-ℓF1)+R4*H(x-ℓR4));
    x = x + dx;    end;
```

% Построение эпюр *Q, M, EIfi, EIv;*

```
% stem(X1, Qe, 'filled'); axis ([0 14 -80 80]); grid on
% stem(X1, Me, 'filled'); axis ([0 14 -80 80]); grid on
% stem(X1, EIfi, 'filled'); axis ([0 14 -120 120]); grid on
% stem(X1, EIv, 'filled'); axis ([0 14 -120 120]); grid on
```

% Вывод таблицы значений параметров балки

```
[X1 -Qe -Me -EIfi -EIv]
```

Замечания к тексту программы

Для выполнения задания данную программу необходимо прогнать несколько раз. После первого выполнения программы на экране монитора появятся вектор граничных параметров *X*, реакции балки R_1, R_2, R_3, R_4 и таблица параметров *Q(x), M(x), EIφ(x), EIv(x).*

После этого нужно заблокировать вывод численных результатов с помощью оператора **;** (точка с запятой) и снять символ комментария % с какого-либо графика, значение *n* можно поменять на *n* = 1000. 4 раза прогоняя данную программу, получим эпюры напряженно-деформированного состояния балки, которые представлены на рисунке 5.12.

Результаты решения краевой задачи и вычисления параметров состояния балки

Результаты решения системы уравнений заносим в таблицу 5.17.

Таблица 5.17

1	$Q_{(\ell)}^{0-1} = X(1,1) = -1.0494$ кН	9	$EIv_{(\ell)}^{3-4} = X(9,1) = -105.2263$ кНм^3
2	$EI\varphi_{(0)}^{0-1} = X(2,1) = -12.7984$ кНм^2	10	$EI\varphi_{(0)}^{2-3} = X(10,1) = -53.7860$ кНм^2
3	$Q_{(\ell)}^{1-2} = X(3,1) = -26.9685$ кН	11	$M_{(0)}^{2-3} = X(11,1) = -6.0082$ кНм
4	$Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1) = -1.0494$ кН	12	$Q_{(0)}^{2-3} = X(12,1) = -31.3306$ кН
5	$Q_{(\ell)}^{2-3} = X(5,1) = 8.6694$ кН	13	$EI\varphi_{(\ell)}^{3-4} = X(13,1) = 115.2263$ кНм^2
6	$EI\varphi_{(0)}^{1-2} = X(6,1) = 35.5967$ кНм^2	14	$EI\varphi_{(0)}^{3-4} = X(14,1) = 85.2263$ кНм^2
7	$M_{(0)}^{1-2} = X(7,1) = -24.1975$ кНм	15	$M_{(0)}^{3-4} = X(15,1) = -60.0000$ кНм
8	$Q_{(0)}^{1-2} = X(8,1) = 33.0316$ кН	16	$Q_{(0)}^{3-4} = X(16,1) = 60.0000$ кН

Реакции балки равны:

$R_1 = X(4,1) = -1.0494$ кН; $R_2 = -X(1,1) + X(8,1) = 1.0494 + 33.0316 = 34.081$ кН;

$R_3 = -X(3,1) + X(12,1) = 26.9685 - 31.3306 = -4.3621$ кН;

$R_4 = -X(5,1) + X(16,1) = -8.6694 + 60.0 = 51.3306$ кН.

Сумма реакций балки

$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = -1.0494 + 34.081 - 4.3621 + 51.3306 = 80.0$ кН,

что точно равно равнодействующей внешней нагрузки:

$R = q \cdot 6 - F_1 + F_2 = 10.0 \cdot 6 - 40 + 60 = 80.0$ кН.

Данный расчет косвенно свидетельствует о точности расчета. Значения параметров балки заносим в таблицу 5.18.

Таблица 5.18

Параметры напряженно-деформированного состояния стержней балки					
	Координата x, м Вектор $X1$	Поперечная сила Q, кН Вектор Qe	Изгибающий момент M, кНм Вектор Me	Угол поворота $EI\varphi$, кНм^2 Вектор $EIfi$	Прогиб EIv, кНм^3 Вектор EIv
1	0.0	-1.0494	0.0	-12.7984	0.0
2	0.5	-1.0494	-0.5247	-12.6672	-6.3773
3	1.0	-1.0494	-1.0494	-12.2737	-12.6235
4	1.5	-1.0494	-1.5741	-11.6178	-18.6073
5	2.0	-1.0494	-22.0988	-10.6996	-24.1975
6	2.5	-1.0494	-22.6235	0.4810	-26.7631
7	3.0	-1.0494	-23.1481	11.9239	-23.6728
8	3.5	-1.0494	-23.6728	23.6291	-14.7955
9	4.0	33.0316	-24.1975	35.5967	0.0
10	4.5	28.0316	-8.9318	43.7749	20.1609
11	5.0	23.0316	3.8340	44.9451	42.6069
12	5.5	18.0316	14.0998	40.3575	64.1464
13	6.0	13.0316	21.8656	31.2620	82.2131
14	6.5	8.0316	27.1313	18.9086	94.8654
15	7.0	3.0316	29.8971	4.5473	100.7870
16	7.5	-1.9684	30.1629	-10.5718	99.2864
17	8.0	-6.9684	27.9287	-25.1989	90.2972
18	8.5	-11.9684	23.1944	-38.0838	74.3779
19	9.0	-16.9684	15.9602	-47.9767	52.7120
20	9.5	-21.9684	6.2260	-53.6274	27.1082
21	10.0	-31.3306	-6.0082	-53.7860	0.0
22	10.5	-31.3306	-21.6735	-46.8656	-25.4893
23	11.0	-31.3306	-37.3388	-32.1125	-45.5601
24	11.5	-31.3306	53.0041	-9.5267	-56.2963
25	12.0	8.6694	-68.6694	20.8916	-53.7814
26	12.5	8.6694	-64.3347	54.1427	-34.9326
27	13.0	60.0000	-60.0000	85.2263	0.0
28	13.5	60.0000	-30.0000	107.7263	48.8632
29	14.0	60.0000	0.0	115.2263	105.2263

Эпюры напряженно-деформированного состояния балки

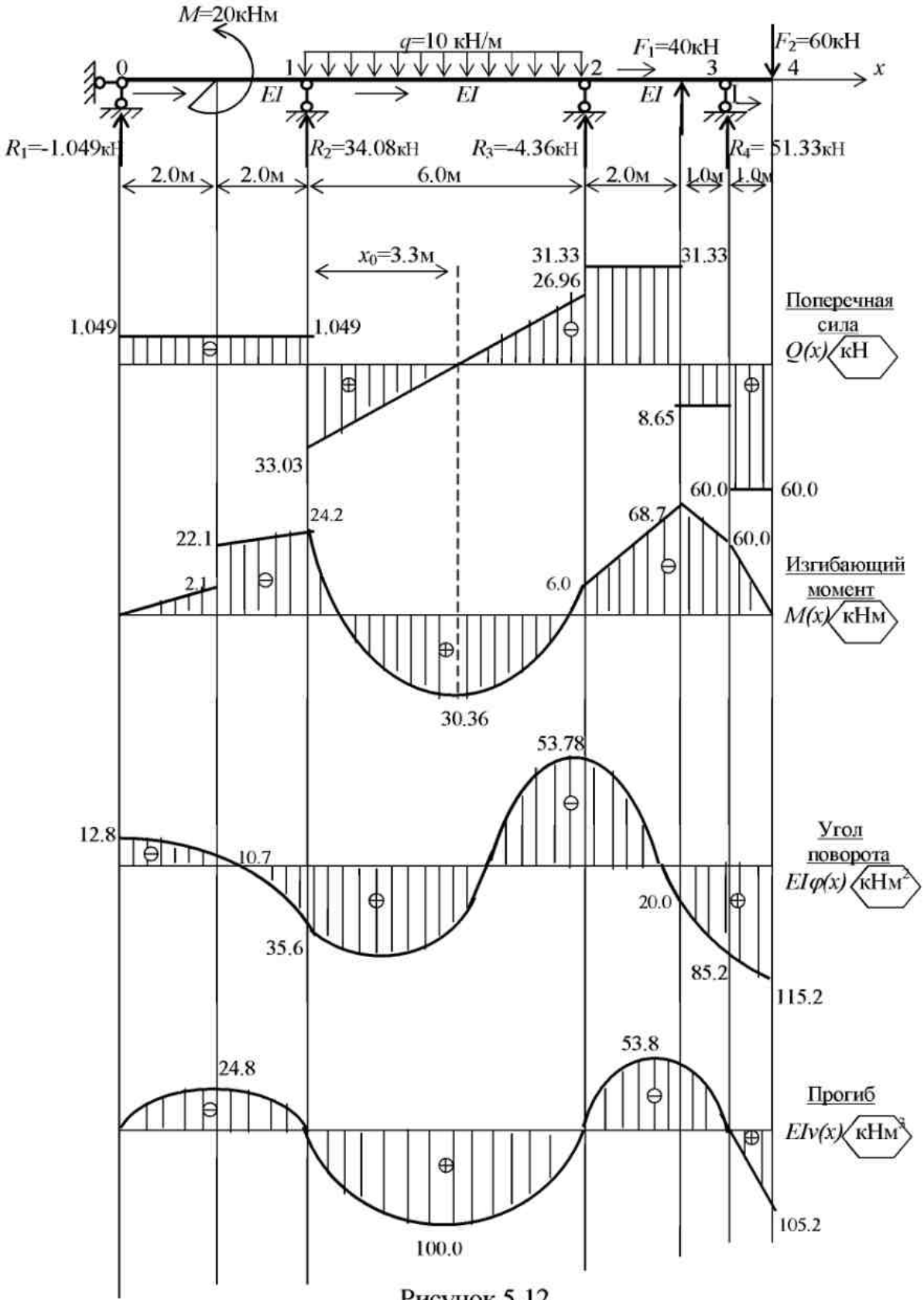


Рисунок 5.12

5.5 Решение задач динамики неразрезной балки

Рассмотрим решение задач динамики балки, приведенной на рисунке 5.11.

Пример 5.12. Определение частот и форм собственных колебаний
Расчетная схема:

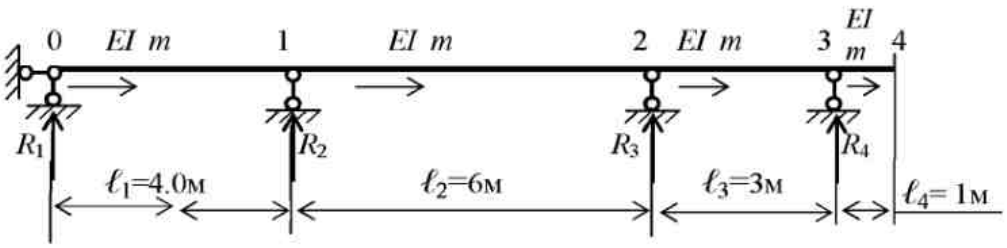


Рисунок 5.13

Используем систему (3.11) фундаментальных функций поперечных колебаний прямолинейного стержня.

Для определения спектра собственных частот формируется частотное уравнение МГЭ (3.2)

$$|\boldsymbol{A}_*(\omega)| = 0$$

Корни этого уравнения и будут являться частотами собственных колебаний. Если заменить фундаментальные функции поперечного изгиба на фундаментальные функции поперечных колебаний в матрице $\boldsymbol{A}_*$ задачи статики (см.п.5.4), то получим динамическую матрицу $\boldsymbol{A}_*(\omega)$ уравнения (3.2). Для данной балки она примет вид:

$\boldsymbol{A}_*(\omega)=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1		A_{12}		$-A_{14}$													
2		A_{11}		$-A_{13}$		-1											$x=\ell_1$
3		$-\lambda^4 A_{14}$		A_{12}			-1										
4	-1	$-\lambda^4 A_{13}$		A_{11}													
5						A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$									
6						A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		-1							$x=\ell_2$
7						$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}			-1						
8			-1			$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}									
9										A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$					
10										A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		-1			$x=\ell_3$
11										$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}			-1		
12					-1					$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}					
13									-1					A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	
14													-1	A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	$x=\ell_4$
15														$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}	
16														$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	

Корни (частоты) уравнения (3.2) наиболее просто можно определить методом перебора в сочетании с прямым ходом метода исключения Гаусса. Организуется цикл вычислений определителя $|\boldsymbol{A}_*(\omega)|$, результаты которого выводятся в виде таблицы. При просмотре данной таблицы выявляются точки, где определитель $|\boldsymbol{A}_*(\omega)| = 0$ или изменяет знак.

В этих точках и определяются частоты собственных колебаний. Перед точным вычислением частот полезно построить график $d = det(\boldsymbol{A}_*)$ для уяснения характера поведения определителя матрицы $\boldsymbol{A}_*$ и грубого определения интервалов, содержащих корень уравнения (3.2). При решении данной задачи принято, что $EI = m = 1$.

Исходные данные и обозначения переменных, принятых в программе

Исходные данные краевой задачи поиска частот

$\ell 1 = 4.0$м; $\ell 2 = 6.0$м; $\ell 3 = 3.0$м; $\ell 4 = 1.0$м; $EI = 1$; $m = 1.0$; $n = 500$;
$\omega_0 = 0.01$ 1/с; $\Delta\omega_0 = 0.01$ 1/с;

Исходные данные для построения форм колебаний

Начальные параметры:

$EIv_{(0)}^{0-1} = 0.0$ – начальный прогиб;

$EI\varphi_{(0)}^{0-1} = \mathrm{X}(2,1)$ – начальный угол поворота;

$M_{(0)}^{0-1} = 0.0$ – начальный изгибающий момент;

$Q_{(0)}^{0-1} = \mathrm{X}(4,1)$ – начальная поперечная сила.

Реакции балки, вызванные собственными колебаниями:

$R1 = Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1)$

$R2 = -Q_{(\ell)}^{0-1} + Q_{(0)}^{1-2} = -X(1,1) + X(8,1)$

$R3 = -Q_{(\ell)}^{1-2} + Q_{(0)}^{2-3} = -X(3,1) + X(12,1)$

$R4 = -Q_{(\ell)}^{2-3} + Q_{(0)}^{3-4} = -X(5,1) + X(16,1)$

Обозначения граничных параметров соответствуют рисунку 5.13. Вектор $\boldsymbol{X}_*$ задачи динамики не отличается от вектора $\boldsymbol{X}_*$ задачи статики, поэтому индексы элементов неизвестных повторяют свои значения из задачи статики.

Обозначения переменных, принятых в программе

a – матрица $\boldsymbol{A}_*(\omega)$; n – порядок матрицы $\boldsymbol{A}_*(\omega)$; $n1$ – число циклов вычисления определителя $|\boldsymbol{A}_*(\omega)|$; am – частота ω собственных колебаний; dam– шаг $\Delta\omega_0$ изменения частоты; m – счетчик цикла вычисления определителя $|\boldsymbol{A}_*(\omega)|$; ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 – длины стержней неразрезной балки; ℓa– коэффициент λ фундаментальных функций; $X1$ – вектор значений частоты ω; Y – вектор значений определителя $|\boldsymbol{A}_*(\omega)|$; EIv – вектор значений форм колебаний; $EIvn$, $EIfin$, Mn, Qn – начальные параметры; $R1$, $R2$, $R3$, $R4$ – реакции балки; $H(x\text{-}4)$ и т.д. – единичная функция Хевисайда со сдвигом; b – вектор правых частей; ams – частота ω_i собственных колебаний; X – вектор относительных граничных параметров неразрезной балки; d – величина определителя $|\boldsymbol{A}_*(\omega)|$; L – длина балки; x – значение текущей координаты; $X2$ – вектор значений x форм колебаний.

Текст программы поиска частот и построения форм собственных колебаний

$n = 16;\quad n1 = 500;\quad X = zeros(n,1);\quad X1 = zeros(n1,1);\quad Y = zeros(n1,1);$
$X2 = zeros(n1,1);\ в = zeros(n,1);\ \ell1 = 4.0;\ \ell2 = 6.0;\ \ell3 = 3.0;\ \ell4 = 1.0;\ am = 0.01;$
$dam = 2.5/n1;\ ams = 0.1;\ L = \ell1+\ell2+\ell3+\ell4;\ EIv = zeros(n1,1);$

$for\ m = 1:\ n1$

$\ell a = sqrt(am);\quad a = zeros(n,n);$

$a(1,2) = (\sin h(\ell a * \ell1) + \sin(\ell a * \ell1))/(2 * \ell a);\ a(1,4) = -(\sin h(\ell a * \ell1) - \sin(\ell a * \ell1))/(2 * \ell a\hat{}3);$

$a(2,2) = (\cos h(\ell a * \ell1) + \cos(\ell a * \ell1))/2;\ a(2,4) = -(\cos h(\ell a * \ell1) - \cos(\ell a * \ell1))/(2 * \ell a\hat{}2);$

$a(2,6) = -1;\ a(3,2) = \ell a\hat{}4 * a(1,4);\ a(3,4) = a(1,2);\ a(3,7) = -1;\ a(4,1) = -1;$

$a(4,2) = \ell a\hat{}4 * a(2,4);\ a(4,4) = a(2,2);\ a(5,6) = (\sin h(\ell a * \ell2) + \sin(\ell a * \ell2))/(2 * \ell a);$

$a(5,7) = -(\cos h(\ell a * \ell2) - \cos(\ell a * \ell2))/(2 * \ell a\hat{}2);$

$a(5,8) = -(\sin h(\ell a * \ell2) - \sin(\ell a * \ell2))/(2 * \ell a\hat{}3);\ a(6,6) = (\cos h(\ell a * \ell2) + \cos(\ell a * \ell2))/2;$

$a(6,7) = -a(5,6);\quad a(6,8) = a(5,7);\quad a(6,10) = -1;\quad a(7,6) = \ell a\hat{}4 * a(5,8);$

$a(7,7) = a(6,6);\ a(7,8) = a(5,6);\ a(7,11) = -1;\ a(8,3) = -1;\quad a(8,6) = \ell a\hat{}4 * a(5,7);$

$a(8,7) = -a(7,6);\ a(8,8) = a(6,6);\quad a(9,10) = (\sin h(\ell a * \ell3) + \sin(\ell a * \ell3))/(2 * \ell a);$

$a(9,11) = -(\cos h(\ell a * \ell3) - \cos(\ell a * \ell3))/(2 * \ell a\hat{}2);$

$a(9,12) = -(\sin h(\ell a * \ell3) - \sin(\ell a * \ell3))/(2 * \ell a\hat{}3);\ a(10,10) = (\cos h(\ell a * \ell3) + \cos(\ell a * \ell3))/2;$

$a(10,11) = -a(9,10);\quad a(10,12) = a(9,11);\quad a(10,14) = -1;\quad a(11,10) = \ell a\hat{}4 * a(9,12);$

$a(11,11) = a(10,10);\ a(11,12) = a(9,10);\ a(11,15) = -1;\ a(12,15) = -1;\ a(12,10) = \ell a\hat{}4 * a(9,11);$

$a(12,11) = -a(11,10);\quad a(12,12) = a(10,10);\quad a(13,9) = -1;$

$a(13,14) = (\sin h(\ell a * \ell4) + \sin(\ell a * \ell4))/(2 * \ell a);$

$a(13,15) = -(\cos h(\ell a * \ell4) - \cos(\ell a * \ell4))/(2 * \ell a\hat{}2);$

$a(13,16) = -(\sin h(\ell a * \ell4) - \sin(\ell a * \ell4))/(2 * \ell a\hat{}3);\ a(14,13) = -1;$

$a(14,14) = (\cos h(\ell a * \ell4) + \cos(\ell a * \ell4))/2;\ a(14,15) = -a(13,14);\quad a(14,16) = a(13,15);$

$a(15,14) = \ell a\hat{}4 * a(13,16);\ a(15,15) = a(14,14);\ a(15,16) = a(13,14);$

$a(16,14) = \ell a\hat{}4 * a(13,15);\ a(16,15) = -a(15,14);\quad a(16,16) = a(14,14);$

$d = det(a);\ X1(m,1) = am;\ Y(m,1) = d;\ am = am + dam\ ;\ end;$

% Построение графика $d = det(a)$

$plot(X1,Y);\quad grid\ on$

% Вывод таблицы значений частоты и определителя

$format\ \ long\ \ e$

$[X1\ \ Y]$

% Вычисление относительных граничных параметров балки

$в(16,1) = 1;\quad X = a\backslash в;$

$X = X/X(9,1);$

% Вычисление начальных параметров и реакций балки

$EIvn = 0.0;\quad EIfin = X(2,1);\quad Mn = 0.0;\quad Qn = X(4,1);$

$R1 = X(4,1)$ $\qquad$ $R3 = -X(3,1) + X(12,1)$

$R2 = -X(1,1) + X(8,1)$ $\qquad$ $R4 = -X(5,1) + X(16,1)$

```
% Построение форм собственных колебаний
x = 0.0;   for  m=1 : n1
EIv(m,1) = -(EIvn*(cosh(ℓa*x) + cos(ℓa*x))/2 + EIfin*(sin h(ℓa*x) + sin(ℓa*x))/(2*ℓa) - ...
Mn*(cosh(ℓa*x) - cos(ℓa*x))/(2*ℓa^2) - Qn*(sin h(ℓa*x) - sin(ℓa*x))/(2*ℓa^3) - ...
R2*(sin h(ℓa*(x - ℓ1)) - sin(ℓa*(x - ℓ1)))*H(x - ℓ1)/(2*ℓa^3) - ...
R3*(sin h(ℓa*(x - ℓ1 - ℓ2)) - sin(ℓa*(x - ℓ1 - ℓ2)))*H(x - ℓ1 - ℓ2)/(2*ℓa^3) - ...
R4*(sin h(ℓa*(x - ℓ1 - ℓ2 - ℓ3)) - sin(ℓa*(x - ℓ1 - ℓ2 - ℓ3)))*H(x - ℓ1 - ℓ2 - ℓ3)/(2*ℓa^3));
X2(m,1) = x;    x = x + L/n1;    end;
plot(X2, EIv);   axis([0  14 - 6   6]);   grid on
```

Замечания к тексту программы

Данная программа объединяет два процесса:

1 Поиск спектра частот собственных колебаний с заданной точностью.

2 Построение форм собственных колебаний.

В этой связи вначале необходимо с заданной точностью определить требуемое количество частот собственных колебаний. Поэтому вторая задача (построение форм) должна блокироваться с помощью символа % (комментарий). При выполнении второй задачи значение λ вычисляется при собственной частоте (в скобках переменной *ℓa* меняется *am* на *ams*), а цикл и результаты первой задачи блокируются символом %.

Формы колебаний балки строятся по выражению метода начальных параметров, которое принимает вид:

$$EIv(x) = -\left(EIv_{(0)}^{0-1}\frac{ch\lambda x + \cos\lambda x}{2} + EI\varphi_{(0)}^{0-1}\frac{sh\lambda x + \sin\lambda x}{2\lambda} - M_{(0)}^{0-1}\frac{ch\lambda x - \cos\lambda x}{2\lambda^2} - \right.$$

$$- Q_{(0)}^{0-1}\frac{sh\lambda x - \sin\lambda x}{2\lambda^3} - {}_{x\rangle\ell_1}|R2\frac{sh\lambda(x-\ell_1) - \sin\lambda(x-\ell_1)}{2\lambda^3} -$$

$$- {}_{x\rangle\ell_1+\ell_2}|R3\frac{sh\lambda(x-\ell_1-\ell_2) - \sin\lambda(x-\ell_1-\ell_2)}{2\lambda^3} -$$

$$\left. - {}_{x\rangle\ell_1+\ell_2+\ell_3}|R4\frac{sh\lambda(x-\ell_1-\ell_2-\ell_3) - \sin\lambda(x-\ell_1-\ell_2-\ell_3)}{2\lambda^3}\right).$$

Результаты поиска частот и построения форм собственных колебаний балки

График $d = |\boldsymbol{A}_*(\omega)|$ для балки при 0.01≤ ω≤ 2.5 1/с принимает вид:

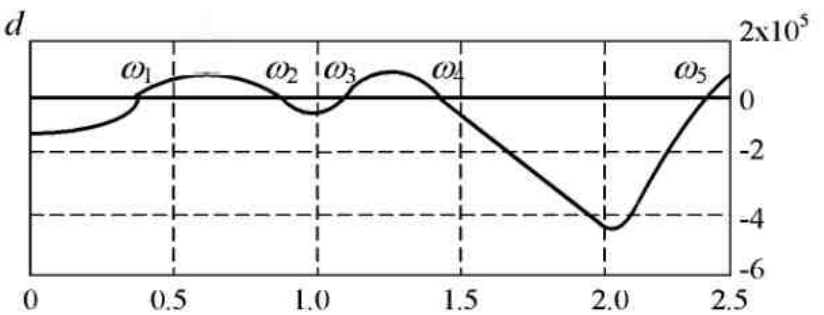


Рисунок 5.14

Как следует из рисунка 5.14, график определителя $d = |\boldsymbol{A}_*(\omega)|$ не имеет точек разрыва 2-го рода (это большое преимущество метода граничных элементов), не касается оси $d = 0$ и пересекает ее в ряде точек. Эти точки отмечены символами ω_1, ω_2 и т.д., т.е. известны приближенные интервалы корней частотного уравнения (3.8). Уточнение частот приводит к следующим значениям:

$$\omega_1 = 0.4055125\sqrt{\frac{EI}{m}}; \qquad \omega_2 = 0.7818475\sqrt{\frac{EI}{m}}; \qquad \omega_3 = 1.1001125\sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\omega_4 = 1.4852935\sqrt{\frac{EI}{m}}; \qquad \omega_5 = 2.4234325\sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \text{1/с} \quad \text{и т.д.}$$

Для построения форм собственных колебаний необходимо определить граничные параметры балки при единичном значении какого-либо параметра матрицы $\boldsymbol{B}$. Если приравнять единице статический параметр, то имеет место статический способ возбуждения собственных колебаний. Если приравнять единице кинематический параметр, то, соответственно, имеет место кинематический способ. Для данной балки в качестве нормирующей величины удобно взять перемещение $EIv_{(\ell)}^{3-4} = X(9,1)$ (см. вектор $\boldsymbol{X}_*$ задачи статики), а в правой части $Q_{(\ell)}^{3-4} = b(16,1) = 1$. Задавая значения $ams = \omega_1$, ω_2 и т.д., получаем формы собственных колебаний при условии, что $EIv_{(\ell)}^{3-4} = 1$.

Первые 5 форм собственных колебаний представлены на рисунке 5.15.

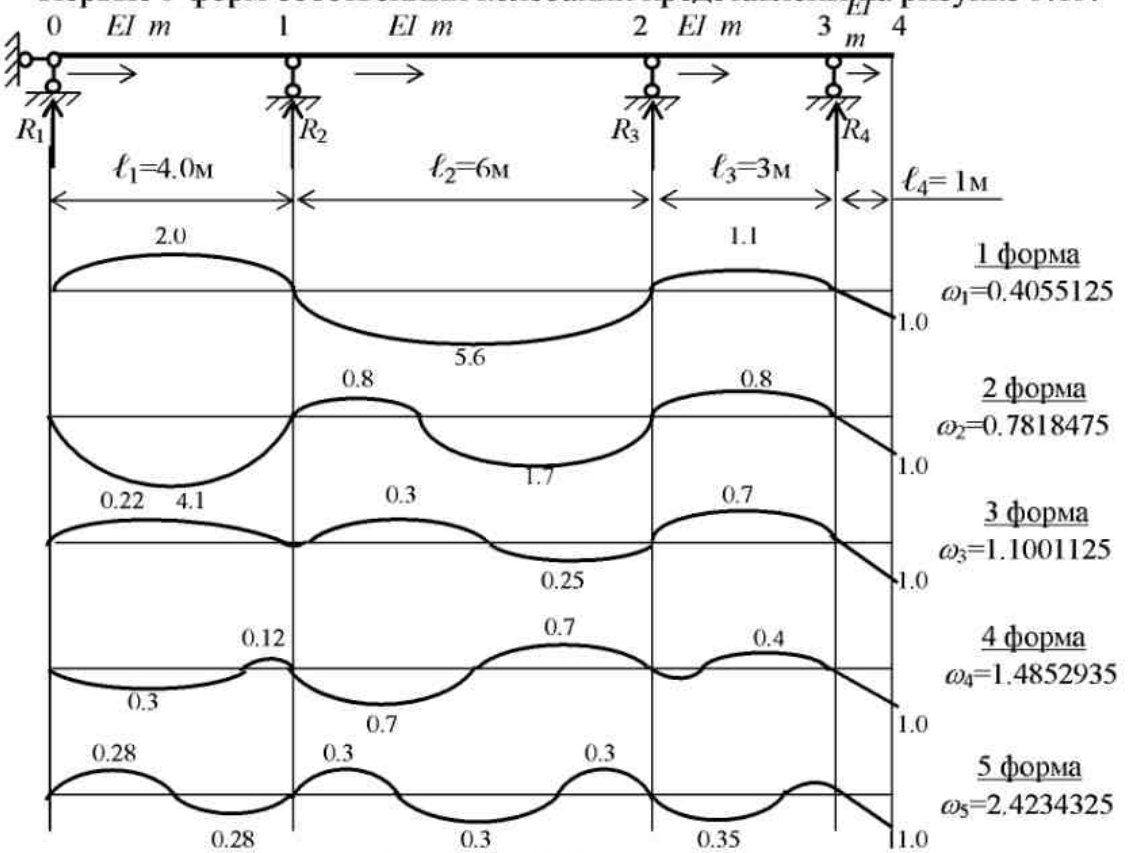


Рисунок 5.15

Пример 5.13. Расчет напряженно-деформированного состояния вынужденных колебаний неразрезной балки (рисунок 5.16).

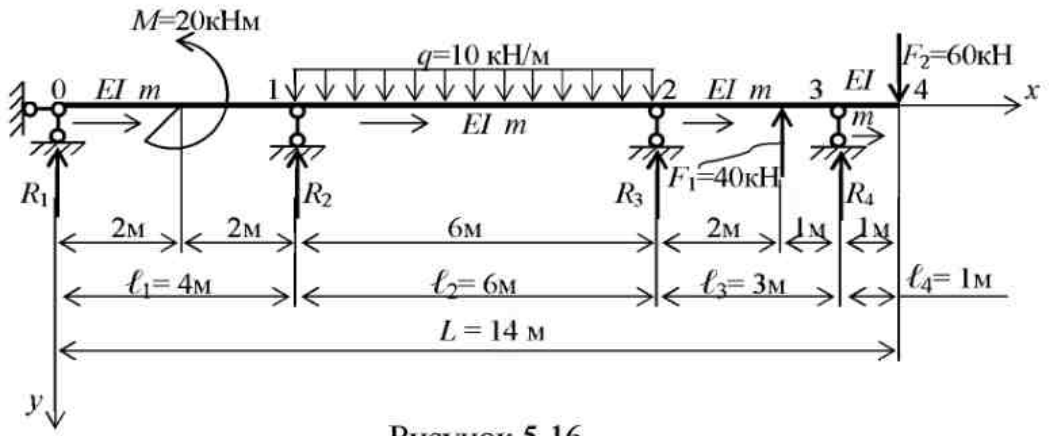


Рисунок 5.16

Начальные параметры $EIv_{(0)}^{0-1}$, $EI\varphi_{(0)}^{0-1}$, $M_{(0)}^{0-1}$, $Q_{(0)}^{0-1}$ и реакции балки R_1, R_2, R_3, R_4 можно определить из решения краевой задачи по МГЭ. Структура матричного уравнения задачи вынужденных колебаний будет отличаться от уравнения задачи статики только фундаментальными функциями.

Матричное уравнение краевой задачи

При замене фундаментальных функций поперечного изгиба на фундаментальные функции поперечных колебаний матричное уравнение краевой задачи примет вид, приведенный далее.

Программа решения краевой задачи и построения эпюр состояния балки

Как и в задаче статики, вначале формируем единичную функцию Хевисайда в отдельном файле, даем ей имя *H* и записываем в папку *Work* на жестком диске *C*.

Текст программы функции *H*(*x*-*a*):

function $f = H(t)$

if $t < 0.0$ $f = 0.0$; *else* $f = 1.0$; *end*;

Текст программы с комментариями:

$a = zeros(16,16)$; $X = zeros(16,1)$; $b = zeros(16,1)$;

% Исходные данные краевой задачи

$\ell 1=4.0$; $\ell 2=6.0$; $\ell 3=3.0$; $\ell 4=1.0$; $F1=-40.0$; $F2=60.0$; $M=20.0$;
$q=10.0$; $aM=2.0$; $aF1=2.0$; $aF2=1.0$; $an=0.0$; $ak=6.0$;

$L=14{,}0$; $\ell M=2.0$; $\ell n=4.0$; $\ell k=10.0$; $\ell F1=12.0$; $\ell R2=4.0$; $\ell R3=10.0$;
$\ell R4=13.0$; $\ell a=sqrt(0.7*0.4055125)$;

% Ввод матриц $a(16,16)$, $b(16,1)$ с помощью операторов присваивания

$a(1,2) = (\sin h(\ell a * \ell 1) + \sin(\ell a * \ell 1))/(2 * \ell a)$; $a(1,4) = -(\sin h(\ell a * \ell 1) - \sin(\ell a * \ell 1))/(2 * \ell a\text{^}3)$;

$b(1,1) = -M * (\cos h(\ell a * (\ell 1 - aM)) - \cos(\ell a * (\ell 1 - aM)))/(2 * \ell a\text{^}2)$;

$a(2,2) = (\cos h(\ell a * \ell 1) + \cos(\ell a * \ell 1))/2$; $a(2,4) = -(\cos h(\ell a * \ell 1) - \cos(\ell a * \ell 1))/(2 * \ell a\text{^}2)$;

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16			
1		A_{12}		$-A_{14}$													$Q_{(\ell)}^{0-1}$		$-e_{11}^{0-1}(\ell_1)$
2		A_{11}		$-A_{13}$		-1											$EI\varphi_{(0)}^{0-1}$		$-e_{21}^{0-1}(\ell_1)$
3		$-\lambda^4 A_{14}$		A_{12}			-1										$Q_{(\ell)}^{1-2}$		$e_{31}^{0-1}(\ell_1)$
4	-1	$-\lambda^4 A_{13}$		A_{11}													$Q_{(0)}^{0-1}$		$e_{41}^{0-3}(\ell_1)$
5						A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$									$Q_{(\ell)}^{2-3}$		$-e_{11}^{1-2}(\ell_2)$
6						A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		-1							$EI\varphi_{(0)}^{1-2}$		$-e_{21}^{1-2}(\ell_2)$
7						$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}			-1						$M_{(0)}^{1-2}$		$e_{31}^{1-2}(\ell_2)$
8			-1			$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}									$Q_{(0)}^{1-2}$		$e_{41}^{1-2}(\ell_2)$
9										A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$					$EIv_{(\ell)}^{3-4}$	=	$-e_{11}^{2-3}(\ell_3)$
10										A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		-1			$EI\varphi_{(0)}^{2-3}$		$-e_{21}^{2-3}(\ell_3)$
11										$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}			-1		$M_{(0)}^{2-3}$		$e_{31}^{2-3}(\ell_3)$
12					-1					$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}					$Q_{(0)}^{2-3}$		$e_{41}^{2-3}(\ell_3)$
13									-1					A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$EI\varphi_{(\ell)}^{3-4}$		$-e_{11}^{3-4}(\ell_4)$
14													-1	A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	$EI\varphi_{(0)}^{3-4}$		$-e_{21}^{3-4}(\ell_4)$
15														$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}	$M_{(0)}^{3-4}$		$e_{31}^{3-4}(\ell_4)$
16														$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	$Q_{(0)}^{3-4}$		$e_{41}^{3-4}(\ell_4)$

$a(2,6)=-1;$

$b(2,1)=-M*(\sin h(\ell a*(\ell 1-aM))+\sin(\ell a*(\ell 1-aM)))/(2*\ell a);$

$a(3,2)=\ell a\hat{}\,4*a(1,4);\quad a(3,4)=a(1,2);\quad a(3,7)=-1;$

$b(3,1)=-M*(\cos h(\ell a*(\ell 1-aM))+\cos(\ell a*(\ell 1-aM)))/2;$

$a(4,1)=-1;\quad a(4,2)=\ell a\hat{}\,4*a(2,4);\quad a(4,4)=a(2,2);$

$b(4,1)=M*\ell a*(\sin h(\ell a*(\ell 1-aM))-\sin(\ell a*(\ell 1-aM)))/2;$

$a(5,6)=(\sin h(\ell a*\ell 2)+\sin(\ell a*\ell 2))/(2*\ell a);$

$a(5,7)=-(\cos h(\ell a*\ell 2)-\cos(\ell a*\ell 2))/(2*\ell a\hat{}\,2);$

$a(5,8)=-(\sin h(\ell a*\ell 2)-\sin(\ell a*\ell 2))/(2*\ell a\hat{}\,3);\quad a(6,6)=(\cos h(\ell a*\ell 2)+\cos(\ell a*\ell 2))/2;$

$a(6,7)=-a(5,6);\quad a(6,8)=a(5,7);\quad a(6,10)=-1;\quad a(7,6)=\ell a\hat{}\,4*a(5,8);$

$a(7,7)=a(6,6);\quad a(7,8)=a(5,6);\quad a(7,11)=-1;\quad a(8,3)=-1;\quad a(8,6)=\ell a\hat{}\,4*a(5,7);$

$a(8,7)=-a(7,6);\quad a(8,8)=a(6,6)$

$b(5,1)=-q*(\cos h(\ell a*\ell 2)+\cos(\ell a*\ell 2)-2)/(2*\ell a\hat{}\,4);$

$b(6,1)=-q*(\sin h(\ell a*\ell 2)-\sin(\ell a*\ell 2))/(2*\ell a\hat{}\,3);$

$b(7,1)=q*(\cos h(\ell a*\ell 2)-\cos(\ell a*\ell 2))/(2*\ell a\hat{}\,2);$

$b(8,1)=q*(\sin h(\ell a*\ell 2)+\sin(\ell a*\ell 2))/(2*\ell a);$

$a(9,10)=(\sin h(\ell a*\ell 3)+\sin(\ell a*\ell 3))/(2*\ell a);$

$a(9,11)=-(\cos h(\ell a*\ell 3)-\cos(\ell a*\ell 3))/(2*\ell a\hat{}\,2);$

$a(9,12)=-(\sin h(\ell a*\ell 3)-\sin(\ell a*\ell 3))/(2*\ell a\hat{}\,3);\quad a(10,10)=(\cos h(\ell a*\ell 3)+\cos(\ell a*\ell 3))/2;$

$a(10,11)=-a(9,10);\quad a(10,12)=a(9,11);\quad a(10,14)=-1;\quad a(11,10)=\ell a\hat{}\,4*a(9,12);$

$a(11,11)=a(10,10);\quad a(11,12)=a(9,10);\quad a(11,15)=-1;\quad a(12,5)=-1;$

$a(12,10)=\ell a\hat{}\,4*a(9,11);\quad a(12,11)=-a(11,10);\quad a(12,12)=a(10,10);$

$b(9,1)=-F1*(\sin h((\ell 3-aF1)*\ell a)-\sin(\ell a*(\ell 3-aF1)))/(2*\ell a\hat{}\,3);$

$b(10,1)=-F1*(\cos h(\ell a*(\ell 3-aF1))-\cos(\ell a*(\ell 3-aF1)))/(2*\ell a\hat{}\,2);$

$b(11,1)=F1*(\sin h(\ell a*(\ell 3-aF1))+\sin(\ell a*(\ell 3-aF1)))/(2*\ell a);$

$b(12,1)=F1*(\cos h(\ell a*(\ell 3-aF1))+\cos(\ell a*(\ell 3-aF1)))/2;$

$a(13,9)=-1;\quad a(13,14)=(\sin h(\ell a*\ell 4)+\sin(\ell a*\ell 4))/(2*\ell a);$

$a(13,15)=-(\cos h(\ell a*\ell 4)-\cos(\ell a*\ell 4))/(2*\ell a\hat{}\,2);$

$a(13,16)=-(\sin h(\ell a*\ell 4)-\sin(\ell a*\ell 4))/(2*\ell a\hat{}\,3);$

$a(14,13)=-1;\quad a(14,14)=(\cos h(\ell a*\ell 4)+\cos(\ell a*\ell 4))/2;\quad a(14,15)=-a(13,14);$

$a(14,16)=a(13,15);\quad a(15,14)=\ell a\hat{}\,4*a(13,16);\quad a(15,15)=a(14,14);$

$a(15,16)=a(13,14);\quad a(16,14)=\ell a\hat{}\,4*a(13,15);\quad a(16,15)=-a(15,14);\quad a(16,16)=a(14,14);$

$b(13,1)=-F2*(\sin h(\ell a*(\ell 4-aF2))-\sin(\ell a*(\ell 4-aF2)))/(2*\ell a\hat{}\,3);$

$b(14,1)=-F2*(\cos h(\ell a*(\ell 4-aF2))-\cos(\ell a*(\ell 4-aF2)))/(2*\ell a\hat{}\,2);$

$b(15,1)=F2*(\sin h(\ell a*(\ell 4-aF2))+\sin(\ell a*(\ell 4-aF2)))/(2*\ell a);$

$b(16,1)=F2*(\cos h(\ell a*(\ell 4-aF2))+\cos(\ell a*(\ell 4-aF2)))/2;$

```
% Решение системы уравнений и вывод значений параметров
X = a \ b

% Вычисление и вывод реакций балки
R1 = X(4,1)
R2 = -X(1,1)+ X(8,1)
R3 = -X(3,1)+ X(12,1)
R4 = -X(5,1)+ X(16,1)

% Начальные параметры балки
EIvn = 0.0;   EIfin = X(2,1);   Mn = 0.0;   Qn = X(4,1);   n=28;   EIv = zeros(n,1);
EIfi = zeros(n,1);   Me = zeros(n,1);   Qe = zeros(n,1);   X1 = zeros(n,1);
dx = (ℓ1 + ℓ2 + ℓ3 + ℓ4)/n;   x=0.0;

for  m=1 : n+1
X1(m,1) = x;
EIv(m,1) = -(EIvn * (cosh(ℓa * x) + cos(ℓa * x))/2 + EIfin * ( sinh (ℓa * x) + ...
sin (ℓa * x))/(2 * ℓa) - Mn * (cosh(ℓa * x) - cos(ℓa * x))/(2 * ℓa^2) - Qn * ( ...
sin h(ℓa * x) - sin (ℓa * x) )/(2 * ℓa^3) + M * (cos h(ℓa * (x - ℓM)) - cos(ℓa * ...
(x - ℓM))) * H(x - ℓM)/(2 * ℓa^2) - R2 * (sin h(ℓa * (x - ℓR2)) - sin (ℓa * ...
(x - ℓR2))) * H(x - ℓR2)/(2 * ℓa^3) + q * (cos h(ℓa * (x - ℓn)) + cos(ℓa * (x - ...
ℓn)) - 2.0) * H(x - ℓn)/(2 * ℓa^4) - q * (cos h(ℓa * (x - ℓk)) + cos(ℓa * (x - ...
ℓk)) - 2.0) * H(x - ℓk)/(2 * ℓa^4) - R3 * (sin h(ℓa * (x - ℓR3)) - sin(ℓa * (x - ...
ℓR3))) * H(x - ℓR3)/(2 * ℓa^3) + F1 * (sin h(ℓa * (x - ℓF1)) - sin(ℓa * (x - ℓF1))) * ...
H(x - ℓF1)/(2 * ℓa^3) - R4 * (sin h(ℓa * (x - ℓR4)) - sin(ℓa * (x - ℓR4))) * H(x - ℓR4) ...
 /(2 * ℓa^3));
EIfi(m,1) = -(EIvn * ℓa^4 * ( sin h(ℓa * x) - sin (ℓa * x))/( 2 * ℓa^3) + ...
EIfin * (cos h)(ℓa * x) + cos (ℓa * x))/2 - Mn * (sin h( ℓa * x) + sin(ℓa * x))/ ...
(2 * ℓa) - Qn * (cos h(ℓa * x) - cos(ℓa * x))/(2 * ℓa^2) + M * (sin h(ℓa * (x - ℓM)) + ...
sin(ℓa * (x - ℓM))) * H(x - ℓM)/(2 * ℓa) - R2 * (cos h(ℓa * (x - ℓR2)) - cos (ℓa * (x - ...
ℓR2))) * H (x - ℓR2)/(2 * ℓa^2) + q * (sin h(ℓa * (x - ℓn)) - sin(ℓa * (x - ℓn))) * ...
H(x - ℓn)/(2 * ℓa^3) - q * (sin h(ℓa * (x - ℓk)) - sin(ℓa * (x - ℓk))) * H(x - ℓk)/(2 * ℓa^3) - ...
R3 * (cos h(ℓa * (x - ℓR3)) - cos(ℓa * (x - ℓR3))) * H(x - ℓR3)/(2 * ℓa^2) + F1 * (cos h ...
(ℓa * (x - ℓF1)) - cos(ℓa * (x - ℓF1))) * H(x - ℓF1)/(2 * ℓa^2) - R4 * (cos h(ℓa * ...
(x - ℓR3)) - cos(ℓa * (x - ℓR4))) * H(x - ℓR4)/(2 * ℓa^2);
```

$Me(m,1) = --\left(EIvn * \ell a\text{^}4 * (\cos h(\ell a * x) - \cos(\ell a * x))\right)/(2 * \ell a\text{^}2) - \ldots$
$EIfin * \ell a\text{^}4 * (\sin h(\ell a * x) - \sin(\ell a * x))/(2 * \ell a\text{^}3) + Mn * (\cosh(\ell a * x) + \ldots$
$\cos(\ell a * x))/2 + Qn * (\sin h(\ell a * x) + \sin(\ell a * x))/(2 * \ell a) - M * (\cos h(\ell a * \ldots$
$(x - \ell M)) + \cos(\ell a * (x - \ell M))) * H(x - \ell M)/2 + R2 * (\sin h(\ell a * (x - \ell R2)) + \ldots$
$\sin(\ell a * (x - \ell R2))) * H(x - \ell R2)/(2 * \ell a) - q * (\cos h(\ell a * (x - \ell n)) - \cos(\ell a * \ldots$
$(x - \ell n))) * H(x - \ell n)/(2 * \ell a\text{^}2) + q * (\cos h(\ell a * (x - \ell k)) - \cos(\ell a * (x - \ell k))) * \ldots$
$H(x - \ell k)/(2 * \ell a\text{^}2) + R3 * (\sin h(\ell a * (x - \ell R3)) + \sin(\ell a * (x - \ell R3))) * H(x - \ell R3) \ldots$
$R4 * (\sin h(\ell a * (x - \ell R4)) + \sin(\ell a * (x - \ell R4))) * H(x - \ell R4)/(2 * \ell a));$

$Qe(m,1) = --\left(EIvn * \ell a\text{^}4 * (\sin h(\ell a * x) + \sin(\ell a * x))\right)/(2 * \ell a) - EIfin * \ldots$
$\ell a\text{^}4 * (\cos h(\ell a * x) - \cos(\ell a * x))/(2 * \ell a\text{^}2) + Mn * (\sin h(\ell a * x) - \sin(\ell a * x)) * \ldots$
$\ell a\text{^}4 */(2 * \ell a\text{^}2) + Qn * (\cos h(\ell a * x) + \cos(\ell a * x))/2 - M * \ell a\text{^}4 * (\sin h(\ell a * \ldots$
$(x - \ell M)) - \sin(\ell a * (x - \ell M))) * H(x - \ell M)/(2 * \ell a\text{^}3) + R2 * (\cos h(\ell a * (x - \ell R2)) \ldots$
$+ \cos(\ell a * (x - \ell R2))) * H(x - \ell R2)/2 - q * (\sin h(\ell a * (x - \ell n)) + \sin(\ell a * (x - \ldots$
$\ell n))) * H(x - \ell n)/(2 * \ell a) + q * (\sin h(\ell a * (x - \ell k)) + \sin(\ell a * (x - \ell k))) * H(x - \ell k)/\ldots$
$(2 * \ell a) + R3 * (\cos h(\ell a * (x - \ell R3)) + \cos(\ell a * (x - \ell R3))) * H(x - \ell R3)/2 - \ldots$
$F1 * (\cos h(\ell a * (x - \ell F1)) + \cos(\ell a * (x - \ell F1))) * H(x - \ell F1)/2 + R4 * (\cos h(\ell a * (x - \ell R4)) \ldots$
$+ \cos(\ell a * (x - \ell R4))) * H(x - \ell R4)/2;$

x = x + dx; end;

% Построение эпюр *Q, M, Eifi, EIv*
% *stem* (*X*1, *Qe, 'filled'*); *axis* ([o 14 – 100 100]); *grid on*
% *stem* (*X*1, *Me, 'filled'*); *axis* ([o 14 – 100 100]); *grid on*
% *stem* (*X*1, *EIfi, 'filled'*); *axis* ([o 14 – 150 150]); *grid on*
% *stem* (*X*1, *EIv, 'filled'*); *axis* ([o 14 – 210 100]); *grid on*

% Вывод таблицы значений параметров балки

[*X*1 *– Qe – Me – Eifi – EIv*]

Замечание к тексту программы

Для выполнения задания данную программу необходимо прогнать несколько раз. После первого выполнения программы на экране монитора появятся вектор граничных параметров ***X***, реакции балки R_1, R_2, R_3, R_4 и таблица параметров $Q(x)$, $M(x)$, $EI\varphi(x)$, $EIv(x)$.

После этого нужно заблокировать вывод численных результатов с помощью оператора **;** (точка с запятой) и снять символ комментария % с какого-либо графика; значение n необходимо поменять на n = 500÷1000. 4 раза прогоняя данную программу, можно получить все эпюры состояния балки, которые представлены на рисунке 5.17.

Результаты решения краевой задачи и вычисления параметров состояния балки

Значения параметров вектора $\boldsymbol{X}$ заносим в таблицу 5.19.

Таблица 5.19

1	$Q_{(\ell)}^{0-1} = X(1,1) = 0.2177$ кН	9	$EIv_{(\ell)}^{3-4} = X(9,1) = 128.7538$ кНм^3
2	$EI\varphi_{(0)}^{0-1} = X(2,1) = -37.1278$ кНм^2	10	$EI\varphi_{(0)}^{2-3} = X(10,1) = -88.1902$ кНм^2
3	$Q_{(\ell)}^{1-2} = X(3,1) = -58.0175$ кН	11	$M_{(0)}^{2-3} = X(11,1) = -33.1011$ кНм
4	$Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1) = -12.2671$ кН	12	$Q_{(0)}^{2-3} = X(12,1) = -29.5479$ кН
5	$Q_{(\ell)}^{2-3} = X(5,1) = 22.9818$ кН	13	$EI\varphi_{(\ell)}^{3-4} = X(13,1) = 139.0936$ кНм^2
6	$EI\varphi_{(0)}^{1-2} = X(6,1) = 74.7820$ кНм^2	14	$EI\varphi_{(0)}^{3-4} = X(14,1) = 107.8247$ кНм^2
7	$M_{(0)}^{1-2} = X(7,1) = -45.9397$ кНм	15	$M_{(0)}^{3-4} = X(15,1) = -63.3606$ кНм
8	$Q_{(0)}^{1-2} = X(8,1) = 61.6350$ кН	16	$Q_{(0)}^{3-4} = X(16,1) = 64.9778$ кН

Реакции балки равны:

$R_1 = X(4,1) = -12.2671$ кН; $R_2 = -X(1,1) + X(8,1) = 61.4173$;

$R_3 = -X(3,1) + X(12,1) = 28.4696$; $R_4 = -X(5,1) + X(16,1) = 41.9960$.

Сумма реакций балки

$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = -12.2671+61.4173+28.4696+41.9960 = 119.6158$ кН

превышает равнодействующую внешней нагрузки R=80.0 кН, что свидетельствует о близости к резонансному режиму.

Значения параметров состояния балки заносим в таблицу 5.20.

Таблица 5.20

	Параметры напряженно-деформированного состояния балки				
	Координата x, м Вектор $X1$	Поперечная сила Q, кН Вектор Qe	Изгибающий момент M, кНм Вектор Me	Угол поворота $EI\varphi$, кНм^2 Вектор $EIfi$	Прогиб EIv, кНм^3 Вектор EIv
1	2	3	4	5	6
1	0.0	-12.2671	0.0	-37.1278	0.0
2	0.5	-11.8957	-6.0715	-35.6071	-18.3091
3	1.0	-10.8121	-11.7767	-31.1175	-35.1080
4	1.5	-9.1063	-16.7796	-23.9429	-48.9774
5	2.0	-6.9219	-40.8029	-14.5016	-58.6724
6	2.5	-4.4819	-43.6573	6.6644	-60.6912
7	3.0	-2.1780	-45.3074	28.9537	-51.8210
8	3.5	-0.4583	-45.9326	51.7997	-31.6455
9	4.0	61.6350	-45.9397	74.7820	0.0
10	4.5	55.8174	-16.5061	90.2724	41.8771
11	5.0	48.2047	9.5770	91.8461	87.9504
12	5.5	38.7622	31.3923	81.4069	131.7185
13	6.0	27.6959	48.0675	61.3113	167.7457
14	6.5	15.4063	58.8836	34.3173	191.8783
15	7.0	2.4318	63.3592	3.4861	201.4225
16	7.5	-10.6119	61.3038	-27.9516	195.2632
17	8.0	-23.0969	52.8407	-56.7481	173.9119

Продолжение таблицы 5.20

1	2	3	4	5	6
18	8.5	-34.4485	38.3965	-79.7940	139.4752
19	9.0	-44.2072	18.6586	-94.2612	95.5498
20	9.5	-52.0856	-5.4962	-97.7160	47.0520
21	10.0	-29.5479	-33.1011	-88.1902	0.0
22	10.5	-28.7214	-47.7346	-67.9639	-39.3437
23	11.0	-26.5379	-61.5956	-40.5857	-66.7700
24	11.5	-23.5479	-74.1373	-6.5899	-78.8253
25	12.0	19.5649	-85.1223	33.2901	-72.3790
26	12.5	22.0069	-74.6842	73.2929	-45.5156
27	13.0	64.9778	-63.3606	107.8247	0.0
28	13.5	63.7991	-31.0646	131.4066	68.4811
29	14.0	60.0000	0.0000	139.0936	128.7538

Эпюры напряженно-деформированного состояния балки

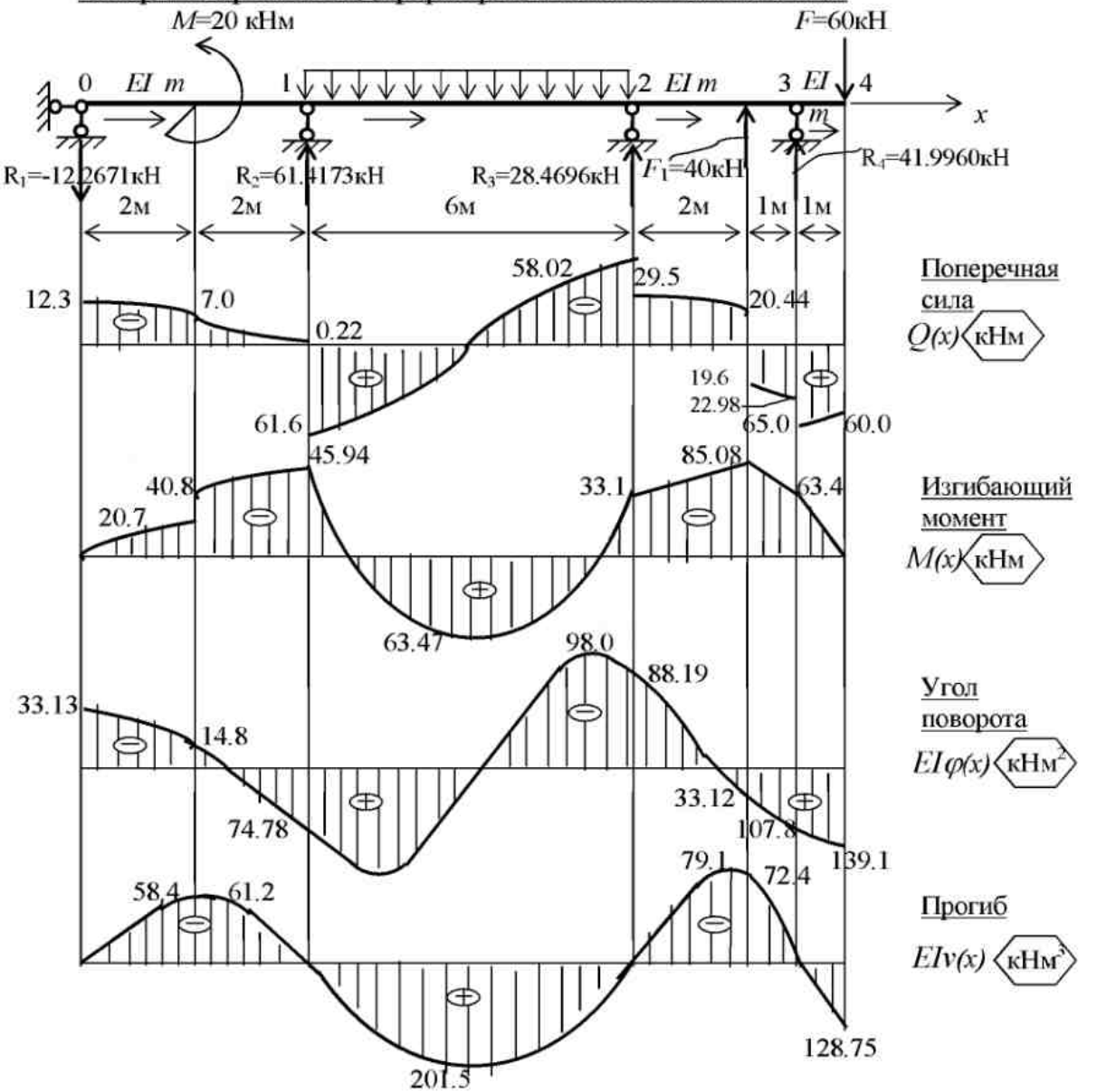


Рисунок 5.17

5.6 Устойчивость неразрезной балки

Пример 5.14. Определение критических сил и форм потери устойчивости (рисунок 5.18).

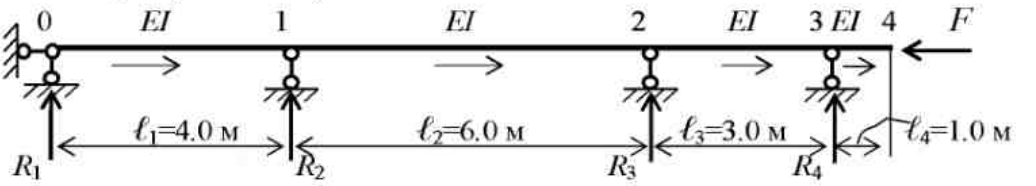


Рисунок 5.18

Здесь применяем уравнение с фундаментальными функциями продольно-поперечного изгиба со сдвиговой силой $Q(x)$, перпендикулярной первоначальной прямолинейной оси стержня (4.4).

Для определения критических сил формируется матрица устойчивости $\boldsymbol{A}_*(F)$, а уравнение устойчивости по МГЭ принимает вид

$$\left|\boldsymbol{A}_*(F)\right| = 0.$$

Корни этого уравнения и будут являться критическими силами. Для данной балки матрица устойчивости получится, если заменить фундаментальные функции поперечных колебаний на фундаментальные функции продольно-поперечного изгиба (4.5) в матрице $\boldsymbol{A}_*$.

$\boldsymbol{A}_*=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1		A_{12}		$-A_{14}$													
2		A_{22}		$-A_{13}$		-1											0-1
3		$-A_{32}$		A_{12}			-1										
4	-1			1													
5						A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$									
6						A_{22}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		-1							
7						$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}			-1						1-2
8			-1					1									
9										A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$					
10										A_{22}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		-1			
11										$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}			-1		2-3
12					-1							1					
13									-1					A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	
14													-1	A_{22}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	3-4
15														$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}	
16																1	

Для определения корней уравнения (4.6) (критических сил) организуется цикл вычислений определителя $\left|\boldsymbol{A}_*(F)\right|$, результаты которого выводятся в виде таблицы. При просмотре этой таблицы выявляются точки, где определитель $\left|\boldsymbol{A}_*(F)\right| = 0$ или изменяет знак. В этих точках и определяются критические силы. Перед точным определением критических сил полезно построить график $d = det(\boldsymbol{A}_*)$ для уяснения характера поведения определителя матрицы $\boldsymbol{A}_*$ и приближенного определения интервалов, содержащих корни уравнения (4.6). При решении данной задачи принято, что $EI = 1$.

Обозначение переменных, принятых в программе

a – матрица $\boldsymbol{A}_*(F)$; n – порядок матрицы $\boldsymbol{A}_*(F)$; $n1$ – число циклов вычисления определителя $d = det\,(a)$; d – величина $|\boldsymbol{A}_*(F)|$; F – сжимающая сила; dF – шаг изменения сжимающей силы F; m – счетчик цикла вычисления определителя; ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 – длины стержней неразрезной балки; $n2$ – коэффициент n фундаментальных функций; $X1$ – вектор значений сжимающих сил; Y – вектор значений определителя $|\boldsymbol{A}_*(F)|$; EIv – вектор значений форм потери устойчивости; $EIvn$, $EIfin$, Mn, Qn – начальные параметры; $R1$, $R2$, $R3$, $R4$ – реакции балки; $H(x\text{-}4)$ – единичная функция Хевисайда со сдвигом; b – вектор правых частей; X – вектор относительных граничных параметров балки; L – длина балки; x – значение текущей координаты; $X2$ – вектор значений x форм потери устойчивости.

Текст программы поиска критических сил и построения форм потери устойчивости

$n = 16$; $n1 = 600$; $X = zeros(n,1)$; $X1 = zeros(n1,1)$; $Y = zeros(n1,1)$; $X2 = zeros(n1,1)$; $EIv = zeros(n1,1)$; $в = zeros(n,1)$; $\ell1 = 4.0$; $\ell2 = 6.0$; $\ell3 = 3.0$; $\ell4 = 1.0$; $F = 0.1$; $L = \ell1+\ell2+\ell3+\ell4$; $dF = 2.5/n1$;

for $m = 1 : n1$

$n2 = sqrt(F)$; $a = zeros(n,n)$;

$a(1,2) = \sin(n2 * \ell1)/n2$; $a(1,4) = -(n2 * \ell1 - \sin(n2 * \ell1))\ /n2\text{^}3$;

$a(2,2) = \cos(n2 * \ell1)$; $a(2,4) = -(1 - \cos(n2 * \ell1))/n2\text{^}2$; $a(2,6) = -1$;

$a(3,2) = n2 * \sin(n2 * \ell1)$; $a(2,6) = a(1,2)$; $a(3,7) = -1$; $a(4,1) = -1$;

$a(4,4) = 1$; $a(5,6) = \sin(n2 * \ell2)/n2$; $a(5,7) = -(1 - \cos(n2 * \ell2))/n2\text{^}2$;

$a(5,8) = -(n2 * \ell2 - \sin(n2 * \ell2))\ /n2\text{^}3$; $a(6,6) = \cos(n2 * \ell2)$; $a(6,7) = -a(5,6)$;

$a(6,8) = a(5,7)$; $a(6,10) = -1$; $a(7,6) = n2 * \sin(n2 * \ell2)$; $a(7,7) = a(6,6)$;

$a(7,8) = a(5,6)$; $a(7,11) = -1$; $a(8,3) = -1$; $a(8,8) = 1$; $a(9,10) = \sin(n2 * \ell3)/n2$;

$a(9,11) = -(1 - \cos(n2 * \ell3))/n2\text{^}2$; $a(9,12) = -(n2 * \ell3 - \sin(n2 * \ell3))\ /n2\text{^}3$;

$a(10,10) = \cos(n2 * \ell3)$; $a(10,11) = -a(9,10)$; $a(10,12) = a(9,11)$; $a(10,14) = -1$;

$a(12,5) = -1$; $a(12,12) = 1$; $a(13,9) = -1$; $a(13,14) = \sin(n2 * \ell4)/n2$;

$a(13,15) = -(1 - \cos(n2 * \ell4))/n2\text{^}2$; $a(13,16) = -(n2 * \ell4 - \sin(n2 * \ell4))\ /n2\text{^}3$;

$a(14,13) = -1$; $a(14,14) = \cos(n2 * \ell4)$; $a(14,15) = -a(13,15)$; $a(14,16) = a(13,15)$;

$a(15,14) = n2 * \sin(n2 * \ell4)$; $a(15,15) = -a(14,14)$; $a(15,16) = a(13,14)$; $a(16,16) = 1$;

$d = det(a)$; $X1(m,1) = F$; $Y(m,1) = d$; $F = F + dF$; *end*;

% Построение графика $d = det(a)$

$plot(X1,Y)$; $axis([0.1\ \ 2.5 - 120\ \ 120])$; *grid on*

% Вывод таблицы значений сжимающих сил и определителя

format long e

$[X1\ \ Y]$

% Вычисление относительных граничных параметров балки

$в(16,1) = 1$; $X = a\backslash в$; $X = X/X(9,1)$;

% Вычисление начальных параметров и реакций балки

$EIvn = 0.0;\quad EIfin = X(2,1);\quad Mn = 0.0;\quad Qn = X(4,1);$

$R1 = X(4,1)$

$R2 = -X(1,1) + X(8,1)$

$R3 = -X(3,1) + X(12,1)$

$R4 = -X(5,1) + X(16,1)$

% Построение форм потери устойчивости

$x = 0.0;$

for $n=1 : n1$

$$EIv(m,1) = -\left(EIvn + EIfin * \sin(n2 * x)/n2 - Mn * (1 - \cos(n2 * x))\ldots\right.$$
$$\left./n2\hat{}2 - Qn * \left(n2 * x - \sin(n2 * x)\right)/n2\hat{}3\ldots\right.$$
$$R2 * \left(n2 * (x - \ell 1) - \sin\left(n2 * (x - \ell 1)\right)\right) * H(x - \ell 1)/n2\hat{}3 - \ldots$$
$$R3 * \left(n2 * (x - \ell 1 - \ell 2) - \sin\left(n2 * (x - \ell 1 - \ell 2)\right)\right) * H(x - \ell 1 - \ell 2)/n2\hat{}3 - \ldots$$
$$R4 * \left(n2 * (x - \ell 1 - \ell 2 - \ell 3) - \sin\left(n2 * (x - \ell 1 - \ell 2 - \ell 3)\right)\right) * H(x - \ell 1 - \ell 2 - \ell 3)/n2\hat{}3;$$

$X2(m,1) = x;\quad x = x + L/n1;\quad end;$

$plot(X2, EIv);\quad axis([0\ \ 14\ -4\ \ 4]);\quad grid\ on$

Замечания к тексту программы

Данная программа объединяет два процесса:

1 Поиск критических сил потери устойчивости с заданной точностью.

2 Построение форм потери устойчивости

В этой связи вначале необходимо с заданной точностью определить нужное количество критических сил. При этом вторая задача (построение форм) должна блокироваться с помощью символа % (комментарий). При выполнении второй задачи значение $n2$ вычисляется от найденных критических сил F_1, F_2 и т.д., а цикл и результаты первой задачи блокируются символом %.

Формы потери устойчивости балки строятся по выражению для прогиба метода начальных параметров, которое принимает вид

$$EIv(x) = -\left(EIv_{(0)}^{0-1} \cdot 1 + EI\varphi_{(0)}^{0-1} \cdot \frac{\sin nx}{n} - M_{(0)}^{0-1} \frac{1-\cos nx}{n^2} - Q_{(0)}^{0-1} \cdot \frac{nx - \sin nx}{n^3} - \right.$$
$$- \underset{x\rangle \ell_1}{|R_2} \frac{n(x-\ell_1) - \sin n(x-\ell_1)}{n^3} - \underset{x\rangle \ell_1+\ell_2}{|R_3} \frac{n(x-\ell_1-\ell_2) - \sin n(x-\ell_1-\ell_2)}{n^3} -$$
$$\left. - \underset{x\rangle \ell_1+\ell_2+\ell_3}{|R_4} \frac{n(x-\ell_1-\ell_2-\ell_3) - \sin n(x-\ell_1-\ell_2-\ell_3)}{n^3} \right).$$

Результаты поиска критических сил и построения форм потери устойчивости

График $d = |\boldsymbol{A}_*(F)|$ для балки при $0.01 \le F \le 2.5$ принимает вид, приведенный на рисунке 5.19.

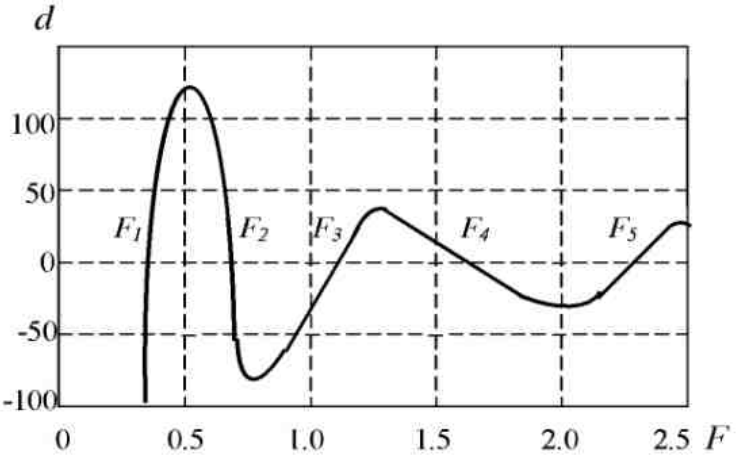


Рисунок 5.19

Как следует из рисунка 5.19, график определителя $d=|\boldsymbol{A}_*(F)|$ не имеет точек разрыва 2-го рода, не касается оси $d=0$ и пересекает ее в ряде точек.

Эти точки отмечены символами F_1, F_2 и т.д., т.е. становятся известными приближенные интервалы нахождения корней уравнения устойчивости (4.6).

Уточнение критических сил приводит к следующим значениям:

$$F_1 = 0.443685\frac{EI}{\ell^2}; \quad F_2 = 0.652565\frac{EI}{\ell^2}; \quad F_3 = 1.051035\frac{EI}{\ell^2}; \quad \ell = 1.0 \text{ м};$$

$$F_4 = 1.618795\frac{EI}{\ell^2}; \quad F_5 = 2.430485\frac{EI}{\ell^2} \text{ кН}.$$

Для построения форм потери устойчивости балки необходимо определить относительные граничные параметры вектора $\boldsymbol{X}_*$ при единичном значении какого-либо элемента вектора $\boldsymbol{B}$. Для данной балки в качестве нормирующей величины удобно взять перемещение $EIv^{3-4}(\ell) = X(9,1)$ (см. вектор $\boldsymbol{X}_*$ задачи статики), а в правой части $Q^{3-4}(\ell) = \boldsymbol{B}(16,1) = 1$.

Задавая значения F_1, F_2 и т.д., можно построить формы потери устойчивости при условии, что $EIv^{3-4}(\ell) = 1$.

Первые пять форм представлены на рисунке 5.20.

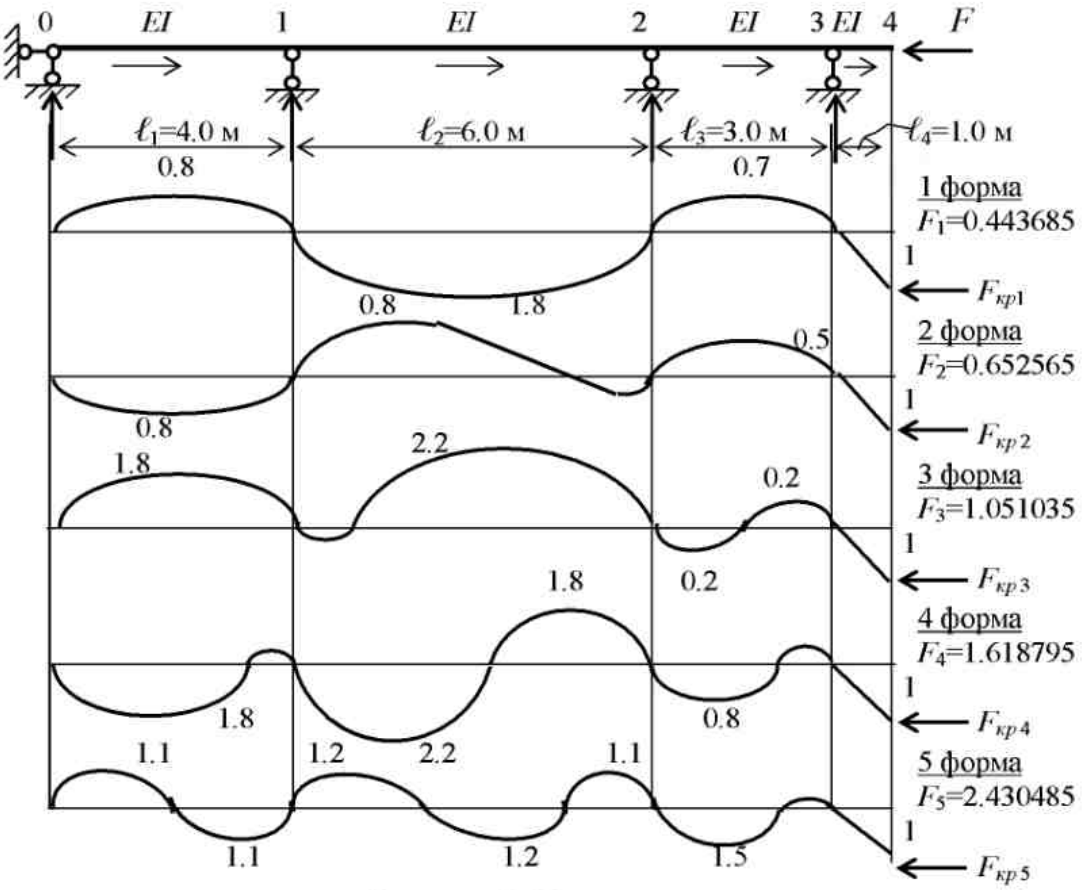


Рисунок 5.20

5.7 Расчет плоской рамы на статическую нагрузку

Пример 5.15. Построить эпюры состояния плоской рамы (рисунок 5.21)

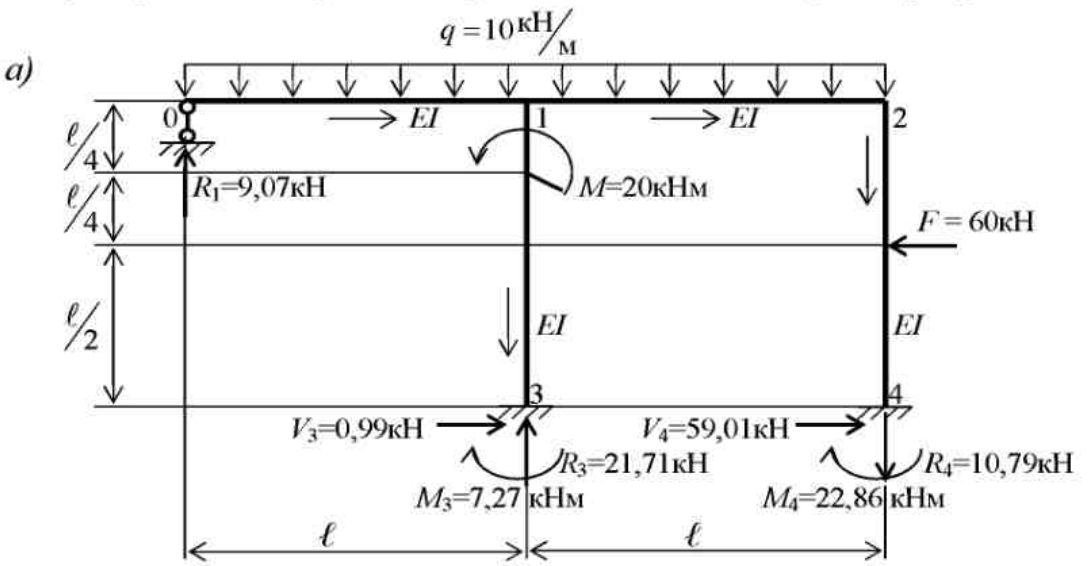
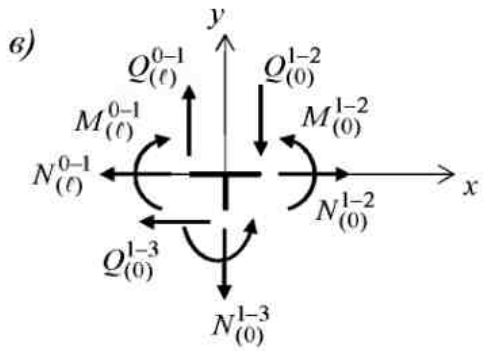
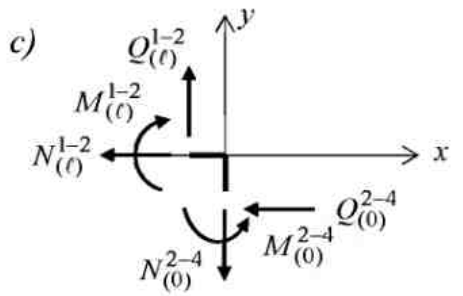


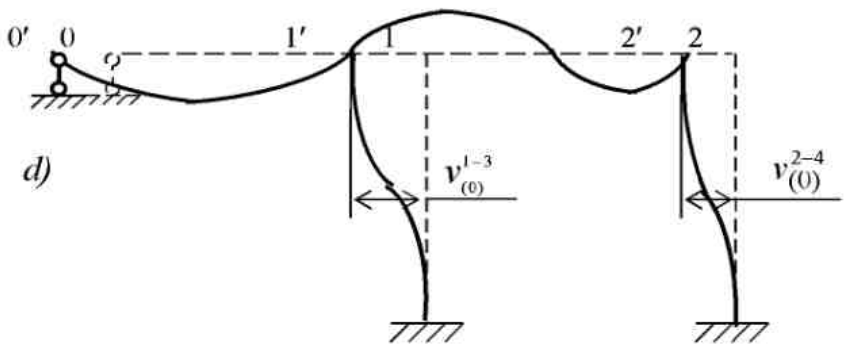
Рисунок 5.21



$$\sum y = 0 \rightarrow Q^{0-1`}_{(\ell)} = Q^{1-2}_{(0)} + N^{1-3}_{(0)};$$
$$\sum x = 0 \rightarrow N^{0-1`}_{(\ell)} = N^{1-2}_{(0)} - Q^{1-3}_{(0)};$$
$$\sum m_{(1)} = 0 \rightarrow M^{0-1`}_{(\ell)} = M^{1-2}_{(0)} + M^{1-3}_{(0)};$$



$$\sum y = 0 \rightarrow Q^{1-2`}_{(\ell)} = N^{2-4}_{(0)};$$
$$\sum x = 0 \rightarrow N^{1-2`}_{(\ell)} = -Q^{2-4}_{(0)};$$
$$\sum m_{(2)} = 0 \rightarrow M^{1-2`}_{(\ell)} = M^{2-4}_{(0)};$$



$$\varphi^{0-1}_{(\ell)} = \varphi^{1-3}_{(0)} = \varphi^{1-2}_{(0)};$$
$$\varphi^{1-2}_{(\ell)} = \varphi^{2-4}_{(0)};$$
$$v^{1-3}_{(0)} = v^{2-4}_{(0)}.$$

Рисунок 5.21

При расчете рамы считается, что стержни нерастяжимы и несжимаемы. Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1,2 (см. рисунок 5.21 *в*, *с*, *d*) помещаем в матрицу конечных параметров $\boldsymbol{Y}(\ell)$. Учитываем в матрицах $\boldsymbol{X}_*, \boldsymbol{Y}$ и граничные условия.

В матрице $\boldsymbol{X}_*$ нулевыми сказались 1, 3, 5, 6, 7, 11 строки. Поэтому обнуляем столбцы с теми же номерами в матрице $\boldsymbol{A}_*$. На место нулевых строк матрицы $\boldsymbol{X}_*$ переносим независимые параметры $M^{2-4}_{(\ell)}$, $Q^{2-4}_{(\ell)}$, $N^{2-4}_{(\ell)}$, $M^{1-3}_{(\ell)}$, $Q^{1-3}_{(\ell)}$, $N^{1-3}_{(\ell)}$.

Зависимые параметры матрицы $\boldsymbol{Y}$ переносим в матрицу $\boldsymbol{X}_*$ в соответствии с уравнениями их связи.

$X_*=$

1	$EIv_{(0)}^{0-1}=0;\ M_{(\ell)}^{2-4}$
2	$EI\varphi_{(0)}^{0-1}$
3	$M_{(0)}^{0-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{2-4}$
4	$Q_{(0)}^{0-1}$
5	$N_{(0)}^{0-1}=0;\ N_{(\ell)}^{2-4}$
6	$EIv_{(0)}^{1-2}=0;\ M_{(\ell)}^{1-3}$
7	$EI\varphi_{(0)}^{1-2}=EI\varphi_{(0)}^{1-3};\ Q_{(\ell)}^{1-3}$
8	$M_{(0)}^{1-2}$
9	$Q_{(0)}^{1-2}$
10	$N_{(0)}^{1-2}$
11	$EIv_{(0)}^{2-4}=EIv_{(0)}^{1-3};\ N_{(\ell)}^{1-3}$
12	$EI\varphi_{(0)}^{2-4}$
13	$M_{(0)}^{2-4}$
14	$Q_{(0)}^{2-4}$
15	$N_{(0)}^{2-4}$
16	$EIv_{(0)}^{1-3}$
17	$EI\varphi_{(0)}^{1-3}$
18	$M_{(0)}^{1-3}$
19	$Q_{(0)}^{1-3}$
20	$N_{(0)}^{1-3}$

;

$Y=$

1	$EIv_{(\ell)}^{0-1}=0$
2	$EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}=EI\varphi_{(0)}^{1-3}$
3	$M_{(\ell)}^{0-1}=M_{(0)}^{1-2}+M_{(0)}^{1-3}$
4	$Q_{(\ell)}^{0-1}=Q_{(0)}^{1-2}+N_{(0)}^{1-3}$
5	$N_{(\ell)}^{0-1}=N_{(0)}^{1-2}-Q_{(0)}^{1-3}$
6	$EIv_{(\ell)}^{1-2}=0$
7	$EI\varphi_{(\ell)}^{1-2}=EI\varphi_{(0)}^{2-4}$
8	$M_{(\ell)}^{1-2}=M_{(0)}^{2-4}$
9	$Q_{(\ell)}^{1-2}=N_{(0)}^{2-4}$
10	$N_{(\ell)}^{1-2}=-Q_{(0)}^{2-4}$
11	$EIv_{(\ell)}^{2-4}=0$
12	$EI\varphi_{(\ell)}^{2-4}=0$
13	$M_{(\ell)}^{2-4}$
14	$Q_{(\ell)}^{2-4}$
15	$N_{(\ell)}^{2-4}$
16	$EIv_{(\ell)}^{1-3}=0$
17	$EI\varphi_{(\ell)}^{1-3}=0$
18	$M_{(\ell)}^{1-3}$
19	$Q_{(\ell)}^{1-3}$
20	$N_{(\ell)}^{1-3}$

В матрице $\boldsymbol{A}_*$ появятся компенсирующие элементы.

Уравнение краевой задачи для рамы при $\ell = 1$ примет вид:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20			
1		1		-1/6																	$M^{2-4}_{(\ell)}$		$-q\ell^4/24=-5/12$
2		1		-1/2													-1				$EI\varphi^{0-1}_{(0)}$		$-q\ell^3/6=-5/3$
3				1				-1										-1			$Q^{2-4}_{(\ell)}$		$-q\ell^2/2=5.0$
4				1					-1											-1	$Q^{0-1}_{(0)}$		$q\ell = 10.0$
5										-1									1		$N^{2-4}_{(\ell)}$		
6								-1/2	-1/6								1				$M^{1-3}_{(\ell)}$		$-q\ell^4/24=-5/12$
7								1	-1/2			-1					1				$Q^{1-3}_{(\ell)}$		$-q\ell^3/6=-5/3$
8								1	1				-1								$M^{1-2}_{(0)}$		$-q\ell^2/2=5.0$
9									1						-1						$Q^{1-2}_{(0)}$		$q\ell = 10.0$
10										1				1							$N^{1-2}_{(0)}$		
11												1	-1/2	-1/6		1					$N^{1-3}_{(\ell)}$	=	$-F(\ell-t/2)3/6=-5/4$
12												1	1	-1/2							$EI\varphi^{2-4}_{(0)}$		$-F(\ell-t/2)2/2=-15/2$
13	-1												1	1							$M^{2-4}_{(0)}$		$F(\ell-t/2)=30.0$
14			-1											1							$Q^{2-4}_{(0)}$		$F=60.0$
15					-1										1						$N^{2-4}_{(0)}$		
16																1	1	-1/2	-1/6		$EIv^{1-3}_{(0)}$		$-M(\ell-t/4)2/2=-45/8$
17																	1	1	-1/2		$EI\varphi^{1-3}_{(0)}$		$-M(\ell-t/4)=-15.0$
18						-1												1	1		$M^{1-3}_{(0)}$		$M=20.0$
19							-1												1		$Q^{1-3}_{(0)}$		
20											-1									1	$N^{1-3}_{(0)}$		

Исходные данные расчета

Согласно рисунку 5.21 рама разбивается на 4 стержня, нумеруются узлы, стрелками указываются начало и конец каждого стержня. Исходные данные решения краевой задачи рамы и построения эпюр напряженно-деформированного состояния формируем для каждого стержня в отдельности.

стержень 0 – 1

$\ell_1 = 1.0$ м; $q_1 = 10.0$ кН/м; $a_н = 0.0$ м; $a_к = \ell_1 = 1.0$м;

начальные параметры:

$EIv_{(0)}^{0-1} = 0.0$ кНм^3; $EI\varphi_{(0)}^{0-1} = X(2,1)$ кНм^2; $M_{(0)}^{0-1} = 0.0$ кНм; $Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1)$кН;

реакция опоры 0

$R_1 = Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1)$ кН;

уравнения состояния:

прогиб $EIv(x)$

$$EIv(x) = EIv_{(0)}^{0-1} + EI\varphi_{(0)}^{0-1} \cdot x - M_{(0)}^{0-1} \cdot \frac{x^2}{2} - Q_{(0)}^{0-1} \cdot \frac{x^3}{3} + q_1 \frac{x^4}{24};$$

угол поворота $EI\varphi(x)$

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_{(0)}^{0-1} - M_{(0)}^{0-1} \cdot x - Q_{(0)}^{0-1} \cdot \frac{x^2}{2} + q_1 \frac{x^3}{6};$$

изгибающий момент $M(x)$

$$M(x) = M_{(0)}^{0-1} + Q_{(0)}^{0-1} \cdot x - q_1 \cdot \frac{x^2}{2};$$

поперечная сила $Q(x)$

$$Q(x) = Q_{(0)}^{0-1} \cdot x - q_1 \cdot x.$$

стержень 1 – 2

$\ell_2 = 1.0$ м; $q_2 = 10.0$ кН/м; $a_н = 0.0$ м; $a_к = \ell_2 = 1.0$м;

начальные параметры:

$EIv_{(0)}^{1-2} = 0.0$ кНм^3; $EI\varphi_{(0)}^{1-2} = X(17,1)$ кНм^2; $M_{(0)}^{1-2} = X(8,1)$ кНм; $Q_{(0)}^{1-2} = X(9,1)$кН;

уравнения состояния:

прогиб $EIv(x)$

$$EIv(x) = EIv_{(0)}^{1-2} + EI\varphi_{(0)}^{1-2} \cdot x - M_{(0)}^{1-2} \cdot \frac{x^2}{2} - Q_{(0)}^{1-2} \cdot \frac{x^3}{6} + q_2 \frac{x^4}{24};$$

угол поворота $EI\varphi(x)$

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_{(0)}^{1-2} - M_{(0)}^{1-2} \cdot x - Q_{(0)}^{1-2} \cdot \frac{x^2}{2} + q_2 \frac{x^3}{6};$$

изгибающий момент $M(x)$

$$M(x) = M_{(0)}^{1-2} + Q_{(0)}^{1-2} \cdot x - q_2 \cdot \frac{x^2}{2};$$

поперечная сила $Q(x)$

$$Q(x) = Q_{(0)}^{1-2} \cdot x - q_2 \cdot x.$$

стержень 1 – 3

$\ell_4 = 1.0$ м; $M = 20.0$ кНм; $\ell_M = \ell_4/4 = 0.25$м;

начальные параметры:

$EIv_{(0)}^{1-3} = X(16,1)$кНм^3; $EI\varphi_{(0)}^{1-3} = X(17,1)$ кНм^2; $M_{(0)}^{1-3} = X(18,1)$ кНм; $Q_{(0)}^{1-3} = X(19,1)$кН;

реакции опоры 3

$V_3 = Q_{(\ell)}^{1-3} = X(7,1)$ кН; $R_3 = N_{(\ell)}^{1-3} = X(11,1)$ кН; $M_3 = M_{(\ell)}^{1-3} = X(6,1)$ кНм;

уравнения состояния:

прогиб $EIv(x)$

$$EIv(x) = EIv_{(0)}^{1-3} + EI\varphi_{(0)}^{1-3} \cdot x - M_{(0)}^{1-3} \cdot \frac{x^2}{2} - Q_{(0)}^{1-3} \cdot \frac{x^3}{6} + \underset{x \rangle \ell_M}{|} M \frac{(x-\ell_M)^2}{2};$$

угол поворота $EI\varphi(x)$

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_{(0)}^{1-3} - M_{(0)}^{1-3} \cdot x - Q_{(0)}^{1-3} \cdot \frac{x^2}{2} + \underset{x \rangle \ell_M}{|} M \cdot (x-\ell_M);$$

изгибающий момент $M(x)$

$$M(x) = M_{(0)}^{1-3} + Q_{(0)}^{1-3} \cdot x - M \cdot H(x-\ell_M);$$

поперечная сила $Q(x)$

$$Q(x) = Q_{(0)}^{1-3}.$$

стержень 2 – 4

$\ell_3 = 1.0$ м; $F = 60.0$ кН; $a_F = \ell_3/2 = 0.5$м;

начальные параметры:

$EIv_{(0)}^{2-4} = X(16,1)$кНм^3; $EI\varphi_{(0)}^{2-4} = X(12,1)$ кНм^2; $M_{(0)}^{2-4} = X(13,1)$ кНм; $Q_{(0)}^{2-4} = X(14,1)$кН;

реакции опоры 4

$V_4 = Q_{(\ell)}^{2-4} = X(3,1)$ кН; $R_4 = N_{(\ell)}^{2-4} = X(5,1)$ кН; $M_4 = M_{(\ell)}^{2-4} = X(1,1)$ кНм;

уравнения состояния:

прогиб $EIv(x)$

$$EIv(x) = EIv_{(0)}^{2-4} + EI\varphi_{(0)}^{2-4} \cdot x - M_{(0)}^{2-4} \cdot \frac{x^2}{2} - Q_{(0)}^{2-4} \cdot \frac{x^3}{6} + \underset{x \rangle \ell_F}{|} F \frac{(x-a_F)^3}{6};$$

угол поворота $EI\varphi(x)$

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_{(0)}^{2-4} - M_{(0)}^{2-4} \cdot x - Q_{(0)}^{2-4} \cdot \frac{x^2}{2} + \underset{x \rangle \ell_F}{|} F \frac{(x-a_F)^2}{2};$$

изгибающий момент $M(x)$

$$M(x) = M_{(0)}^{2-4} + Q_{(0)}^{2-4} \cdot x - \underset{x \rangle \ell_F}{|} F(x-a_F);$$

поперечная сила $Q(x)$

$$Q(x) = Q_{(0)}^{2-4} - F \cdot H(x-a_F).$$

Программа решения краевой задачи и построения эпюр состояния рамы

Ниже приведенная программа использует единичную функцию Хевисайда $H(x\text{-}a)$ со сдвигом.

Текст программы с комментариями

$n = 20;\ a = zeros(n, n);\ X = zeros(n,1);\ b = zeros(n,1);$

% Исходные данные краевой задачи

$\ell1 = 1.0;\ \ell2 = 1.0;\ \ell3 = 1.0;\ \ell4 = 1.0;\ M = 20.0;\ F = 60.0;\ q1 = 10.0;\ q2 = 10.0;$
$aM = \ell4/4;\ aF = \ell3/2;\ an1 = 0.0;\ ak1 = \ell1;\ an2 = 0.0;\ ak2 = \ell2;$

% Ввод матриц $a(n,n)$, $b(n,1)$ с помощью операторов присваивания

$a(1,2) = \ell1;\ a(1,4) = -\ell1\text{^}\ 3/6;\ a(2,2) = 1;\ a(2,4) = -\ell1\text{^}\ 2/2;\ a(2,17) = -1;\ a(3,4) = \ell1;$
$a(3,8) = -1;\ a(3,18) = -1;\ a(4,4) = 1;\ a(4,9) = -1;\ a(4,20) = -1;\ a(5,10) = -1;\ a(5,19) = 1;$
$a(6,8) = -\ell2\text{^}\ 2/2;\ a(6,9) = -\ell2\text{^}\ 3/6;\ a(6,17) = \ell2;\ a(7,8) = -\ell2;\ a(7,9) = -\ell2\text{^}\ 2/2;$
$a(7,12) = -1;\ a(7,17) = 1;\ a(8,8) = 1;\ a(8,9) = \ell2;\ a(8,13) = -1;\ a(9,9) = 1;\ a(9,15) = -1;$
$a(10,10) = 1;\ a(10,14) = 1;\ a(11,12) = \ell3;\ a(11,13) = -\ell3\text{^}\ 2/2;\ a(11,14) = -\ell3\text{^}\ 3/6;$
$a(11,16) = 1;\ a(12,12) = 1;\ a(12,13) = -\ell3;\ a(12,14) = -\ell3\text{^}\ 2/2;\ a(13,1) = -1;\ a(13,13) = 1;$
$a(13,14) = \ell3;\ a(14,3) = -1;\ a(14,14) = 1;\ a(15,5) = -1;\ a(15,15) = 1;\ a(16,16) = 1;$
$a(16,17) = \ell4;\ a(16,18) = -\ell4\text{^}\ 2/2;\ a(16,19) = -\ell4\text{^}\ 3/6;\ a(17,17) = 1;\ a(17,18) = -\ell4;$
$a(17,19) = -\ell4\text{^}\ 2/2;\ a(18,6) = -1;\ a(18,18) = 1;\ a(18,19) = \ell4;\ a(19,7) = -1;\ a(19,19) = 1;$
$a(20,11) = -1;\ a(20,20) = 1;$

$в(1,1) = -q1 * (\ell1 - an1)\text{^}\ 4/24 + q1 * (\ell1 - ak1)\text{^}\ 4/24;$

$в(2,1) = -q1 * (\ell1 - an1)\text{^}\ 3/6 + q1 * (\ell1 - ak1)\text{^}\ 3/6;$

$в(3,1) = q1 * (\ell1 - an1)\text{^}\ 2/2 - q1 * (\ell1 - ak1)\text{^}\ 2/2;$
$в(4,1) = q1 * (\ell1 - an1) - q1 * (\ell1 - ak1);$

$в(6,1) = -q2 * (\ell2 - an2)\text{^}\ 4/24 + q2 * (\ell2 - ak2)\text{^}\ 4/24;$

$в(7,1) = -q2 * (\ell2 - an2)\text{^}\ 3/6 + q2 * (\ell2 - ak2)\text{^}\ 3/6;$

$в(8,1) = q2 * (\ell2 - an2)\text{^}\ 2/2 - q2 * (\ell2 - ak2)\text{^}\ 2/2;$
$в(9,1) = q2 * (\ell2 - an2) - q2 * (\ell2 - ak2);$

$в(11,1) = -F * (\ell3 - aF)\text{^}\ 3/6;\qquad в(12,1) = -F * (\ell3 - aF)\text{^}\ 2/2;$
$в(13,1) = F * (\ell3 - aF);\qquad в(14,1) = F * H(\ell3 - aF);$

$в(16,1) = -M * (\ell4 - aM)\text{^}\ 2/2;\quad в(17,1) = -M * (\ell4 - aM);\quad в(18,1) = M * H(\ell4 - aM);$

% Решение системы уравнений (2) и вывод значений параметров

$X = a \backslash в$

% Вычисление и вывод реакций рамы

$R1 = X(4,1)$ $\qquad$ $M3 = X(6,1)$
$R3 = X(11,1)$ $\qquad$ $M4 = X(1,1)$
$R4 = X(5,1)$
$V3 = X(7,1)$
$V4 = X(3,1)$

% Начальные параметры и нагрузка стержней рамы

% $EIvn = 0.0;$ $EIfin = X(2,1);$ $Mn = 0.0;$ $Qn = X(4,1);$ $q1 = 10.0;$ $q2 = 0.0;$

% $M = 0.0;$ $F = 0.0;$ $\ell = \ell 1;$

% $EIvn = 0.0;$ $EIfin = X(17,1);$ $Mn = X(8,1);$ $Qn = X(9,1);$ $q1 = 0.0;$ $q2 = 10.0;$

% $M = 0.0;$ $F = 0.0;$ $\ell = \ell 2;$

% $EIvn = X(16,1);$ $EIfin = X(17,1);$ $Mn = X(18,1);$ $Qn = X(19,1);$ $q1 = 0.0;$ $q2 = 0.0;$

% $M = 20.0;$ $F = 0.0;$ $\ell = \ell 4;$

% $EIvn = X(16,1);$ $EIfin = X(12,1);$ $Mn = X(13,1);$ $Qn = X(14,1);$ $q1 = 0.0;$ $q2 = 0.0;$

% $M = 0.0;$ $F = 60.0;$ $\ell = \ell 3;$

$n1=600;$ $EIv = zeros(n,1);$ $EIfi = zeros(n1,1);$ $Me = zeros(n1,1);$ $Qe = zeros(n1,1);$

$X1 = zeros(n1,1);$ $dx = \ell / n1;$ $x = 0.0;$

for $m = 1 : n1+1$

$X1(m,1) = x;$

$EIv(m,1) = -(EIvn + EIfin * x - Mn * x\text{^}2/2 - Qn * x\text{^}3/6 + \ldots$

$q1 * (x - an1)\text{^}4 * H(x - an1)/24 - q1 * (x - ak1)\text{^}4 * H(x - ak1)/24 + \ldots$

$q2 * (x - an2)\text{^}4 * H(x - an2)/24 - q2 * (x - ak2)\text{^}4 * H(x - ak2)/24 + \ldots$

$F * (x - aF)\text{^}3 * H(x - aF)/6 + M * (x - aM)\text{^}2 * H(x - aM)/2);$

$EIfi(m,1) = -(EIfin - Mn * x - Qn * x\text{^}2/2 + q1 * (x - an1)\text{^}3 * H(x - an1)/6 - \ldots$

$q1 * (x - ak1)\text{^}3 * H(x - ak1)/6 + q2 * (x - an2)\text{^}3 * H(x - an2)/6 - \ldots$

$q2 * (x - ak2)\text{^}3 * H(x - ak2)/6 + F * (x - aF)\text{^}2 * H(x - aF)/2 + \ldots$

$M * (x - aM)\text{^} * H(x - aM));$

$Me(m,1) = -(Mn + Qn * x - q1 * (x - an1)\text{^}2 * H(x - an1)/2 + q1 * (x - ak1)\text{^}2 \ldots$

$* H(x - ak1)/2 - q2 * (x - an2)\text{^}2 * H(x - an2)/2 + q2 * (x - ak2)\text{^}2 * H(x - ak2)/2 - \ldots$

$F * (x - aF) * H(x - aF) - M * H(x - aM));$

$Qe(m,1) = -(Qn - q1 * (x - an1) * H(x - an1) + q1 * (x - ak1) * H(x - ak1) - \ldots$

$q2 * (x - an2) * H(x - an2) - F * (x - aF));$

$x = x + dx;$ *end*;

% Построение эпюр *Q, M, EIfi, EIv*

subplot (2,2,1); *plot* (*X*1, *Qe*); *axic* ([0 1 –60 60]); *grid on*

subplot (2,2,2); *plot* (*X*1, *Me*); *axic* ([0 1 –25 25]); *grid on*

subplot (2,2,3); *plot* (*X*1, *EIfi*); *axic* ([0 1 –5 5]); *grid on*

subplot (2,2,4); *plot* (*X*1, *EIv*); *axic* ([0 1 –3 3]); *grid on*

% Вывод таблицы значений параметров стержней рамы

[*X*1 – *Qe* – *Me* – *EIfi* – *EIv*]

Замечание к тексту программы

Программа объединяет два процесса:

1 Решение краевой задачи.

2 Построение эпюр состояния стержней по методу начальных параметров.

В этой связи вторая часть при выполнении первой блокируется символом % (комментарий). Далее, вывод вектора $\boldsymbol{X}$, и реакций опор рамы блокируются символом % и этот символ снимается с начальных параметров какого-либо стержня. Несколько раз выполняя программу с разблокированной второй частью, можно получить эпюры состояния рамы для всех стержней (рисунок 5.22). При вычислении параметров состояния стержней можно принять $n1 = 10$.

Результаты решения краевой задачи и вычисления параметров состояния стержней рамы

Результаты решения системы уравнений краевой задачи заносим в таблицу 5.21.

Реакции опор рамы равны:

$R_1 = Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1) = 9.0752$ кН; $R_3 = N_{(\ell)}^{1-3} = X(11,1) = -21.7175$ кН (стержень 1–3 сжат);

$R_4 = N_{(\ell)}^{2-4} = X(5,1) = 10.7927$ кН (стержень 2– 4 растянут);

$V_3 = Q_{(\ell)}^{1-3} = X(7,1) = -0.9959$ кН; $V_4 = Q_{(\ell)}^{2-4} = X(3,1) = -59.0041$ кН;

$M_3 = M_{(\ell)}^{1-3} = X(6,1) = -7.2730$ кНм; $M_4 = M_{(\ell)}^{2-4} = X(1,1) = -22.8591$ кНм.

Таблица 5.21

1	$M_{(\ell)}^{2-4} = X(1,1) = -22.8591$ кНм	11	$N_{(\ell)}^{1-3} = X(11,1) = -21.7175$ кН
2	$EI\varphi_{(0)}^{0-1} = X(2,1) = 1.0959$ кНм^2	12	$EI\varphi_{(0)}^{2-4} = X(12,1) = -0.8570$ кНм^2
3	$Q_{(\ell)}^{2-4} = X(3,1) = -59.0041$ кН	13	$M_{(0)}^{2-4} = X(13,1) = 6.1450$ кНм
4	$Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1) = 9.0752$ кН	14	$Q_{(0)}^{2-4} = X(14,1) = 0.9959$ кН
5	$N_{(\ell)}^{2-4} = X(5,1) = 10.7927$ кН	15	$N_{(0)}^{2-4} = X(15,1) = 10.7927$ кН
6	$M_{(\ell)}^{1-3} = X(6,1) = -7.2730$ кНм	16	$EIv_{(0)}^{1-3} = X(16,1) = 2.8455$ кНм^3
7	$Q_{(\ell)}^{1-3} = X(7,1) = -0.9959$ кН	17	$EI\varphi_{(0)}^{1-3} = X(17,1) = -1.7751$ кНм^2
8	$M_{(0)}^{1-2} = X(8,1) = -9.6477$ кНм	18	$M_{(0)}^{1-3} = X(18,1) = 13.7229$ кНм
9	$Q_{(0)}^{1-2} = X(9,1) = 20.7927$ кН	19	$Q_{(0)}^{1-3} = X(19,1) = -0.9959$ кН
10	$N_{(0)}^{1-2} = X(10,1) = -0.9959$ кН	20	$N_{(0)}^{1-3} = X(20,1) = -21.7175$ кН

Реакции опор рамы показаны на рисунке 5.21. Видно, что уравнения равновесия рамы выполняются точно. Численные значения параметров стержней рамы занесены в таблицу 5.22.

Таблица 5.22

	Параметры напряженно-деформированного состояния стержней рамы				
	Координата x, м Вектор $X1$	Поперечная сила Q, кН Вектор Qe	Изгибающий момент M, кНм Вектор Me	Угол поворота $EI\varphi$, кНм^2 Вектор $EIfi$	Прогиб EIv, кНм^3 Вектор EIv
1	2	3	4	5	6
стержень 0 – 1					
1	0.0	9.0752	0.0	1.0959	0.0

Продолжение таблицы 5.22

1	2	3	4	5	6
2	0.1	8.0752	0.8575	1.0522	0.1081
3	0.2	7.0752	1.6150	0.9277	0.2077
4	0.3	6.0752	2.2726	0.7325	0.2913
5	0.4	5.0752	2.8301	0.4765	0.3522
6	0.5	4.0752	3.2876	0.1698	0.3849
7	0.6	3.0752	3.6451	-0.1777	0.3848
8	0.7	2.0752	3.9026	-0.5559	0.3483
9	0,8	1.0752	4.0602	-0.9549	0.2729
10	0,9	0.0752	4.1177	-1.3646	0.1570
11	1.0	-0.9248	4.0752	-1.7751	0.0
стержень 1 – 2					
1	0.0	20.7927	-9.6477	-1.7751	0.0
2	0.1	19.7927	-7.6184	-0.9126	-0.1327
3	0.2	18.7927	-5.6892	-0.2480	-0.1891
4	0.3	17.7927	-3.8599	0.2286	-0.1886
5	0.4	16.7927	-2.1306	0.5273	-0.1493
6	0.5	15.7927	-0.5014	0.6580	-0.0887
7	0.6	14.7927	1.0279	0.6309	-0.0230
8	0.7	13.7927	2.4572	0.4558	0.0325
9	0,8	12.7927	3.7864	0.1428	0.0636
10	0,9	11.7927	5.0157	-0.2982	0.0568
11	1.0	10.7927	6.1450	-0.8570	0.0
стержень 2 – 4					
1	0.0	0.9959	6.1450	-0.8570	2.8455
2	0.1	0.9959	6.2446	-1.4765	2.7289
3	0.2	0.9959	6.3442	-2.1060	2.5499
4	0.3	0.9959	6.4438	-2.7454	2.3074
5	0.4	0.9959	6.5434	-3.3947	2.0005
6	0.5	-59.0041	6.6430	-4.0540	1.6281
7	0.6	-59.0041	0.7425	-4.4233	1.1993
8	0.7	-59.0041	-5.1579	-4.2025	0.7631
9	0,8	-59.0041	-11.0583	-3.3917	0.3785
10	0,9	-59.0041	-16.9587	-1.9909	0.1045
11	1.0	-59.0041	-22.8591	0.0	0.0
стержень 1 – 3					
1	0.0	-0.9959	13.7229	-1.7751	2.8455
2	0.1	-0.9959	13.6233	-3.1424	2.5996
3	0.2	-0.9959	13.5237	-4.4997	2.2174
4	0.3	-0.9959	-6.5759	-4.8471	1.7250
5	0.4	-0.9959	-6.6755	-4.1846	1.2733
6	0.5	-0.9959	-6.7751	-3.5120	0.8884
7	0.6	-0.9959	-6.8747	-2.8295	0.5712
8	0.7	-0.9959	-6.9743	-2.1371	0.3228
9	0,8	-0.9959	-7.0738	-1.4347	0.1441
10	0,9	-0.9959	-7.1734	-0.7223	0.0362
11	1.0	-0.9959	-7.2730	0.0	0.0

Эпюры напряженно-деформированного состояния стержней рамы

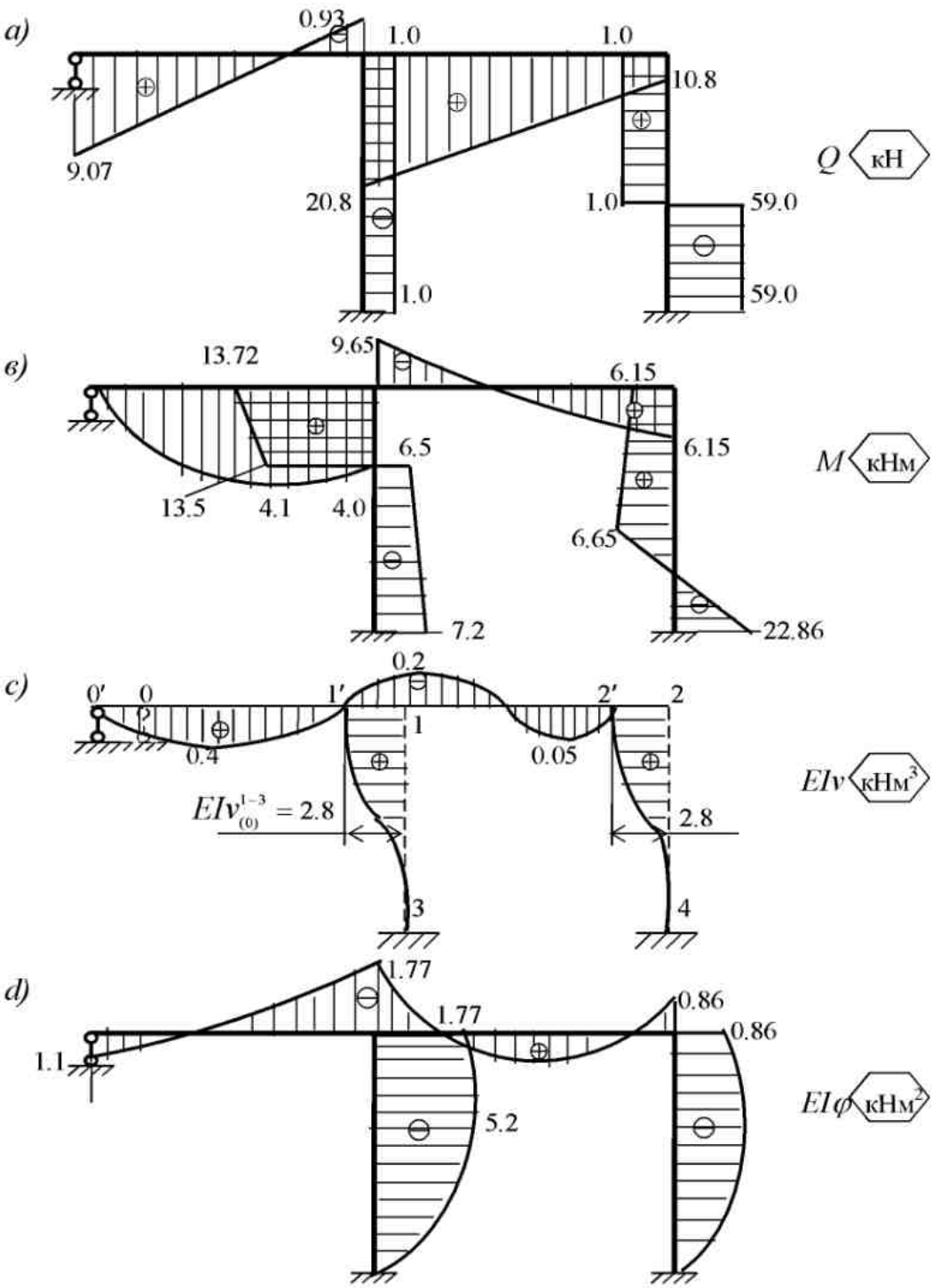


Рисунок 5.22

Отметим, что эпюра прогибов $EIv(x)$ позволяет уточнить принятую деформированную схему рамы. Если сравнить рисунки 5.21 и 5.22, то видно, что деформированная схема практически совпадает с действительным состоянием рамы. Последнее обстоятельство в немалой степени обеспечивает достоверность расчета рамы.

5.8 Динамика плоской рамы

Представим решения задач динамики плоской рамы.

Пример 5.16. Определить частоты и формы собственных колебаний плоской рамы (рисунок 5.23).

Расчетная схема

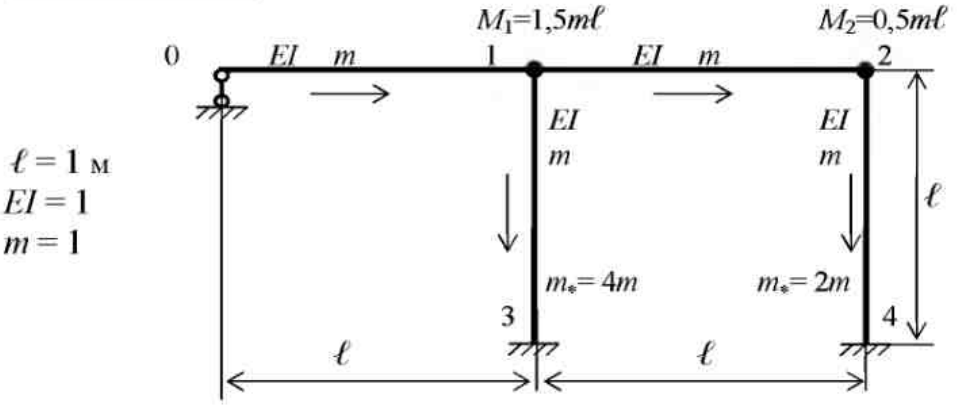


Рисунок 5.23

Узлы рамы при свободных колебаниях будут иметь линейные и угловые перемещения, т.е. данная конструкция относится к классу свободных систем, динамический расчет которых наиболее сложен. При ее движении возникают силы инерции линейно подвижных стержней 0-1 и 1-2, как присоединенных масс. Учет этих сил инерции можно выполнить путем увеличения распределенных масс соседних стержней 1-3 и 2-4 по формуле:

$$m_* = m + \frac{M\nu^2(a)}{\int\limits_0^{\ell} \nu^2(x)dx},$$

где $\nu(x)$ – функция прогиба стержня;

M – сосредоточенная масса линейно подвижного стержня;

a – координата массы M.

В узле 1 рамы прикладываем сосредоточенную массу стержня 0-1 и половину массы стержня 1-2, получим M_1= 1,5$m\ell$. В узле 2 прикладываем половину массы стержня 1-2, т.е. M_2 = 0,5$m\ell$. Для стержней 1-3 и 2-4 принимаем, что прогиб приближенно описывается функцией

$$\nu(x) = \cos\frac{\pi x}{2\ell}.$$

Тогда по формуле (3.21) будем иметь

$$m_*^{1-3} = m + 3m = 4m; \qquad m_*^{2-4} = m + m = 2m.$$

В дальнейшем, при динамических расчетах данной рамы, необходимо использовать увеличение массы стержней 1-3 и 2-4 для учета возникающих сил инерции стержней 0-1 и 1-2.

Частоты собственных колебаний рамы определяются из частотного уравнения краевой задачи $|\boldsymbol{A}_*(\omega)|$=0, где $\boldsymbol{A}_*(\omega)$ может быть взята из задачи статики, где достаточно заменить функции поперечного изгиба на функции поперечных колебаний (см.п.5.7).

$A_4(\omega)=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		Λ_{12}		$-\Lambda_{14}$																
2		Λ_{11}		$-\Lambda_{13}$													-1			
3		$-\lambda^4\Lambda_{14}$		Λ_{12}				-1										-1		
4	-1	$-\lambda^4\Lambda_{13}$		Λ_{11}					-1											-1
5										-1									1	
6								$-\Lambda_{13}$	$-\Lambda_{14}$								Λ_{12}			
7								$-\Lambda_{12}$	$-\Lambda_{13}$			-1					Λ_{11}			
8			-1					Λ_{11}	Λ_{12}				-1				$-\lambda^4\Lambda_{14}$			
9								$\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}						-1		$-\lambda^4\Lambda_{13}$			
10										1				1						
11												Λ_{12}	$-\Lambda_{13}$	$-\Lambda_{14}$		Λ_{11}				
12												Λ_{11}	$-\Lambda_{12}$	$-\Lambda_{13}$		$\lambda^4\Lambda_{14}$				
13	-1											$-\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}	Λ_{12}		$-\lambda^4\Lambda_{13}$				
14			-1									$-\lambda^4\Lambda_{13}$	$\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}		$-\lambda^4\Lambda_{12}$				
15					-1										1					
16																Λ_{11}	Λ_{12}	$-\Lambda_{13}$	$-\Lambda_{14}$	
17																$\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}	$-\Lambda_{12}$	$-\Lambda_{13}$	
18						-1										$-\lambda^4\Lambda_{13}$	$-\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}	Λ_{12}	
19							-1									$-\lambda^4\Lambda_{12}$	$-\lambda^4\Lambda_{13}$	$\lambda^4\Lambda_{14}$	Λ_{11}	
20											-1									1

(0-1) (1-2) (2-4) (1-3)

При поиске частот принято $EI=m=\ell=1$, так что аргументы фундаментальных функций запишутся так:

стержни 0-1; 1-2

$\lambda^{0-1}=\lambda^{1-2}=\sqrt{\omega}$;

стержень 1-3

$\lambda^{1-3}=\sqrt[4]{4\omega^2}=\sqrt{2\omega}$;

стержень 2-4

$\lambda^{2-4}=\sqrt[4]{2\omega^2}$,

где ω – частота собственных колебаний.

Исходные данные и обозначения переменных, принятых в программе

Исходные данные краевой задачи поиска частот

$\ell_1 = 1.0$ м; $\ell_2 = 1.0$ м; $\ell_3 = 1.0$ м; $\ell_4 = 1.0$ м; $EI = 1$; $m = 1$; $n = 20$; $n_1 = 600$; $\omega_0 = 0.01$ 1/с; $\Delta\omega = 0.01$ 1/с.

Обозначения переменных, принятых в программе

a – матрица $\boldsymbol{A}_*(\omega)$; *n* – порядок матрицы $\boldsymbol{A}_*(\omega)$; *n*1 – число циклов вычисления определителя $|\boldsymbol{A}_*(\omega)|$; *am* – частота ω; *dam* – шаг $\Delta\omega$; *m* – счетчик цикла вычисления определителя; ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 – длины стержней 0-1, 1-2, 2-4, 1-3; *X*1 – вектор значений частоты ω; *Y* – вектор значений определителя $|\boldsymbol{A}_*(\omega)|$; *EIvi* – вектор значений форм колебаний стержней; *EIvi*, *Eifini*, *Mni*, *Qni* – начальные параметры стержней рамы; *в* – вектор правых частей; *X* – вектор относительных граничных параметров стержней рамы; *d* – величина определителя $|\boldsymbol{A}_*(\omega)|$; *x* – текущая координата.

Текст программы поиска частот и построения форм собственных колебаний

n =20; n_1 = 600; *X* = *zeros*(*n*,1); *X*1= *zeros*(*n*1,1); *Y*= *zeros*(*n*1,1); *b* = *zeros*(*n*,1); *ℓ*1=1.0; *ℓ*2=1.0; *ℓ*3=1.0; *ℓ*4=1.0; *am*=0.01; *dam* = 20.0/*n*1;

for *m*=1:*n*1

a = *zeros*(*n*,*n*); *ℓa*1=*sqrt*(*am*); *ℓa*2=*sqrt*(*am*); *ℓa*3=(2**am*^2)^0.25; *ℓa*4=*sqrt*(2**am*)

$a(1,2)=\left(\sin h(\ell a1*\ell 1)+\sin(\ell a1*\ell 1)\right)/(2*\ell a1);$

$a(1,4)=-\left(\sin h(\ell a1*\ell 1)-\sin(\ell a1*\ell 1)\right)/(2*\ell a1\text{^}3);$

$a(2,2)=\left(\cos h(\ell a1*\ell 1)+\cos(\ell a1*\ell 1)\right)/2;\ a(2,4)=-\left(\cos h(\ell a1*\ell 1)-\cos(\ell a1*\ell 1)\right)/(2*\ell a1\text{^}2);$

$a(2,17)=-1;\quad a(3,2)=\ell a1\text{^}4*a(1,4);\quad a(3,4)=a(1,2);\quad a(3,18)=-1;\quad a(4,2)=\ell a1\text{^}4*a(2,4);$

$a(4,4)=a(2,2);\quad a(4,9)=-1;\quad a(4,20)=-1;\quad a(5,10)=-1;\quad a(5,19)=1;$

$a(6,8)=-\left(\cos h(\ell a2*\ell 2)-\cos(\ell a2*\ell 2)\right)/(2*\ell a2\text{^}2);$

$a(6,9)=-\left(\sin h(\ell a2*\ell 2)-\sin(\ell a2*\ell 2)\right)/(2*\ell a2\text{^}3);$

$a(6,17)=\left(\sin h(\ell a2*\ell 2)+\sin(\ell a2*\ell 2)\right)/(2*\ell a2);$

$a(7,8)=-a(6,17);\quad a(7,9)=a(6,8);\quad a(7,12)=-1;\quad a(7,17)=\left(\cos h(\ell a2*\ell 2)+\cos(\ell a2*\ell 2)\right)/2;$

$a(8,8)=a(7,17);\quad a(8,9)=a(6,17);\quad a(8,13)=-1;\quad a(9,17)=\ell a2\text{^}4*a(6,8);$

$a(10,10)=1;\quad a(10,14)=1;\quad a(11,12)=\left(\sin h(\ell a3*\ell 3)+\sin(\ell a3*\ell 3)\right)/(2*\ell a3);$

$a(11,13) = -\left(\cos h(\ell a3 * \ell 3) - \cos(\ell a3 * \ell 3)\right)/(2 * \ell a3\text{^}2);$

$a(11,14) = -\left(\sin h(\ell a3 * \ell 3) - \sin(\ell a3 * \ell 3)\right)/(2 * \ell a3\text{^}3);$

$a(11,16) = \left(\cos h(\ell a3 * \ell 3) + \cos(\ell a3 * \ell 3)\right)/2;$ $a(12,12) = a(11,16);$ $a(12,13) = -a(11,12);$

$a(12,14) = a(11,13);$ $a(12,16) = -\ell a3\text{^}4 * a(11,14);$ $a(13,1) = -1;$ $a(13,12) = -a(12,16);$

$a(13,13) = a(11,16);$ $a(13,14) = a(11,12);$ $a(13,16) = -\ell a3\text{^}4 * a(11,13);$ $a(14,3) = -1;$

$a(14,12) = a(13,16);$ $a(14,13) = a(12,16);$ $a(14,14) = a(11,16);$ $a(14,16) = \ell a3\text{^}4 * a(12,13);$

$a(15,5) = -1;$ $a(15,15) = 1;$ $a(16,16) = \left(\cos h(\ell a4 * \ell 4) + \cos(\ell a4 * \ell 4)\right)/2;$

$a(16,17) = \left(\sin h(\ell a4 * \ell 4) + \sin(\ell a4 * \ell 4)\right)/(2 * \ell a4);$

$a(16,18) = -\left(\cos h(\ell a4 * \ell 4) - \cos(\ell a4 * \ell 4)\right)/(2 * \ell a4\text{^}2);$

$a(16,19) = -\left(\sin h(\ell a4 * \ell 4) - \sin(\ell a4 * \ell 4)\right)/(2 * \ell a4\text{^}3);$ $a(17,16) = -\ell a4\text{^}4 * a(16,19);$

$a(17,18) = -a(16,17);$ $a(17,19) = a(16,18);$ $a(18,6) = -1;$ $a(18,16) = -\ell a4\text{^}4 * a(16,18);$

$a(18,17) = -a(17,16);$ $a(18,18) = a(16,16);$ $a(18,19) = a(16,17);$ $a(19,7) = -1;$

$a(19,16) = \ell a4\text{^}4 * a(17,18);$ $a(19,17) = a(18,16);$ $a(19,18) = a(17,16);$ $a(19,19) = a(16,16);$

$a(20,11) = -1;$ $a(20,20) = 1;$

d=*det*(*a*); *X*1(*m*,1)=*am*; *Y*(*m*,1)=*d*; *am*=*am*+*dam*; *end*;

% Построение графика *d*=*det*(*a*)

plot(*X*1,*Y*); *axis*([0.01 20.0 −0.4 0.4]); *grid on*

% Вывод таблицы значений частоты и определителя

format long e

[*X*1 *Y*]

% Вычисление относительных граничных параметров стержней рамы

в(11,1) = − 1; *в*(16,1) = − 1; *X* = *a**в*; *X* = *X*/*X*(16,1)

% Начальные параметры стержней рамы

*EIvn*1 = 0.0; *EIfin*1 = *X*(2,1); *Mn*1 = 0.0; *Qn*1 = *X*(4,1);

*EIvn*2 = 0.0; *EIfin*2 = *X*(17,1); *Mn*2 = *X*(8,1); *Qn*2 = *X*(9,1);

*EIvn*3 = *X*(16,1); *EIfin*3 = *X*(12,1); *Mn*3 = *X*(13,1); *Qn*3 = *X*(14,1);

*EIvn*4 = *X*(16,1); *EIfin*4 = *X*(17,1); *Mn*4 = *X*(18,1); *Qn*4 = *X*(19,1);

% Построение форм собственных колебаний

x = 0:0.001:1;

$EIv1 = -\left(EIvn1 * \left(\cos h(\ell a1 * x) + \cos(\ell a1 * x)\right)/2 + EIfin1 * \left(\sin h(\ell a1 * x) + \sin(\ell a1 * x)\right)\ldots\right.$

$/(2 * \ell a1) - Mn1 * \left(\cos h(\ell a1 * x) - \cos(\ell a1 * x)\right)/(2 * \ell a1\text{^}2) - Qn1 * \left(\sin h(\ell a1 * x) - \ldots\right.$

$\left.\sin(\ell a1 * x)\right)/(2 * \ell a1\text{^}3)\Big);$

$EIv2 = -\left(EIvn2 * \left(\cos h(\ell a2 * x) + \cos(\ell a2 * x)\right)/2 + EIfin2 * \left(\sin h(\ell a2 * x) + \sin(\ell a2 * x)\right)/\ \ldots\right.$

$(2 * \ell a2) - Mn2 * \left(\cos h(\ell a2 * x) - \cos(\ell a2 * x)\right)/(2 * \ell a2\text{^}2) - Qn2 * \left(\sin h(\ell a2 * x) - \sin(\ell a2 * x)\right)/\ \ldots$

$\left.(2 * \ell a1\text{^}3)\right).$

$EIv3 = -(EIvn3*(\cosh(\ell a3*x)+\cos(\ell a3*x))/2+EIfin3*(\sin h(\ell a3*x)+\sin(\ell a3*x))/ \ldots$
$(2*\ell a3)-Mn3*(\cosh(\ell a3*x)-\cos(\ell a3*x))/(2*\ell a3\text{^}2)-Qn3*(\sin h(\ell a3*x)-\sin(\ell a3*x))/ \ldots$
$(2*\ell a3\text{^}3))$;

$EIv4 = -(EIvn4*(\cosh(\ell a4*x)+\cos(\ell a4*x))/2+EIfin4*(\sin h(\ell a4*x)+\sin(\ell a4*x))/ \ldots$
$(2*\ell a4)-Mn4*(\cosh(\ell a4*x)-\cos(\ell a4*x))/(2*\ell a4\text{^}2)-Qn4*(\sin h(\ell a4*x)-\sin(\ell a4*x))/ \ldots$
$(2*\ell a4\text{^}3))$;

subplot (2,2,1), *plot* (*x*, *EIv*1); *axis* ([0 1 – 0.1 0.1]); *grid on*
subplot (2,2,2), *plot* (*x*, *EIv*2); *axis* ([0 1 – 0.1 0.1]); *grid on*
subplot (2,2,3), *plot* (*x*, *EIv*3); *axis* ([0 1 – 1 0.1]); *grid on*
subplot (2,2,4), *plot* (*x*, *EIv*4); *axis* ([0 1 – 1 0.1]); *grid on*

Замечания к тексту программы

Программа объединяет два процесса:

1 Поиск спектра частот собственных колебаний с заданной точностью.

2 Построение форм собственных колебаний.

Вначале необходимо с заданной точностью определить требуемое количество частот собственных колебаний. Поэтому вторая часть программы блокируется символом %. При выполнении второй задачи значения λ вычисляются при $\omega = \omega_1, \omega_2$ и т.д. (в программе $am = \omega_1, \omega_2$ и т.д), а цикл вычисления определителя *det*(*a*) и вывод таблицы [*X*1 *Y*] блокируются символом %.

Результаты поиска частот и построения форм собственных колебаний рамы

Перед точным определением частот полезно построить график изменения определителя *d*= *det*(*a*). Для данной рамы этот график имеет вид при $0{,}01 \le \omega \le 20{,}0$ 1/с (рисунок 5.24):

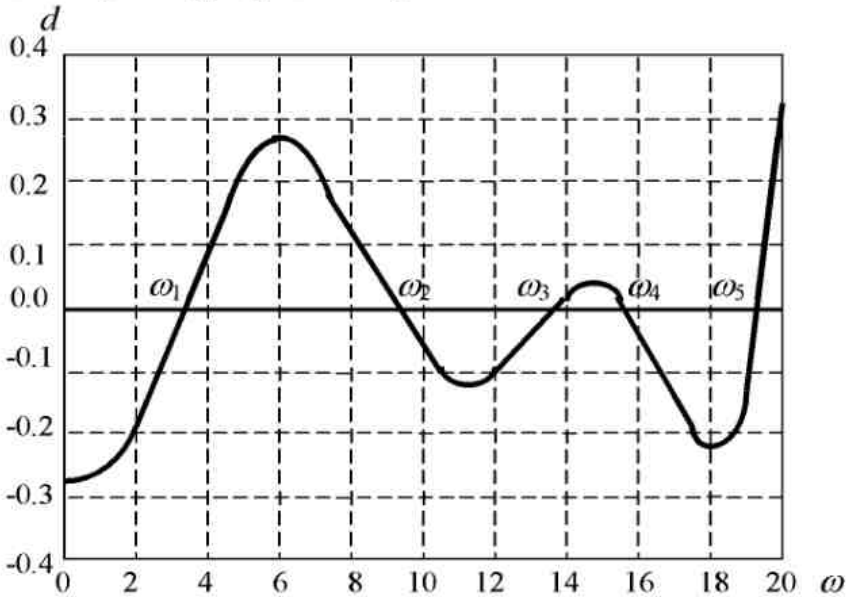


Рисунок 5.24

Из графика на рисунке 5.24 можно грубо определить интервалы, где находятся частоты собственных колебаний рамы. Сам график не имеет точек разрывов 2-го рода, не касается оси $d = 0$ и пересекает ее в ряде точек, т.е. характер поведения определителя $|\boldsymbol{A}_*(\omega)|$ рамы совпадает с неразрезной балкой (см. динамический расчет балки).

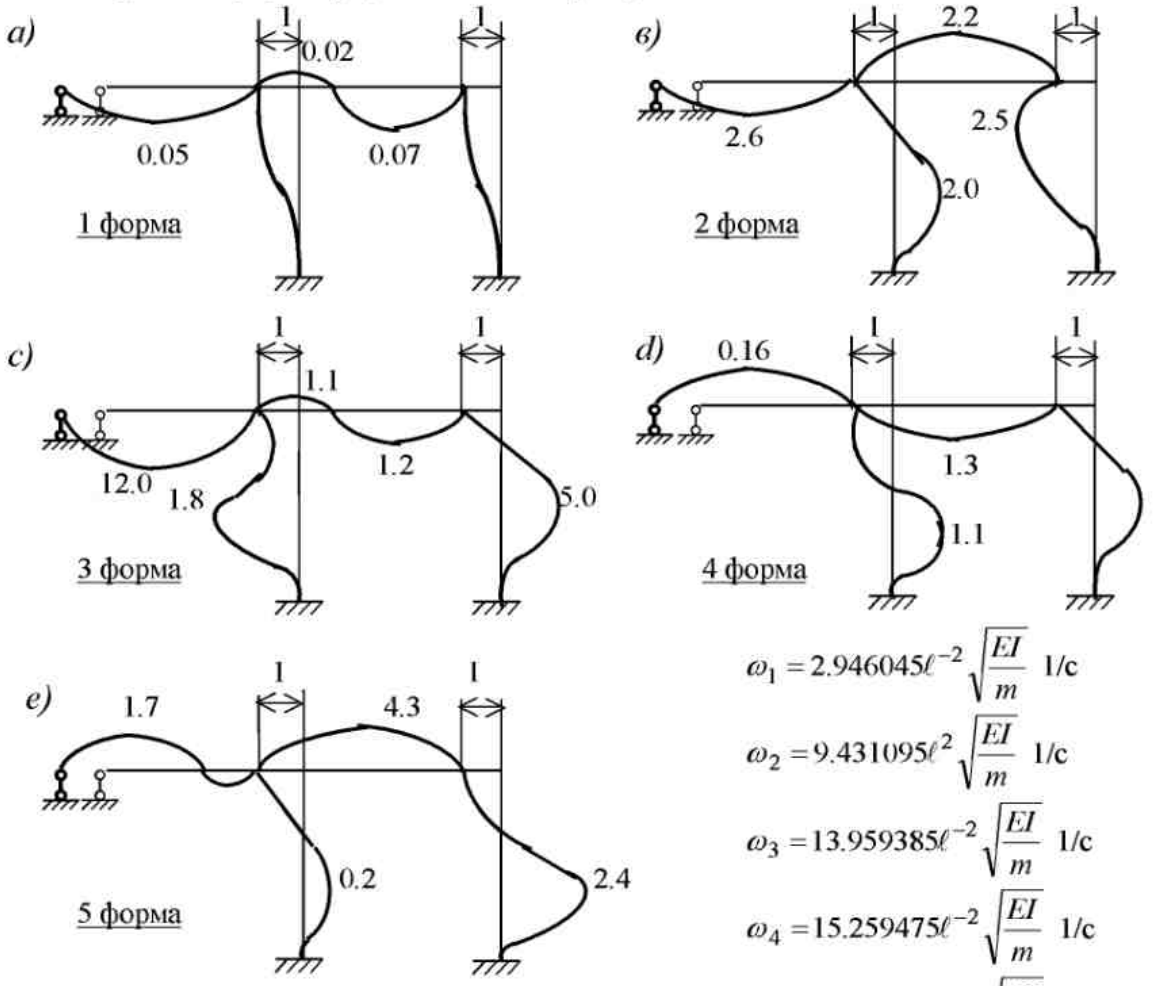
Уточнение частот приводит к следующим значениям:

$$\omega_1 = 2.946045\ell^{-2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\quad \omega_2 = 9.431095\ell^{2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\quad \omega_3 = 13.959385\ell^{-2}\sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\omega_4 = 15.259475\ell^{-2}\sqrt{\frac{EI}{m}};\quad \omega_5 = 19.489495\ell^{-2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\ \text{1/c}$$

Воспользуемся кинематическим способом возбуждения колебаний рамы и сообщим опорам единичное перемещение, т.е. $EIv_{(\ell)}^{2-4} = в(11,1) = -1$ и $EIv_{(\ell)}^{1-3} = в(16,1) = -1$. В качестве нормирующей величины удобно взять перемещение $EIv_{(0)}^{1-3} = EIv_{(0)}^{2-4} = X(16,1)$. Задавая значение am = ω_1, ω_2 и т.д., получаем формы собственных колебаний при условии, что $EIv_{(0)}^{1-3} = 1$.

Первые 5 форм представлены на рисунке 5.25.



$$\omega_1 = 2.946045\ell^{-2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\ \text{1/c}$$

$$\omega_2 = 9.431095\ell^{2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\ \text{1/c}$$

$$\omega_3 = 13.959385\ell^{-2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\ \text{1/c}$$

$$\omega_4 = 15.259475\ell^{-2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\ \text{1/c}$$

$$\omega_5 = 19.489495\ell^{-2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\ \text{1/c}$$

Рисунок 5.25

Пример 5.17. Расчет напряженно-деформированного состояния вынужденных колебаний плоской рамы

Расчетная схема (рисунок 5.26) и основные уравнения

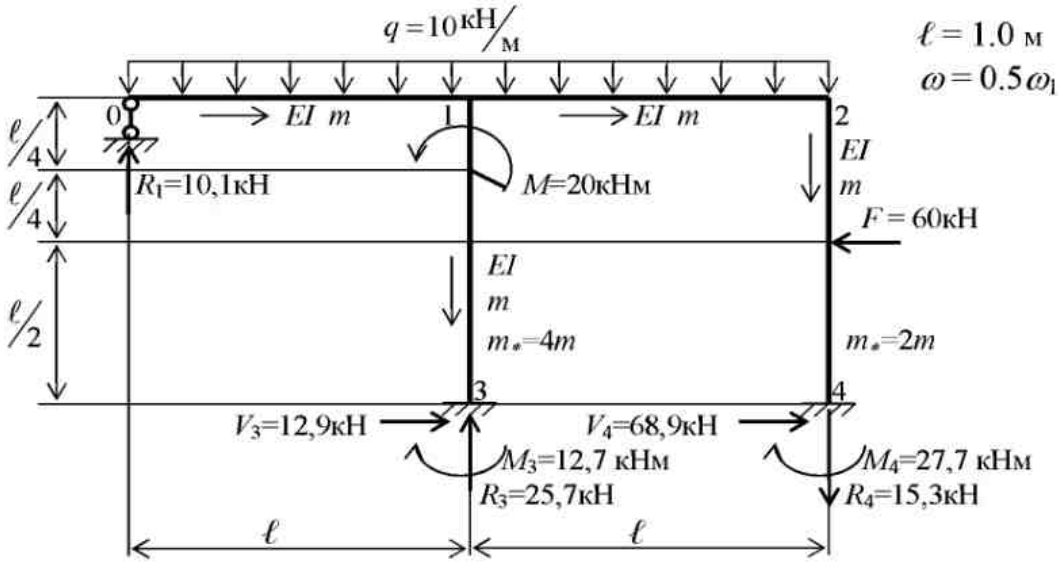


Рисунок 5.26

Фундаментальные функции поперечных колебаний представлены в главе 3. Ориентированный граф расчета принимаем такой же, как у задачи статики рамы. Расчет рамы на вынужденные колебания сводится к решению уравнения краевой задачи $\boldsymbol{A}_* \cdot \boldsymbol{X}_* = -\boldsymbol{B}$ и построению эпюр напряженно-деформированного состояния стержней. Для ухода от резонанса частоту вынужденных колебаний принимаем равной $\omega = 0.5\omega_1 = 0.5 \cdot 2.946045\ell^{-2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$ 1/с.

Для формирования разрешающего уравнения рамы по МГЭ достаточно заменить фундаментальные функции поперечного изгиба на функции поперечных колебаний в уравнении задачи статики (см.п.5.7).

Исходные данные расчета

Как и в задаче статики, исходные данные формируем для каждого стержня в отдельности.

стержень 0 – 1

$\ell_1 = 1.0$ м; $q_1 = 10.0$ кН/м; $a_н = 0.0$ м; $a_к = \ell_1 = 1.0$м;

начальные параметры:

$EIv_{(0)}^{0-1} = 0.0$ кНм^3; $EI\varphi_{(0)}^{0-1} = X(2,1)$ кНм^2; $M_{(0)}^{0-1} = 0.0$ кНм; $Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1)$кН;

реакция опоры 0

$R_1 = Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1)$ кН;

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20				
1		A_{12}		$-A_{14}$																		$M_{(\ell)}^{2-4}$		$-\epsilon_{11}^{0-1}(\ell_1)$
2		A_{11}		$-A_{13}$													-1					$EI\varphi_{(0)}^{0-1}$		$-\epsilon_{21}^{0-1}(\ell_1)$
3		$-\lambda^4 A_{14}$		A_{12}				-1										-1				$Q_{(\ell)}^{2-4}$		$\epsilon_{31}^{0-1}(\ell_1)$
4		$-\lambda^4 A_{13}$		A_{11}					-1											-1		$Q_{(0)}^{0-1}$		$\epsilon_{41}^{0-3}(\ell_1)$
5										-1									1			$N_{(\ell)}^{2-4}$		
6								$-A_{13}$	$-A_{14}$								A_{12}					$M_{(\ell)}^{1-3}$		$-\epsilon_{11}^{1-2}(\ell_2)$
7								$-A_{12}$	$-A_{13}$			-1					A_{11}					$Q_{(\ell)}^{1-3}$		$-\epsilon_{21}^{1-2}(\ell_2)$
8								A_{11}	A_{12}				-1				$-\lambda^4 A_{14}$					$M_{(0)}^{1-2}$		$\epsilon_{31}^{1-2}(\ell_2)$
9								$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}						-1		$-\lambda^4 A_{13}$					$Q_{(0)}^{1-2}$		$\epsilon_{41}^{1-2}(\ell_2)$
10										1				1								$N_{(0)}^{1-2}$		
11												A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$		A_{11}						$N_{(\ell)}^{1-3}$		$-\epsilon_{11}^{2-3}(\ell_3)$
12												A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		$\lambda^4 A_{14}$						$EI\varphi_{(0)}^{2-4}$		$-\epsilon_{21}^{2-3}(\ell_3)$
13	-1											$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}		$-\lambda^4 A_{13}$						$M_{(0)}^{2-4}$		$\epsilon_{31}^{2-3}(\ell_3)$
14			-1									$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}		$-\lambda^4 A_{12}$						$Q_{(0)}^{2-4}$		$\epsilon_{41}^{2-3}(\ell_3)$
15					-1										1							$N_{(0)}^{2-4}$		
16																A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$			$EIv_{(0)}^{1-3}$		$-\epsilon_{11}^{3-4}(\ell_4)$
17																$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$			$EI\varphi_{(0)}^{1-3}$		$-\epsilon_{21}^{3-4}(\ell_4)$
18						-1										$-\lambda^4 A_{13}$	$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	A_{12}			$M_{(0)}^{1-3}$		$\epsilon_{31}^{3-4}(\ell_4)$
19							-1									$-\lambda^4 A_{12}$	$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}			$Q_{(0)}^{1-3}$		$\epsilon_{41}^{3-4}(\ell_4)$
20											-1									1		$N_{(0)}^{1-3}$		

уравнения состояния:

прогиб $EIv(x)$

$$EIv(x) = EIv_{(0)}^{0-1}\frac{ch\lambda_1 x + \cos\lambda_1 x}{2} + EI\varphi_{(0)}^{0-1}\frac{sh\lambda_1 x + \sin\lambda_1 x}{2\lambda_1} - M_{(0)}^{0-1}\frac{ch\lambda_1 x + \cos\lambda_1 x}{2\lambda_1^2} -$$

$$- Q_{(0)}^{0-1}\frac{sh\lambda_1 x + \sin\lambda_1 x}{2\lambda_1^3} + \underset{x\rangle a_н}{|q_1}\frac{ch\lambda_1(x-a_н) + \cos\lambda_1(x-a_н) - 2}{2\lambda_1^4} -$$

$$- \underset{x\rangle a_к}{|q_1}\frac{ch\lambda_1(x-a_к) + \cos\lambda_1(x-a_к) - 2}{2\lambda_1^4};$$

угол поворота $EI\varphi(x)$

$$EI\varphi(x) = EIv_{(0)}^{0-1}\frac{\lambda_1^4(sh\lambda_1 x - \sin\lambda_1 x)}{2\lambda_1^3} + EI\varphi_{(0)}^{0-1}\frac{ch\lambda_1 x + \cos\lambda_1 x}{2} - M_{(0)}^{0-1}\frac{sh\lambda_1 x + \sin\lambda_1 x}{2\lambda_1} -$$

$$- Q_{(0)}^{0-1}\frac{ch\lambda_1 x - \cos\lambda_1 x}{2\lambda_1^2} + \underset{x\rangle a_н}{|q_1}\frac{sh\lambda_1(x-a_н) - \sin\lambda_1(x-a_н)}{2\lambda_1^3} - \underset{x\rangle a_к}{|q_1}\frac{sh\lambda_1(x-a_к) - \sin\lambda_1(x-a_к)}{2\lambda_1^3};$$

изгибающий момент $M(x)$

$$M(x) = -EIv_{(0)}^{0-1}\cdot\lambda_1^4\frac{ch\lambda_1 x - \cos\lambda_1 x}{2\lambda_1^2} - EI\varphi_{(0)}^{0-1}\cdot\lambda_1^4\frac{sh\lambda_1 x - \sin\lambda_1 x}{2\lambda_1^3} + M_{(0)}^{0-1}\frac{ch\lambda_1 x + \cos\lambda_1 x}{2} +$$

$$+ Q_{(0)}^{0-1}\frac{sh\lambda_1 x + \sin\lambda_1 x}{2\lambda_1} - \underset{x\rangle a_н}{|q_1}\frac{ch\lambda_1(x-a_н) - \cos\lambda_1(x-a_н)}{2\lambda_1^2} + \underset{x\rangle a_к}{|q_1}\frac{ch\lambda_1(x-a_к) - \cos\lambda_1(x-a_к)}{2\lambda_1^2};$$

поперечная сила $Q(x)$

$$Q(x) = -EIv_{(0)}^{0-1}\cdot\lambda_1^4\frac{sh\lambda_1 x - \sin\lambda_1 x}{2\lambda_1} - EI\varphi_{(0)}^{0-1}\cdot\lambda_1^4\frac{ch\lambda_1 x + \cos\lambda_1 x}{2\lambda_1^2} + M_{(0)}^{0-1}\cdot\lambda_1^4\frac{sh\lambda_1 x - \sin\lambda_1 x}{2\lambda_1^3} +$$

$$+ Q_{(0)}^{0-1}\frac{ch\lambda_1 x + \cos\lambda_1 x}{2} - \underset{x\rangle a_н}{|q_1}\frac{sh\lambda_1(x-a_н) + \sin\lambda_1(x-a_н)}{2\lambda_1} - \underset{x\rangle a_к}{|q_1}\frac{sh\lambda_1(x-a_к) + \sin\lambda_1(x-a_к)}{2\lambda_1};$$

<u>стержень 1 – 2</u>

$\ell_2 = 1.0$ м; $q_2 = 10.0$ кН/м; $a_н = 0.0$ м; $a_к = \ell_2 = 1.0$м;

начальные параметры:

$EIv_{(0)}^{1-2} = 0.0$ кНм^3; $EI\varphi_{(0)}^{1-2} = X(17.1)$ кНм^2; $M_{(0)}^{1-2} = X(8.1)$кНм; $Q_{(0)}^{1-2} = X(9.1)$кН;

уравнения состояния:

Уравнения состояния не отличаются от выражений стержня 0 – 1, необходимо только использовать свои начальные параметры, q_2 и ℓ_2.

<u>стержень 2 – 4</u>

$\ell_3 = 1.0$ м; $F = 60.0$ кН; $a_F = \ell_3/2 = 0.5$м;

начальные параметры:

$EIv_{(0)}^{2-4} = X(16.1)$кНм^3; $EI\varphi_{(0)}^{2-4} = X(12.1)$кНм^2; $M_{(0)}^{2-4} = X(13.1)$кНм; $Q_{(0)}^{2-4} = X(14.1)$кН

реакции опоры 4

$V_4 = Q_{(\ell)}^{2-4} = X(3.1)$ кН; $R_4 = N_{(\ell)}^{2-4} = X(5.1)$ кН; $M_4 = M_{(\ell)}^{2-4} = X(1.1)$ кНм;

уравнения состояния:

прогиб $EIv(x)$

$$EIv(x) = EIv_{(0)}^{2-4}\frac{ch\lambda_3 x + \cos\lambda_3 x}{2} + EI\varphi_{(0)}^{2-4}\frac{sh\lambda_3 x + \sin\lambda_3 x}{2\lambda_3} - M_{(0)}^{2-4}\frac{ch\lambda_3 x + \cos\lambda_3 x}{2\lambda_3^2} -$$

$$- Q_{(0)}^{2-4}\frac{sh\lambda_3 x + \sin\lambda_3 x}{2\lambda_3^3} + \underset{x\rangle a_F}{|F}\frac{sh\lambda_3(x-a_F) - \sin\lambda_3(x-a_F)}{2\lambda_3^3};$$

угол поворота $EI\varphi(x)$

$$EI\varphi(x) = EIv_{(0)}^{2-4}\cdot\lambda_3^4\frac{sh\lambda_3 x - \sin\lambda_3 x}{2\lambda_3^3} + EI\varphi_{(0)}^{2-4}\frac{ch\lambda_3 x + \cos\lambda_3 x}{2} - M_{(0)}^{2-4}\frac{sh\lambda_3 x - \sin\lambda_3 x}{2\lambda_3} -$$

$$- Q_{(0)}^{2-4}\frac{ch\lambda_3 x - \cos\lambda_3 x}{2\lambda_3^2} + \underset{x\rangle a_F}{|F}\frac{ch\lambda_3(x-a_F) - \cos\lambda_3(x-a_F)}{2\lambda_3^2};$$

изгибающий момент $M(x)$

$$M(x) = -EIv_{(0)}^{2-4}\cdot\lambda_3^4\frac{ch\lambda_3 x - \cos\lambda_3 x}{2\lambda_3^2} - EI\varphi_{(0)}^{2-4}\cdot\lambda_3^4\frac{sh\lambda_3 x - \sin\lambda_3 x}{2\lambda_3^3} + M_{(0)}^{2-4}\frac{ch\lambda_3 x + \cos\lambda_3 x}{2} +$$

$$+ Q_{(0)}^{2-4}\frac{sh\lambda_3 x + \sin\lambda_3 x}{2\lambda_3} - \underset{x\rangle a_F}{|F}\frac{sh\lambda_3(x-a_F) + \sin\lambda_3(x-a_F)}{2\lambda_3};$$

поперечная сила $Q(x)$

$$Q(x) = -EIv_{(0)}^{2-4}\cdot\lambda_3^4\frac{sh\lambda_3 x + \sin\lambda_3 x}{2\lambda_3} - EI\varphi_{(0)}^{2-4}\cdot\lambda_3^4\frac{ch\lambda_3 x - \cos\lambda_3 x}{2\lambda_3^2} + M_{(0)}^{2-4}\cdot\lambda_3^4\frac{sh\lambda_3 x - \sin\lambda_3 x}{2\lambda_3^3} +$$

$$+ Q_{(0)}^{2-4}\frac{ch\lambda_3 x + \cos\lambda_3 x}{2} - \underset{x\rangle a_F}{|F}\frac{ch\lambda_3(x-a_F) + \cos\lambda_3(x-a_F)}{2};$$

<u>стержень 1 – 3</u>

$\ell_4 = 1.0$ м; $M = 20.0$ кНм; $a_M = \ell_4/4 = 0.25$м;

начальные параметры:

$EIv_{(0)}^{1-3} = X(16,1)$ кНм^3; $EI\varphi_{(0)}^{1-3} = X(17,1)$ кНм^2; $M_{(0)}^{1-3} = X(18,1)$ кНм; $Q_{(0)}^{1-3} = X(19,1)$кН

реакции опоры 3

$V_3 = Q_{(\ell)}^{1-3} = X(7,1)$ кН; $R_3 = N_{(\ell)}^{1-3} = X(11,1)$ кН; $M_3 = M_{(\ell)}^{1-3} = X(6,1)$ кНм;

уравнения состояния:

прогиб $EIv(x)$

$$EIv(x) = EIv_{(0)}^{1-3}\frac{ch\lambda_4 x + \cos\lambda_4 x}{2} + EI\varphi_{(0)}^{1-3}\frac{sh\lambda_4 x + \sin\lambda_4 x}{2\lambda_4} - M_{(0)}^{1-3}\frac{ch\lambda_4 x + \cos\lambda_4 x}{2\lambda_4^2} -$$

$$- Q_{(0)}^{1-3}\frac{sh\lambda_4 x + \sin\lambda_4 x}{2\lambda_4^3} + \underset{x\rangle a_M}{|M}\frac{ch\lambda_4(x-a_M) - \cos\lambda_4(x-a_M)}{2\lambda_4^2};$$

угол поворота $EI\varphi(x)$

$$EI\varphi(x) = EIv_{(0)}^{1-3}\cdot\lambda_4^4\frac{sh\lambda_4 x - \sin\lambda_4 x}{2\lambda_4^3} + EI\varphi_{(0)}^{1-3}\frac{ch\lambda_4 x + \cos\lambda_4 x}{2} - M_{(0)}^{1-3}\frac{sh\lambda_4 x + \sin\lambda_4 x}{2\lambda_4} -$$

$$- Q_{(0)}^{1-3}\frac{ch\lambda_4 x - \cos\lambda_4 x}{2\lambda_4^2} + \underset{x\rangle a_M}{|M}\frac{sh\lambda_4(x-a_M) + \sin\lambda_4(x-a_M)}{2\lambda_4};$$

изгибающий момент $M(x)$

$$M(x) = -EIv_{(0)}^{1-3} \cdot \lambda_4^4 \frac{ch\lambda_4 x - \cos\lambda_4 x}{2\lambda_4^2} - EI\varphi_{(0)}^{1-3} \cdot \lambda_4^4 \frac{sh\lambda_4 x - \sin\lambda_4 x}{2\lambda_4^3} + M_{(0)}^{1-3} \frac{ch\lambda_4 x + \cos\lambda_4 x}{2} +$$

$$+ Q_{(0)}^{1-3} \frac{sh\lambda_4 x + \sin\lambda_4 x}{2\lambda_4} - \left| M \underset{x \rangle a_M}{} \frac{ch\lambda_4 (x - a_M) + \cos\lambda_4 (x - a_M)}{2} \right.;$$

поперечная сила $Q(x)$

$$Q(x) = -EIv_{(0)}^{1-3} \cdot \lambda_4^4 \frac{sh\lambda_4 x + \sin\lambda_4 x}{2\lambda_4} - EI\varphi_{(0)}^{1-3} \cdot \lambda_4^4 \frac{ch\lambda_4 x - \cos\lambda_4 x}{2\lambda_4^2} + M_{(0)}^{1-3} \cdot \lambda_4^4 \frac{sh\lambda_4 x - \sin\lambda_4 x}{2\lambda_4^3} +$$

$$+ Q_{(0)}^{1-3} \frac{ch\lambda_4 x + \cos\lambda_4 x}{2} - \left| M \cdot \lambda_4^4 \underset{x \rangle a_M}{} \frac{sh\lambda_4 (x - a_M) - \sin\lambda_4 (x - a_M)}{2\lambda_4^3} \right.;$$

Программа решения краевой задачи и построения эпюр состояния рамы

Программа использует единичную функцию Хевисайда $H(x\text{-}a)$ со сдвигом и дополнительно сформированные фундаментальные функции поперечных колебаний от двух параметров, что резко сокращает текст основной программы.

```
function  f = A11(t,x)
 f = (cosh(t. * x) + cos(t. * x))/2;   end;
function  f = A12(t,x)
 f = (sinh(t. * x) + sin(t. * x))/(2 * t);   end;
function  f = A13(t,x)
 f = (cosh(t. * x) - cos(t. * x))/(2 * t.^2);   end;
function  f = A14(t,x)
 f = (sinh(t. * x) - sin(t. * x))/(2 * t.^3);   end;
function  f = A15(t,x)
 f = (cosh(t. * x) + cos(t. * x) - 2)/(2 * t.^4);   end.
```

Эти функции записываются на отдельных файлах, им даются имена *A*11, *A*12, *A*13, *A*14, *A*15, и помещаются в папку *WORK* на жестком диске *C*.

Текст программы с комментариями

```
n =20;  a = zeros(n,n);  X= zeros(n,1);  в= zeros(n,1).

% Исходные данные краевой задачи
ℓ1=1.0;  ℓ2=1.0;  ℓ3=1.0;  ℓ4=1.0;  M=20.0;  F=60.0;  q1=10.0;  q2=10.0;
aM=ℓ4/4;  aF=ℓ3/2;  an1=0.0;  ak1=ℓ1;  an2=0.0;  ak2=ℓ2;  am=0.5*2.946045;
ℓa1= sqrt(am);  ℓa2= sqrt(am);  ℓa3= (2*am^2) ^0.25;  ℓa4= sqrt(2*am);

% Ввод матриц a(n,n), в(n,1) с помощью операторов присваивания
a(1,2)=A12(ℓa1,ℓ1);  a(1,4)= –A14(ℓa1,ℓ1);  a(2,2)= –A11(ℓa1,ℓ1);  a(2,4)= –A13(ℓa1,ℓ1);
a(2,17)= –1;  a(3,2) = ℓa1^4*a(1,4);  a(3,4)= a(1,2);  a(3,8)= –1;  a(3,18)= –1;
a(4,2) = ℓa1^4*a(2,4);  a(4,4)= a(2 ,2);  a(4,9)= –1;  a(4,20)= –1;  a(5,10)= –1;
a(5,19)= 1;  a(6,8)= –A13(ℓa2,ℓ2);  a(6,9)= –A14(ℓa2,ℓ2);  a(6,17)= A12(ℓa2,ℓ2);
```

a(7,8)= –a(6,17); a(7,9)= a(6,8); a(7,12)= –1; a(7,17)= A11(ℓa2,ℓ2); a(8,8)= a(7,17);
a(8,9)= a(6,17); a(8,13)= –1; a(8,17) = –ℓa2^4*a(6,9); a(9,8)= –a(8,17); a(9,9)= a(7,17);
a(9,15)= –1; a(9,17) = ℓa2^4*a(6,8); a(10,10)= 1; a(10,14)= 1; a(11,12)= A12(ℓa3,ℓ3);
a(11,13)= –A13(ℓa3,ℓ3); a(11,14)= –A14(ℓa3,ℓ3); a(11,16)= A11(ℓa3,ℓ3); a(12,12)= a(11,16);
a(12,13)= –a(11,12); a(12,14)= a(11,13); a(12,16) = –ℓa3^4*a(11,14); a(13,1)= –1;
a(13,12)= –a(12,16); a(13,13)= a(12,12); a(13,14)= a(11,12); a(13,16) = ℓa3^4*a(11,13);
a(14,3)= –1; a(14,12)= a(13,16); a(14,13)= a(12,16); a(14,14)= a(12,12);
a(14,16) = –ℓa3^4*a(11,12); a(15,5)= –1; a(15,15)= –1; a(16,16)= A11(ℓa4,ℓ4);
a(16,17)= A12(ℓa4,ℓ4); a(16,18)= –A13(ℓa4,ℓ4); a(16,19)= –A14(ℓa4,ℓ4);
a(17,16) = –ℓa4^4*a(16,19); a(17,17)= a(16,16); a(17,18)= –a(16,17); a(17,19)= a(16,18);
a(18,6)= –1; a(18,16) = –ℓa4^4*a(16,18); a(18,17)= –a(17,16); a(18,18)= a(16,16);
a(18,19)= a(16,17); a(19,7)= –1; a(19,16) = ℓa4^4*a(17,18); a(19,17)= a(18,16);
a(19,18)= a(17,16); a(19,19)= a(16,16); a(20,11)= –1; a(20,20)= 1

в(1,1)= –q1*A15(ℓa1,ℓ1–an1)*H(ℓ1–an1)+q1*A15(ℓa1,ℓ1–aк1)*H(ℓ1–aк1);
в(2,1)= –q1*A14(ℓa1,ℓ1–an1)*H(ℓ1–an1)+q1*A14(ℓa1,ℓ1–aк1)*H(ℓ1–aк1);
в(3,1)= q1*A13(ℓa1,ℓ1–an1)*H(ℓ1–an1) –q1*A13(ℓa1,ℓ1–aк1)*H(ℓ1–aк1);
в(4,1)= q1*A12(ℓa1,ℓ1–an1)*H(ℓ1–an1) –q1*A12(ℓa1,ℓ1–aк1)*H(ℓ1–aк1);
в(6,1)= –q2*A15(ℓa2,ℓ2–an2)*H(ℓ2–an2)+q2*A15(ℓa2,ℓ2–aк2)*H(ℓ2–aк2);
в(7,1)= –q2*A14(ℓa2,ℓ2–an2)*H(ℓ2–an2)+q2*A14(ℓa2,ℓ2–aк2)*H(ℓ2–aк2);
в(8,1)= q2*A13(ℓa2,ℓ2–an2)*H(ℓ2–an2) –q2*A13(ℓa2,ℓ2–aк2)*H(ℓ2–aк2);
в(9,1)= q2*A12(ℓa2,ℓ2–an2)*H(ℓ2–an2) –q2*A12(ℓa2,ℓ2–aк2)*H(ℓ2–aк2);
в(11,1)= –F*A14(ℓa3,ℓ3–aF)*H(ℓ3–aF); в(12,1)= –F*A13(ℓa3,ℓ3–aF)*H(ℓ3–aF);
в(13,1)= F*A12(ℓa3,ℓ3–aF)*H(ℓ3–aF); в(14,1)= F*A11(ℓa3,ℓ3–aF)*H(ℓ3–aF);
в(16,1)= –M*A13(ℓa4,ℓ4–aM)*H(ℓ4–aM); в(17,1)= –M*A12(ℓa4,ℓ4–aM)*H(ℓ4–aM);
в(18,1)= M*A11(ℓa4,ℓ4–aM)*H(ℓ4–aM); в(19,1)= M*A14(ℓa4,ℓ4–aM)*H(ℓ4–aM).

% Решение системы уравнений и вывод значений параметров
X = a \ в

% Вычисление и вывод реакций опор рамы
R1 = X(4,1)
R3 = X(11,1)
V3 = X(7,1)
M3 = X(6,1)
R4 = X(5,1)
V4 = X(3,1)
M4 = X(1,1)

% Начальные параметры балки и нагрузка стержней рамы
EIvn = 0.0; EIfin = X(2,1); Mn = 0.0; Qn = X(4,1); q1 = 10.0; M = 0.0; F = 0.0;
ℓ = ℓ1; ℓa = ℓa1; an = an1; aк = aк1;
% EIvn = 0.0; EIfin = X(17,1); Mn = X(8,1); Qn = X(9,1); q1= q2; M =0.0; F = 0.0;
% ℓ = ℓ2; ℓa = ℓa2; an = an2; aк = aк2;
% EIvn = X(16,1); EIfin = X(12,1); Mn = X(13,1); Qn = X(14,1); q1= 0.0; M =0.0;
%F = 60.0; ℓ = ℓ3; ℓa = ℓa3;
% EIvn = X(16,1); EIfin = X(17,1); Mn = X(18,1); Qn = X(19,1); q1= 0.0; M =20.0;
%F = 0.0; ℓ = ℓ4; ℓa = ℓa4;

$n1=10;\quad EIv = zeros(n1,1);\quad EIfi = zeros(n1,1);\quad Me = zeros(n1,1);\quad Qe = zeros(n1,1);$
$X1 = zeros(n1,1);\quad dx = \ell/n1;\quad x=0.0;$

for $m=1 : n+1$
$X1(m,1) = x;$

$EIv(m,1) = -\big(EIvn*A11(\ell a,x)+EIfin*A12(\ell a,x)-Mn*A13(\ell a,x)-Qn*A14(\ell a,x)+\dots$
$q1*A15(\ell a,x-an)*H(x-an)-q1*A15(\ell a,x-ak)*H(x-ak)+M*A13(\ell a,x-aM)*H(x-aM)+\dots$
$F*A14(\ell a,x-aF)*H(x-aF)\big);$

$EIfi(m,1) = -\big(EIvn*\ell a\hat{}4*A13(\ell a,x)+EIfin*A11(\ell a,x)-Mn*A12(\ell a,x)-Qn*A13(\ell a,x)+\dots$
$q1*A14(\ell a,x-an)*H(x-an)-q1*A14(\ell a,x-ak)*H(x-ak)+M*A12(\ell a,x-aM)*H(x-aM)+\dots$
$F*A13(\ell a,x-aF)*H(x-aF)\big);$

$Me(m,1) = -\big(-EIvn*\ell a\hat{}4*A13(\ell a,x)-EIfin*\ell a\hat{}4*A14(\ell a,x)+Mn*A11(\ell a,x)+\dots$
$Qn*A12(\ell a,x)-q1*A13(\ell a,x-an)*H(x-an)+q1*A13(\ell a,x-ak)*H(x-ak)-\dots$
$M*A11(\ell a,x-aM)*H(x-aM)-F*A12(\ell a,x-aF)*H(x-aF)\big);$

$Qe(m,1) = -\big(-EIvn*\ell a\hat{}4*A12(\ell a,x)-EIfin*\ell a\hat{}4*A13(\ell a,x)+Mn*\ell a\hat{}4*A14(\ell a,x)+\dots$
$Qn*A11(\ell a,x)-q1*A12(\ell a,x-an)*H(x-an)+q1*A12(\ell a,x-ak)*H(x-ak)-\dots$
$M*\ell a\hat{}4*A14(\ell a,x-aM)*H(x-aM)-F*A11(\ell a,x-aF)*H(x-aF)\big);$

$x = x + dx;\quad$ *end*

% Построение эпюр *Q, M, EIfi, EIv*

% *subplot* (2,2,1), *plot* (*x*1, *Qe*); *axis* ([0 1 –80 80]); *grid on*
% *subplot* (2,2,2), *plot* (*x*1, *Me*); *axis* ([0 1 –40 40]); *grid on*
% *subplot* (2,2,3), *plot* (*x*1, *EIfi*); *axis* ([0 1 –10 10]); *grid on*
% *subplot* (2,2,4), *plot* (*x*1, *EIv*); *axis* ([0 1 –10 10]); *grid on*

% Вывод таблицы значений параметров стержней рамы
[*X*1 – *Qe* – *Me* – *EIfi* – *EIv*]

Замечания к тексту программы

Данная программа объединяет два процесса:

1 Решение краевой задачи вынужденных колебаний рамы.

2 Построение эпюр состояния стержней по методу начальных параметров.

При выполнении первой задачи вторая часть блокируется символом **%**. После выполнения первой задачи вывод значений вектора $\boldsymbol{X}_*$, реакций опор и таблицы параметров блокируются символом **%**, а вторая часть разблокируется. При построении эпюр нужно принять $n_1 = 500 – 1000$.

Эпюры состояния стержней показаны на рисунке 5.27.

Результаты решения краевой задачи и вычисления параметров состояния стержней рамы

Результаты решения системы уравнений заносим в таблицу 5.23.

Таблица 5.23

1	$M_{(\ell)}^{2-4} = X(1,1) = -27.6953$ кНм	11	$N_{(\ell)}^{1-3} = X(11,1) = -25.7170$ кН
2	$EI\varphi_{(0)}^{0-1} = X(2,1) = 1.2487$ кНм^2	12	$EI\varphi_{(0)}^{2-4} = X(12,1) = -1.3367$ кНм^2
3	$Q_{(\ell)}^{2-4} = X(3,1) = -68.9032$ кН	13	$M_{(0)}^{2-4} = X(13,1) = 8.6147$ кНм
4	$Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1) = 10.1048$ кН	14	$Q_{(0)}^{2-4} = X(14,1) = -0.5814$ кН
5	$N_{(\ell)}^{2-4} = X(5,1) = 15.2920$ кН	15	$N_{(0)}^{2-4} = X(15,1) = 15.2920$ кН
6	$M_{(\ell)}^{1-3} = X(6,1) = -12.7248$ кНм	16	$EIv_{(0)}^{1-3} = X(16,1) = 3.7219$ кНм^3
7	$Q_{(\ell)}^{1-3} = X(7,1) = -12.8813$ кН	17	$EI\varphi_{(0)}^{1-3} = X(17,1) = -2.0502$ кНм^2
8	$M_{(0)}^{1-2} = X(8,1) = -11.6889$ кНм	18	$M_{(0)}^{1-3} = X(18,1) = 16.4936$ кНм
9	$Q_{(0)}^{1-2} = X(9,1) = 25.1927$ кН	19	$Q_{(0)}^{1-3} = X(19,1) = 0.5814$ кН
10	$N_{(0)}^{1-2} = X(10,1) = 0.5814$ кН	20	$N_{(0)}^{1-3} = X(20,1) = -25.7170$ кН

Реакции опор рамы равны

$R_1 = Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1) = 10.1048$ кН; $R_3 = N_{(\ell)}^{1-3} = X(11,1) = -25.7170$ кН (стержень 1-3 сжат); $R_4 = N_{(\ell)}^{2-4} = X(5,1) = 15.2920$ кН (стержень 2-4 растянут);

$V_3 = Q_{(\ell)}^{1-3} = X(7,1) = -12.8813$ кН; $V_4 = Q_{(\ell)}^{2-4} = X(3,1) = -68.9032$ кН;

$M_3 = M_{(\ell)}^{1-3} = X(6,1) = -12.7248$ кНм; $M_{(\ell)}^{2-4} = X(1,1) = -27.6953$ кНм.

Реакции опор рамы показаны на рисунке 5.26. Уравнения равновесия для амплитудных значений реакций и нагрузки не выполняются из-за близости к резонансному режиму. Численные значения параметров стержней занесены в таблицу 5.24.

Таблица 5.24

	Параметры напряженно-деформированного состояния балки				
	Координата x, м Вектор $X1$	Поперечная сила Q, кН Вектор Qe	Изгибающий момент M, кНм Вектор Me	Угол поворота $EI\varphi$, кНм^2 Вектор $Eifi$	Прогиб EIv, кНм^3 Вектор EIv
1	2	3	4	5	6
	стержень 0 – 1				
1	0.0	10.1048	0.0	1.2487	0.0
2	0.1	9.0913	0.9600	1.1998	0.1232
3	0.2	8.0520	1.8174	1.0601	0.2369
4	0.3	6.9898	2.5697	0.8399	0.3326
5	0.4	5.9095	3.2148	0.5497	0.4026
6	0.5	4.8174	3.7512	0.2005	0.4405
7	0.6	3.7211	4.1781	– 0.1968	0.4411
8	0.7	2.6290	4.4955	– 0.6314	0.3999
9	0.8	1.5507	4.7044	–1.0923	0.3139

Продолжение таблицы 5.24

1	2	3	4	5	6
	стержень 0 – 1				
10	0.9	0.4962	4.8065	–1.5687	0.1809
11	1.0	–0.5243	4.8047	–2.0502	0.0
	стержень 1 – 2				
1	0.0	25.1927	–11.6889	–2.0502	0.0
2	0.1	24.2110	–9.2190	–1.0056	–0.1507
3	0.2	23.2515	–6.8460	–0.2031	–0.2092
4	0.3	22.2968	–4.5685	0.3668	–0.1991
5	0.4	21.3346	–2.3869	0.7138	–0.1433
6	0.5	20.3572	–0.3021	0.8474	–0.0635
7	0.6	19.3619	1.6840	0.7775	0.0194
8	0.7	18.3500	3.5697	0.5139	0.0856
9	0.8	17.3273	5.3536	0.0669	0.1161
10	0.9	16.3035	7.0351	–0.5534	0.0932
11	1.0	15.2920	8.6147	–1.3367	0.0
	стержень 2 – 4				
1	0.0	–0.5814	8.6147	–1.3367	3.7219
2	0.1	–2.1614	8.4769	–2.1926	3.5453
3	0.2	–3.6462	8.1856	–3.0270	3.2841
4	0.3	–4.9999	7.7521	–3.8250	2.9411
5	0.4	–6.1877	7.1912	–4.5731	2.5208
6	0.5	–67.1773	6.5211	–5.2596	2.0286
7	0.6	–67.9400	–0.2367	–5.5744	1.4812
8	0.7	–68.4632	–7.0588	–5.2101	0.9363
9	0.8	–68.7629	–13.9219	–4.1613	0.4620
10	0.9	–68.8844	–20.8055	–2.4250	0.1270
11	1.0	–68.9032	–27.6953	0.0	0.0
	стержень 1 – 3				
1	0.0	0.5814	16.4936	–2.0502	3.7219
2	0.1	–2.5360	15.3938	–3.6971	3.4344
3	0.2	–5.3328	15.9971	–5.3190	2.9833
4	0.3	–7.6719	–4.6574	–5.8879	2.3974
5	0.4	–9.5042	–5.5203	–5.3806	1.8333
6	0.5	–10.8702	–6.5427	–4.7786	1.3245
7	0.6	–11.8222	–7.6805	–4.0682	0.8812
8	0.7	–12.4220	–8.8954	–3.2399	0.5148
9	0.8	–12.7415	–10.1556	–2.2876	0.2373
10	0.9	–12.8634	–11.4371	–1.2081	0.0615
11	1.0	–12.8813	–12.7248	0.0	0.0

Эпюры напряженно-деформированного состояния стержней рамы

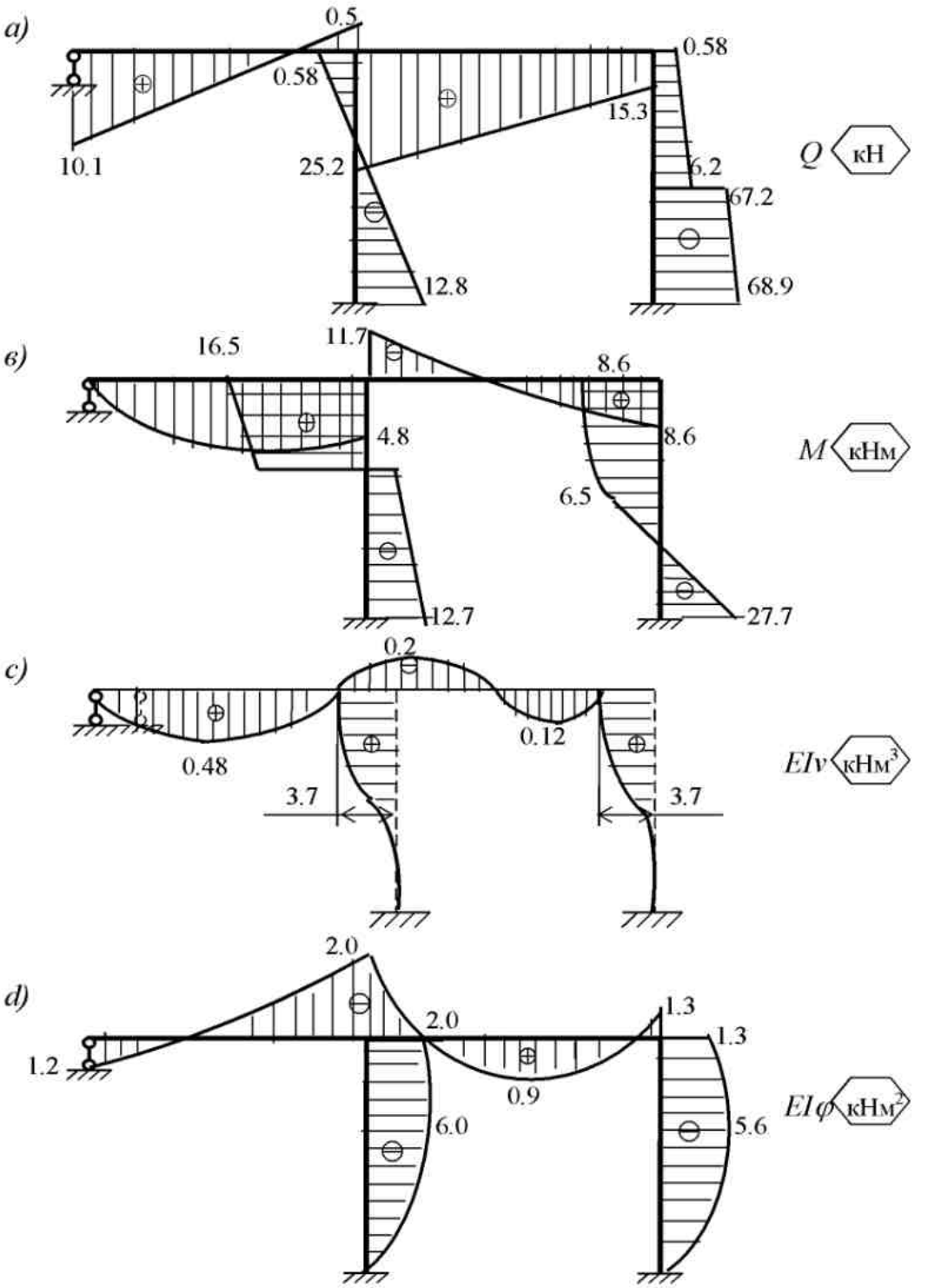


Рисунок 5.27

5.9 Устойчивость плоской рамы

Пример 5.18. Определить критические силы и формы потери устойчивости плоской рамы (рисунок 5.28). Данная рама рассмотрена в главе 4, где критические силы определялись по программе в среде *Delphi*. В этом параграфе изменим ориентированный граф рамы, т.е. изменим положение компенсирующих элементов, и используем среду *MATLAB*, что существенно упростит текст программы и позволит получить более полное ее решение с построением форм потери устойчивости.

Расчетная схема

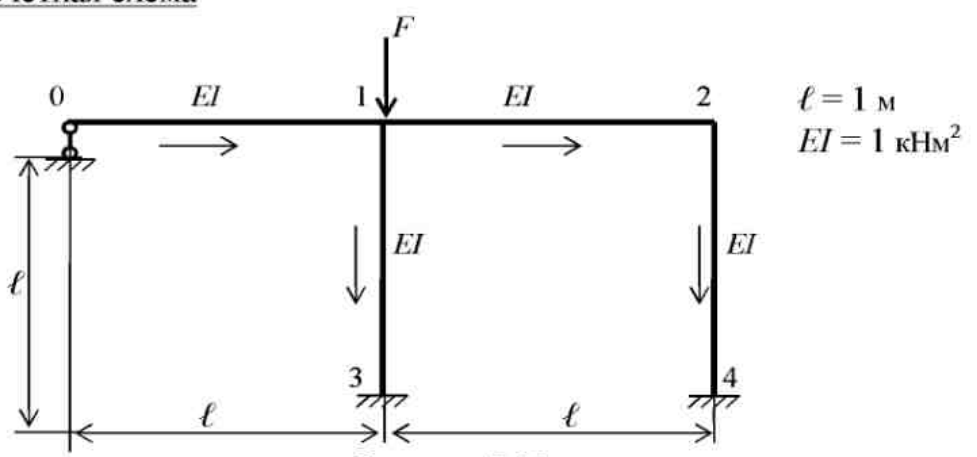


Рисунок 5.28

Для данной рамы матрица $\boldsymbol{A}_*(F)$ (приведена далее) получится, если заменить фундаментальные функции поперечных колебаний на фундаментальные функции продольно-поперечного изгиба (для стержня 1-3) и фундаментальные функции поперечного изгиба (для остальных стержней) в матрице $\boldsymbol{A}_*$ задачи динамики (см. п.5.8).

Поиск критических сил (корней уравнения 4.6) выполняется аналогично задаче устойчивости неразрезной балки.

Исходные данные и обозначения переменных, принятых в программе

$\ell 1 = 1.0$; $\ell 2 = 1.0$; $\ell 3 = 1.0$; $\ell 4 = 1.0$; $n = 20$; $n1 = 600$; $F = 0.01$;
$X1 = zeros(n1,1)$; $dF = 220.0/n1$; $b = zeros(n,1)$;

for $m = 1: n1$
$n2 = sqrt(F)$; $a = zeros(n,n)$;

$a(1,2)=\ell 1$; $a(1,4)=-\ell 1\hat{}3/6$; $a(2,2)=1$; $a(2,4)=-\ell 1\hat{}2/2$; $a(2,17)=-1$; $a(3,4)=\ell 1$;
$a(3,8)=-1$; $a(3,18)=-1$; $a(4,4)=1$; $a(4,9)=-1$; $a(4,20)=-1$; $a(5,10)=-1$; $a(5,19)=1$;
$a(6,8)=-\ell 2\hat{}2/2$; $a(6,9)=-\ell 2\hat{}3/6$; $a(6,17)=\ell 2$; $a(7,8)=-\ell 2$; $a(7,9)=-\ell 2\hat{}2/2$; $a(7,12)=-1$;
$a(7,17)=1$; $a(8,8)=1$; $a(8,9)=\ell 2$; $a(8,13)=-1$; $a(9,9)=1$; $a(9,15)=-1$; $a(10,10)=1$;
$a(10,14)=1$; $a(11,12)=\ell 3$; $a(11,13)=-\ell 3\hat{}2/2$; $a(11,14)=-\ell 3\hat{}3/6$; $a(11,16)=1$; $a(12,12)=1$;
$a(12,13)=-\ell 3$; $a(12,14)=-\ell 3\hat{}2/2$; $a(13,1)=-1$; $a(13,13)=1$; $a(13,14)=\ell 3$; $a(14,3)=-1$;
$a(14,14)=1$; $a(15,5)=-1$; $a(15,15)=1$; $a(16,16)=1$; $a(16,17)=\sin(n2*\ell 4)/n2$;
$a(16,18)=-(1-\cos(n2*\ell 4))/n2\hat{}2$; $a(16,19)=-(n2*\ell 4-\sin(n2*\ell 4))/n2\hat{}3$;
$a(17,17)=\cos(n2*\ell 4)$; $a(17,18)=-a(16,17)$; $a(17,19)=a(16,18)$; $a(18,6)=-1$;

$\mathbf{A}_4(F)=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		ℓ_1		$-\ell_1^2/6$																
2		1		$-\ell_1^2/2$													-1			
3				ℓ_1				-1										-1		
4				1					-1											-1
5										-1									1	
6								$-\ell_2^2/2$	$-\ell_2^3/6$								ℓ_2			
7								$-\ell_2$	$-\ell_2^2/2$			-1					1			
8			-1					1	ℓ_2				-1							
9									1						-1					
10										1				1						
11												ℓ_3	$-\ell_3^2/2$	$-\ell_3^3/6$		1				
12												1	$-\ell_2$	$-\ell_3^2/2$						
13	-1												1	ℓ_3						
14			-1											1						
15					-1										1					
16																1	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	
17																	A_{22}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	
18						-1											$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}	
19							-1												1	
20											-1									1

$a(18,17) = n2 * \sin(n2 * \ell 4)$; $a(18,18) = a(17,17)$; $a(18,19) = a(16,17)$; $a(19,7) = -1$;
$a(19,19) = 1$; $a(20,20) = 1$; $a(20,11) = -1$;

$d=det(a)$; $X1(m,1)=F$; $Y(m,1)=d$; $F = F + dF$; *end*;

% Построение графика $d=det(a)$

$plot(X1,Y)$; *axis*([0.01 220 −0.04 00.4]); *grid on*

% Вывод таблицы значений сжимающих сил и определителя

format long e

[*X*1 *Y*]

% Вычисление относительных граничных параметров стержней рамы

$в(16,1) = -1$; $X = a\backslash в$; $X = X/X(16,1)$

% Начальные параметры стержней рамы

$EIvn1 = 0.0$; $EIfin1 = X(2,1)$; $Mn1 = 0.0$; $Qn1 = X(4,1)$;
$EIvn2 = 0.0$; $EIfin2 = X(17,1)$; $Mn2 = X(8,1)$; $Qn2 = X(9,1)$;
$EIvn3 = X(16,1)$; $EIfin3 = X(12,1)$; $Mn3 = X(13,1)$; $Qn3 = X(14,1)$;
$EIvn4 = X(16,1)$; $EIfin4 = X(17,1)$; $Mn4 = X(18,1)$; $Qn4 = X(19,1)$;

% Построение форм потери устойчивости

$x = 0:0.001:1$;

$$EIv1 = -\left(EIvn1 + EIfin1 * x - Mn1 * x.\text{^}2/2 - Qn1 * x.\text{^}3/6\right);$$

$$EIv2 = -\left(EIvn2 + EIfin2 * x - Mn2 * x.\text{^}2/2 - Qn2 * x.\text{^}3/6\right);$$

$$EIv3 = -\left(EIvn3 + EIfin3 * x - Mn3 * x.\text{^}2/2 - Qn3 * x.\text{^}3/6\right);$$

$$EIv4 = -\left(EIvn4 + EIfin4 * \sin(n2 * x)/n2 - Mn4 * (1 - \cos(n2 * x))/n2\text{^}2 - \ldots\right.$$
$$\left.Qn4 * (n2 * x - \sin(n2 * x))/n2\text{^}3\right);$$

subplot (2,2,1), *plot* (*x*, *EIv*1); *axis* ([0 1 −0.1 0.1]); *grid on*
subplot (2,2,2), *plot* (*x*, *EIv*2); *axis* ([0 1 −0.1 0.1]); *grid on*
subplot (2,2,3), *plot* (*x*, *EIv*3); *axis* ([0 1 −1 1]); *grid on*
subplot (2,2,4), *plot* (*x*, *EIv*4); *axis* ([0 1 −1 1]); *grid on*

Замечание к тексту программы

Программа объединяет два процесса:

1 Поиск с заданной точностью необходимого количества критических сил.

2 Построение форм потери устойчивости.

При выполнении первой задачи вторая часть программы блокируется символом комментария %. Затем, при выполнении второй части, блокируется символом % цикл и вывод таблицы [*X*1 *Y*]. Значение n_2 вычисляется при $F=F_1, F_2$ и т.д.

Результаты поиска критических сил и построения форм потери устойчивости

Перед точным определением критических сил полезно построить график изменения определителя матрицы устойчивости $\boldsymbol{A}_*(F)$ для грубого определения интервалов, где находятся корни уравнения (4.6). Для данной рамы этот график при $0.01 \le F \le 220.0$ принимает вид, приведенный на рисунке 5.29.

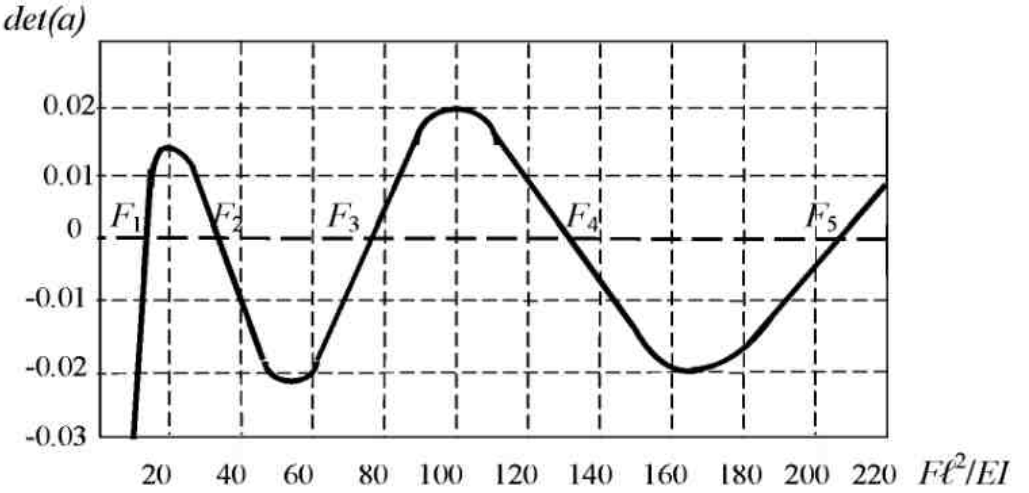


Рисунок 5.29

Как следует из рисунка 5.29, график $d = det(a)$ не имеет точек разрыва 2-го рода, не касается оси $d = 0$ и пересекает ее в ряде точек. Эти точки отмечены символами F_1, F_2 и т.д., т.е. известны приближенные интервалы, где находятся точные значения критических сил. Уточнение их значений приводит к следующим результатам:

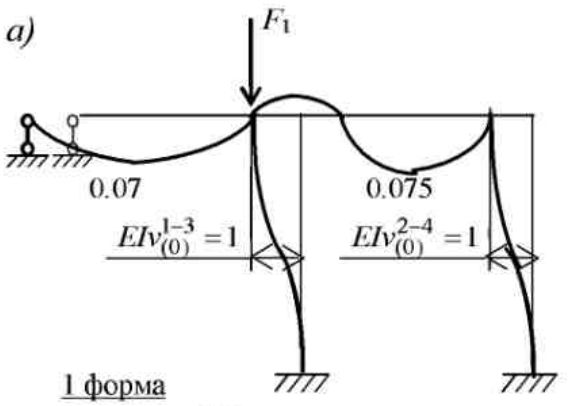
$$F_1 = 15.098365\frac{EI}{\ell^2}; \quad F_2 = 30.980105\frac{EI}{\ell^2}; \quad F_3 = 73.913165\frac{EI}{\ell^2};$$

$$F_4 = 132.291925\frac{EI}{\ell^2}; \quad F_5 = 212.607925\frac{EI}{\ell^2} \text{ кН; } \ldots$$

Для построения форм потери устойчивости рамы необходимо определить относительные граничные параметры вектора $\boldsymbol{X}_*$ при единичном значениии какого-либо элемента вектора $\boldsymbol{B}$. Для данной рамы взято $в(16,1) = -1$, а в качестве нормирующей величины удобно взять линейное перемещение $EIv_{(0)}^{1-3} = X(16,1)$. Задавая значения $F = F_1, F_2$ и т.д., можно построить формы потери устойчивости для отдельных стержней рамы. Изображая их совместно, получим целостную картину потери устойчивости всей конструкции.

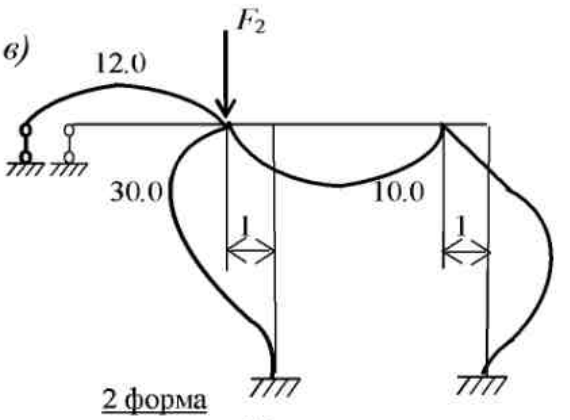
Первые 5 форм представлены на рисунке 5.30 при условии, что

$$EIv_{(0)}^{1-3} = EIv_{(0)}^{2-4} = 1$$



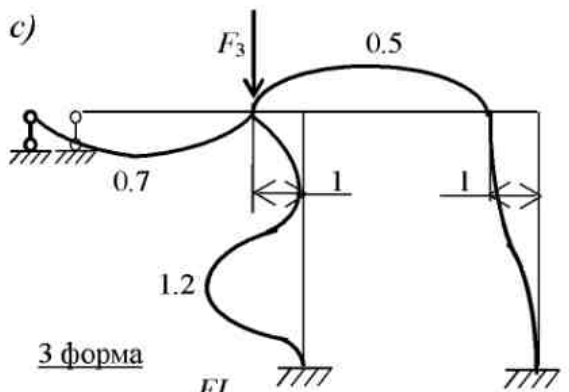
1 форма

$$F_1 = 15.098365\frac{EI}{\ell^2}$$



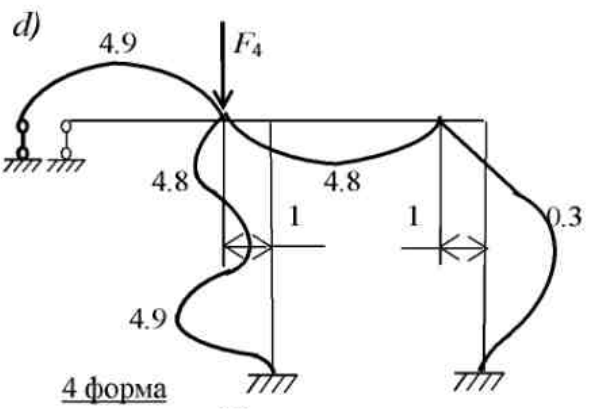
2 форма

$$F_2 = 30.980105\frac{EI}{\ell^2}$$



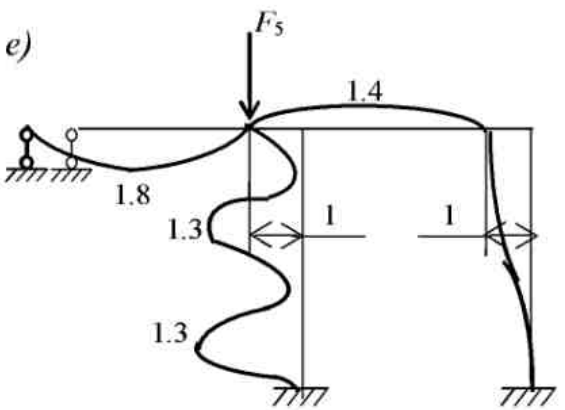
3 форма

$$F_3 = 73.913165\frac{EI}{\ell^2}$$



4 форма

$$F_4 = 132.291925\frac{EI}{\ell^2}$$



5 форма

$$F_5 = 212.607925\frac{EI}{\ell^2}$$

Рисунок 5.30

5.10 Расчет балок на упругом основании

Расчет стержневых систем на упругом основании МГЭ, когда используется модель с двумя коэффициентами постели, представлены в п.4.5.3. Здесь рассмотрим также весьма популярную и распространенную модель основания с одним коэффициентом постели (рисунок 5.31).

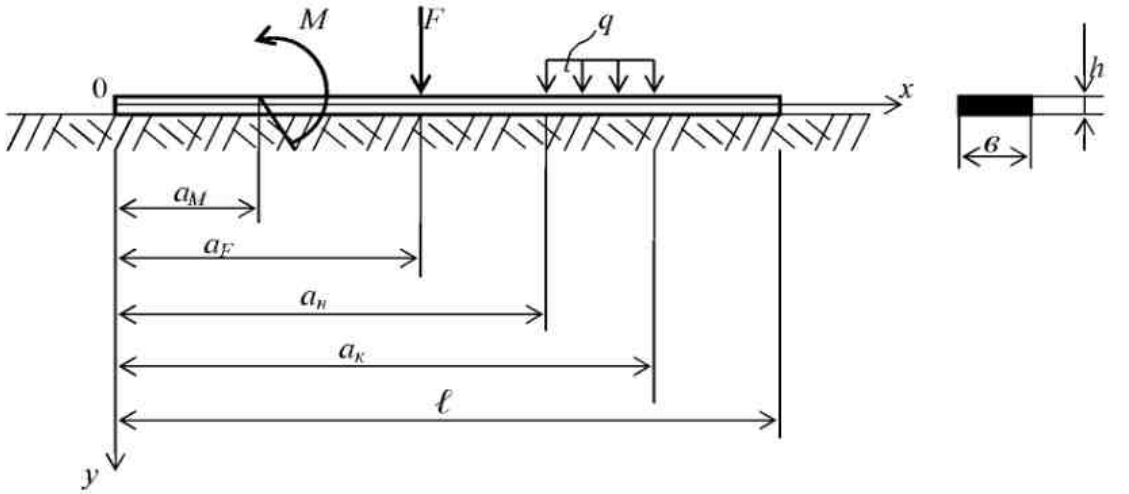


Рисунок 5.31

Дифференциальное уравнение изгиба балки постоянного поперечного сечения на упругом основании с моделью Винклера имеет вид [55]:

$$EIv^{IV}_{(x)} + kbv(x) = q(x), \tag{5.11}$$

где EI – поперечная жесткость балки, кНм^2;
$v(x)$ – поперечный прогиб, м;
k – коэффициент постели, кН/м^3;
$в$ – ширина подошвы балки, м;
$q(x)$ – поперечная нагрузка, кН/м.

Для определения углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в балке используются обычные дифференциальные зависимости теории изгиба

$$EI\varphi(x) = \lambda EIv'(x); \quad M(x) = -\lambda^2 EIv''(x); \quad Q(x) = -\lambda^3 EIv'''(x), \tag{5.12}$$

где параметр λ определяется выражением

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{kв}{4EI}}, \quad 1/м \tag{5.13}$$

Решение уравнения (5.11) с параметрами (5.12) по стандартному алгоритму приводится к виду:

$$\begin{vmatrix} EIv(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{21} & A_{11} & A_{12} \\ -A_{41} & -A_{31} & A_{21} & A_{11} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{vmatrix} + \int_0^x \begin{vmatrix} A_{14}(x-\xi) \\ A_{13}(x-\xi) \\ -A_{12}(x-\xi) \\ -A_{11}(x-\xi) \end{vmatrix} \cdot q(\xi)d\xi \tag{5.14}$$

Фундаментальные функции и элементы матрицы $\boldsymbol{B}(x)$ для нагрузки по рисунку 5.31 определяются следующим образом:

$$A_{11}=ch\lambda x\cdot\cos\lambda x;\quad A_{12}=\frac{ch\lambda x\cdot\sin\lambda x+sh\lambda x\cdot\cos\lambda x}{2\lambda};\quad A_{13}=\frac{sh\lambda x\cdot\sin\lambda x}{2\lambda^2};$$

$$A_{14}=\frac{ch\lambda x\cdot\sin\lambda x-sh\lambda x\cdot\cos\lambda x}{4\lambda^3};\quad A_{21}=-\lambda(ch\lambda x\cdot\sin\lambda x-sh\lambda x\cdot\cos\lambda x;$$

$$A_{31}=-2\lambda^2\cdot sh\lambda x\cdot\sin\lambda x;\quad A_{41}=-2\lambda^3(ch\lambda x\cdot\sin\lambda x+sh\lambda x\cdot\cos\lambda x;$$

$$B_{11}=M\frac{sh\lambda(x-a_M)_+\cdot\sin\lambda(x-a_M)_+}{2\lambda^2}+$$

$$+F\frac{ch\lambda(x-a_F)_+\sin\lambda(x-a_F)_+-sh\lambda(x-a_F)_+\cos\lambda(x-a_F)_+}{4\lambda^3}+$$

$$+q\left[\frac{H[\lambda(x-a_n)]-ch\lambda(x-a_n)_+\cdot\cos(x-a_n)_+}{4\lambda^4}-\frac{H[\lambda(x-a_k)]-ch\lambda(x-a_k)_+\cdot\cos(x-a_k)_+}{4\lambda^4}\right];$$

$$B_{21}=M\frac{ch\lambda(x-a_M)_+\cdot\sin\lambda(x-a_M)_++sh\lambda(x-a_M)_+\cdot\cos\lambda(x-a_M)_+}{2\lambda}+$$

$$+F\frac{sh\lambda(x-a_F)_+\sin\lambda(x-a_F)_+}{2\lambda^2}+q\left[\frac{ch\lambda(x-a_n)_+\cdot\sin\lambda(x-a_n)_+-sh\lambda(x-a_n)_+\cdot\cos(x-a_n)_+}{4\lambda^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{ch\lambda(x-a_k)_+\cdot\sin\lambda(x-a_k)_+-sh\lambda(x-a_k)_+\cdot\cos(x-a_k)_+}{4\lambda^3}\right];$$

$$B_{31}=M\cdot ch\lambda(x-a_M)_+\cdot\cos\lambda(x-a_M)_+ +$$

$$+F\frac{ch\lambda(x-a_F)_+\sin\lambda(x-a_F)_++sh\lambda(x-a_F)_+\cos\lambda(x-a_F)_+}{2\lambda}+ \qquad (5.15)$$

$$+q\left[\frac{sh\lambda(x-a_n)_+\cdot\sin(x-a_n)_+-sh\lambda(x-a_n)_+\cdot\sin(x-a_n)_+}{2\lambda^2}\right];$$

$$B_{41}=M\cdot\lambda[sh\lambda(x-a_M)_+\cdot\cos\lambda(x-a_M)_+-ch\lambda(x-a_M)_+\cdot\sin\lambda(x-a_M)_+]+$$

$$+F\cdot ch\lambda(x-a_F)_+\cos\lambda(x-a_F)_++q\left[\frac{ch\lambda(x-a_n)_+\cdot\sin\lambda(x-a_n)_++sh\lambda(x-a_n)_+\cdot\cos(x-a_n)_+}{2\lambda}-\right.$$

$$\left.-\frac{ch\lambda(x-a_k)_+\cdot\sin\lambda(x-a_k)_+-sh\lambda(x-a_k)_+\cdot\cos(x-a_k)_+}{2\lambda}\right];$$

$H[\lambda(x-a_n)]$ – единичная функция Хевисайда.

Элементы матрицы нагрузки удобно представить в более компактном виде:

$$\begin{aligned}
B_{11}&=M\cdot A_{13}(x-a_M)_+ +F\cdot A_{14}(x-a_F)_+ +q[A_{15}(x-a_n)_+ -A_{15}(x-a_n)_+];\\
B_{21}&=M\cdot A_{12}(x-a_M)_+ +F\cdot A_{14}(x-a_F)_+ +q[A_{14}(x-a_n)_+ -A_{14}(x-a_n)_+];\\
B_{31}&=M\cdot A_{11}(x-a_M)_+ +F\cdot A_{14}(x-a_F)_+ +q[A_{13}(x-a_n)_+ -A_{13}(x-a_n)_+];\\
B_{41}&=M\cdot[-4\lambda^4\cdot A_{14}(x-a_M)_+]+F\cdot A_{11}(x-a_F)_+ +q[A_{12}(x-a_n)_+ -A_{12}(x-a_n)_+],
\end{aligned} \qquad (5.16)$$

где знак «+» обозначает сплайн-функцию, а фундаментальная функция A_{15} имеет вид

$$A_{15}=\frac{H(\lambda x)-ch\lambda x\cdot\cos\lambda x}{4\lambda^4}. \qquad (5.17)$$

Из анализа выражений (5.15) следует, что математическая модель балки на упругом основании с одним коэффициентом постели существенно проще модели с двумя коэффициентами, однако она менее точная.

Уравнение (5.14) в алгоритме МГЭ позволяет решать широкий круг задач расчета стержневых систем, связанных с упругим основанием. Стержневые системы могут иметь любые краевые условия и законы изменения жесткости, а само основание может иметь произвольный закон изменения коэффициента постели k, т.е. уравнение (5.11) в этом случае будет иметь переменные коэффициенты. При оптимальной дискретизации расчетной схемы коэффициенты уравнения (5.11) можно принять постоянными, а величину приведенной длины всех стержневых элементов $(\lambda\ell)_i$ выбрать меньше 5. В этих условиях алгоритм МГЭ при использовании уравнения (5.14) обеспечит приемлемую точность результатов.

Рассмотрим ряд примеров, подтверждающих данное утверждение.

Пример 5.19. Построить эпюры прогибов $EIv(x)$, углов поворота $EI\varphi(x)$, изгибающих моментов $M(x)$, поперечных сил $Q(x)$ и реакции основания $kbv(x)$ в железобетонной балке, нагруженной одной сосредоточенной силой (рисунок 5.32) [291, с.72].

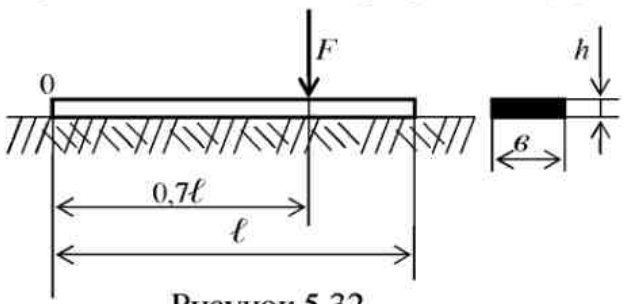


Рисунок 5.32

Модуль упругости основания
$E_0=3\cdot10^6$ кПа;
модуль упругости материала балки
$E_0=2{,}7\cdot10^7$ кПа;
размеры сечения
$b=1{,}0$ м; $h=0{,}7$ м;
коэффициент постели упругого основания
$k=1\cdot10^6$ кН/м^3.

Краевая задача для расчетной схемы балки по рисунку 5.32 примет вид при $x=\ell$:

	1	2	3	4						
1	A_{11}	A_{12}	-1		$EIv_{(0)}^{0-1}$		$EIv_{(\ell)}^{0-1}$		$-B_{11}$	
2	A_{21}	A_{11}		-1	$EI\varphi_{(0)}^{0-1}$		$EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}$		$-B_{21}$	
3	$-A_{31}$	$-A_{21}$			$M_{(0)}^{0-1}=0; EIv_{(\ell)}^{0-1}$	$-$	$M_{(\ell)}^{0-1}=0$	$=$	B_{31}	$\Rightarrow$
4	$-A_{41}$	$-A_{31}$			$Q_{(0)}^{0-1}=0; EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}$		$Q_{(\ell)}^{0-1}=0$		B_{41}	

	1	2	3	4			
1	A_{11}	A_{12}	-1		$EIv_{(0)}^{0-1}$		$-B_{11}$
2	A_{21}	A_{11}		-1	$EI\varphi_{(0)}^{0-1}$	$=$	$-B_{21}$
3	$-A_{31}$	$-A_{21}$			$EIv_{(\ell)}^{0-1}$		B_{31}
4	$-A_{41}$	$-A_{31}$			$EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}$		B_{41}

(5.18)

Решением системы алгебраических уравнений (5.18) определяются неизвестные начальные параметры $EIv_{(0)}^{0-1}$, $EI\varphi_{(0)}^{0-1}$, а напряженно-деформированное состояние балки во внутренних точках вычисляется по уравнению (5.14). Ниже представлена программа в среде *MATLAB*, где переменная ℓa обозначает параметр λ, а обозначения других величин совпадают с обозначениями в математической модели.

Вначале в рабочей папке *WORK* формируем подпрограммы единичной функции Хевисайда $H(x)$ и фундаментальных функций $A_{11} - A_{41}$.

```
function  f = H(t)
if  t < 0.0  f = 0.0;    else  f = 1.0;  end;
function  f = A11(t,x)
 f = cosh(t. * x) * cos(t. * x);  end;
function  f = A12(t,x)
 f = (cosh(t. * x) * sin(t. * x) + sinh(t. * x) * cos(t. * x))/(t * 2.0);  end;
function  f = A13(t,x)
 f = (sinh(t. * x) * sin(t. * x))/((t.^2) * 2);  end;
function  f = A14(t,x)
 f = (cosh(t. * x) * sin(t. * x) - sinh(t. * x) * cos(t. * x))/((t^3) * 4);  end;
function  f = A15(t,x)
 f = (H(t. * x) - cosh(t. * x) * cos(t. * x))/((t.^4) * 4);  end.
function  f = A21(t,x)
 f = -t * (cosh(t. * x) * sin(t. * x) - sinh(t. * x) * cos(t. * x));  end;
function  f = A31(t,x)
 f = -2 * (t^2) * sinh(t. * x) * sin(t. * x);  end;
function  f = A41(t,x)
 f = -2 * (t^3) * (cosh(t. * x) * sin(t. * x) + sinh(t. * x) * cos(t. * x));  end;
```

Текст программы с комментариями

```
n = 4;  a = zeros(n,n);  X = zeros(n,1);  в1 = zeros(n,1).
```

% Исходные данные краевой задачи

```
ℓ1=1.0; F= 1.0; aF1=0.7; в=1.0;  h=0.7; E=2.7e+7; I= в*h3/12; EI=E*I;
k=1.0e+6;  ℓa=(k*в/(4*EI))^0.25;  p= в*k;
```

% Ввод матриц $a(n,n)$, $в1(n,1)$ с помощью операторов присваивания

```
a(1,1)=A11(ℓa,ℓ);  a(1,2)= A12(ℓa,ℓ);  a(1,3)= –1;  a(2,1)= A21(ℓa,ℓ);  a(2,2)= a(1,1);
a(2,4)= –1;  a(3,1)= –A31(ℓa,ℓ);  a(3,2)= –a(2,1);  a(4,1)= –A41(ℓa,ℓ);  a(4,2)= a(3,1);
в1(1,1)= –F1*A14(ℓa,ℓ–aF1);  в1(2,1)= –F1*A13(ℓa,ℓ–aF1);
в1(3,1)= F1*A12(ℓa,ℓ–aF1);  в1(4,1)= F1*A11(ℓa,ℓ–aF1);
```

% Решение системы уравнений и вывод значений начальных параметров

```
X = a \ в1
```

```
% Начальные параметры балки
EIvn = X(1,1)/EI;   EIfin = X(2,1)/EI;   Mn = 0.0;   Qn = 0.0;
n1=10;  EIv = zeros(n1 + 1,1);  EIfi = zeros(n1 + 1,1);  Me = zeros(n1 + 1,1);  Qe = zeros(n1 + 1,1);
kbv = zeros(n1 + 1,1);  X1 = zeros(n1+1,1);  x = 0.0;  dx = ℓ/n1;;

    for  m=1 : n1+1
    X1(m,1) = x;
EIv(m,1) = -(EIvn* A11(ℓa, x) + EIfin* A12(ℓa, x) - Mn* A13(ℓa, x)/EI -...
Qn* A14(ℓa, x)/EI + F1* A14(ℓa, x - aF1) * H(x - aF1)/EI);
EIfi(m,1) = -(EIvn* A21(ℓa, x) + EIfin* A11(ℓa, x) - Mn* A12(ℓa, x)/EI -...
Qn* A13(ℓa, x)/EI + F1* A13(ℓa, x - aF1) * H(x - aF1)/EI);
Me(m,1) = -(EIvn* A31(ℓa, x)/EI - EIfin* A21(ℓa, x)/EI + Mn* A11(ℓa, x) +...
Qn* A12(ℓa, x) - F1* A12(ℓa, x - aF1) * H(x - aF1));
Qe(m,1) = -(- EIvn* A41(ℓa, x)/EI - EIfin* A31(ℓa, x)/EI + Mn* A21(ℓa, x) +...
Qn* A11(ℓa, x) - F1* A11(ℓa, x - aF1) * H(x - aF1));
kbv = (m,1) = p * EIv(m,1);
    x = x + dx;    end

    % Построение эпюр Q, M, EIfi, EIv; kbv
% stem(X1, Qe, 'filled');   axis ([0  ℓ  -1    1]);          grid on
% stem(X1, Me, 'filled');   axis ([0  ℓ  -0.14  0.14]);      grid on
% stem(X1, EIfi, 'filled'); axis ([0  ℓ  -10e-6  10e-6]);    grid on
% stem(X1, EIv, 'filled');  axis ([0  ℓ  -1,0e-6  3,0e-6]);  grid on
% stem(X1, kbv, 'filled');  axis ([0  ℓ  -3    1]);          grid on

    % Вывод таблицы значений параметров балки
    [X1  -Qe  -Me  -EIfi  -EIv  -  kbv]
```

Замечания к тексту программы

Для визуализации результатов расчетов (построения эпюр) данную программу необходимо выполнить несколько раз. После первого прогона программы на экране монитора появятся вектор ***X*** и таблица параметров *Q(x), M(x), EIφ(x), EIv(x), kbv(x).* После этого необходимо заблокировать вывод численных данных оператором точка с запятой **;** и снять символ комментария **%** с какого-либо оператора построения графика, значение $n1$ можно поменять на $n1$=1000. Прогоняя программу 5 раз, получаем эпюры напряженно-деформированного состояния, которые представлены на рисунке 5.33.

Значения граничных параметров балки представлены в таблице 5.25.

Таблица 5.25

$$\boldsymbol{X}_* = \begin{array}{c|l} 1 & EIv_{(0)}^{0-1} = X(1,1) = -0{,}15593 \text{ кНм}^3 \\ 2 & EI\varphi_{(0)}^{0-1} = X(2,1) = 1{,}858 \text{ кНм}^2 \\ 3 & EIv_{(\ell)}^{0-1} = X(3,1) = 1{,}6949 \text{ кНм}^3 \\ 4 & EI\varphi_{(\ell)}^{0-1} = X(4,1) = 1{,}8364 \text{ кНм}^2 \end{array}$$

Напряженно-деформированное состояние балки в численной форме отражено данными таблицы 5.26.

Таблица 5.26

Параметры напряженно-деформированного состояния балки								
Координата x, м Вектор $X1$	Поперечная сила Q, кН Вектор Qe		Изгибающий момент M, кНм Вектор Me		Угол поворота $EI\varphi$, кНм^2 Вектор $EIfi$	Прогиб EIv, кНм^3 Вектор EIv	Отпор основания kbv, кН/м Вектор kbv	
	Наши результаты	Данные работы [291]	Наши результаты	Данные работы [291]			Наши результаты	Данные работы [291]
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	$2{,}4075\cdot10^{-6}$	$-0{,}20205\cdot10^{-6}$	-0,20205	0,272
1,0	$-8{,}1676\cdot10^{-3}$	$32{,}0\cdot10^{-3}$	$-0{,}0609\cdot10^{-2}$	$0{,}2\cdot10^{-2}$	$2{,}4076\cdot10^{-6}$	$0{,}038702\cdot10^{-6}$	0,0387	0,371
2,0	$7{,}7406\cdot10^{-3}$	$72{,}57\cdot10^{-3}$	$-0{,}0831\cdot10^{-2}$	$0{,}7\cdot10^{-2}$	$2{,}4077\cdot10^{-6}$	$0{,}27946\cdot10^{-6}$	0,27946	0,419
3,0	$47{,}725\cdot10^{-3}$	$116{,}0\cdot10^{-3}$	$0{,}17417\cdot10^{-2}$	$1{,}7\cdot10^{-2}$	$2{,}4077\cdot10^{-6}$	$0{,}52023\cdot10^{-6}$	0,52023	0,451
4,0	$111{,}79\cdot10^{-3}$	$164{,}0\cdot10^{-3}$	$0{,}95166\cdot10^{-2}$	$3{,}45\cdot10^{-2}$	$2{,}4070\cdot10^{-6}$	$0{,}76097\cdot10^{-6}$	0,76097	0,504
5,0	$199{,}92\cdot10^{-3}$	$219{,}0\cdot10^{-3}$	$2{,}4901\cdot10^{-2}$	$4{,}98\cdot10^{-2}$	$2{,}4049\cdot10^{-6}$	$1{,}0016\cdot10^{-6}$	1,0016	0,614
6,0	$312{,}09\cdot10^{-3}$	$290{,}0\cdot10^{-3}$	$5{,}0301\cdot10^{-2}$	$7{,}4\cdot10^{-2}$	$2{,}4001\cdot10^{-6}$	$1{,}2419\cdot10^{-6}$	1,2419	0,816
7,0	$448{,}27\cdot10^{-3}$ $-551{,}73\cdot10^{-3}$	$386{,}6\cdot10^{-3}$ $-613{,}4\cdot10^{-3}$	$8{,}812\cdot10^{-2}$	$10{,}8\cdot10^{-2}$	$2{,}3913\cdot10^{-6}$	$1{,}4815\cdot10^{-6}$	1,4815	1,147
8,0	$-391{,}65\cdot10^{-3}$	$-476{,}0\cdot10^{-3}$	$4{,}075\cdot10^{-2}$	$5{,}3\cdot10^{-2}$	$2{,}3831\cdot10^{-6}$	$1{,}7201\cdot10^{-6}$	1,7201	1,643
9,0	$-207{,}72\cdot10^{-3}$	$-278{,}0\cdot10^{-3}$	$1{,}0585\cdot10^{-2}$	$1{,}4\cdot10^{-2}$	$2{,}3800\cdot10^{-6}$	$1{,}9583\cdot10^{-6}$	1,9583	2,333
10,0	$-7{,}77\cdot10^{-16}$	0,0	$5{,}55\cdot10^{-16}$	0,0	$2{,}3795\cdot10^{-6}$	$2{,}1962\cdot10^{-6}$	2,1962	3,272

Эпюры напряженно-деформированного состояния балки по рисунку 5.32 представлены на рисунке 5.33.

Анализ данных таблицы 5.26 показывает, что результаты МГЭ с одним коэффициентом постели удовлетворительно согласуются с результатами И.А.Симвулиди [291]. Максимальная поперечная сила меньше на 10,0 %, максимальный изгибающий момент меньше на 18,4 %, а максимальный отпор основания также меньше на 32,88 %.

Подобные расхождения можно объяснить приближенным характером модели упругого основания работы [291], где оно моделируется полиномом третьей степени, коэффициенты которого обеспечивают равенство прогибов балки и основания только в трех точках.

Характер изменения параметров по рисунку 5.33 и соответствующих величин работы [291] практически одинаков.

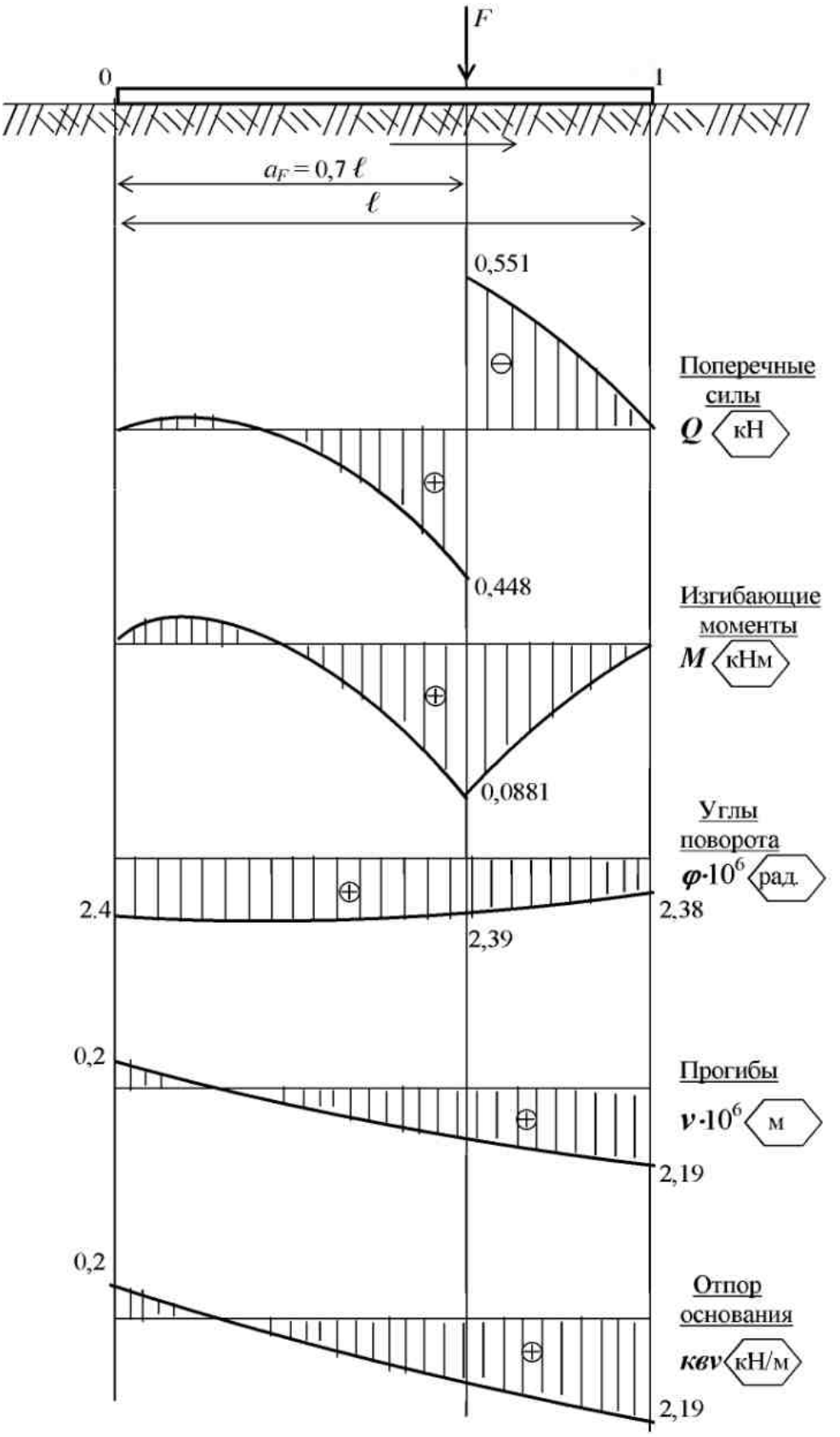

F
0
1
$a_F = 0{,}7\,\ell$
ℓ
0,551
Поперечные силы
Q кН
0,448
Изгибающие моменты
M кНм
0,0881
Углы поворота
$\varphi \cdot 10^6$ рад
2,4
2,38
2,39
0,2
Прогибы
$v \cdot 10^6$ м
2,19
0,2
Отпор основания
kbv кН/м
2,19

Рисунок 5.33

Пример 5.20. Построить эпюры параметров напряженно-деформированного состояния в железобетонной балке, лежащей на упругом основании с коэффициентом постели $к=1\cdot10^4$ кн/м^3, (рисунок 5.34) [Методические указания к выполнению расчетно-графических упражнений по сопротивлению материалов. –К: Изд-во Киевского инженерно-строительного ин-та, 1978, с.88].

Модуль упругости материала балки $E=2\cdot10^7$ кН/м^2; $в = 1{,}0$ м; $h = 0{,}6$ м.

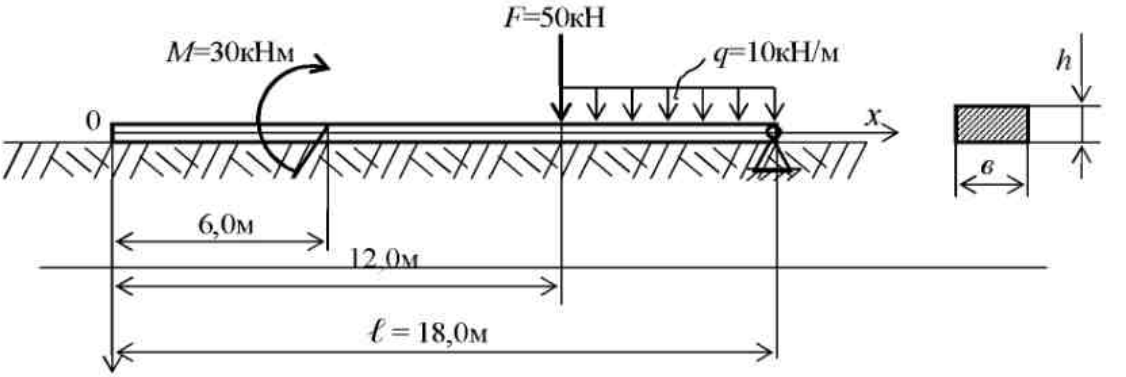


Рисунок 5.34

Краевая задача балки по рисунку 5.34 предстанет матричным уравнением

	1	2	3	4			
1	A_{11}	A_{12}			$EIv_{(0)}^{0-1}$		$-B_{11}$
2	A_{21}	A_{11}	-1		$EI\varphi_{(0)}^{0-1}$	=	$-B_{21}$
3	$-A_{31}$	$-A_{21}$			$EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}$		B_{31}
4	$-A_{41}$	$-A_{31}$		-1	$Q_{(\ell)}^{0-1}$		B_{41}

(5.19)

Программа решения краевой задачи и построения эпюр напряженно-деформированного состояния балки может иметь следующий текст

$n = 4$; $a = zeros(n,n)$; $X = zeros(n,1)$; $в1 = zeros(n,1)$.

% Исходные данные краевой задачи

$\ell=18.0$; $F= 50.0$; $M= -30.0$; $q=10.0$; $aM= 6.0$; $aF= 12.0$; $an= 12.0$;

$в=1.0$; $h=0.6$; $E=2.0e+7$; $I = в*h\hat{}3/12$; $EI=E*I$; $k=1.0e+4$;

$\ell a=(k*в/(EI*4))\hat{}0.25$; $p= в*k$.

% Ввод матриц $a(n,n)$, $в1(n,1)$

$a(1,1)=A11(\ell a,\ell)$; $a(1,2)= A12(\ell a,\ell)$; $a(2,1)= A21(\ell a,\ell)$; $a(2,2)= a(1,1)$; $a(2,3)= -1$;

$a(3,1)= -A31(\ell a,\ell)$; $a(3,2)= -a(2,1)$; $a(4,1)= -A41(\ell a,\ell)$; $a(4,2)= a(3,1)$; $a(4,4)= -1$;

$в1(1,1)= -M*A13(\ell a,\ell-aM) -F*A14(\ell a,\ell-aF1) -q*A15(\ell a,\ell-an)$;

$в1(2,1)= -M*A12(\ell a,\ell-aM) -F*A13(\ell a,\ell-aF1) -q*A14(\ell a,\ell-an)$;

$в1(3,1)= M*A11(\ell a,\ell-aM) +F*A12(\ell a,\ell-aF1) +q*A13(\ell a,\ell-an)$;

$в1(4,1)= -M*A14(\ell a,\ell-aM)*4*\ell a\hat{}4 +F*A11(\ell a,\ell-aF1) +q*A12(\ell a,\ell-an)$;

% Решение системы уравнений и вывод значений начальных параметров

$X = a \setminus в1$

% Начальные параметры балки

$EIvn = X(1,1)/EI;\quad EIfin = X(2,1)/EI;\quad Mn = 0.0;\quad Qn = 0.0;$

$n1=36;\quad EIv = zeros(n1+1,1);\quad EIfi = zeros(n1+1,1);\quad Me = zeros(n1+1,1);\quad Qe = zeros(n1+1,1);$

$kbv = zeros(n1+1,1);\quad X1 = zeros(n1+1,1);\quad x = 0.0;\quad dx = \ell/n1;;$

for $m=1 : n1+1$

$X1(m,1) = x;$

$EIv(m,1) = -(EIvn * A11(\ell a, x) + EIfin * A12(\ell a, x) - Mn * A13(\ell a, x)/EI - \ldots$

$Qn * A14(\ell a, x)/EI + M * A13(\ell a, x - aM) * H(x - aM)/EI + F * A14(\ell a, x - aF) * H(x - aF)/EI + \ldots$

$q * A15(\ell a, x - an) * H(x - an)/EI);$

$EIfi(m,1) = -(EIvn * A21(\ell a, x) + EIfin * A11(\ell a, x) - Mn * A12(\ell a, x)/EI - \ldots$

$Qn * A13(\ell a, x)/EI + M * A12(\ell a, x - aM) * H(x - aM)/EI + F * A13(\ell a, x - aF) * H(x - aF)/EI + \ldots$

$q * A14(\ell a, x - an) * H(x - an)/EI);$

$Me(m,1) = -(-EIvn * A31(\ell a, x) * EI - EIfin * A21(\ell a, x) * EI + Mn * A11(\ell a, x) + \ldots$

$Qn * A12(\ell a, x)/EI - M * A11(\ell a, x - aM) * H(x - aM) - F * A12(\ell a, x - aF) * H(x - aF) - \ldots$

$q * A13(\ell a, x - an) * H(x - an));$

$Qe(m,1) = -(-EIvn * A41(\ell a, x) * EI - EIfin * A31(\ell a, x) * EI + Mn * A21(\ell a, x) + Qn * A11(\ell a, x) - \ldots$

$-M * (-4 * \ell a\hat{}4 * A14(\ell a, x - aM) * H(x - aM) - F * A11(\ell a, x - aF) * H(x - aF) - \ldots$

$q * A12(\ell a, x - an) * H(x - an));$

$kbv = (m,1) = -p * EIv(m,1);$

$x = x + dx;\quad end$

% Построение эпюр *Q, M, EIfi, EIv; kbv*

% *stem*(*X*1, *Qe*, *'filled'*); *axis* ([0 ℓ −50 50]); *grid on*

% *stem*(*X*1, *Me*, *'filled'*); *axis* ([0 ℓ −60 60]); *grid on*

% *stem*(*X*1, *EIfi*, *'filled'*); *axis* ([0 ℓ −0.5*e*-3 0.5*e*-3]); *grid on*

% *stem*(*X*1, *EIv*, *'filled'*); *axis* ([0 ℓ −2.0*e*-3 2.0*e*-3]); *grid on*

% *stem*(*X*1, *kbv*, *'filled'*); *axis* ([0 ℓ −15 15]); *grid on*

% Вывод таблицы значений параметров балки

[*X*1 − *Qe* − *Me* − *EIfi* − *EIv* − *kbv*]

Значения граничных параметров представлены в таблице 5.27.

Таблица 5.27

$$\boldsymbol{X}_* = \begin{array}{c|c} 1 & EIv_{(0)}^{0-1} = X(1,1) = -70{,}414\ \text{кНм}^3 \\ \hline 2 & EI\varphi_{(0)}^{0-1} = X(2,1) = 3{,}1202\ \text{кНм}^2 \\ \hline 3 & EI\varphi_{(\ell)}^{0-1} = X(3,1) = -142{,}18\ \text{кНм}^2 \\ \hline 4 & Q_{(\ell)}^{0-1} = X(4,1) = -19{,}046\ \text{кН} \end{array}$$

Параметры напряженно-деформированного состояние заносим в таблицу 5.28.

Таблица 5.28

Параметры напряженно-деформированного состояния										
Координата x, м Вектор $X1$	Поперечная сила Q, кН Вектор Qe		Изгибающий момент M, кНм Вектор Me		Угол поворота φ, рад. Вектор $EIfi$		Прогиб v, м Вектор EIv		Отпор основания kbv, кН/м Вектор kbv	
	Наши результаты	Результаты КИСИ	Наши результаты	Результаты КИСИ	Наши результаты	Результаты КИСИ	Наши результаты	Результаты КИСИ	Наши результ-таты	Результаты КИСИ
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	$0{,}008667\cdot10^{-3}$	$0{,}00867\cdot10^{-3}$	$-0{,}1956\cdot10^{-3}$	$-0{,}196\cdot10^{-3}$	-1,9559	-1,96
2,0	-3,7243	-3,726	-3,7915	-3,792	$0{,}01575\cdot10^{-3}$	$0{,}01782\cdot10^{-3}$	$-0{,}1747\cdot10^{-3}$	$-0{,}175\cdot10^{-3}$	-1,747	-1,75
4,0	-6,6815	-6,682	-14,422	-14,422	$0{,}06357\cdot10^{-3}$	$0{,}06311\cdot10^{-3}$	$-0{,}1053\cdot10^{-3}$	$-0{,}104\cdot10^{-3}$	-1,0527	-1,04
6,0	-6,8516	-6,851	-28,724 1,2758	-28,724 1,276	$0{,}1823\cdot10^{-3}$	$0{,}19027\cdot10^{-3}$	$0{,}1281\cdot10^{-3}$	$0{,}133\cdot10^{-3}$	1,2812	1,33
8,0	-0,55973	-0,560	-7,3997	-7,400	$0{,}2060\cdot10^{-3}$	$0{,}20938\cdot10^{-3}$	$0{,}5091\cdot10^{-3}$	$0{,}523\cdot10^{-3}$	5,0906	5,23
10,0	13,983	14,013	4,5360	4,536	$0{,}2274\cdot10^{-3}$	$0{,}23248\cdot10^{-3}$	$0{,}9533\cdot10^{-3}$	$0{,}978\cdot10^{-3}$	9,5327	9,78
12,0	12,906 -37,094	12,078 -37,978	54,388	54,387	$0{,}08523\cdot10^{-3}$	$0{,}07980\cdot10^{-3}$	$1{,}312\cdot10^{-3}$	$1{,}340\cdot10^{-3}$	13,118	13,4
14,0	-6,7640	-6,555	35,029	35,025	$-0{,}1573\cdot10^{-3}$	$-0{,}19460\cdot10^{-3}$	$1{,}222\cdot10^{-3}$	$1{,}211\cdot10^{-3}$	12,219	12,11
16,0	-6,6566	-6,860	23,239	23,239	$-0{,}3190\cdot10^{-3}$	$-0{,}40898\cdot10^{-3}$	$0{,}7350\cdot10^{-3}$	$0{,}735\cdot10^{-3}$	7,3498	7,35
18,0	-19,046	-19,050	$2{,}558\cdot10^{-13}$	0,0	$-0{,}3950\cdot10^{-3}$	$-0{,}56676\cdot10^{-3}$	$-2{,}17\cdot10^{-18}$	0,0	$-2{,}168\cdot10^{-14}$	0,0

Данные таблицы 5.28 показывают, что результаты МГЭ и метода начальных параметров с той же моделью основания практически совпадают.

Эпюры напряженно-деформированного состояния балки по рисунку 5.34 представлены на рисунке 5.35.

Таким образом, тестовые примеры 5.19 и 5.20 подтверждают приемлемую точность МГЭ при использовании модели основания с одним коэффициентом постели.

Применим уравнение 5.14 для расчета статически неопределимых балок с кусочно-постоянной жесткостью по длине. Задачу усложним введением упругой опоры, кусочно-постоянным изменением коэффициента постели и учетом отлипания основания.

Предварительно, для сравнения результатов, выполним расчет статически неопределимой балки по рисунку 5.36 без упругого основания.

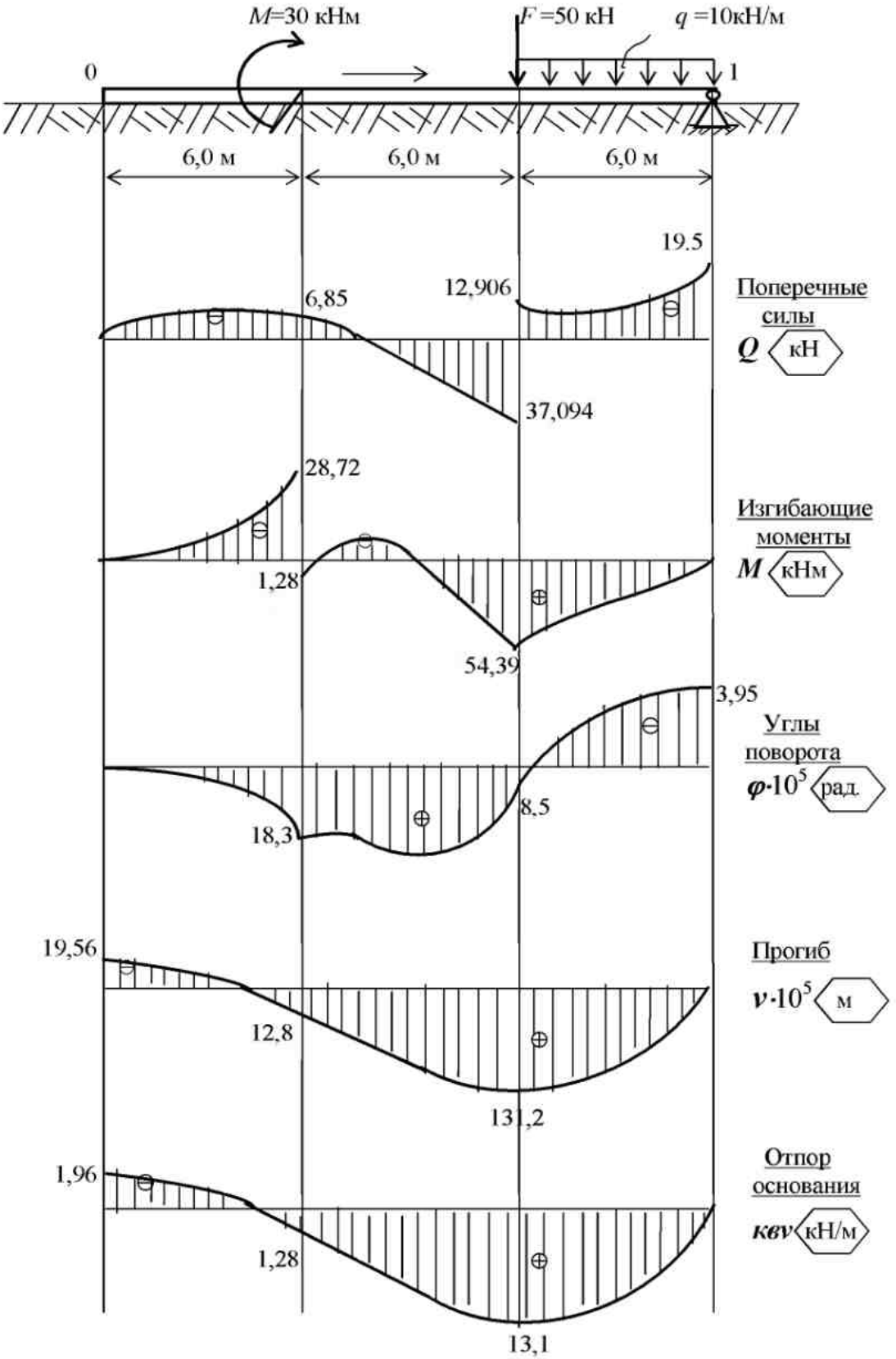

M=30 кНм
F=50 кН
q=10кН/м
0
1
6,0 м
6,0 м
6,0 м
19.5
12,906
6,85
37,094
Поперечные силы
Q кН
28,72
1,28
54,39
Изгибающие моменты
M кНм
3,95
8,5
18,3
Углы поворота
φ·10^5 рад
19,56
12,8
131,2
Прогиб
v·10^5 м
1,96
1,28
13,1
Отпор основания
квv кН/м

Рисунок 5.35

Пример 5.21

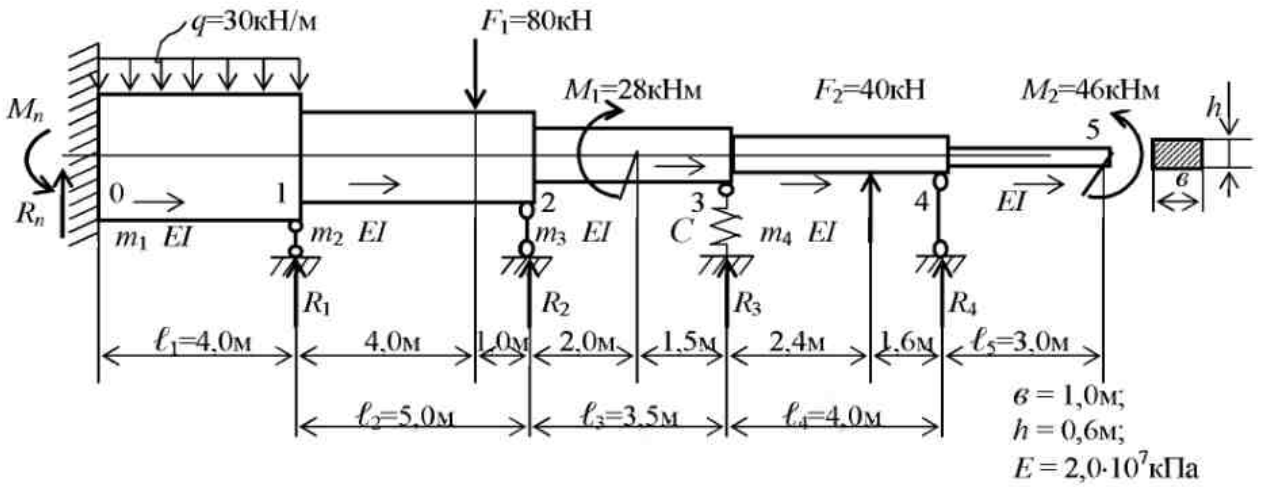


Рисунок 5.36

В данной расчетной схеме жесткость балки изменяется скачкообразно при $m_1 = 12$; $m_2 = 10$; $m_3 = 8$; $m_4 = 6$; расстояние между опорами ℓ_1=4,0м; ℓ_2=5,0м; ℓ_3=3,5м; ℓ_4=4,0м; ℓ_5=3,0м; вся длина ℓ=19,5м; третья промежуточная опора имеет упругую связь с жесткостью $C = 15EI/L^3$ кН/м, где L = 1,0м.

Напряженно-деформированное состояние определим по алгоритму МГЭ.

1 Разбиваем балку на 5 стержней, нумеруем узлы, стрелками указываем начало и конец каждого стержня.

2 Формируем матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{B}$, в которых учитываем краевые условия, уравнения совместности перемещений и равновесия узлов, скачкообразное изменение жесткости и податливость третьей опоры балки.

Очевидно, что перемещение точки 3 связано с реакцией R_3 и жесткостью опоры C зависимостями:

$$v_{(\ell)}^{2-3} = v_{(0)}^{3-4} = -\frac{R_3}{C} = -\frac{R_3 \cdot L^3}{15EI}; \qquad R_3 = -Q_{(\ell)}^{2-3} + Q_{(0)}^{3-4};$$

$$v_{(\ell)}^{2-3} = v_{(0)}^{3-4} = \frac{Q_{(\ell)}^{2-3} - Q_{(0)}^{3-4}}{15EI} \cdot L^3.$$

Из матрицы $\boldsymbol{X}_*$ следует, что необходимо обнулить в матрице $\boldsymbol{A}_*$ 1, 2, 5, 9, 13 и 17 столбцы, так как равны нулю параметры балки в соответствующих строках.

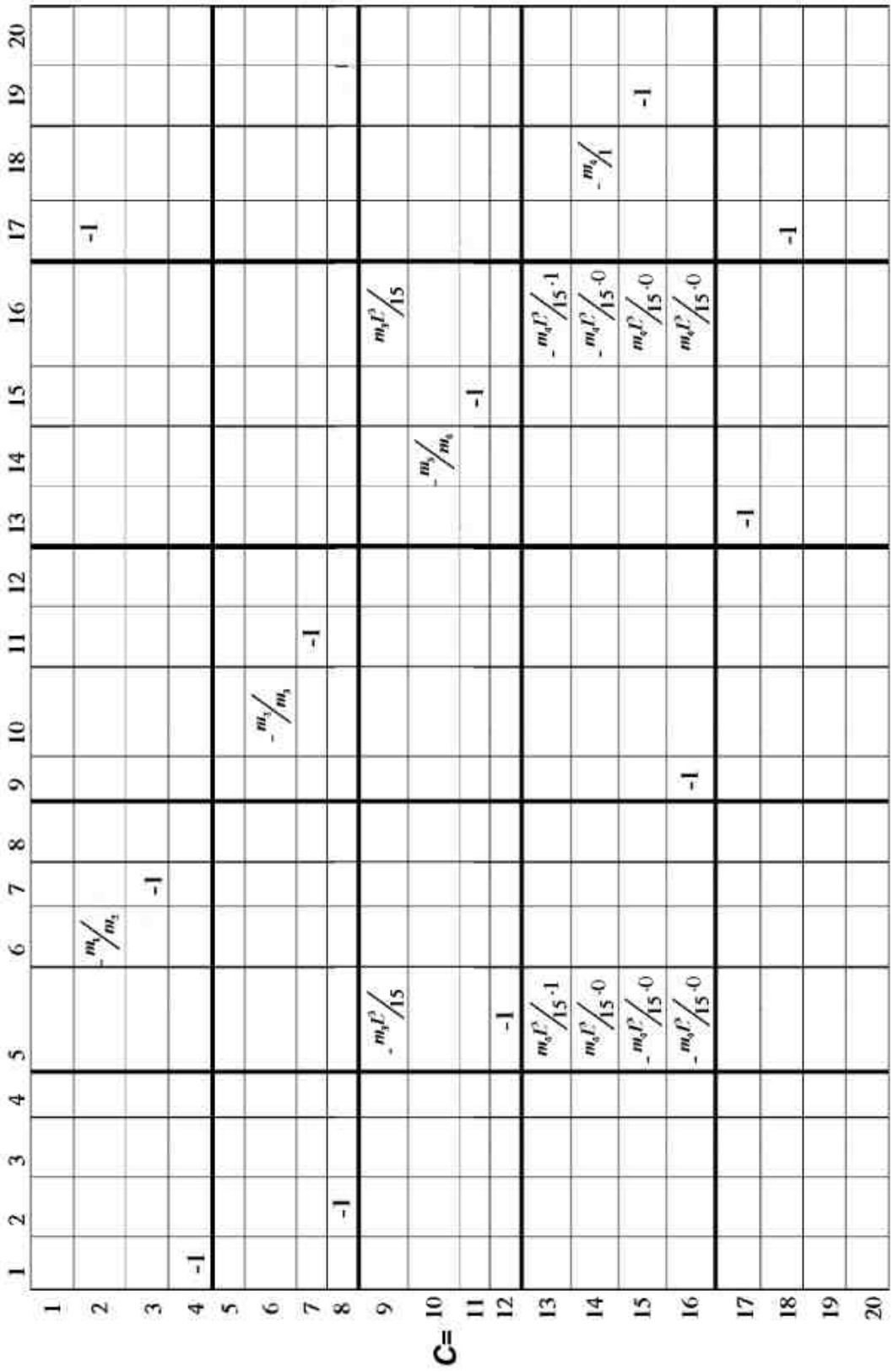
В нулевые строки матрицы $\boldsymbol{X}_*$ переносим независимые параметры матрицы $\boldsymbol{Y}$ $Q^{0\text{-}1}(\ell)$, $Q^{1\text{-}2}(\ell)$, $Q^{2\text{-}3}(\ell)$, $Q^{3\text{-}4}(\ell)$, $EIv^{4\text{-}5}(\ell)$ и $EI\varphi^{4\text{-}5}(\ell)$. Столбцы фундаментальных функций, связанных с перемещением $m_4 EIv^{3\text{-}4}(0)$, переносим в 5 столбец (связанный с $Q^{2\text{-}3}(\ell)$) и 16 (связанный с $Q^{3\text{-}4}(0)$) с учетом коэффициента $m_4 L^3/15$.

Зависимые параметры матрицы $\boldsymbol{Y}$ переносим по уравнениям их связи.

$$
X_*=\begin{array}{|c|c|}
\hline
1 & m_1EIv_{(0)}^{0-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{0-1} \\ \hline
2 & m_1EI\varphi_{(0)}^{0-1}=0;\ Q_{(\ell)}^{1-2} \\ \hline
3 & M_{(0)}^{0-1}; \\ \hline
4 & Q_{(0)}^{0-1} \\ \hline
5 & m_2EIv_{(0)}^{1-2}=0;\ Q_{(\ell)}^{2-3} \\ \hline
6 & m_2EI\varphi_{(0)}^{1-2} \\ \hline
7 & M_{(0)}^{1-2} \\ \hline
8 & Q_{(0)}^{1-2} \\ \hline
9 & m_3EIv_{(0)}^{2-3}=0;\ Q_{(\ell)}^{3-4} \\ \hline
10 & m_3EI\varphi_{(0)}^{2-3} \\ \hline
11 & M_{(0)}^{2-3} \\ \hline
12 & Q_{(0)}^{2-3} \\ \hline
13 & m_4EIv_{(0)}^{3-4}=\dfrac{m_4L^3}{15}\left[Q_{(\ell)}^{2-3}-Q_{(0)}^{3-4}\right];EIv_{(\ell)}^{4-5} \\ \hline
14 & m_4EI\varphi_{(0)}^{3-4} \\ \hline
15 & M_{(0)}^{3-4} \\ \hline
16 & Q_{(0)}^{3-4} \\ \hline
17 & EIv_{(0)}^{4-5}=0;\ EI\varphi_{(\ell)}^{4-5} \\ \hline
18 & EI\varphi_{(0)}^{4-5} \\ \hline
19 & M_{(0)}^{4-5} \\ \hline
20 & Q_{(0)}^{4-5} \\ \hline
\end{array}
;\ Y=
\begin{array}{|c|c|}
\hline
1 & m_1EIv_{(\ell)}^{0-1}=0 \\ \hline
2 & m_1EI\varphi_{(\ell)}^{0-1}=m_1EI\varphi_{(0)}^{1-2} \\ \hline
3 & M_{(\ell)}^{0-1}=M_{(0)}^{1-2} \\ \hline
4 & Q_{(\ell)}^{0-1} \\ \hline
5 & m_2EIv_{(\ell)}^{1-2}=0 \\ \hline
6 & m_2EI\varphi_{(\ell)}^{1-2}=m_2EI\varphi_{(0)}^{2-3} \\ \hline
7 & M_{(\ell)}^{1-2}=M_{(0)}^{2-3} \\ \hline
8 & Q_{(\ell)}^{1-2} \\ \hline
9 & m_3EIv_{(\ell)}^{2-3}=\dfrac{m_3L^3}{15}\left[Q_{(\ell)}^{2-3}-Q_{(0)}^{3-4}\right] \\ \hline
10 & m_3EI\varphi_{(\ell)}^{2-3}=m_3EI\varphi_{(0)}^{3-4} \\ \hline
11 & M_{(\ell)}^{2-3}=M_{(0)}^{3-4} \\ \hline
12 & Q_{(\ell)}^{2-3} \\ \hline
13 & m_4EIv_{(\ell)}^{3-4}=0 \\ \hline
14 & m_4EI\varphi_{(\ell)}^{3-4}=m_4EI\varphi_{(0)}^{4-5} \\ \hline
15 & M_{(\ell)}^{3-4}=M_{(0)}^{4-5} \\ \hline
16 & Q_{(\ell)}^{3-4} \\ \hline
17 & EIv_{(\ell)}^{4-5} \\ \hline
18 & EI\varphi_{(\ell)}^{4-5} \\ \hline
19 & M_{(\ell)}^{4-5}=0 \\ \hline
20 & Q_{(\ell)}^{4-5}=0 \\ \hline
\end{array}
\qquad (5.20)
$$

Топологическая матрица C балки примет вид, представленный далее (5.21).

$C=$



(5.21)

Накладывая эту матрицу на обнуленную матрицу A_0, получаем матрицу A_1. Разрешающееее уравнение МГЭ балки примет вид:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
1			$-\ell_1^2/2$	$-\ell_1^3/6$																	$Q_{(\ell)}^{0-1}$	$-q\ell_1^4/24$
2			$-\ell_1$	$-\ell_1^2/2$		$-m_3/m_2$															$Q_{(\ell)}^{1-2}$	$-q\ell_1^4/6$
3			1	ℓ_1			-1														$M_{(0)}^{0-1}$	$q\ell_1^4/2$
4	-1			1																	$Q_{(0)}^{0-1}$	$q\ell_1$
5						ℓ_2	$-\ell_2^2/2$	$-\ell_2^3/6$													$Q_{(\ell)}^{2-3}$	$-F_1(\ell_2-aF1)^3/6$
6						1	$-\ell_2$	$-\ell_2^2/2$		$-m_3/m_4$											$m_3EI\varphi_{(0)}^{1-2}$	$-F_1(\ell_2-aF1)^2/2$
7							1	ℓ_2			-1										$M_{(0)}^{1-2}$	$F_1(\ell_2-aF1)$
8		-1						1					-1								$Q_{(0)}^{1-2}$	F_1
9					$-m_2L/15$					ℓ_3	$-\ell_3^2/2$	$-\ell_3^3/6$				$m_3L/15$					$Q_{(\ell)}^{3-4}$	$-M_1(\ell_3-aM1)^2/2$
10										1	$-\ell_3$	$-\ell_3^2/2$		$-m_3/m_4$							$m_3EI\varphi_{(0)}^{2-3}$	$-M_1(\ell_3-aM1)$
11											1	ℓ_3			-1						$M_{(0)}^{2-3}$	M_1
12					-1							1									$Q_{(0)}^{2-3}$	
13					$m_4L/15$									ℓ_4	$-\ell_4^2/2$	$-\ell_4^3/6-m_4L^3/15$					$EIv_{(\ell)}^{4-5}$	$-F_2(\ell_4-aF2)^3/6$
14														1	$-\ell_4$	$-\ell_4^2/2$		$-m_4$			$m_4EI\varphi_{(0)}^{3-4}$	$-F_2(\ell_4-aF1)^2/2$
15															1	ℓ_4			-1		$M_{(0)}^{3-4}$	$F_2(\ell_4-aF2)$
16									-1							1					$Q_{(0)}^{3-4}$	F_2
17													-1					ℓ_5	$-\ell_5^2/2$	$-\ell_5^3/6$	$EI\varphi_{(\ell)}^{4-5}$	$-M_2(\ell_5-aM2)^2/2$
18																	-1	1	$-\ell_5$	$-\ell_5^2/2$	$EI\varphi_{(0)}^{4-5}$	$-M_2(\ell_2-aM2)$
19																			1	ℓ_5	$M_{(0)}^{4-5}$	M_2
20																				1	$Q_{(0)}^{4-5}$	

(5.22)

Решением уравнения (5.22) определяются граничные параметры балки, а напряженно-деформированное состояние во внутренних точках вычисляется по уравнениям метода начальных параметров. Поскольку каждый стержень балки имеет свою жесткость, то эпюры кинематических параметров удобно строить, используя собственные начальные параметры, а эпюры статических параметров можно строить, используя начальные параметры в заделке, т.е. $M^{0\text{-}1}(0)$ и $Q^{0\text{-}1}(0)$.

Текст программы с комментариями

$n = 20$; $a = zeros(n,n)$; $X = zeros(n,1)$; $в1 = zeros(n,1)$.

% Исходные данные краевой задачи

$\ell1$=4.0; $\ell2$=5.0; $\ell3$=3.5; $\ell4$=4.0; $\ell5$=3.0; L=1.0; ℓ=19.5; q=30.0; $F1$=80.0; $M1$=–28.0; $F2$= –40.0; $M2$=46.0; $m1$=12.0; $m2$=10.0; $m3$=8.0; $m4$=6.0; E=2.0e+7; $в$=1.0; h=0.6; I= $в$*h^3/12; EI=E*I; $aF1$=4.0; $aM1$=2.0; $aF2$=2.4; $aM2$=3.0;

% Ввод матриц $a(n,n)$, $в1(n,1)$ с помощью операторов присваивания

$a(1,3) = -\ell1^2/2$; $a(1,4) = -\ell1^3/6$; $a(2,3) = -\ell1$; $a(2,4) = -\ell1^2/2$;
$a(2,6) = -m1/m2$; $a(3,3) = 1$; $a(3,4) = \ell1$; $a(3,7) = -1$; $a(4,1) = -1$; $a(4,4) = 1$;
$a(5,6) = \ell2$; $a(5,7) = -\ell2^2/2$; $a(5,8) = -\ell2^3/6$; $a(6,6) = 1$; $a(6,7) = -\ell2$;
$a(6,8) = -\ell2^2/2$; $a(6,10) = -m2/m3$; $a(7,7) = 1$; $a(7,8) = \ell2$; $a(7,11) = -1$;
$a(8,2) = -1$; $a(8,8) = 1$; $a(9,5) = -m3*L^3/15$; $a(9,10) = \ell3$; $a(9,11) = -\ell3^2/2$;
$a(9,12) = -\ell3^3/6$; $a(9,16) = -m3*L^3/15$; $a(10,10) = 1$; $a(10,11) = -\ell3$;
$a(10,12) = -\ell3^2/2$; $a(10,14) = -m3/m4$; $a(11,11) = 1$; $a(11,12) = \ell3$;
$a(11,15) = -1$; $a(12,5) = -1$; $a(12,12) = 1$; $a(13,5) = m4*L^3/15$; $a(13,14) = \ell4$;
$a(13,15) = -\ell4^2/2$; $a(13,16) = -\ell4^3/6 - m4*L^3/15$; $a(14,14) = 1$; $a(14,15) = -\ell4$;
$a(14,16) = -\ell4^2/2$; $a(14,18) = -m4$; $a(15,15) = 1$; $a(15,16) = \ell4$; $a(15,19) = -1$;
$a(16,9) = -1$; $a(16,16) = 1$; $a(17,13) = -1$; $a(17,18) = \ell5$; $a(17,19) = -\ell5^2/2$;
$a(17,20) = -\ell5^3/6$; $a(17,18) = -1$; $a(18,18) = 1$; $a(18,19) = -\ell5$;
$a(18,20) = -\ell5^2/2$; $a(19,19) = 1$; $a(19,20) = \ell5$; $a(20,20) = 1$;

$в1(1,1) = -q*\ell1^4/24$; $в1(2,1) = -q*\ell1^3/6$; $в1(3,1) = q*\ell1^2/2$; $в1(4,1) = q*\ell1$;
$в1(5,1) = -F1*(\ell2-aF1)^3/6$; $в1(6,1) = -F1*(\ell2-aF1)^2/2$;
$в1(7,1) = F1*(\ell2-aF1)$; $в1(8,1) = F1$;
$в1(9,1) = -M1*(\ell3-aM1)^2/2$; $в1(10,1) = -M1*(\ell3-aM1)$; $в1(11,1) = M1$;
$в1(13,1) = -F2*(\ell4-aF2)^3/6$; $в1(14,1) = -F2*(\ell4-aF2)^2/2$;
$в1(15,1) = F2*(\ell4-aF2)$; $в1(16,1) = F2$;
$в1(17,1) = -M2*(\ell5-aM2)^2/2$; $в1(18,1) = -M2*(\ell5-aM2)$; $в1(19,1) = M2$;

% Решение системы уравнений и вывод граничных параметров

$X = a \backslash в1$

% Вычисление и вывод реакций опор балки

$M_н = X(3,1)$ $R1 = -X(1,1) + X(8,1)$ $R3 = -X(5,1) + X(16,1)$
$R_н = X(4,1)$ $R2 = -X(2,1) + X(12,1)$ $R4 = -X(9,1) + X(20,1)$

```
% Начальные параметры балки и нагрузка стержней балки
% EIvn=0.0;  EIfin=0.0;  MN=Mn;  QN=Rn;  F=0.0;  M=0.0;  aF=0.0;  aM=0.0;
% ℓℓ=ℓ1;  m11=m1;
% EIvn=0.0;  EIfin=X(6,1)/(m2*EI);  MN=X(7,1);  QN=X(8,1);
% F=F1;  M=0.0;  aF=aF1;  aM=0.0;  q=0.0;  ℓℓ=ℓ2;  m11=m2;
% EIvn=0.0;  EIfin=X(10,1)/(m3*EI);  MN=X(11,1);  QN=X(12,1);
% F=0.0;  M=M1;  q=0.0;  aF=0.0;  aM=aM1;  ℓℓ=ℓ3;  m11=m3;
% EIvn=(X(5,1)-X(16,1))*L^3/(15*EI);  EIfin=X(14,1)/(m4*EI);  ℓℓ=ℓ4;
% MN=X(15,1);  QN=X(16,1);  F=F2;  M=0.0;  q=0.0;  aF=aF2;  aM=0.0;  m11=m4;
% EIvn=0.0;  EIfin=X(18,1)/EI;  MN=X(19,1);  QN=X(20,1);  ℓℓ=ℓ5;
% F=0.0;  M=M2;  q=0.0;  aF=0.0;  aM=aM2;  m11=1.0;

% Построение эпюр прогибов и углов поворота стержней балки
n1=8;  EIv=zeros(n1+1,1);  EIfi=zeros(n1+1,1);  X1=zeros(n1+1,1);  x=0.0;  dx=ℓℓ/n1;

    for  m=1:n1+1
    X1(m,1)=x;
EIv(m,1)=-(EIvn+EIfin*x-MN*x^2/(2*m11*EI)-QN*x^3/(6*m11*EI)+...
q*x^4/(24*m11*EI)+M*(x-aM)^2*H(x-aM)/(2*m11*EI)+...
F*(x-aF)^3*H(x-aF)/(6*m11*EI));
EIfi(m,1)=-(EIfin-MN*x/(m11*EI)-QN*x^2/(2*m11*EI)+q*x^3/(6*m11*EI)+...
+M*(x-aM)*H(x-aM)/(m11*EI)+F*(x-aF)^2*H(x-aF)/(2*m11*EI));
    x=x+dx;    end
% stem(X1, EIv, 'filled');  axis([0  ℓℓ  -8e-6  8e-6]);  grid on
% stem(X1, EIfi, 'filled');  axis([0  ℓℓ  -8e-6  8e-6]);  grid on

% Вывод таблицы значений прогибов и углов поворота стержней рамы
[X1  -EIfi  -EIv]

% Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил балки
n1=39;  Me=zeros(n1+1,1);  Qe=zeros(n1+1,1);  x=0.0;  dx=ℓ/n1;
LM1=11.0; LM2=19.5; LF1=8.0; LF2=14.9; LR1=4.0; LR2=9.0; LR3=12.5; LR4=16.5; q=30.0;
    for  m=1:n1+1
    X1(m,1)=x;
Me(m,1)=-(Mn+Rn*x-q*x^2/2+q*(x-ℓ1)^2*H(x-ℓ1)/2-...
F1*(x-LF1)*H(x-LF1)-F2*(x-LF2)*H(x-LF2)-M1*H(x-LM1)-21*H(x-LM2)+...
R1*(x-LR1)*H(x-LR1)+R2*(x-LR2)*H(x-LR2)+R3*(x-LR3)*H(x-LR3)+...
R4*(x-LR4)*H(x-LR4));
Qe(m,1)=-(Rn-q*x+q*(x-ℓ1)*H(x-ℓ1)-F1*H(x-LF1)-F2*H(x-LF2)+...
R1*H(x-LR1)+R2*H(x-LR2)+R3*H(x-LR3)+R4*H(x-LR4));
    x=x+dx;    end
% stem(X1, Qe, 'filled');  axis([0  ℓℓ  -100  100]);  grid on
% stem(X1, Me, 'filled');  axis([0  ℓℓ  -60  60]);  grid on
```

% Вывод таблицы значений изгибающих моментов и поперечных сил балки

$[X1 \quad -Qe \quad -Me]$

Результаты решения краевой задачи, вычисления параметров состояния стержней балки и построения эпюр представлены в таблицах 5.29, 5.30 и на рисунке 5.37. Сумма реакций балки R_n=63,0685кН; $R1$=75,028кН; $R2$=62,0025кН; $R3$=–6,3894кН; $R4$=–33,731кН точно равна равнодействующей внешних сил R=160,0кН, что косвенно свидетельствует о точности и достоверности расчета.

Таблица 5.29

1	$Q_{(\ell)}^{0-1} = X(1,1) = -56{,}932$ кН	11	$M_{(0)}^{2-3} = X(11,1) = -21{,}342$ кНм
2	$Q_{(\ell)}^{1-2} = X(2,1) = -61{,}905$ кН	12	$Q_{(0)}^{2-3} = X(12,1) = 0{,}12003$ кН
3	$M_{(0)}^{0-1} = X(3,1) = -44{,}090$ кНм	13	$EIv_{(\ell)}^{4-5} = X(13,1) = -219{,}87$ кНм^3
4	$Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1) = 63{,}0680$ кН	14	$m_4 EI\varphi_{(0)}^{3-4} = X(14,1) = 3{,}6246$ кНм^2
5	$Q_{(\ell)}^{2-3} = X(5,1) = 0{,}12003$ кН	15	$M_{(0)}^{3-4} = X(15,1) = 7{,}0777$ кНм
6	$m_2 EI\varphi_{(0)}^{1-2} = X(6,1) = -6{,}8173$ кНм^2	16	$Q_{(0)}^{3-4} = X(16,1) = -6{,}2694$ кН
7	$M_{(0)}^{1-2} = X(7,1) = -31{,}819$ кНм	17	$EI\varphi_{(\ell)}^{4-5} = X(17,1) = -142{,}29$ кНм^2
8	$Q_{(0)}^{1-2} = X(8,1) = 18{,}095$ кН	18	$EI\varphi_{(0)}^{4-5} = X(18,1) = -4{,}2885$ кНм^2
9	$Q_{(\ell)}^{3-4} = X(9,1) = 33{,}731$ кН	19	$M_{(0)}^{4-5} = X(19,1) = 46{,}0000$ кНм
10	$m_3 EI\varphi_{(0)}^{2-3} = X(10,1) = -27{,}131$ кНм^2	20	$Q_{(0)}^{4-5} = X(20,1) = 0.0$ кН

Таблица 5.30

Глобальная координата, м	Локальная координата, м	Параметры напряженно-деформированного состояния стержней балки			
		Поперечная сила Q, кН Вектор Qe	Изгибающий момент M, кНм Вектор Me	Угол поворота φ, рад. Вектор $Elfi$	Прогиб v, м Вектор Elv
1	2	3	4	5	6
стержень 0 – 1					
0,0	0,0	63,068	-44,090	0.0	0.0
0,5	0,5	48,068	-16,307	$3{,}4229 \cdot 10^{-6}$	$9{,}8970 \cdot 10^{-7}$
1,0	1,0	33,068	3,9774	$4{,}0640 \cdot 10^{-6}$	$2{,}9592 \cdot 10^{-6}$
1,5	1,5	18,068	16,761	$2{,}7915 \cdot 10^{-6}$	$4{,}7348 \cdot 10^{-6}$
2,0	2,0	3,0678	22,045	$4{,}7343 \cdot 10^{-7}$	$5{,}5765 \cdot 10^{-6}$
2,5	2,5	-11,932	19,829	$-2{,}0222 \cdot 10^{-6}$	$5{,}1786 \cdot 10^{-6}$
3,0	3,0	-26,932	10,113	$-3{,}8273 \cdot 10^{-6}$	$3{,}6694 \cdot 10^{-6}$
3,5	3,5	-41,932	-7,1031	$-4{,}0738 \cdot 10^{-6}$	$1{,}6111 \cdot 10^{-6}$
4,0	4,0	-56,932	-31,819	$-1{,}8937 \cdot 10^{-6}$	0.0

Продолжение таблицы 5.30

1	2	3	4	5	6
стержень 1 – 2					
4,0	0,0	18,095	-31,819	$-1{,}8937\cdot10^{-6}$	0,0
4,5	0,5	18,095	-22,772	$1{,}8973\cdot10^{-6}$	$5{,}3260\cdot10^{-8}$
5,0	1,0	18,095	-13,724	$4{,}4317\cdot10^{-6}$	$1{,}6879\cdot10^{-6}$
5,5	1,5	18,095	-4,6762	$5{,}7095\cdot10^{-6}$	$4{,}2755\cdot10^{-6}$
6,0	2,0	18,095	4,3715	$5{,}7306\cdot10^{-6}$	$7{,}1879\cdot10^{-6}$
6,5	2,5	18,095	13,419	$4{,}4952\cdot10^{-6}$	$9{,}7967\cdot10^{-6}$
7,0	3,0	18,095	22,467	$2{,}0031\cdot10^{-6}$	$1{,}1474\cdot10^{-5}$
7,5	3,5	18,095	31,515	$-1{,}7456\cdot10^{-6}$	$1{,}1590\cdot10^{-5}$
8,0	4,0	18,095 -61,899	40,561	$-6{,}7509\cdot10^{-6}$	$9{,}5186\cdot10^{-6}$
8,5	4,5	-61,905	9,6099	$-1{,}0235\cdot10^{-5}$	$5{,}0930\cdot10^{-6}$
9,0	5,0	-61,905	-21,342	$-9{,}4203\cdot10^{-6}$	0,0
стержень 2 – 3					
9,0	0,0	0,12003	-21,342	$-9{,}4203\cdot10^{-6}$	0,0
9,5	0,5	0,12003	-21,282	$-5{,}7203\cdot10^{-6}$	$-3{,}7847\cdot10^{-6}$
10,0	1,0	0,12003	-21,222	$-2{,}0306\cdot10^{-6}$	$-5{,}7220\cdot10^{-6}$
10,5	1,5	0,12003	-21,162	$1{,}6486\cdot10^{-6}$	$-5{,}8171\cdot10^{-6}$
11,0	2,0	0,12003	-21,1024 6,8976	$5{,}3174\cdot10^{-6}$	$-4{,}0751\cdot10^{-6}$
11,5	2,5	0,12003	6,9576	$4{,}1147\cdot10^{-6}$	$-1{,}7166\cdot10^{-6}$
12,0	3,0	0,12003	7,0176	$2{,}9016\cdot10^{-6}$	$3{,}7882\cdot10^{-8}$
12,5	3,5	0,12003	7,0777	$1{,}6781\cdot10^{-6}$	$1{,}1832\cdot10^{-6}$
стержень 3 – 4					
12,5	0,0	-6,2694	7,0777	$1{,}6781\cdot10^{-6}$	$1{,}1832\cdot10^{-6}$
13,0	0,5	-6,2694	3,9429	$4{,}0252\cdot10^{-7}$	$1{,}6731\cdot10^{-6}$
13,5	1,0	-6,2694	0,80824	$-1{,}4739\cdot10^{-7}$	$1{,}7067\cdot10^{-6}$
14,0	1,5	-6,2694	-2,3265	$2{,}8335\cdot10^{-8}$	$1{,}6467\cdot10^{-6}$
14,5	2,0	-6,2694	-5,4612	$9{,}2968\cdot10^{-7}$	$1{,}8560\cdot10^{-6}$
15,0	2,5	33,731	-4,5959	$2{,}4641\cdot10^{-6}$	$2{,}6942\cdot10^{-6}$
15,5	3,0	33,731	12,269	$1{,}5759\cdot10^{-6}$	$3{,}8669\cdot10^{-6}$
16,0	3,5	33,731	29,135	$-3{,}2162\cdot10^{-6}$	$3{,}6195\cdot10^{-6}$
16,5	4,0	33,731	46,000	$-1{,}1912\cdot10^{-5}$	$6{,}7763\cdot10^{-21}\approx 0$
стержень 4 – 5					
16,5	0,0	$-7{,}1054\cdot10^{-15}\approx 0$	46,000	$-1{,}1912\cdot10^{-5}$	0,0
17,0	0,5	0,0	46,000	$-7{,}5801\cdot10^{-5}$	$-2{,}1928\cdot10^{-5}$
17,5	1,0	0,0	46,000	$-1{,}3969\cdot10^{-4}$	$-7{,}5801\cdot10^{-5}$
18,0	1,5	0,0	46,000	$-2{,}0358\cdot10^{-4}$	$-1{,}6162\cdot10^{-4}$
18,5	2,0	0,0	46,000	$-2{,}6747\cdot10^{-4}$	$-2{,}7938\cdot10^{-4}$
19,0	2,5	0,0	46,000	$-3{,}3136\cdot10^{-4}$	$-4{,}2909\cdot10^{-4}$
19,5	3,0	0,0	$-1{,}7053\cdot10^{-13}\approx 0$	$-3{,}9525\cdot10^{-4}$	$-6{,}1074\cdot10^{-4}$

Эпюры напряженно-деформированного состояния балки (пример 5.21)

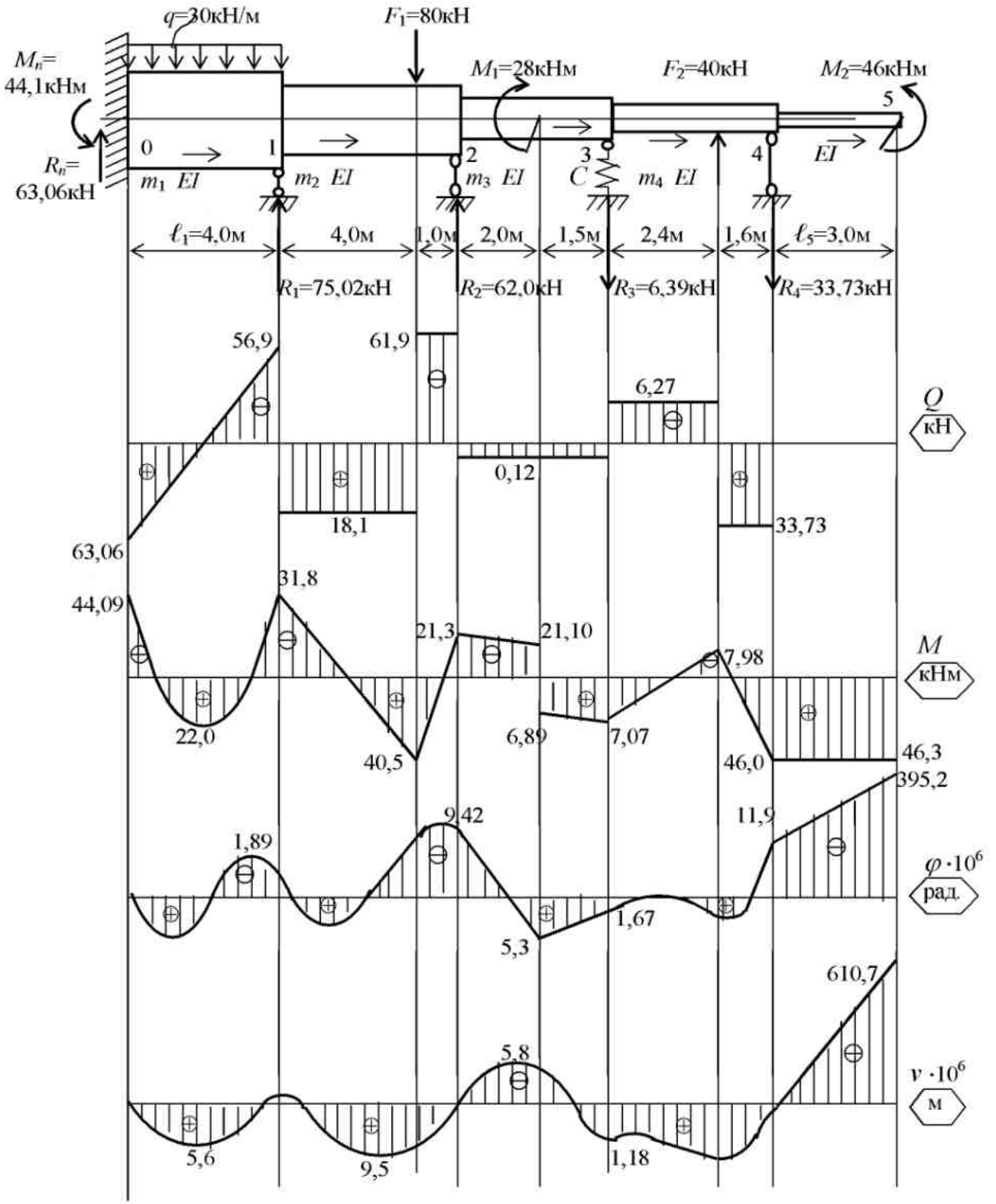


Рисунок 5.37

Пример 5.22. Определить интенсивность реакции упругого основания, внутренние усилия и перемещения в балке кусочно-постоянной жесткости (см. рисунок 5.38).

Примем, что коэффициент постели упругого основания изменяется между опорами скачкообразно: стержень 0-1 – $\kappa_1 = 1\cdot10^4$ кн/м^3; 1-2 – $\kappa_2 = 2\cdot10^4$ кн/м^3; 2-3 – $\kappa_3 = 3\cdot10^4$ кн/м^3; 3- 4 – $\kappa_4 = 4\cdot10^4$ кн/м^3; 4-5 – $\kappa_5 = 5\cdot10^5$ кн/м^3. Данные условия приводят к тому, что каждый участок балки будет иметь свое значение коэффициента λ (5.13). Задача статики балки без упругого основания решена в примере 5.21. Чтобы учесть упругое основание, достаточно заменить фундаментальные функции изгиба на фундаментальные функции модели, представленной уравнением (5.14). Это связано с тем, что внутреннее содержание матриц $\boldsymbol{X}_*$, $\boldsymbol{Y}$ (5.20) и $\boldsymbol{C}$ (5.21) двух расчетных схем одинаково.

Матричное уравнение типа (5.22) этого примера примет вид, представленный далее. В уравнении (5.22) элементы матрицы $\boldsymbol{A}_*$, обозначенные малыми буквами, определяются формулами:

$$a_{14} = A_{14} + \frac{m_4 L^3}{15} A_{11}; \qquad a_{13} = A_{13} + \frac{m_4 L^3}{15} A_{21};$$

$$a_{12} = A_{24} + \frac{m_4 L^3}{15} A_{31}; \qquad a_{11} = A_{11} + \frac{m_4 L^3}{15} A_{41}.$$

Незначительно изменится и программа. В нее необходимо ввести фундаментальные функции уравнения (5.14).

Текст программы

$n = 20$; $a = zeros(n,n)$; $X = zeros(n,1)$; $в1 = zeros(n,1)$.

% Исходные данные краевой задачи

$\ell1$=4.0; $\ell2$=5.0; $\ell3$=3.5; $\ell4$=4.0; $\ell5$=3.0; L=1.0; ℓ=19.5; q=30.0; $F1$=80.0; $M1$=–28.0; $F2$= –40.0; $M2$=46.0; $m1$=12.0; $m2$=10.0; $m3$=8.0; $m4$=6.0; E=2.0e+7; $в$=1.0; h=0.6; $I = в*h\hat{}3/12$; $EI = E*I$; $aF1$=4.0; $aM1$=2.0; $aF2$=2.4; $aM2$=3.0; $к1$=1.0e+4; $к2$=2.0e+4; $к3$=3.0e+4; $к4$=4.0e+4; $к5$=5.0e+4;

$\ell a1 = (k1 * в/(4 * m1 * EI))\hat{}\,0.25$; $\ell a2 = (k2 * в/(4 * m2 * EI))\hat{}\,0.25$;

$\ell a3 = (k3 * в/(4 * m3 * EI))\hat{}\,0.25$; $\ell a4 = (k4 * в/(4 * m4 * EI))\hat{}\,0.25$;

$\ell a5 = (k5 * в/(4 * EI))\hat{}\,0.25$;

% Ввод матриц $a(n,n)$, $в1(n,1)$ с помощью операторов присваивания

$a(1,3) = -A13(\ell a1,\ell1)$; $a(1,4) = -A14(\ell a1,\ell1)$; $a(2,3) = -A12(\ell a1,\ell1)$; $a(2,4) = a(1,3)$;
$a(2,3) = -m1/m2$; $a(3,3) = -A11(\ell a1,\ell1)$; $a(3,4) = -a(2,3)$; $a(3,7) = -1$; $a(4,1) = -1$;
$a(4,3) = a(3,4)$; $a(4,4) = a(3,3)$; $a(5,6) = A12(\ell a2,\ell2)$; $a(5,7) = -A13(\ell a2,\ell2)$;
$a(5,8) = -A14(\ell a2,\ell2)$; $a(6,6) = A11(\ell a2,\ell2)$; $a(6,7) = -a(5,6)$; $a(6,8) = a(5,7)$;
$a(6,10) = -m2/m3$; $a(7,6) = -A21(\ell a2,\ell2)$; $a(7,7) = a(6,6)$; $a(7,8) = a(5,6)$; $a(7,11) = -1$;
$a(8,6) = -A31(\ell a2,\ell2)$; $a(8,7) = -a(7,6)$; $a(8,8) = a(6,6)$; $a(9,5) = -m3*L\hat{}3/15$;
$a(9,10) = A12(\ell a3,\ell3)$; $a(9,11) = -A13(\ell a3,\ell3)$; $a(9,12) = -A14(\ell a3,\ell3)$; $a(9,16) = m3*L\hat{}3/15$;

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$																	$Q_{(l)}^{0-1}$	$-B_{11}^{0-1}$
2			$-A_{12}$	$-A_{13}$		$-m_3/m_2$															$Q_{(l)}^{1-2}$	$-B_{21}^{0-1}$
3			A_{11}	A_{12}			-1														$M_{(0)}^{0-1}$	B_{31}^{0-1}
4	-1		A_{21}	A_{11}																	$Q_{(0)}^{0-1}$	B_{41}^{0-1}
5						A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$													$Q_{(l)}^{2-3}$	$-B_{11}^{1-2}$
6						A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		$-m_3/m_3$											$m_2 EI\varphi_{(0)}^{1-2}$	$-B_{21}^{1-2}$
7						$-A_{21}$	A_{11}	A_{12}			-1										$M_{(0)}^{1-2}$	B_{31}^{1-2}
8		-1				$-A_{31}$	A_{21}	A_{11}													$Q_{(0)}^{1-2}$	B_{41}^{1-2}
9					$-m_3 l^3/15$					A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$				$m_3 l^3/15$					$Q_{(l)}^{3-4}$	$-B_{11}^{2-3}$
10										A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		$-m_3/m_4$							$m_3 EI\varphi_{(0)}^{2-3}$	$-B_{21}^{2-3}$
11										$-A_{21}$	A_{11}	A_{12}			-1						$M_{(0)}^{2-3}$	B_{31}^{2-3}
12					-1					$-A_{31}$	A_{21}	A_{11}									$Q_{(0)}^{2-3}$	B_{41}^{2-3}
13					$m_4 l^3/15 \cdot A_{11}$									A_{12}	$-A_{13}$	$-a_{14}$					$EIv_{(l)}^{4-5}$	$-B_{11}^{3-4}$
14					$m_4 l^3/15 \cdot A_{21}$									A_{11}	$-A_{12}$	$-a_{13}$		$-m_4$			$m_4 EI\varphi_{(0)}^{3-4}$	$-B_{21}^{3-4}$
15					$-m_4 l^3/15 \cdot A_{31}$									$-A_{21}$	A_{11}	a_{12}			-1		$M_{(0)}^{3-4}$	B_{31}^{3-4}
16					$-m_4 l^3/15 \cdot A_{41}$				-1					$-A_{31}$	A_{21}	a_{11}					$Q_{(0)}^{3-4}$	B_{41}^{3-4}
17													-1					A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$EI\varphi_{(l)}^{4-5}$	$-B_{11}^{4-5}$
18																	-1	A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	$EI\varphi_{(0)}^{4-5}$	$-B_{21}^{4-5}$
19																		$-A_{21}$	A_{11}	A_{12}	$M_{(0)}^{4-5}$	B_{31}^{4-5}
20																		$-A_{31}$	A_{21}	A_{11}	$Q_{(0)}^{4-5}$	B_{41}^{4-5}

(5.23)

a(10,10)= A11(ℓa3,ℓ3); a(10,11)= –a(9,10); a(10,12)= a(9,11); a(9,16)= –m3/m4;
a(11,10)= –A21(ℓa3,ℓ3); a(11,11)= a(10,10); a(11,12)= a(9,10); a(11,15)= –1; a(12,5)= –1;
a(12,10)=–A31(ℓa3,ℓ3); a(12,11)=–a(11,10); a(12,12)=a(10,10);
a(13,5)=m4*L^3*A11(ℓa4,ℓ4)/15; a(13,14)= A12(ℓa4,ℓ4); a(13,15)= –A13(ℓa4,ℓ4);
a(13,16)= –(A14(ℓa3,ℓ3)+ m4*L^3*A11(ℓa4,ℓ4)/15); a(14,5)=m4*L^3*A21(ℓa4,ℓ4)/15;
a(14,14)= A11(ℓa4,ℓ4); a(14,15)= –a(13,14); a(14,16)= –(A13(ℓa3,ℓ3)+ m4*L^3*...
A21(ℓa4,ℓ4)/15); a(14,18)= –m4; a(15,5)= –m4*L^3*A31(ℓa4,ℓ4)/15; a(15,14)= –A21(ℓa4,ℓ4);
a(15,15)= a(14,14); a(15,16)= A12(ℓa4,ℓ4)+ m4*L^3* A31(ℓa4,ℓ4)/15; a(15,19)= –1;
a(16,5)= –m4*L^3*A41(ℓa4,ℓ4)/15; a(16,9)= –1; a(16,14)= –A31(ℓa4,ℓ4); a(16,15)=–a(15,14);
a(16,16)= A11(ℓa4,ℓ4)+ m4*L^3* A41(ℓa4,ℓ4)/15; a(17,13)= –1; a(17,18)= A12(ℓa5,ℓ5);
a(17,19)= –A13(ℓa5,ℓ5); a(17,20)= –A14(ℓa5,ℓ5); a(18,17)= –1; a(18,18)= A11(ℓa5,ℓ5);
a(18,19)=–a(17,18); a(18,20)= a(17,19); a(19,18)= –A21(ℓa5,ℓ5); a(19,19)= a(18,18);
a(19,20)= a(17,18); a(20,18)= –A31(ℓa5,ℓ5); a(20,19)= –a(19,18); a(20,20)= a(18,18);

в1(1,1)= –q*A15(ℓa1,ℓ1); в1(2,1)= –q*A14(ℓa1,ℓ1); в1(3,1)= –q*A13(ℓa1,ℓ1);
в1(4,1)= –q*A12(ℓa1,ℓ1); в1(5,1)= –F1*A14(ℓa2,ℓ2–aF1); в1(6,1)= –F1*A13(ℓa2,ℓ2–aF1);
в1(7,1)= F1*A12(ℓa2,ℓ2–aF1); в1(8,1)= F1*A11(ℓa2,ℓ2–aF1);
в1(9,1)= –M1*A13(ℓa3,ℓ3–aM1); в1(10,1)= –M1*A12(ℓa3,ℓ3–aM1);
в1(11,1)= M1*A11(ℓa3,ℓ3–aM1); в1(12,1)= –M1*A14(ℓa3,ℓ3–aM1)*4*ℓa3^4;
в1(13,1)= –F2*A14(ℓa4,ℓ4–aF2); в1(14,1)= –F2*A13(ℓa4,ℓ4–aF2);
в1(15,1)= F2*A12(ℓa4,ℓ4–aF2); в1(16,1)= F2*A11(ℓa4,ℓ4–aF2);
в1(17,1)= – M2*A13(ℓa5,ℓ5–aM2); в1(18,1)= – M2*A12(ℓa5,ℓ5–aM2);
в1(19,1)= M2*A11(ℓa5,ℓ5–aM2); в1(20,1)= –M2*A14(ℓa5,ℓ5–aM2)*4*ℓa5^4;

% Решение системы уравнений и вывод граничных параметров
X = a \ в1

% Вычисление и вывод реакций опор балки
M_n= X(3,1)
R_n= X(4,1)
R1= –X(1,1)+ X(8,1)
R2= –X(2,1)+ X(12,1)
R3= –X(5,1)+ X(16,1)
R4= –X(9,1)+ X(20,1)

% Начальные параметры и нагрузка стержней балки
% EIvn = 0.0; EIfin = 0.0; MN = Mn; QN = Rn; F = 0.0; M = 0.0; aF = 0.0; aM = 0.0;
% ℓℓ = ℓ1; m11 = m1; ℓa = ℓa1; κ = κ1;
% EIvn = 0.0; EIfin = X(6,1)/(m2 * EI); MN = X(7,1); QN = X(8,1); F = F1; M = 0.0;
% aF = aF1; aM = 0.0; q = 0.0; ℓℓ = ℓ2; m11 = m2; ℓa = ℓa2; κ = κ2;
% EIvn = 0.0; EIfin = X(10,1)/(m3 * EI); MN = X(11,1); QN = X(12,1); F = 0.0;
% M = M1; q = 0.0; aF = 0.0; aM = aM1; ℓℓ = ℓ3; m11 = m3; ℓa = ℓa3; κ = κ3;
% EIvn = (X(5,1) – X(16,1))* L^3/(15 * EI); EIfin = X(14,1)/(m4 * EI); ℓℓ = ℓ4; ℓa = ℓa4;
%MN = X(15,1); QN = X(16,1); F = F2; M = 0.0; q = 0.0; aF = aF2; aM = 0.0; m11 = m4; κ=κ4
% EIvn = 0.0; EIfin = X(18,1)/EI; MN = X(19,1); QN = X(20,1); ℓℓ = ℓ5; F = 0.0;
% M = M2; q = 0.0; aF = 0.0; aM = aM2; m11 = 1.0; ℓa = ℓa5; κ = κ5;

% Построение эпюр прогибов, углов поворота изгибающих моментов,
% поперечных сил и реакции основания стержней балки

$n1=8;\ \ EIv = zeros(n1+1,1);\ \ EIfi = zeros(n1+1,1);\ \ X1 = zeros(n1+1,1);\ \ x = 0.0;\ \ \ dx = \ell\ell/n1;$
$kbv = zeros(n1+1,1);\ \ Me = zeros(n1+1,1);\ \ Qe = zeros(n1+1,1);$

for $m=1 : n1+1$
$X1(m,1) = x;$

$EIv(m,1) = -(EIvn * A11(\ell a, x) + EIfin * A12(\ell a, x) - MN * A13(\ell a, x)/(m11 * EI) - \ldots$
$QN * A14(\ell a, x)/(m11 * EI) + (q * A15(\ell a, x) + F * A14(\ell a, x - aF) * H(x - aF) + \ldots$
$M * A13(\ell a, x - aM) * H(x - aM)/(m11 * EI));\qquad kbv(m,1) = k * b * EIv(m,1);$

$EIfi(m,1) = -(EIvn * A21(\ell a, x) + EIfin * A11(\ell a, x) - MN * A12(\ell a, x)/(m11 * EI) - \ldots$
$QN * A13(\ell a, x)/(m11 * EI) + (q * A14(\ell a, x) + F * A13(\ell a, x - aF) * H(x - aF) + \ldots$
$M * A12(\ell a, x - aM) * H(x - aM)/(m11 * EI));$

$Me(m,1) = -(-EIvn * A31(\ell a, x) * m11 * EI - EIfin * A21(\ell a, x) * m11 * EI + MN * A11(\ell a, x) + \ldots$
$QN * A12(\ell a, x) - (q * A13(\ell a, x) - F * A12(\ell a, x - aF) * H(x - aF) - \ldots$
$M * A11(\ell a, x - aM) * H(x - aM);$

$Qe(m,1) = -(-EIvn * A41(\ell a, x) * m11 * EI - EIfin * A31(\ell a, x) * m11 * EI + MN * A21(\ell a, x) + \ldots$
$QN * A11(\ell a, x) - q * A12(\ell a, x) - F * A11(\ell a, x - aF) * H(x - aF) - \ldots$
$M * A14(\ell a, x - aM) * H(x - aM) * 4 * \ell a\hat{}\,4);$

$x = x + dx;$ *end*;

% *subplot* (2,3,1), *plot* ($X1$,Qe); *axis* ([0 $\ell\ell$ − 100 100]); *grid on*
% *subplot* (2,3,2), *plot* ($X1$,Me); *axis* ([0 $\ell\ell$ − 60 60]); *grid on*
% *subplot* (2,3,3), *plot* ($X1$,$EIfi$); *axis* ([0 $\ell\ell$ −1e-5 1e-5]); *grid on*
% *subplot* (2,3,4), *plot* ($X1$,EIv); *axis* ([0 $\ell\ell$ −1e-5 1e-5]); *grid on*
% *subplot* (2,3,5), *plot* ($X1$,kbv); *axis* ([0 $\ell\ell$ − 0.1 0.1]); *grid on*

% Вывод таблицы значений параметров стержней балки
[$X1$ $-Qe$ $-Me$ $-Eifi$ $-EIv$ $-kbv$]

Результаты расчетов состояния балки по данной программе представлены в таблицах 5.31, 5.32 и на рисунке 5.38.

Эпюры напряженно-деформированного состояния балки (пример 5.22)

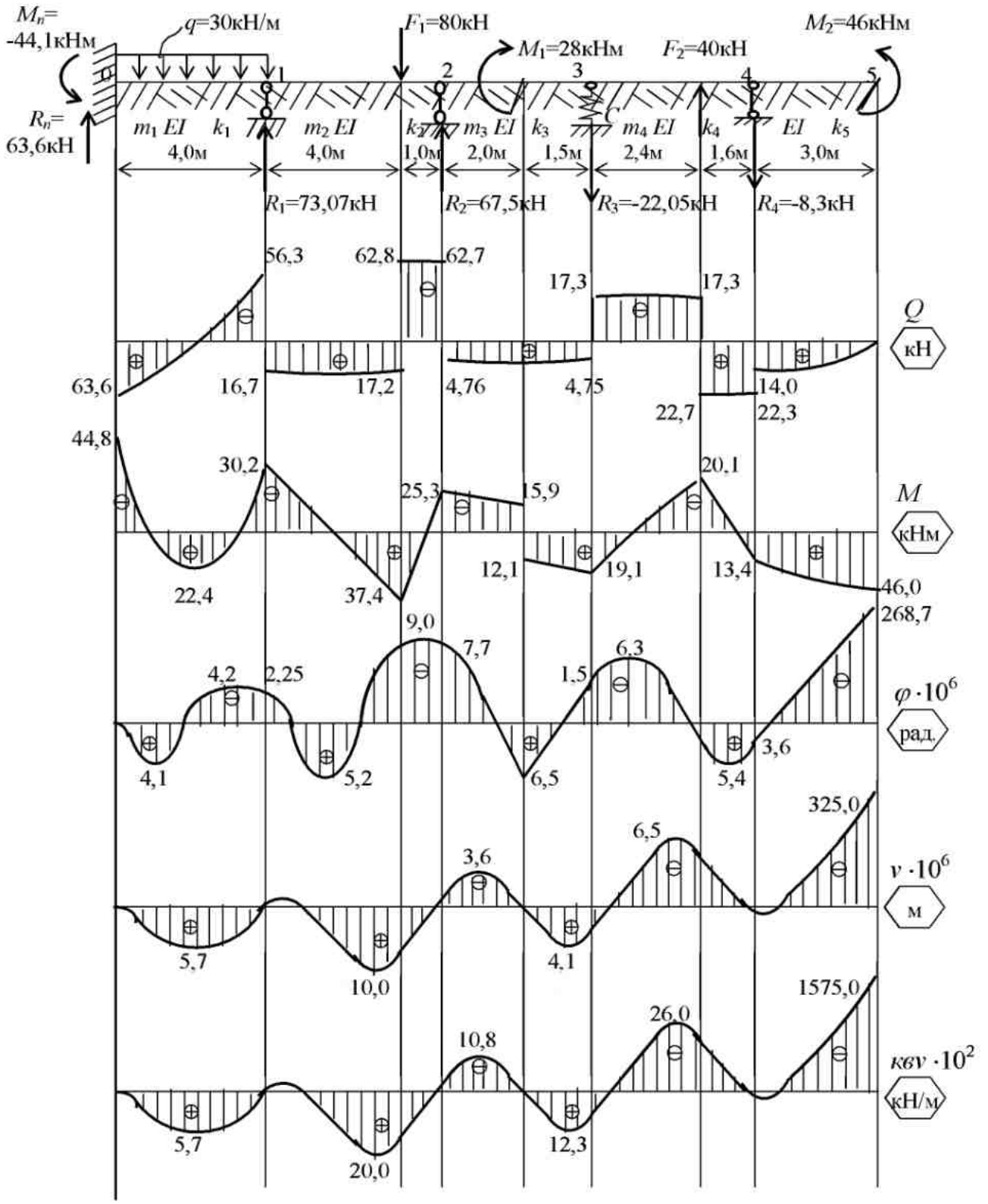


Рисунок 5.38

Таблица 5.31

1	$Q_{(\ell)}^{0-1} = X(1,1) = -56{,}287$ кН	11	$M_{(0)}^{2-3} = X(11,1) = -25{,}312$ кНм
2	$Q_{(\ell)}^{1-2} = X(2,1) = -62{,}697$ кН	12	$Q_{(0)}^{2-3} = X(12,1) = 4{,}7601$ кН
3	$M_{(0)}^{0-1} = X(3,1) = -44{,}808$ кНм	13	$EIv_{(\ell)}^{4-5} = X(13,1) = -116{,}97$ кНм^3
4	$Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1) = 63{,}585$ кН	14	$m_4 EI\varphi_{(0)}^{3-4} = X(14,1) = -3{,}3410$ кНм^2
5	$Q_{(\ell)}^{2-3} = X(5,1) = 4{,}7481$ кН	15	$M_{(0)}^{3-4} = X(15,1) = 19{,}058$ кНм
6	$m_2 EI\varphi_{(0)}^{1-2} = X(6,1) = -8{,}1006$ кНм^2	16	$Q_{(0)}^{3-4} = X(16,1) = -17{,}302$ кН
7	$M_{(0)}^{1-2} = X(7,1) = -30{,}223$ кНм	17	$EI\varphi_{(\ell)}^{4-5} = X(17,1) = -96{,}718$ кНм^2
8	$Q_{(0)}^{1-2} = X(8,1) = 16{,}781$ кН	18	$EI\varphi_{(0)}^{4-5} = X(18,1) = 1{,}2955$ кНм^2
9	$Q_{(\ell)}^{3-4} = X(9,1) = 22{,}299$ кН	19	$M_{(0)}^{4-5} = X(19,1) = 13{,}394$ кНм
10	$m_3 EI\varphi_{(0)}^{2-3} = X(10,1) = -22{,}335$ кНм^2	20	$Q_{(0)}^{4-5} = X(20,1) = 13{,}988$ кН

Таблица 5.32

Глобальная координата, м	Локальная координата, м	Параметры напряженно-деформированного состояния стержней балки			
		Поперечная сила Q, кН Вектор Qe	Изгибающий момент M, кНм Вектор Me	Угол поворота φ, рад. Вектор $Elfi$	Прогиб v, м Вектор Elv
стержень 0 – 1					
0,0	0,0	63,585	-44,808	0.0	0.0
0,5	0,5	48,587	-16,765	$3{,}4909\cdot10^{-6}$	$1{,}0080\cdot10^{-6}$
1,0	1,0	33,597	3,7802	$4{,}1701\cdot10^{-6}$	$3{,}0223\cdot10^{-6}$
1,5	1,5	18,616	16,833	$2{,}9049\cdot10^{-6}$	$4{,}8540\cdot10^{-6}$
2,0	2,0	3,6435	22,398	$5{,}6241\cdot10^{-7}$	$5{,}7477\cdot10^{-6}$
2,5	2,5	-11,328	20,477	$-1{,}9910\cdot10^{-6}$	$5{,}3813\cdot10^{-6}$
3,0	3,0	-26,305	11,069	$-3{,}8887\cdot10^{-6}$	$3{,}8660\cdot10^{-6}$
3,5	3,5	-41,291	-5,8294	$-4{,}2642\cdot10^{-6}$	$1{,}7462\cdot10^{-6}$
4,0	4,0	-56,287	-30,223	$-2{,}2502\cdot10^{-6}$	$-1{,}3553\cdot10^{-20}\approx0{,}0$
стержень 1 – 2					
4,0	0,0	16,781	-30,223	$-2{,}2502\cdot10^{-6}$	0,0
4,5	0,5	16,778	-21,834	$1{,}3649\cdot10^{-6}$	$1{,}7276\cdot10^{-7}$
5,0	1,0	16,782	-13,444	$3{,}8147\cdot10^{-6}$	$1{,}1707\cdot10^{-6}$
5,5	1,5	16,805	-5,0482	$5{,}0991\cdot10^{-6}$	$3{,}4477\cdot10^{-6}$
6,0	2,0	16,852	3,3649	$5{,}2162\cdot10^{-6}$	$6{,}0752\cdot10^{-6}$
6,5	2,5	16,925	11,808	$4{,}1629\cdot10^{-6}$	$8{,}4689\cdot10^{-6}$
7,0	3,0	17,019	20,294	$1{,}9342\cdot10^{-6}$	$1{,}0042\cdot10^{-5}$
7,5	3,5	17,122	28,829	$-1{,}4765\cdot10^{-6}$	$1{,}0206\cdot10^{-5}$
8,0	4,0	17,222 -62,784	37,414	$-6{,}0762\cdot10^{-6}$	$8{,}3676\cdot10^{-6}$
8,5	4,5	-62,719	6,0404	$-9{,}0935\cdot10^{-6}$	$4{,}3936\cdot10^{-6}$
9,0	5,0	-62,697	-25,312	$-7{,}7551\cdot10^{-6}$	$6{,}3527\cdot10^{-21}\approx0{,}0$

Продолжение таблицы 5.32

Глобальная координата, м	Локальная координата, м	Параметры напряженно-деформированного состояния стержней балки			
		Поперечная сила Q, кН Вектор Qe	Изгибающий момент M, кНм Вектор Me	Угол поворота φ, рад. Вектор $Elfi$	Прогиб v, м Вектор Elv
стержень 2 – 3					
9,0	0,0	4,7601	-25,312	$-7{,}7551\cdot10^{-6}$	0,0
9,5	0,5	4,7364	-22,936	$-3{,}5671\cdot10^{-6}$	$-2{,}8134\cdot10^{-6}$
10,0	1,0	4,6857	-20,580	$2{,}0989\cdot10^{-6}$	$-3{,}6356\cdot10^{-6}$
10,5	1,5	4,6363	-18,250	$3{,}5802\cdot10^{-6}$	$-2{,}6713\cdot10^{-6}$
11,0	2,0	4,6135	-15,940 12,061	$6{,}5478\cdot10^{-6}$	$-1{,}2258\cdot10^{-6}$
11,5	2,5	4,6335	14,371	$4{,}2535\cdot10^{-6}$	$2{,}5944\cdot10^{-6}$
12,0	3,0	4,6851	16,700	$1{,}5567\cdot10^{-6}$	$4{,}0638\cdot10^{-8}$
12,5	3,5	4,7481	19,058	$-1{,}5468\cdot10^{-6}$	$4{,}0834\cdot10^{-6}$
стержень 3 – 4					
12,5	0,0	-17,302	19,058	$-1{,}5468\cdot10^{-6}$	$4{,}0834\cdot10^{-6}$
13,0	0,5	-17,235	10,425	$-4{,}9585\cdot10^{-6}$	$2{,}3738\cdot10^{-6}$
13,5	1,0	-17,215	1,8152	$-6{,}3751\cdot10^{-6}$	$-5{,}4265\cdot10^{-7}$
14,0	1,5	-17,258	-6,8005	$-5{,}7985\cdot10^{-6}$	$-3{,}6691\cdot10^{-6}$
14,5	2,0	-17,357	-15,452	$-3{,}2239\cdot10^{-6}$	$-6{,}0082\cdot10^{-6}$
15,0	2,5	22,514	-20,162	$1{,}2673\cdot10^{-6}$	$-6{,}5613\cdot10^{-6}$
15,5	3,0	22,396	-8,9364	$4{,}6340\cdot10^{-6}$	$-4{,}9777\cdot10^{-6}$
16,0	3,5	22,322	2,2407	$5{,}4083\cdot10^{-6}$	$-2{,}3593\cdot10^{-6}$
16,5	4,0	22,299	13,394	$3{,}5985\cdot10^{-6}$	$-1{,}1858\cdot10^{-20}\approx0{,}0$
стержень 4 – 5					
16,5	0,0	13,988	13,394	$3{,}5985\cdot10^{-6}$	0,0
17,0	0,5	13,966	20,386	$-1{,}9861\cdot10^{-5}$	$-3{,}6609\cdot10^{-6}$
17,5	1,0	13,687	27,318	$-5{,}3004\cdot10^{-5}$	$-2{,}1476\cdot10^{-5}$
18,0	1,5	12,735	33,961	$-9{,}5614\cdot10^{-5}$	$-5{,}8246\cdot10^{-5}$
18,5	2,0	10,578	39,852	$-1{,}4700\cdot10^{-4}$	$-1{,}1856\cdot10^{-4}$
19,0	2,5	6,5765	44,232	$-2{,}0562\cdot10^{-4}$	$-2{,}0646\cdot10^{-4}$
19,5	3,0	0,0	$-1{,}4211\cdot10^{-14}\approx0{,}0$	$-2{,}6866\cdot10^{-4}$	$-3{,}2492\cdot10^{-4}$

Пример 5.23. Определить состояние неразрезной балки примера 5.22 при условии, что упругое основание участков 0-1 и 2-3 отсутствует (явление отлипания).

В этом случае в уравнении краевой задачи (5.23) вместо фундаментальных функций уравнения (5.14) необходимо использовать функции изгиба. Для данного примера разрешающее уравнение МГЭ примет вид:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
1			$-\ell_1^2/2$	$-\ell_1^3/6$																	$Q_{(\ell)}^{0-1}$	$-B_{11}^{0-1}$
2			$-\ell_1$	$-\ell_1^2/2$		$-m_1/m_2$															$Q_{(\ell)}^{1-2}$	$-B_{21}^{0-1}$
3			1	ℓ_1			-1														$M_{(0)}^{0-1}$	B_{31}^{0-1}
4	-1			1																	$Q_{(0)}^{0-1}$	B_{41}^{0-1}
5						A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$													$Q_{(\ell)}^{2-3}$	$-B_{11}^{1-2}$
6						A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$		$-m_3/m_4$											$m_2 EI\varphi_{(0)}^{1-2}$	$-B_{21}^{1-2}$
7						$-A_{21}$	A_{11}	A_{12}			-1										$M_{(0)}^{1-2}$	B_{31}^{1-2}
8		-1				$-A_{31}$	A_{21}	A_{11}													$Q_{(0)}^{1-2}$	B_{41}^{1-2}
9					$-m_3\ell^2/15$					ℓ_3	$-\ell_3^2/2$	$-\ell_3^3/6$				$m_3\ell^2/15$					$Q_{(\ell)}^{3-4}$	$-B_{11}^{2-3}$
10										1	$-\ell_3$	$-\ell_3^2/2$		$-m_3/m_4$							$m_3 EI\varphi_{(0)}^{2-3}$	$-B_{21}^{2-3}$
11											1	ℓ_3			-1						$M_{(0)}^{2-3}$	B_{31}^{2-3}
12					-1							1									$Q_{(0)}^{2-3}$	B_{41}^{2-3}
13					$m_4\ell^2/15 \cdot A_{11}$									A_{12}	$-A_{13}$	$-a_{14}$					$EIv_{(\ell)}^{4-5}$	$-B_{11}^{3-4}$
14					$m_4\ell^2/15 \cdot A_{21}$									A_{11}	$-A_{12}$	$-a_{13}$		$-m_4$			$m_4 EI\varphi_{(0)}^{3-4}$	$-B_{21}^{3-4}$
15					$-m_4\ell^2/15 \cdot A_{31}$									$-A_{21}$	A_{11}	a_{12}			-1		$M_{(0)}^{3-4}$	B_{31}^{3-4}
16					$-m_4\ell^2/15 \cdot A_{41}$				-1					$-A_{31}$	A_{21}	a_{11}					$Q_{(0)}^{3-4}$	B_{41}^{3-4}
17													-1					A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$EI\varphi_{(\ell)}^{4-5}$	$-B_{11}^{4-5}$
18																	-1	A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	$EI\varphi_{(0)}^{4-5}$	$-B_{21}^{4-5}$
19																		$-A_{21}$	A_{11}	A_{12}	$M_{(0)}^{4-5}$	B_{31}^{4-5}
20																		$-A_{31}$	A_{21}	A_{11}	$Q_{(0)}^{4-5}$	B_{41}^{4-5}

(5.24)

Текст программы

$n = 20$; $a = zeros(n,n)$; $X = zeros(n,1)$; $в1 = zeros(n,1)$.

% Исходные данные краевой задачи

$\ell1=4.0$; $\ell2=5.0$; $\ell3=3.5$; $\ell4=4.0$; $\ell5=3.0$; $L=1.0$; $\ell=19.5$; $q=30.0$; $F1=80.0$; $M1=-28.0$; $F2=-40.0$; $M2=46.0$; $m1=12.0$; $m2=10.0$; $m3=8.0$; $m4=6.0$; $E=2.0e+7$; $в=1.0$; $h=0.6$; $I=в*h\hat{}3/12$; $EI=E*I$; $aF1=4.0$; $aM1=2.0$; $aF2=2.4$; $aM2=3.0$; $к2=2.0e+4$; $к4=4.0e+4$; $к5=5.0e+4$;

$\ell a2 = (k2 * в/(4 * m2 * EI))\hat{}\,0.25$; $\ell a4 = (k4 * в/(4 * m4 * EI))$;

$\ell a5 = (k5 * в/(4 * EI))\hat{}\,0.25$;

% Ввод матриц $a(n,n)$, $в1(n,1)$ с помощью операторов присваивания

$a(1,3)=-\ell1\hat{}2/2$; $a(1,4)=-\ell1\hat{}3/6$; $a(2,3)=-\ell1$; $a(2,4)=-\ell1\hat{}2/2$; $a(2,6)=-m1/m2$; $a(3,3)=1$;
$a(3,4)=\ell1$; $a(3,7)=-1$; $a(4,1)=-1$; $a(4,4)=1$; $a(5,6)=A12(\ell a2,\ell2)$; $a(5,7)=-A13(\ell a2,\ell2)$;
$a(5,8)=-A14(\ell a2,\ell2)$; $a(6,6)=A11(\ell a2,\ell2)$; $a(6,7)=-a(5,6)$; $a(6,8)=a(5,7)$; $a(6,10)=-m2/m3$;
$a(7,6)=-A21(\ell a2,\ell2)$; $a(7,7)=a(6,6)$; $a(7,8)=a(5,6)$; $a(7,11)=-1$; $a(8,2)=-1$;
$a(8,6)=-A31(\ell a2,\ell2)$; $a(8,7)=-a(7,6)$; $a(8,8)=-a(6,6)$; $a(9,5)=-m3*L\hat{}3/15$; $a(9,10)=\ell3$;
$a(9,11)=-\ell3\hat{}2/2$; $a(9,12)=-\ell3\hat{}3/6$; $a(9,16)=m3*L\hat{}3/15$; $a(10,10)=1$; $a(10,11)=-\ell3$;
$a(10,12)=-\ell3\hat{}2/2$; $a(10,14)=-m3/m4$; $a(11,11)=1$; $a(11,12)=\ell3$;); $a(11,15)=-1$;
$a(12,5)=-1$; $a(12,12)=1$; $a(13,5)=m4*L\hat{}3*A11(\ell a4,\ell4)/15$; $a(13,14)=A12(\ell a4,\ell4)$;
$a(13,15)=-A13(\ell a4,\ell4)$; $a(13,16)=-(A14(\ell a4,\ell4)+m4*L\hat{}3*A11(\ell a4,\ell4)/15)$;
$a(14,5)=m4*L\hat{}3*A21(\ell a4,\ell4)/15$; $a(14,14)=A11(\ell a4,\ell4)$; $a(14,15)=-a(13,14)$; $a(14,18)=-m4$;
$a(14,16)=-(A13(\ell a4,\ell4)+m4*L\hat{}3*A12(\ell a4,\ell4)/15)$; $a(15,5)=-m4*L\hat{}3*A31(\ell a4,\ell4)/15$;
$a(15,14)=-A21(\ell a4,\ell4)$; $a(15,15)=a(14,14)$; $a(15,16)=A12(\ell a4,\ell4)+m4*L\hat{}3*A31(\ell a4,\ell4)/15$;
$a(15,19)=-1$; $a(16,5)=-m4*L\hat{}3*A41(\ell a4,\ell4)/15$; $a(16,9)=-1$; $a(16,14)=-A31(\ell a4,\ell4)$;
$a(16,15)=-a(15,14)$; $a(16,16)=A11(\ell a4,\ell4)+m4*L\hat{}3*A41(\ell a4,\ell4)/15$; $a(17,13)=-1$;
$a(17,18)=A12(\ell a5,\ell5)$; $a(17,19)=-A13(\ell a5,\ell5)$; $a(17,20)=-A14(\ell a5,\ell5)$; $a(18,17)=-1$;
$a(18,18)=A11(\ell a5,\ell5)$; $a(18,19)=-a(17,18)$; $a(18,20)=a(17,19)$; $a(19,18)=-A21(\ell a5,\ell5)$;
$a(19,19)=a(18,18)$; $a(19,20)=a(17,18)$; $a(20,18)=-A31(\ell a5,\ell5)$; $a(20,19)=-a(19,18)$;
$a(20,20)=a(18,18)$;

$в1(1,1)=-q*\ell1\hat{}4/24$; $в1(2,1)=-q**\ell1\hat{}3/6$; $в1(3,1)=q*\ell1\hat{}2/2$; $в1(4,1)=q*\ell1$;
$в1(5,1)=-F1*A14(\ell a2,\ell2-aF1)$; $в1(6,1)=-F1*A13(\ell a2,\ell2-aF1)$;
$в1(7,1)=F1*A12(\ell a2,\ell2-aF1)$; $в1(8,1)=F1*A11(\ell a2,\ell2-aF1)$;
$в1(9,1)=-M1*(\ell3-aM1)\hat{}2/2$; $в1(10,1)=-M1*(\ell3-aM1)$; $в1(11,1)=M1$;
$в1(13,1)=-F2*A14(\ell a4,\ell4-aF2)$; $в1(14,1)=-F2*A13(\ell a4,\ell4-aF2)$;
$в1(15,1)=F2*A12(\ell a4,\ell4-aF2)$; $в1(16,1)=F2*A11(\ell a4,\ell4-aF2)$;
$в1(17,1)=-M2*A13(\ell a5,\ell5-aM2)$; $в1(18,1)=-M2*A12(\ell a5,\ell5-aM2)$;
$в1(19,1)=M2*A11(\ell a5,\ell5-aM2)$; $в1(20,1)=-M2*A14(\ell a5,\ell5-aM2)*4*\ell a5\hat{}4$;

% Решение системы уравнений и вывод граничных параметров

$X = a \setminus в1$

% Вычисление и вывод реакций опор балки

$M_п = X(3,1)$ $\qquad$ $R2=-X(2,1)+X(12,1)$

$R_п = X(4,1)$ $\qquad$ $R3=-X(5,1)+X(16,1)$

$R1=-X(1,1)+X(8,1)$ $\qquad$ $R4=-X(9,1)+X(20,1)$

% Начальные параметры и нагрузка стержней балки

% $EIvn = 0.0;$ $EIfin = 0.0;$ $MN = Mn;$ $QN = Rn;$ $F = 0.0;$ $M = 0.0;$ $aF = 0.0;$ $aM = 0.0;$

% $\ell\ell = \ell 1;$ $m11 = m1;$

% $EIvn = 0.0;$ $EIfin = X(6,1)/(m2 * EI);$ $MN = X(7,1);$ $QN = X(8,1);$ $F = F1;$ $M = 0.0;$

% $aF = aF1;$ $aM = 0.0;$ $q = 0.0;$ $\ell\ell = \ell 2;$ $m11 = m2;$ $\ell a = \ell a2;$ $\kappa = \kappa 2;$

% $EIvn = 0.0;$ $EIfin = X(10,1)/(m3 * EI);$ $MN = X(11,1);$ $QN = X(12,1);$ $F = 0.0;$ $M = M1;$

% $q = 0.0;$ $aF = 0.0;$ $aM = aM1;$ $\ell\ell = \ell 3;$ $m11 = m3;$

% $EIvn = \left(X(5,1) - X(16,1)\right) * L\hat{}3/(15 * EI);$ $EIfin = X(14,1)/(m4 * EI);$ $\ell\ell = \ell 4;$

% $MN = X(15,1);$ $QN = X(16,1);$ $F = F2;$ $q = 0.0;$ $aF = aF2;$ $aM = 0.0;$ $M = 0.0;$ $m11 = m4;$

% $EIvn = 0.0;$ $EIfin = X(18,1)/EI;$ $MN = X(19,1);$ $QN = X(20,1);$ $\ell\ell = \ell 5;$ $F = 0.0;$

% $M = M2;$ $q = 0.0;$ $aF = 0.0;$ $aM = aM2;$ $m11 = 1.0;$

% Построение эпюр состояния балки

$n1=8;$ $EIv = zeros(n1 + 1,1);$ $EIfi = zeros(n1 + 1,1);$ $X1 = zeros(n1+1,1);$

$\kappa Bv = zeros(n1 + 1,1);$ $Me = zeros(n1 + 1,1);$ $Qe = zeros(n1 + 1,1);$

$VS = zeros(n1 + 1,1);$ $FiS = zeros(n1 + 1,1);$ $MS = zeros(n1 + 1,1);$ $QS = zeros(n1 + 1,1);$

$x = 0.0;$ $dx = \ell\ell/n1;$

for $m=1 : n1+1$

$X1(m,1) = x;$

$VS(m,1) = -\left(EIvn + EIfin * x - MN * x\hat{}2/(2 * m11 * EI) - QN * x\hat{}3/(6 * m11 * EI) + \ldots\right.$

$\left.\left(q * x\hat{}4/24 + F * (x - aF)\hat{}3 * H(x - aF)/6 + M * (x - aM)\hat{}2 * H(x - aM)/2\right)\ldots\right.$

$\left./(m11 * EI)\right);$

$FiS(m,1) = -\left(EIfin * x - MN * x/(m11 * EI) - QN * x\hat{}2/(2 * m11 * EI) + \ldots\right.$

$\left.\left(q * x\hat{}3/6 + F * (x - aF)\hat{}2 * H(x - aF)/2 + M * (x - aM) * H(x - aM)\right)/\ldots\right.$

$\left.(m11 * EI)\right);$

$MS(m,1) = -\left(MN - QN * x - q * x\hat{}2/2 - F * (x - aF) * H(x - aF) - M * H(x - aM)\right);$

$QS(m,1) = -\left(QN - q * x - F * H(x - aF)\right);$

$EIv(m,1) = -\left(EIvn * A11(\ell a, x) + EIfin * A12(\ell a, x) - MN * A13(\ell a, x)/(m11 * EI) - \ldots\right.$

$QN * A14(\ell a, x)/(m11 * EI) + \left(q * A15(\ell a, x) + F * A14(\ell a, x - aF) * H(x - aF) + \ldots\right.$

$\left.\left.M * A13(\ell a, x - aM) * H(x - aM)/(m11 * EI)\right);\right.$ $\kappa Bv(m,1) = k * в * EIv(m,1);$

$EIfi(m,1) = -\left(EIvn * A21(\ell a, x) + EIfin * A11(\ell a, x) - MN * A12(\ell a, x)/(m11 * EI) - \ldots\right.$

$QN * A13(\ell a, x)/(m11 * EI) + \left(q * A14(\ell a, x) + F * A13(\ell a, x - aF) * H(x - aF) + \ldots\right.$

$\left.M * A12(\ell a, x - aM) * H(x - aM)/(m11 * EI)\right);$

$Me(m,1) = -\left(-EIvn * A31(\ell a, x) * m11 * EI - EIfin * A21(\ell a, x) * m11 * EI + \ldots\right.$

$MN * A11(\ell a, x) + QN * A12(\ell a, x) - q * A13(\ell a, x) - F * A12(\ell a, x - aF) * H(x - aF) - \ldots$

$\left.M * A11(\ell a, x - aM) * H(x - aM)\right);$

$Qe(m,1) = -\left(-EIvn * A41(\ell a, x) * m11 * EI - EIfin * A31(\ell a, x) * m11 * EI + MN * A21(\ell a, x) + \ldots\right.$

$QN * A11(\ell a, x) - q * A12(\ell a, x) - F * A11(\ell a, x - aF) * H(x - aF) - \ldots$

$\left.M * A14(\ell a, x - aM) * H(x - aM) * 4 * \ell a\hat{}4\right);$

$x = x + dx;$ *end;*

```
% subplot (2,2,1),  plot (X1,VS);  axis ([0 ll  -1e-5  1e-5]);  grid on
% subplot (2,2,2),  plot (X1,FiS);  axis ([0 ll  -1e-5  1e-5]);  grid on
% subplot (2,2,3),  plot (X1,MS);  axis ([0 ll  -60  60]);  grid on
% subplot (2,2,4),  plot (X1,QS);  axis ([0 ll  -100  100]);  grid on
% subplot (2,3,1),  plot (X1,Qe);  axis ([0 ll  -100  100]);  grid on
% subplot (2,3,2),  plot (X1,Me);  axis ([0 ll  -60  60]);  grid on
% subplot (2,3,3),  plot (X1,EIfi);  axis ([0 ll  -1e-5  1e-5]);  grid on
% subplot (2,3,4),  plot (X1,EIv);  axis ([0 ll  -1e-5  1e-5]);  grid on
% subplot (2,3,5),  plot (X1,kbv);  axis ([0 ll  -0.1  0.1]);  grid on

% Вывод таблицы значений параметров стержней балки

[X1  -QS  -MS  -FiS  -VS]
% [X1  -Qe  -Me  -Eifi  -EIv  -kbv]
```

Результаты расчетов состояния балки по данной программе представлены в таблицах 5.33, 5.34 и на рисунке 5.39.

Таблица 5.33

1	$Q_{(\ell)}^{0-1} = X(1,1) = -56{,}345$ кН	11	$M_{(0)}^{2-3} = X(11,1) = -25{,}274$ кНм
2	$Q_{(\ell)}^{1-2} = X(2,1) = -62{,}683$ кН	12	$Q_{(0)}^{2-3} = X(12,1) = 4{,}6625$ кН
3	$M_{(0)}^{0-1} = X(3,1) = -44{,}873$ кНм	13	$EIv_{(\ell)}^{4-5} = X(13,1) = -116{,}97$ кНм^3
4	$Q_{(0)}^{0-1} = X(4,1) = 63{,}655$ кН	14	$m_4 EI\varphi_{(0)}^{3-4} = X(14,1) = -3{,}3471$ кНм^2
5	$Q_{(\ell)}^{2-3} = X(5,1) = 4{,}6625$ кН	15	$M_{(0)}^{3-4} = X(15,1) = 19{,}045$ кНм
6	$m_2 EI\varphi_{(0)}^{1-2} = X(6,1) = -8{,}1213$ кНм^2	16	$Q_{(0)}^{3-4} = X(16,1) = -17{,}297$ кН
7	$M_{(0)}^{1-2} = X(7,1) = -30{,}254$ кНм	17	$EI\varphi_{(\ell)}^{4-5} = X(17,1) = -96{,}718$ кНм^2
8	$Q_{(0)}^{1-2} = X(8,1) = 16{,}794$ кН	18	$EI\varphi_{(0)}^{4-5} = X(18,1) = 1{,}2979$ кНм^2
9	$Q_{(\ell)}^{3-4} = X(9,1) = 22{,}302$ кН	19	$M_{(0)}^{4-5} = X(19,1) = 13{,}396$ кНм
10	$m_3 EI\varphi_{(0)}^{2-3} = X(10,1) = -22{,}364$ кНм^2	20	$Q_{(0)}^{4-5} = X(20,1) = 13{,}987$ кН

Таблица 5.34

Глобальная координата, м	Локальная координата, м	Параметры напряженно-деформированного состояния стержней балки			
		Поперечная сила Q, кН	Изгибающий момент M, кНм	Угол поворота φ, рад.	Прогиб v, м
1	2	3	4	5	6
стержень 0 – 1					
0,0	0,0	63,655	-44,873	0.0	0.0
0,5	0,5	48,655	-16,795	$3{,}4964\cdot10^{-6}$	$1{,}0095\cdot10^{-6}$
1,0	1,0	33,655	3,7818	$4{,}1772\cdot10^{-6}$	$3{,}0271\cdot10^{-6}$
1,5	1,5	18,655	16,859	$2{,}9104\cdot10^{-6}$	$4{,}8621\cdot10^{-6}$
2,0	2,0	3,6546	22,436	$5{,}6398\cdot10^{-7}$	$5{,}7576\cdot10^{-6}$

Продолжение таблицы 5.34

1	2	3	4	5	6
2,5	2,5	-11,345	20,514	$-1{,}9939\cdot10^{-6}$	$5{,}3908\cdot10^{-6}$
3,0	3,0	-26,345	11,091	$-3{,}8952\cdot10^{-6}$	$3{,}8731\cdot10^{-6}$
3,5	3,5	-41,345	-5,8318	$-4{,}2719\cdot10^{-6}$	$1{,}7497\cdot10^{-6}$
4,0	4,0	-56,345	-30,254	$-2{,}2559\cdot10^{-6}$	$-2{,}7105\cdot10^{-20}\approx0{,}0$
стержень 1 – 2					
4,0	0,0	16,794	-30,254	$-2{,}2559\cdot10^{-6}$	0,0
4,5	0,5	16,792	-21,858	$1{,}3630\cdot10^{-6}$	$1{,}7464\cdot10^{-7}$
5,0	1,0	16,796	-13,461	$3{,}8157\cdot10^{-6}$	$1{,}1686\cdot10^{-6}$
5,5	1,5	16,818	-5,0588	$5{,}1020\cdot10^{-6}$	$3{,}4467\cdot10^{-6}$
6,0	2,0	16,866	3,3612	$5{,}2202\cdot10^{-6}$	$6{,}0760\cdot10^{-6}$
6,5	2,5	16,939	11,812	$4{,}1669\cdot10^{-6}$	$8{,}4716\cdot10^{-6}$
7,0	3,0	17,033	20,304	$1{,}9372\cdot10^{-6}$	$1{,}0047\cdot10^{-5}$
7,5	3,5	17,135	28,846	$-1{,}4753\cdot10^{-6}$	$1{,}0212\cdot10^{-5}$
8,0	4,0	17,330 -62,770	37,438	$-6{,}0778\cdot10^{-6}$	$8{,}3731\cdot10^{-6}$
8,5	4,5	-62,705	6,0711	$-9{,}0989\cdot10^{-6}$	$4{,}3974\cdot10^{-6}$
9,0	5,0	-62,683	-25,274	$-7{,}7653\cdot10^{-6}$	$6{,}3527\cdot10^{-21}\approx0{,}0$
стержень 2 – 3					
9,0	0,0	4,6625	-25,274	$-7{,}7653\cdot10^{-6}$	0,0
9,5	0,5	4,6625	-22,943	$-3{,}5798\cdot10^{-6}$	$-2{,}8194\cdot10^{-6}$
10,0	1,0	4,6625	-20,611	$2{,}0097\cdot10^{-7}$	$-3{,}6472\cdot10^{-6}$
10,5	1,5	4,6625	-18,280	$3{,}5770\cdot10^{-6}$	$-2{,}6859\cdot10^{-6}$
11,0	2,0	4,6625	-15,949 12,051	$6{,}5483\cdot10^{-6}$	$-1{,}3770\cdot10^{-6}$
11,5	2,5	4,6625	14,382	$4{,}2537\cdot10^{-6}$	$2{,}5797\cdot10^{-6}$
12,0	3,0	4,6625	16,714	$1{,}5544\cdot10^{-6}$	$4{,}0486\cdot10^{-8}$
12,5	3,5	4,6625	19,045	$-1{,}5496\cdot10^{-6}$	$4{,}0666\cdot10^{-6}$
стержень 3 – 4					
12,5	0,0	-17,297	19,045	$-1{,}5496\cdot10^{-6}$	$4{,}0666\cdot10^{-6}$
13,0	0,5	-17,230	10,414	$-4{,}9586\cdot10^{-6}$	$2{,}3563\cdot10^{-6}$
13,5	1,0	-17,211	1,8065	$-6{,}3729\cdot10^{-6}$	$-5{,}5953\cdot10^{-7}$
14,0	1,5	-17,254	-6,8071	$-5{,}7945\cdot10^{-6}$	$-3{,}6844\cdot10^{-6}$
14,5	2,0	-17,353	-15,457	$-3{,}2186\cdot10^{-6}$	$-6{,}0211\cdot10^{-6}$
15,0	2,5	22,517	-20,166	$1{,}2735\cdot10^{-6}$	$-6{,}5714\cdot10^{-6}$
15,5	3,0	22,399	-8,9379	$4{,}6408\cdot10^{-6}$	$-4{,}9845\cdot10^{-6}$
16,0	3,5	22,325	2,2407	$5{,}4152\cdot10^{-6}$	$-2{,}3627\cdot10^{-6}$
16,5	4,0	22,302	13,396	$3{,}6052\cdot10^{-6}$	$-1{,}1858\cdot10^{-20}\approx0{,}0$
стержень 4 – 5					
16,5	0,0	13,987	13,396	$3{,}6052\cdot10^{-6}$	0,0
17,0	0,5	13,966	20,387	$-1{,}9856\cdot10^{-5}$	$-3{,}6580\cdot10^{-6}$
17,5	1,0	13,686	27,319	$-5{,}3001\cdot10^{-5}$	$-2{,}1471\cdot10^{-5}$
18,0	1,5	12,734	33,962	$-9{,}5612\cdot10^{-5}$	$-5{,}8239\cdot10^{-5}$
18,5	2,0	10,578	39,853	$-1{,}4700\cdot10^{-4}$	$-1{,}1855\cdot10^{-4}$
19,0	2,5	6,5763	44,233	$-2{,}0562\cdot10^{-4}$	$-2{,}0645\cdot10^{-4}$
19,5	3,0	$1{,}7764\cdot10^{-15}\approx0{,}0$	$-7{,}1054\cdot10^{-15}\approx0{,}0$	$-2{,}6866\cdot10^{-4}$	$-3{,}2491\cdot10^{-4}$

Эпюры напряженно-деформированного состояния балки (пример 5.23)

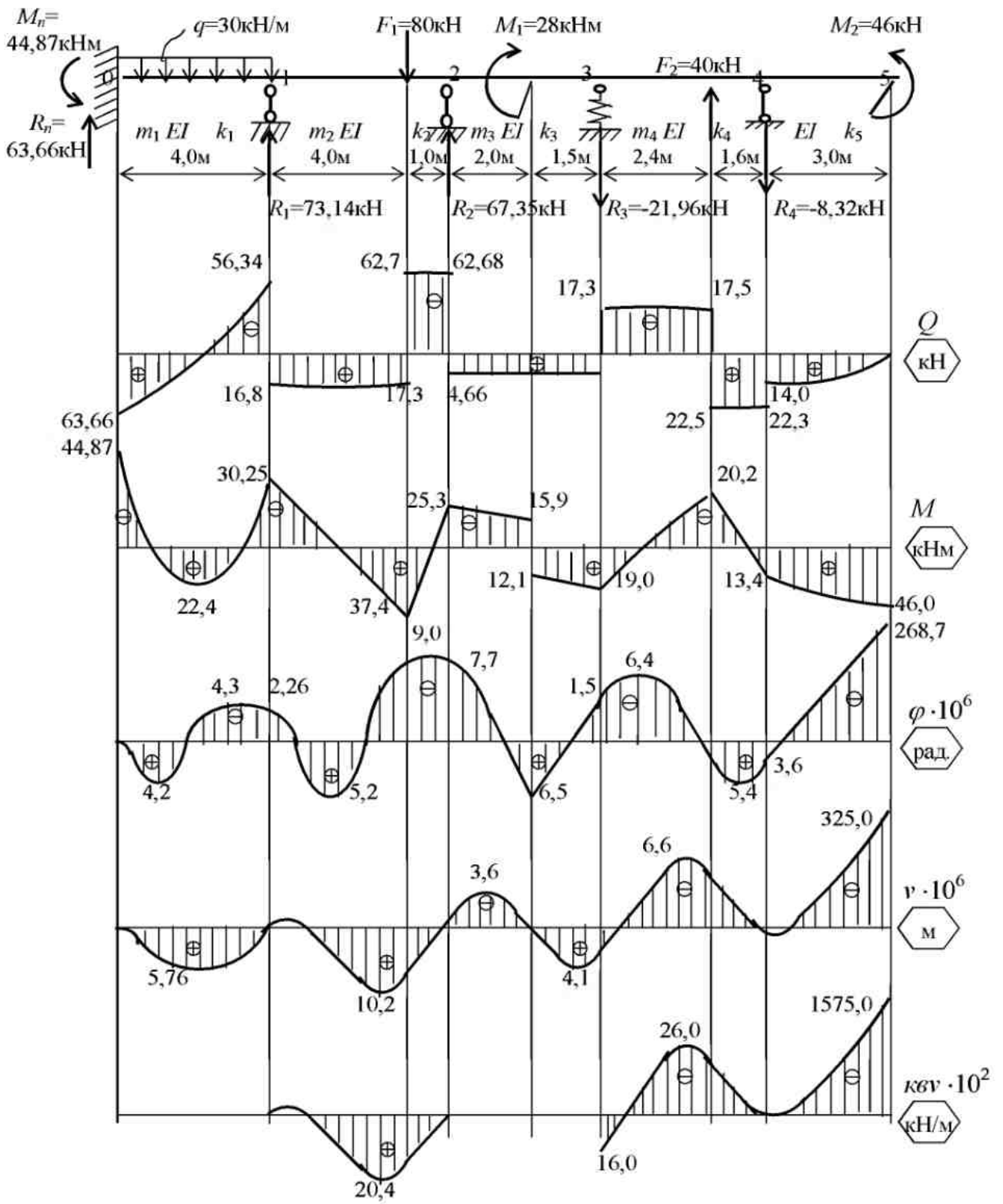


Рисунок 5.39

Анализ результатов расчетов по данным таблиц 5.30, 5.32, 5.34 показывает, что основание в примерах 5.22 и 5.23 незначительно влияет на напряженно-деформированное состояние балки. Объясняется это наличием жестких опор и сравнительно небольшими прогибами в пролетах. На консольном участке, где прогибы велики, влияние упругого основания значительно. Реакция R_4 уменьшается в 4 раза, а максимальный прогиб уменьшается почти в 2 раза. В таких условиях практически незаметным оказалось отсутствие основания на участках 0-1 и 2-3.

Отметим, что использование модели упругого основания с двумя коэффициентами постели [67], [18] не приведет к изменению структур матриц разрешающих уравнений (5.18), (5.19), (5.22), (5.23), (5.24) и др. Соответственно, основные программы также могут не изменяться, а поменять требуется подпрограммы фундаментальных функций, т.е. уточнение модели упругого основания и повышение точности расчета в алгоритме МГЭ и среде MATLAB требует минимальных усилий. Дополнительной областью практического использования функций уравнения (5.14) являются расчеты цилиндрических оболочек [34].

6 ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА МГЭ В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ, ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Анализ алгоритма МГЭ и практика его применения приводят к следующим выводам:

1 Расчет напряженно-деформированного состояния элементов стержневых систем выполняется только в рамках локальных систем координат каждого стержня.

Данный вывод можно считать положительным, так как имеется возможность выбора произвольного порядка формирования главной матрицы МГЭ – вектора начальных параметров $\boldsymbol{X}$. Это значит, что для данной стержневой системы существует множество вариантов топологической матрицы $\boldsymbol{C}$, матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. В этой связи возникает проблема оптимального построения матриц $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{C}$, которая сводится к проблеме рационального обхода узлов. Если в МКЭ направление обхода узлов существенно влияет на ширину ленты матрицы коэффициентов и связанную с этим трудоемкость решения задачи [258], то в МГЭ направление обхода узлов (ориентированный граф) влияет на трудоемкость расчета значительно слабее. Связано это с тем, что по МГЭ ориентированный граф незначительно изменяет лишь топологическую матрицу $\boldsymbol{C}$, а структура матрицы $\boldsymbol{A}$ остается неизменной. Тогда трудоемкость решения различных вариантов уравнения (2.23) будет иметь незначительные отклонения от оптимальной. В отличие от МКЭ, алгоритм МГЭ исключает операции перехода от локальных систем координат к глобальной и наоборот.

2 МГЭ не требует проведения статического и кинематического анализов стержневых систем на предмет выбора основных систем – фундаментальных понятий методов сил и перемещений.

Это означает, что расчетная схема конструкции в МГЭ не подвергается изменениям, и тем самым повышается достоверность результатов расчета, так как выбор основной системы влияет на устойчивость и точность решения.

3 Стержневая система разбивается в узлах на отдельные элементы. Как правило, узловыми точками являются точки разрыва статических и кинематических параметров стержней.

Сетки дискретизации расчетных схем по МГЭ и МКЭ совпадают, если перемещения стержней точно описываются полиномами. Если перемещения описываются гиперболическими и тригонометрическими функциями, то сетка МКЭ содержит больше стержней, чем сетка МГЭ при одинаковой точности результатов расчета.

4 МГЭ имеет больший порядок разрешающей системы уравнений, чем методы сил и перемещений, но существенно более простую логику алгоритма, чем другие методы.

При формировании разрешающей системы уравнений МГЭ исключает такие операции как транспонирование, перемножение, обращение матриц, сведение заданной нагрузки к эквивалентной узловой. Матрицы МГЭ формируются на базе интегрального уравнения – решения задачи Коши, в котором по циклу меняются длина и нагрузка стержней.

Можно заключить, что МГЭ имеет максимум арифметических операций и минимум логики алгоритма, т.е. содержит все признаки машинных методов расчета, а больший порядок разрешающей системы уравнений позволяет получить более полную информацию о напряженно-деформированном состоянии системы.

5 МГЭ состоит из решения задачи Коши в матричной форме и краевой задачи для линейных алгебраических уравнений относительно начальных и конечных параметров всех стержней. Для решения системы уравнений МГЭ целесообразно применять метод исключения Гаусса без выбора ведущих элементов или с ограниченным выбором ведущих элементов.

6 МГЭ приводит к образованию хорошо обусловленных и сильно разреженных матриц коэффициентов $\boldsymbol{A}_*$ общего вида (не симметричных и не положительно определенных).

Матрица $\boldsymbol{A}$ имеет клеточную (блочную) структуру, которая затем нарушается после операции $\boldsymbol{A}_*=\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{C}$ и перестановки строк. Использование метода Гаусса без выбора ведущих элементов не приводит к накоплению ошибок при операциях исключениях. Связано это с большой разреженностью матрицы $\boldsymbol{A}_*$, в результате чего в каждой строке число ненулевых элементов невелико и, следовательно, мало число операций исключения.

Наличие жесткостных параметров EI, EA, GI_k, GA и т.д. в матрице $\boldsymbol{X}_*$ естественным образом масштабирует матрицу $\boldsymbol{A}$, создавая в ней набор чисел, убывающих по мере удаления от главной диагонали. Определитель матрицы $\boldsymbol{A}$ в безразмерных величинах равен единице. Вместе с системой граничных значений ортонормированных фундаментальных функций это способствует хорошей устойчивости решения системы уравнений (1.46).

7 МГЭ имеет значительные резервы экономии времени работы и памяти компьютера. Эти резервы состоят в следующем.

7.1 Ненулевые элементы матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ определяются из набора фундаментальных функций, а в матрице $\boldsymbol{C}$ – из анализа матриц $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$. При этих условиях в памяти ЭВМ можно хранить только ненулевые элементы матриц $\boldsymbol{A}_*$, $\boldsymbol{B}$.

7.2 Не представляется целесообразным вычислять все неизвестные параметры вектора $\boldsymbol{X}_*$. Решение системы уравнений (1.46) можно прекратить, как только будут определены все неизвестные начальные параметры стержней, т.е. обратный ход метода Гаусса может быть сокращен.

Для упорядоченного определения всех начальных параметров конечные граничные параметры можно сгруппировать в верхней части

матрицы $\boldsymbol{X}_*$, т.е. наряду с перестановкой строк можно использовать операцию перестановки столбцов.

7.3 Прямой и часть обратного хода метода Гаусса можно выполнять только над ненулевыми элементами матриц $\boldsymbol{A}_*$, $\boldsymbol{B}$.

8 МГЭ позволяет учесть различные факторы реальных конструкций. Для этого необходимо рассмотреть более точное дифференциальное уравнение и аналитически решить соответствующую задачу Коши. Далее уточненное решение необходимо применить в схеме (1.46).

9 Топологическая матрица $\boldsymbol{C}$ содержит компенсирующие элементы, которые отражают геометрические особенности линейной системы в узлах. Набор ее ненулевых элементов зависит от принятого ориентированного графа и инвариантен по отношению к виду расчета (статическому, динамическому, бифуркационому).

10 МГЭ позволяет без промежуточных операций переходить от краевой задачи определения начальных параметров к вычислению напряженно-деформированного состояния во внутренних точках стержней.

11 Между МГЭ и МКЭ существует связь. Матрица жесткости КЭ может быть получена из уравнения МГЭ (2.23) при решении задач деформирования от единичных линейных и угловых перемещений.

12 МГЭ относится к точным методам определения спектров частот собственных колебаний и критических сил потери устойчивости упругих систем.

13 МГЭ исключает возможность появления фиктивных и пропуск действительных собственных значений, так как расчетные схемы конструкций не подвергаются изменениям и представляют собой заданные наборы стержней с бесконечными числами степеней свободы.

14 Определение спектра собственных значений упругих систем сводится к поиску корней трансцендентного уравнения $|\boldsymbol{A}_*(\omega,F)|=0$, где $\boldsymbol{A}_*$– матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений МГЭ. Корни трансцендентного уравнения (3.2) наиболее просто определяются методом последовательного перебора в сочетании с прямым ходом метода исключения Гаусса. Алгоритм МГЭ объединяет в себе преимущества МКЭ, метода перемещений (отсутствие точек разрыва 2-го рода в трансцендентном уравнении для собственных значений, возможность определения точного спектра, простота логики формирования уравнения (3.2) и т.д.) и отбрасывает их недостатки. Достигается это ценой более высокого порядка частотного уравнения по сравнению с существующими методами.

15 Учет сосредоточенных масс и сил инерции линейно подвижных стержней выполняется путем увеличения распределенных масс связанных с ними несвободных стержней по формуле (3.21), а также уточнением динамических расчетных схем конструкций по методике п.3.6.1.

16 Алгоритм МГЭ в наибольшей степени приспособлен для решения неконсервативных задач устойчивости упругих систем любой структуры по сравнению с существующими методами.

17 Учет неконсервативных сжимающих сил в МГЭ обеспечивается топологической матрицей $\boldsymbol{C}$, где каждый вариант поведения сжимающей силы имеет свой набор ненулевых компенсирующих элементов.

18 Для линейных систем, нагруженных неконсервативными силами, существует спектр критических сил и криволинейных форм равновесия, как и при действии консервативных сил. В линейных системах спектры эйлеровых и неконсервативных критических сил могут накладываться друг на друга. Поэтому действие неконсервативных сжимающих сил может существенно понизить первую неконсервативную критическую силу.

19 Флаттер упругой системы можно прекратить не только наложением дополнительных связей, снижением уровня нагружения, но и переводом системы в смежную форму равновесия.

20 Упругие системы обладают возможностью внезапного перехода во флаттер. Такая возможность возникает при определенных величинах неконсервативных нагрузок, при которых начальные формы равновесия системы перестают существовать.

21 При одинаковых по величине консервативных и неконсервативных сжимающих сил флаттер не наступает и имеет место только эйлеров тип потери устойчивости.

РАЗДЕЛ II ПЛАСТИНЧАТЫЕ СИСТЕМЫ

Изложенные выше вопросы теории и практического применения одномерного варианта МГЭ показывают его эффективность и преимущества перед МКЭ, МКР, методами сил, перемещений, смешанным методом, методом начальных параметров и другими методами. Не попавшие в наше поле зрения другие задачи механики линейных систем (соответственно и линейные задачи электротехники, теплотехники, гидравлики, физики и т.д.) также могут решаться предложенным алгоритмом. Для этого любую задачу необходимо представить в форме решения задачи Коши (1.40) и далее применять алгоритм краевой задачи (1.46) – алгоритм одномерного варианта МГЭ.

Заметим, что форма (1.40) есть аналитическое решение линейной задачи, а схема решения краевой задачи (1.46) – численное определение начальных и, если требуется, конечных параметров. Теоретически определение граничных параметров линейной системы из уравнения (1.46) можно выполнить аналитически, но целесообразней применять численный метод исключения Гаусса, т.к. трудности аналитического решения резко увеличиваются с ростом порядка матрицы A_*. Поэтому данное сочетание задачи Коши и численного решения краевой задачи позволяют определить предложенный одномерный вариант МГЭ как численно-аналитический метод решения дифференциальных уравнений независимо от физического содержания задачи. Если требуется решить задачу для линейной системы, состояние каждого элемента которой описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, то всегда можно применить предложенный выше алгоритм. Если состояние элементов описывается дифференциальными уравнениями в частных производных(пластинчатые и оболочечные системы), то для применения одномерного варианта МГЭ нужны дополнительные преобразования, сводящие дифференциальные уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальных уравнениям. В математике, как известно, возможность понижения мерности исходной задачи существует. В механике такую процедуру выполняет вариационный метод, предложенный с разных позиций выдающимися советскими учеными академиком Л.В. Канторовичем и членом-корреспондентом АН СССР В.З. Власовым, который носит их имя.

В этой связи весьма перспективной представляется проблема объединения одномерного варианта МГЭ и вариационного метода Канторовича-Власова. Очевидно, что от этого объединения возможности МГЭ и метода Канторовича-Власова существенно увеличатся. Впервые эта проблема освещена в работах авторов [217-232]. Изложению этого вопроса в отдельных задачах теории пластин и посвящен материал данного раздела.

ГЛАВА 7 ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТОНКИХ ПЛАСТИН

7.1 Вариационный метод Канторовича-Власова сведения двумерных задач к одномерным

Согласно принципу возможных перемещений сумма возможных работ всех внешних и внутренних сил упругой пластины на всяком возможном бесконечно малом изменении перемещений равна нулю. Применительно к изгибу тонких прямоугольных пластин вариационное уравнение этого принципа имеет вид [317]

$$\iint q(x,y)\delta w(x,y)dxdy = \iint D\nabla^2\nabla^2 w(x,y)\delta w(x,y)dxdy, \qquad (7.1)$$

где $q(x,y)$ – поперечная нагрузка на платину; $\delta w(x,y)$- вариация поперечного (возможного) перемещения; $D=E\,h^3/12\left(1-\mu^2\right)$ - цилиндрическая жесткость; μ - коэффициент Пуассона; ∇^2- оператор Лапласа. Разложим прогиб $w(x,y)$ в функциональный ряд

$$w(x,y)=W_1(x,y)X_1(x)+W_2(y)X_2(x)+...+W_i(y)X_i(x)+... \quad , (7.2)$$

где $X_i(x)$, $i=\overline{1,\infty}$ - заданная система функций от переменной x; $W_i(y), i=\overline{1,\infty}$ - искомая система функций другой переменной y. Здесь предполагается, что прогиб $w(x,y)$ является обобщенной разделяющейся функцией, как и в методе Фурье разделения переменных [122]. Усечем ряд (7.2) до одного члена и возьмем вариацию прогиба только по направлению переменной y

$$\delta w(x,y)=X_1(x)\delta W_1(y), \qquad (7.3)$$

что равносильно принятию расчетной схемы тонкой пластины, имеющей бесконечное число степеней свободы в одном направлении и одну степень свободы в другом направлении. В этом положении заложено большое преимущество метода Канторовича-Власова перед другими методами, где не рассматривается модель пластины с бесконечным числом степеней свободы хотя бы в одном направлении.

Подставляя (7.3) в (7.1), получим

$$\int_0^l\left\{\int_0^{l_1}\left[\nabla^2\nabla^2 w(x,y)-q(x,y)/D\right]X_1(x)dx\right\}\delta W_1(y)dy=0, \qquad (7.4)$$

откуда следует, что

$$\int_0^{l_1}\left[\nabla^2\nabla^2 w(x,y)-q(x,y)/D\right]X_1(x)dx=0. \qquad (7.5)$$

Это уравнение определяет основную процедуру вариационного метода Канторовича-Власова, являющегося развитием более общего метода Фурье разделения переменных применительно к уравнениям теории упругости. Для сведения дифференциального уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению необходимо использовать разложение (7.2) и выполнить операции в (7.5), т.е. умножить обе части исходного дифференциального уравнения на выбранную функцию $X_1(x)$ и проинтегрировать в пределах характерного размера пластины (для прямоугольной пластины это ее ширина). Точное решение получается, когда ряд (7.2) не усекается, а из (7.5) следует бесконечная система линейных дифференциальных уравнений и расчетная схема имеет бесконечное число степеней свободы в двух направлениях. При этом весьма удобно использовать ортогональную систему функций $X_i(x)$. В этом случае будут равны нулю многие побочные коэффициенты системы линейных дифференциальных уравнений (7.5) и она существенно упростится, а при шарнирном опирании вообще распадается на отдельные уравнения. В расчетной практике весьма редко используют два и более членов ряда (7.2), ограничиваясь только первым приближением. Связано это с высокой точностью получаемых результатов, вследствие, как представляется, незначительного расхождения между приближенной схемой и реальным объектом. Формально это выражается в надлежащем выборе функции $X(x)$. Чем точнее она описывает какой-либо параметр в направлении оси OX, тем меньше погрешность результата.

Сходимость ряда (7.2) обусловлена тем, что прогиб $w(x,y)$ и правая часть $q(x,y)$ (она тоже разлагается в ряд по ортогональной системе функций $X_i(x)$) во всей области, занимаемой пластиной, удовлетворяют условиям Дирихле, т.е. имеют конечное число разрывов 1-го рода и конечное число максимумов и минимумов.

Проф. В.З. Власов показал также, что преобразования, аналогичные преобразованиям (7.5), необходимо выполнять для изгибающего момента, приведенной поперечной силы и статическим граничным условиям. При этом получаются одномерные граничные условия и статические параметры, а роль кинематических параметров выполняют функции $W(y)$ и $W'(y)=\theta(y)$. Обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (7.5) и уже обобщенные начальные параметры образуют задачу Коши для двумерного объекта, а краевая задача может быть решена одномерным вариантом МГЭ.

7.2 Изгиб прямоугольных пластин

В технической теории изгиба тонких прямоугольных пластин уравнение равновесия ее элементарной части приводится к виду (уравнение Жермен-Лагранжа)

$$\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4}=\frac{q(x,y)}{D} \tag{7.6}$$

Кинематические параметры (прогиб и углы поворота нормалей)

$$w(x,y);\theta_x(x,y)=\frac{\partial w(x,y)}{\partial y};\ \theta_y(x,y)=\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}. \tag{7.7}$$

Статические параметры (изгибающие, крутящие моменты и поперечные силы)

$$M_x(x,y)=-D\left[\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right];M_y(x,y)=-D\left[\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}\right]; \tag{7.8}$$

$$H_x(x,y)=-H_y(x,y)=-D(1-\mu)\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y}; \tag{7.9}$$

$$V_x(x,y)=-D\left[\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x\partial y^2}\right];V_y(x,y)=-D\left[\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^2\partial y}\right]; \tag{7.10}$$

Приведенные поперечные силы

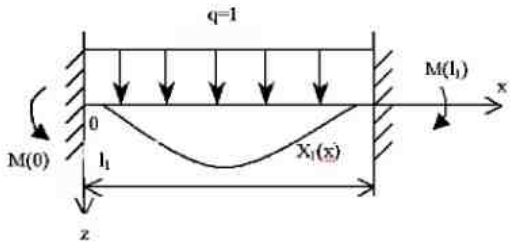
$$\begin{aligned} Q_x(x,y)&=-D\left[\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x\partial y^2}\right];\\ Q_y(x,y)&=-D\left[\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^2\partial y}\right]. \end{aligned} \tag{7.11}$$

7.2.1 Выбор функции поперечного распределения прогибов пластины

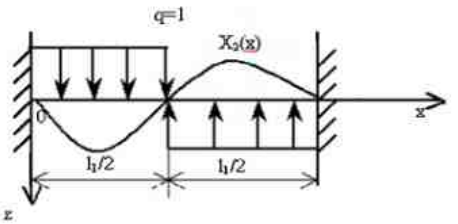
Заданную безразмерную систему функций $X_i(x)$ необходимо выбрать такой, чтобы она максимально точно описывала форму изогнутой поверхности пластины в направлении оси OX. Очевидно, этому требованию удовлетворяют кривые прогиба балки, имеющей такие же условия опирания, как и пластина в

направлении оси OX. Здесь рекомендуется два способа для выбора функции $X_i(x)$ [63]:

1 Статический, когда прогиб балки определяется статической нагрузкой (рисунок 7.1)



$$X_1(x)=\left(\frac{x}{l_1}-2\frac{x^3}{l_1^3}+\frac{x^4}{l_1^4}\right)+M(0)\left(8\frac{x}{l_1}-12\frac{x^2}{l_1^2}+4\frac{x^3}{l_1^3}\right)+$$
$$+M(l_1)\left(4\frac{x}{l_1}-4\frac{x^3}{l_1^3}\right);M(0)=M(l_1)=-\frac{1}{12}$$



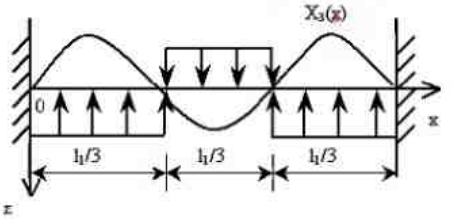
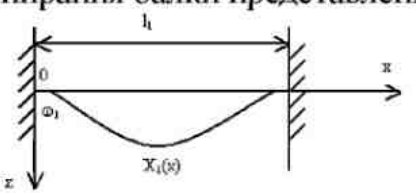


Рисунок 7.1

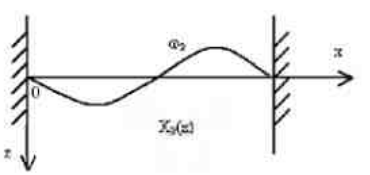
Нагрузка должна быть такой, чтобы последовательно чередовались симметричные и кососимметричные формы кривой прогиба. Функции $X_i(x)$ представляются в виде степенных полиномов, которые легко дифференцировать, интегрировать и вычислять без применения сложных программ.

2 Динамический, когда прогибы балки представляются формами ее собственных колебаний (рисунок 7.2). Если в статическом способе необходимо строить функции $X_i(x)$ в зависимости от нагрузки и реакций балки, то в динамическом способе достаточно менять только значения собственных частот, что весьма удобно. Однако, применения функции $X_i(x)$ по этому способу возможно только с применением персональных компьютеров. Функции $X_1(x)$ (индекс 1 у этих функций в дальнейшем опущен) для различных условий опирания балки представлены в таблице 3.2, где $\lambda=\omega$.



$$X_1(x)=\sin(\omega_1 x/l_1)-sh(\omega_1 x/l_1)-\alpha_*[\cos(\omega_1 x/l_1)-ch(\omega_1 x/l_1)];$$

$$\alpha_*=\frac{\sin\omega_1-sh\omega_1}{\cos\omega_1-ch\omega_1};\quad \omega_1=4.73004075$$



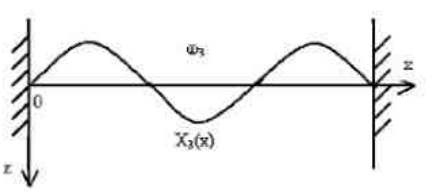


Рисунок 7.2

7.2.2 Фундаментальные решения

Прогиб точки срединной плоскости пластины представим одним членом ряда (7.2)

$$w(x,y)=W(y)X(x) \tag{7.12}$$

Подставляя (7.12) в (7.6), (7.8), (7.11), умножая обе части этих равенств на $X(x)$ и интегрируя в пределах $[0,l_1]$, получим задачу Коши одномерной модели изгиба прямоугольной пластины

$$W^{IV}(y)-2r^2W''(y)+s^4W(y)=q(y)/D;$$

$$DW(0);\ D\theta(0)=DW'(0);\ M(0)=-DA\left[W''(0)-\mu r^2W(0)\right]; \tag{7.13}$$

$$Q(0)=-DA\left[W'''(0)-(2-\mu)r^2W'(0)\right];$$

где $r^2=-B/A;\ S^4=C/A;\ q(y)=\int_0^{l_1}q(x,y)X(x)dx/A;$

$$A=\int_0^{l_1}X^2(x)dx;\ B=\int_0^{l_1}X''(x)X(x)dx;\ C=\int_0^{l_1}X^{IV}(x)X(x)dx. \tag{7.14}$$

Кинематические и статические параметры изгиба пластины предстанут так

$$\theta_x(x,y)=W(y)X'(x);\ \theta_y(x,y)=W'(y)X(x); \tag{7.15}$$

$$M_x(x,y)=-D\left[W(y)X''(x)+\mu W''(y)X(x)\right];$$

$$M_y(x,y)=-D\left[W''(y)X(x)+\mu W(y)X''(x)\right]; \tag{7.16}$$

$$H_x(x,y)=-H_y(x,y)=-D(1-\mu)W'(y)X'(x); \tag{7.17}$$

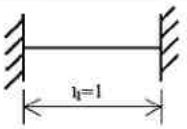
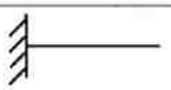
$$V_x(x,y)=-D\left[W_yX'''(x)+W''(y)X'(x)\right];\ V_y(x,y)=-D\left[W'''(y)X(x)+W'(y)X''(x)\right]; \tag{7.18}$$

Из (7.16) и (7.18) следует, что для свободных продольных кромок пластины в направлении оси OX $M_x(0,y)\neq 0;M_x(l_1,y)\neq 0;V_x(0,y)\neq 0;V_x(l_1,y)\neq 0,$ т.е. не удовлетворяются статические однородные краевые условия. Данная некорректность модели изгиба прямоугольной пластины практически не

сказывается на точности расчетов [63]. В направлении оси OY краевые условия автоматически удовлетворяются искомой функцией $W(y)$

Значения коэффициентов A, B, C из выражений (7.14) для функций $X(x)$ по таблице 3.2 представлены в таблице 7.1.

Таблица 7.1

Условия опирания пластины	Коэффициенты уравнения (7.13)			
	A	B	C	$\gamma_q(\omega)$
	1.03593604	-12.744725	518.5521	0.845658712
	0.998446857	-11.4946506	237.351635	0.859332803
	1.85564166	1.592594	22.94006	1.06660652
	0.5	-4.934801	48.70452	0.6366199

Интегралы вычислялись по формуле Симпсона с шагом h=0.1·10^{-3} в режиме двойной точности. Достоверность работы программы доказывалась аналитическим вычислением отдельных интегралов. Текст программ на языках Fortran и Pascal представлен в приложении.

Решение уравнения (7.13) зависит от корней характеристического уравнения, которые представляются выражением

$$k_{1-4} = \pm\sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}} \tag{7.19}$$

Вид фундаментальных функций, как следует из (7.19), определяется соотношением между r и s, которое зависит от граничных условий на продольных кромках пластины. Решение задачи Коши (7.13) можно представить по алгоритму п.1.3 в матричной форме (знаки минус для случая, когда ось OZ пластины направлена “вниз”)

$$\begin{bmatrix} DW(y) \\ D\theta(y) \\ M(y) \\ Q(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{22} & A_{12} \\ -A_{41} & -A_{31} & A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DW(0) \\ D\theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} + \int_0^y \begin{bmatrix} A_{14}(y-\xi) \\ A_{13}(y-\xi) \\ -A_{12}(y-\xi) \\ -A_{11}(y-\xi) \end{bmatrix} q(\xi)d\xi \quad (7.20)$$

Положительные направления обобщенных кинематических и статических параметров одномерной модели изгиба прямоугольной пластины совпадают с положительными направлениями соответствующих параметров изгиба прямолинейного стержня, которые представлены на рисунке 1.10. Положительное направление поперечной нагрузки представлено на рисунке 1.8.

Таким образом, решение уравнения Жермен-Лагранжа по методу Канторовича- Власова будет заключаться в определении функции прогиба по (7.12), где функция $X(x)$ задана, а функция $W(y)$ определяется из (7.20) в виде

$$DW(y) = A_{11} \cdot Dw(0) + A_{12} \cdot D\theta(0) - A_{13} \cdot M(0) - A_{14} \cdot Q(0) + \int_0^y A_{14}(y-\xi)q(\xi)d\xi \quad (7.21)$$

Фундаментальные ортонормированные функции и грузовые члены для $q(x,y)$ по (1.28) будут иметь вид:

1 **$|s|>|r|$ Случай жесткого защемления продольных кромок пластины**

Корни (7.19) комплексные $k_{1-4} = \pm\alpha \pm i\beta$;

$$\alpha = \sqrt{(s^2 + r^2)/2}; \quad \beta = \sqrt{(s^2 - r^2)/2};$$

$$\phi_1 = ch\alpha y \sin\beta y; \quad \phi_2 = ch\alpha y \cos\beta y;$$

$$\phi_3 = sh\alpha y \cos\beta y; \quad \phi_4 = sh\alpha y \sin\beta y; \quad (7.22)$$

$$A_{11} = \phi_2 + \frac{(1-\mu)r^2}{2\alpha\beta}\phi_4; \quad A_{12} = \frac{s^2 - \mu r^2}{2\beta s^2}\phi_1 + \frac{s^2 + \mu r^2}{2\alpha s^2}\phi_3;$$

$$A_{13}=\frac{\phi_4}{2\alpha\beta A};\quad A_{14}=\frac{\alpha\phi_1-\beta\phi_3}{2\alpha\beta s^2 A};$$

$$A_{21}=\frac{s^2+\mu r^2}{2\alpha}\phi_3-\frac{s^2-\mu r^2}{2\beta}\phi_1;\quad A_{22}=\phi_2+\frac{(1+\mu)r^2}{2\alpha\beta}\phi_4;\quad A_{23}=\frac{\alpha\phi_1+\beta\phi_3}{2\alpha\beta A};$$

$$A_{31}=\frac{A\left[\mu r^4(2-\mu)-s^4\right]}{2\alpha\beta}\phi_4;$$

$$A_{32}=\frac{A\left[-s^4+2(1-\mu)s^2r^2+\mu^2r^4\right]}{2\beta s^2}\phi_1+\frac{A\left[s^4+2(1-\mu)s^2r^2-\mu^2r^4\right]}{2\alpha s^2}\phi_3;$$

$$A_{41}=\frac{A\left[-s^4+2(1-\mu)s^2r^2+\mu^2r^4\right]}{2\beta}\phi_1-\frac{A\left[s^4+2(1-\mu)s^2r^2-\mu^2r^4\right]}{2\alpha}\phi_3;$$

$$B_{11}=q\left(\frac{\left\{r^2\phi_4(y-d_H)_+ +2\alpha\beta\left[H(y-d_H)-\phi_2(y-d_H)_+\right]\right\}\gamma_q(\omega)\Big|_{c_H}^{b}}{2\alpha\beta s^4 A}-\right. \tag{7.22}$$

$$\left.-\frac{\left\{r^2\phi_4(y-d_k)_+ +2\alpha\beta\left[H(y-d_k)-\phi_2(y-d_k)_+\right]\right\}\gamma_q\left(\omega\Big|_{c_k}^{b}\right)}{2\alpha\beta s^2 A}\right)+$$

$$+F\gamma_F(\omega)\frac{\alpha\phi_1(y-d_F)_+-\beta\phi_3(y-d_F)_+}{2\alpha\beta s^2 A}+$$

$$+M_y\gamma_{My}(\omega)\frac{\phi_4(y-d_M)_+}{2\alpha\beta A}+$$

$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\frac{\alpha\phi_1(y-d_M)_+-\beta\phi_3(y-d_M)_+}{2\alpha\beta s^2 A};$$

$$B_{21}=q\left\{\frac{\left[\alpha\phi_1(y-d_H)_+-\beta\phi_3(y-d_H)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^{b}}{2\alpha\beta s^2 A}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left[\alpha\phi_1(y-d_k)_+-\beta\phi_3(y-d_k)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^{b}}{2\alpha\beta s^2 A}\right\}+$$

$$+F\gamma_F(\omega)\frac{\phi_4(y-d_F)_+}{2\alpha\beta A}+$$
$$+M_y\gamma_{My}(\omega)\frac{\alpha\phi_4(y-d_M)_+ +\beta\phi_4(y-d_M)_+}{2\alpha\beta A}+$$
$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\frac{\phi_4(y-d_M)_+}{2\alpha\beta A};$$

$$B_{31}=q\left(\frac{\left\{2\mu\alpha\beta r^2\left[\phi_2(y-d_H)_+ -H(y-d_H)\right]+\left(s^4-\mu r^4\right)\phi_4(y-d_H)_+\right\}\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^{b}}{2\alpha\beta s^4}-\right.$$
$$\left.-\frac{\left\{2\mu\alpha\beta r^2\left[\phi_2(y-d_k)-H(y-d_k)\right]+\left(s^4-\mu r^4\right)\phi_4(y-d_k)_+\right\}\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^{b}}{2\alpha\beta s^4}\right)+$$
$$+F\gamma_F(\omega)\frac{\left(s^2-\mu r^2\right)\alpha\phi_1(y-d_F)_+ +\left(s^2+\mu r^2\right)\beta\phi_3(y-d_F)_+}{2\alpha\beta s^2}+ \qquad (7.22)$$
$$+M_y\gamma_{My}(\omega)\frac{2\alpha\beta\phi_2(y-d_M)_+ +(1-\mu)r^2\phi_4(y-d_M)_+}{2\alpha\beta}+$$
$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\frac{\left(s^2-\mu r^2\right)\alpha\phi_1(y-d_M)_+ +\left(s^2+\mu r^2\right)\beta\phi_3(y-d_M)_+}{2\alpha\beta s^2};$$

$$B_{41}=q\left(\frac{\left\{\alpha\left[2\beta^2-(1-\mu)r^2\right]\phi_1(y-d_H)_+ +\beta\left[2\alpha^2+(1-\mu)r^2\right]\phi_3(y-d_H)_+\right\}\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^{b}}{2\alpha\beta s^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\left\{\alpha\left[2\beta^2-(1-\mu)r^2\right]\phi_1(y-d_k)_+ +\beta\left[2\alpha^2+(1-\mu)r^2\right]\phi_3(y-d_k)_+\right\}\gamma_q(\omega)\Big|_{C_K}^{b}}{2\alpha\beta s^2}\right)+ \qquad (7.22)$$

$$+F\gamma_F(\omega)\left[\phi_2(y-d_F)_+ -\frac{(1-\mu)r^2}{2\alpha\beta}\phi_4(y-d_F)_+\right]+$$
$$+M_y\gamma_{My}(\omega)\left[\frac{s^2+\mu r^2}{2\alpha}\phi_3(y-d_M)_+ -\frac{s^2-\mu r^2}{2\beta}\phi_1(y-d_M)_+\right]+$$
$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\left[\phi_2(y-d_M)_+ -\frac{(1-\mu)r^2}{2\alpha\beta}\phi_4(y-d_M)_+\right];$$

$$\gamma_q(\omega)=\frac{l_1}{\omega}\left[-\cos\frac{\omega x}{l_1}-ch\frac{\omega x}{l_1}-\alpha_*\left(\sin\frac{\omega x}{l_1}-sh\frac{\omega x}{l_1}\right)\right];$$

$$\gamma_F(\omega)=\sin\frac{\omega C_F}{l_1}-sh\frac{\omega C_F}{l_1}-\alpha_*\left(\cos\frac{\omega C_F}{l_1}-sh\frac{\omega C_F}{l_1}\right);$$

$$\gamma_{Mx}(\omega)=\frac{\omega}{l_1}\left[-\cos\frac{\omega C_M}{l_1}+ch\frac{\omega C_M}{l_1}-\alpha_*\left(\sin\frac{\omega C_M}{l_1}+sh\frac{\omega C_M}{l_1}\right)\right];$$

$$\gamma_{My}(\omega)=\sin\frac{\omega C_M}{l_1}-sh\frac{\omega C_M}{l_1}-\alpha_*\left(\cos\frac{\omega C_M}{l_1}-ch\frac{\omega C_M}{l_1}\right);\ b=l_1.$$

2 **s=r Случай шарнирного опирания продольных кромок Решение М. Леви**

Корни (7.19) действительные и кратные

$$k_{1-4}=\pm\sqrt{r^2};$$

$$\phi_1=ychry;\ \phi_2=chry;\ \phi_3=shry;\ \phi_4=yshry;$$

$$A_{11}=\phi_2-\frac{(1-\mu)r}{2}\phi_4;\ A_{12}=\frac{(1-\mu)}{2}\phi_1+\frac{(1+\mu)}{2}\phi_3;\ A_{13}=\frac{\phi_4}{2rA};$$

$$A_{14}=\frac{r\phi_1-\phi_3}{2r^3A};\ A_{21}=\frac{r(1+\mu)}{2}\phi_3-\frac{(1-\mu)r^2}{2}\phi_1; \qquad (7.23)$$

$$A_{22}=\phi_2+\frac{(1-\mu)r}{2}\phi_4;\ A_{23}=\frac{1}{2A}\phi_1+\frac{1}{2rA}\phi_3;\ A_{31}=-\frac{(1-\mu)^2r^3A}{2}\phi_4;$$

$$A_{32}=A\left[(1-\mu)^2r^2\phi_1+(1-\mu)(3+\mu)r\phi_3\right]/2;$$

$$A_{41}=A\left[(1-\mu)^2r^4\phi_1-(1-\mu)(3+\mu)r^3\phi_3\right]/2;$$

$$B_{11}=q\left\{\frac{\left[r\phi_4(y-d_H)_+ +2H(y-d_H)-2\phi_2(y-d_H)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^{b}}{2r^4A}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left[r\phi_4(y-d_k)_+ +2H(y-d_k)-2\phi_2(y-d_k)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^{b}}{2r^4A}\right\}+$$

$$+F\gamma_F(\omega)\frac{r\phi_1(y-d_F)_+-\phi_3(y-d_F)_+}{2r^3A}+M_y\gamma_{My}(\omega)\frac{\phi_4(y-d_M)_+}{2rA}+$$

$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\frac{r\phi_1(y-d_M)_+-\phi_3(y-d_M)_+}{2r^3A};$$

$$B_{21}=q\left\{\frac{\left[r\phi_1(y-d_H)_+-\phi_3(y-d_H)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^b}{2r^3A}-\frac{\left[r\phi_1(y-d_k)_+-\phi_3(y-d_k)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^b}{2r^3A}\right\}+$$

$$+F\gamma_F(\omega)\frac{\phi_4(y-d_F)_+}{2rA}+M_y\gamma_{My}(\omega)\frac{\phi_3(y-d_M)_++r\phi_1(y-d_M)_+}{2rA}+ \quad (7.23)$$

$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\frac{\phi_4(y-d_M)_+}{2rA};$$

$$B_{31}=q\left\{\frac{\left[(1-\mu)r\phi_4(y-d_H)_++2\mu\phi_2(y-d_H)_+-2\mu H(y-d_H)\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^b}{2r^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left[(1-\mu)r\phi_4(y-d_k)_++2\mu\phi_2(y-d_k)_+-2\mu H(y-d_k)\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^b}{2r^2}\right\}+$$

$$+F\gamma_F(\omega)\frac{(1-\mu)r\phi_1(y-d_F)_++(1+\mu)\phi_3(y-d_F)_+}{2r}+$$

$$M_y\gamma_{My}(\omega)\frac{2r\phi_2(y-d_M)_++(1-\mu)r^2\phi_4(y-d_M)_+}{2r}+$$

$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\frac{(1-\mu)r\phi_1(y-d_M)_++(1+\mu)\phi_3(y-d_M)_+}{2r};$$

$$B_{41}=q\left\{\frac{\left[(3-\mu)\phi_3(y-d_H)_+-(1-\mu)r\phi_1(y-d_H)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^b}{2r}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left[(3-\mu)\phi_3(y-d_k)_+-(1-\mu)r\phi_1(y-d_k)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^b}{2r}\right\}+$$

$$+F\gamma_F(\omega)\left[\phi_2(y-d_F)_+-(1-\mu)r\phi_4(y-d_F)_+/2\right]+$$

$$+M_y\gamma_{My}(\omega)\left[(1+\mu)r\phi_3(y-d_M)_+-(1-\mu)r^2\phi_1(y-d_M)_+\right]/2+ \quad (7.23)$$
$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\left[\phi_2(y-d_M)_+-(1-\mu)r\phi_4(y-d_M)_+/2\right].$$

$$\gamma_q(\omega)=\frac{l_1}{\omega}\left(-\cos\frac{\omega x}{l_1}\right);\ \gamma_F(\omega)=\sin\frac{\omega C_F}{l_1};\ \gamma_{My}(\omega)=\sin\frac{\omega C_M}{l_1};$$

$$\gamma_{Mx}(\omega)=\frac{\omega}{l_1}\left(-\cos\frac{\omega C_M}{l_1}\right).$$

3 |s|<|r| Случай свободных продольных кромок

Корни (7.19) действительные и разные $\lambda_1=\sqrt{r^2+\sqrt{r^4-s^4}}$; $\lambda_2=\sqrt{r^2-\sqrt{r^4-s^4}}$;

$$\phi_1=sh\lambda_2 y;\ \phi_2=ch\lambda_1 y;\ \phi_3=sh\lambda_1 y;\ \phi_4=ch\lambda_2 y;$$

$$A_{11}=\frac{\lambda_1^2\phi_4-\lambda_2^2\phi_2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2};\ A_{12}=\frac{\lambda_1\phi_3-\lambda_2\phi_1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2};\ A_{13}=\frac{\phi_2-\phi_4}{A\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)};$$

$$A_{14}=\frac{\lambda_2\phi_3-\lambda_1\phi_1}{A\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)};\ A_{21}=\lambda_1\lambda_2\frac{\lambda_1\phi_1-\lambda_2\phi_3}{\lambda_1^2-\lambda_2^2};\ A_{22}=\frac{\lambda_1^2\phi_2-\lambda_2^2\phi_4}{\lambda_1^2-\lambda_2^2};$$

$$A_{23}=A_{12}/A;\ A_{31}=A\left(\lambda_1\lambda_2\right)^2\frac{\phi_4-\phi_2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2};\ A_{32}=A\frac{\lambda_1^3\phi_3-\lambda_2^3\phi_1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2};$$

$$A_{41}=A\lambda_1\lambda_2\frac{\lambda_2^3\phi_3-\lambda_1^3\phi_1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2};$$

$$B_{11}=q\left\{\frac{\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\phi_2(y-d_H)_+-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}H(y-d_H)-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\phi_4(y-d_H)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^{b}}{\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)A}-\right.$$
$$\left.-\frac{\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\phi_2(y-d_k)_+-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}H(y-d_k)-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\phi_4(y-d_k)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^{b}}{\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)A}\right\}+ \quad (7.24)$$

$$+F\gamma_F(\omega)\frac{\lambda_2\phi_3(y-d_F)_+-\lambda_1\phi_1(y-d_F)_+}{\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)A}+$$

$$+M_y\gamma_{My}(\omega)\frac{\phi_2(y-d_M)_+-\phi_4(y-d_M)_+}{\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)A}+$$

$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\frac{\lambda_2\phi_3(y-d_M)_+-\lambda_1\phi_1(y-d_M)_+}{\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)A};$$

$$B_{21}=q\left\{\frac{\left[\frac{1}{\lambda_1}\phi_3(y-d_H)_+-\frac{1}{\lambda_2}\phi_4(y-d_H)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^{b}}{\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)A}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left[\frac{1}{\lambda_1}\phi_3(y-d_k)_+-\frac{1}{\lambda_2}\phi_4(y-d_k)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^{b}}{\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)A}\right\}+$$

$$+F\gamma_F(\omega)\frac{\phi_2(y-d_F)_+-\phi_4(y-d_F)_+}{\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)A}+$$

$$+M_y\gamma_{My}(\omega)\frac{\lambda_1\phi_3(y-d_M)_+-\lambda_2\phi_1(y-d_M)_+}{\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)A}+$$

$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\frac{\phi_2(y-d_M)_+-\phi_4(y-d_M)_+}{\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)A};$$

$$B_{31}=q\left\{\frac{\left[\phi_2(y-d_H)_+-\phi_4(y-d_H)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^{b}}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}-\right. \tag{7.24}$$

$$\left.-\frac{\left[\phi_2(y-d_k)_+-\phi_4(y-d_k)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^{b}}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\right\}+$$

$$+F\gamma_F(\omega)\frac{\lambda_1\phi_3(y-d_F)_+-\lambda_2\phi_1(y-d_F)_+}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}+$$

$$+M_y\gamma_{My}(\omega)\frac{\lambda_1^2\phi_2(y-d_M)_+-\lambda_2^2\phi_4(y-d_M)_+}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}+$$

$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\frac{\lambda_1\phi_3(y-d_M)_+-\lambda_2\phi_1(y-d_M)_+}{\lambda_1^2-\lambda_2^2};$$

$$B_{41}=q\left\{\frac{\left[\lambda_1^3\phi_1(y-d_H)_+-\lambda_2^3\phi_3(y-d_H)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^{b}}{\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left[\lambda_1^3\phi_1(y-d_k)_+-\lambda_2^3\phi_3(y-d_k)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^{b}}{\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)}\right\}+$$

$$+F\gamma_F(\omega)\frac{\lambda_1^2\phi_4(y-d_F)_+-\lambda_2^2\phi_2(y-d_F)_+}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}+$$

$$+M_y\gamma_{My}(\omega)\frac{\lambda_1^2\lambda_2\phi_1(y-d_M)_+-\lambda_1\lambda_2^2\phi_3(y-d_M)_+}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}+$$

$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\frac{\lambda_1^2\phi_4(y-d_M)_+-\lambda_2^2\phi_2(y-d_M)_+}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}.$$

4 s=0 Стесненное кручение пластины

Корни (7.19) действительные и кратные $k_{1,2}=0;\ k_{3,4}=\pm r_1;\ r_1=-2B/A;$

$$\phi_1=shr_1y;\ \phi_2=1;\ \phi_2=y;\ \phi_3=chr_1y;\ A_{11}=1;\ A_{12}=shr_1y/r_1;$$

$$A_{13}=\left(chr_1y-1\right)/r_1^2A;\ A_{14}=\left(shr_1y-r_1y\right)/r_1^3A;\ A_{22}=chr_1y;$$

$$A_{21}=A_{31}=A_{41}=A_{42}=A_{43}=0;\ A_{23}=A_{12}/A;\ A_{32}=r_1shr_1y;\ A_{44}=1;$$

$$B_{11}=q\left\{\frac{\left[chr_1(y-d_H)_+-H(y-d_H)-0.5r_1^2(y-d_H)_+^2\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^{b}}{r_1^4A}-\right.$$

$$-\frac{\left[chr_1(y-d_k)_+ - H(y-d_k) - 0.5r_1^2(y-d_k)_+^2\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^{b}}{r_1^4 A}\Bigg\} +$$

$$+F\gamma_F(\omega)\frac{shr_1(y-d_F)_+ - r_1(y-d_F)_+}{r_1^3 A} +$$

$$+M_y\gamma_{My}(\omega)\frac{chr_1(y-d_M)_+ - H(y-d_M)_+}{r_1^2 A} +$$

$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\frac{shr_1(y-d_M)_+ - r_1(y-d_M)_+}{r_1^3 A};$$

$$B_{21} = q\Bigg\{\frac{\left[shr_1(y-d_H)_+ - r_1(y-d_H)\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^{b}}{r_1^3 A} -$$

$$-\frac{\left[shr_1(y-d_k)_+ - r_1(y-d_k)\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^{b}}{r_1^3 A}\Bigg\} + \qquad (7.25)$$

$$+F\gamma_F(\omega)\frac{\left[shr_1(y-d_F)_+ - H(y-d_F)\right]}{r_1^2 A} +$$

$$+M_y\gamma_{My}(\omega)\frac{shr_1(y-d_M)_+}{r_1 A} +$$

$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\frac{chr_1(y-d_M)_+ - H(y-d_M)_+}{r_1^2 A};$$

$$B_{31} = q\Bigg\{\frac{\left[chr_1(y-d_H)_+ - H(y-d_H)\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^{b}}{r_1^2} -$$

$$-\frac{\left[chr_1(y-dk)_+ - H(y-d_k)\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^{b}}{r_1^2}\Bigg\} +$$

$$+F\gamma_F(\omega)\frac{shr_1(y-d_F)_+}{r_1}+$$

$$+M_y\gamma_{My}(\omega)chr_1(y-d_M)_+ +$$

$$+M_x\gamma_{Mx}(\omega)\frac{shr_1(y-d_M)_+}{r_1};$$

$$B_{41}=q\left[(y-d_H)_+\gamma_q(\omega)\Big|_{C_H}^{b}-(y-d_k)_+\gamma_q(\omega)\Big|_{C_k}^{b}\right]+F\gamma_F(\omega)H(y-d_F)+$$
$$+M_y\gamma_{My}(\omega)\delta(y-d_M)+M_x\gamma_{Mx}(\omega)H(y-d_M).$$

7.2.3. Оценка точности метода Канторовича-Власова

Рассмотрим случай изгиба квадратной пластины с шарнирным опиранием всех кромок. В этом случае совместная система линейных дифференциальных уравнений (7.5) распадается на отдельные уравнения и сравнительно просто можно определить несколько членов ряда (7.2). Уравнение (7.20) для данной задачи преобразуется следующим образом (при y=l=1)

	1	2	3	4						
1		A_{12}		$-A_{14}$	$DW(0)=0;$		$DW(l)=0$		$-B_{11}$	2
2	-1	A_{22}		$-A_{13}$	$D\theta(0)$		$D\theta(l)$	=	$-B_{21}$	1
3		$-A_{32}$		A_{12}	$M(0)=0;$		$M(l)=0$		B_{31}	4
4		$-A_{31}$	-1	A_{11}	$Q(0)$		$Q(l)$		B_{41}	3

(7.26)

Для граничных условий на продольных кромках $X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l_1}$, n=1,2,3,4,… Прогиб в центре пластины предстанет рядом

$$DW(1/2,1/2)=D[W_1(1/2)-W_3(1/2)+W_5(1/2)-W_7(1/2)+...].$$

Здесь четные значения $X_n(1/2)=0$. Величина $W(y)$ определяется по формуле

$$DW(y)=A_{12}(y)D\theta(0)-A_{14}(y)Q(0)+B_{11}(y),$$

а начальные параметры из уравнения (7.26). Для квадратной пластины, нагруженной сосредоточенной силой в центре, получим

$$DW_1(1/2)=107{,}66533\cdot10^{-4};\ DW_3(1/2)=-5{,}96245\cdot10^{-4};$$

$$DW_5(1/2)=1{,}28613\cdot10^{-4};\ DW_7(1/2)=-0{,}44462\cdot10^{-4}; \qquad (7.27)$$

$$DW_9(1/2)=0{,}22120\cdot10^{-4};$$

Сумма 5 членов дает значение прогиба в центре квадратной шарнирно опертой пластины $(\mu=0{,}3)$ $DW(1/2,1/2)=115{,}57973\cdot10^{-4}$.Видно, что величина прогиба по вариационному методу сходится к точному значению $DW(1/2,1/2)=116{,}0\cdot10^{-4}$ [317]. Из результатов (7.27) следует также, что первый член ряда (7.2) содержит почти 93% точного значения прогиба при сосредоточенной нагрузке. Такое быстрое приближение к точному результату является особенностью и большим преимуществом метода Канторовича-Власова.

Для жесткого защемления и шарнирного опирания кромок квадратной пластины погрешности метода Канторовича-Власова при использовании одного члена ряда представлены в таблице 7.2. Анализ данных этой таблицы показывает, что предельно возможная погрешность для напряжений не превосходит 5-6%. Для прогибов погрешность больше только для сосредоточенных нагрузок и достигает 8,0%. Отметим, что характерной особенностью метода Канторовича-Власова является наибольшее расхождение с точными результатами у квадратных пластин, а для прямоугольных пластин погрешность уменьшается [30]. Все это подтверждает вывод о том, что для нужд инженерного расчета вполне достаточно использовать только один член ряда (7.2). Погрешность метода при других комбинациях граничных условий будет находиться в пределах, представленных таблицей 7.2. При этом всегда соблюдается соответствие: если нагрузка кусочно-непрерывная функция, то результаты метода больше эталонных, если нагрузка сосредоточенная, то – меньше. Очевидно, это связано с тем, что один член разложения описывает кусочно-непрерывную нагрузку с избытком, а сосредоточенную – с недостатком.

К положительным элементам одномерного варианта МГЭ (простота логики формирования разрешающей системы уравнений, хорошая устойчивость численного процесса, непосредственное определение начальных параметров каждого обобщенного стержня из разрешающей системы и т.д.) добавляются факторы, существенно важные для расчета пластинчатых систем. Ядра интегральных уравнений (функции Грина) в МГЭ не содержат сингулярных точек. По этой причине уравнение (7.20) снимает проблему вычисления многомерных сингулярных интегралов. Исключается и проблема построения численного решения в окрестностях угловых точек пластины, что весьма актуально в прямом методе граничных элементов [29]. Как будет показано ниже, этот момент позволяет существенно повысить точность

решения задач устойчивости тонких пластин по алгоритму МГЭ. Использование обобщенных функций для описания нагрузки $q(x,y)$ в (1.28) также приводит к неожиданным результатам. Реальной становится возможность вычисления касательных и нормальных напряжений в точках приложения сосредоточенных нагрузок. В этих точках, в частности, поперечная сила $Q_x = 0{,}25F(1/\Delta x) \to \infty$ при $\Delta x \to 0$ [5,с.173]. Здесь можно отметить, что неопределенность в значениях сил и моментов возникает от величины (1/Δx), которая при Δx→0 становится дельта-функцией Дирака. Применение фильтрующего свойства дельта-функции и ее производных в интегральных соотношениях уравнения (7.20) позволяет раскрыть неопределенность в сингулярных точках пластины, а использование одного члена ряда (7.2) уменьшает точное значение пределов не более, чем на 10-15%. Характерно, что точки приложения сосредоточенных нагрузок являются значительными концентраторами напряжений. Так, согласно таблице 7.2, для жестко защемленной пластины отношение изгибающих моментов в середине и заделке равно: $M_y(1/2,1/2)/M_y(1/2,0) = 0{,}456$ при равномерно распределенной нагрузке; 1,615 при сосредоточенной силе в центре пластины; 3,013 при сосредоточенном изгибающем моменте в центре пластины. Такие же отношения для жестко защемленной балки соответственно равны: 0,5; 1,0; 2,0. Скачок изгибающего момента в точке приложения сосредоточенного момента в 2,52 раза больше скачка по балочной теории, при шарнирном опирании этот скачок больше в 2,0 раза и т.д. Подобные результаты нельзя получить, пользуясь классическими методами решения задач теории упругости (см., например, [47, 262, 317] и др.), а математический аппарат МГЭ позволяет выявлять концентрации напряжений в сингулярных точках.

Рассмотрим возможность дискретизации отдельной пластины на подобласти с помощью алгоритма МГЭ.

Пример 7.1. Определить прогиб в центре дискретизированной пластины (рисунок 7.3), нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

1 Разбиваем жестко защемленную по периметру пластину на 3 подобласти. Каждая подобласть может быть представлена обобщенным стержнем, начало и конец которого показаны стрелкой. Граничные точки обозначены цифрами. Положение обобщенного стержня в подобласти не определено и поэтому он представляет собой “плавающую” модель в пределах размера l_1 совместно с другими обобщенными стержнями остальных подобластей.

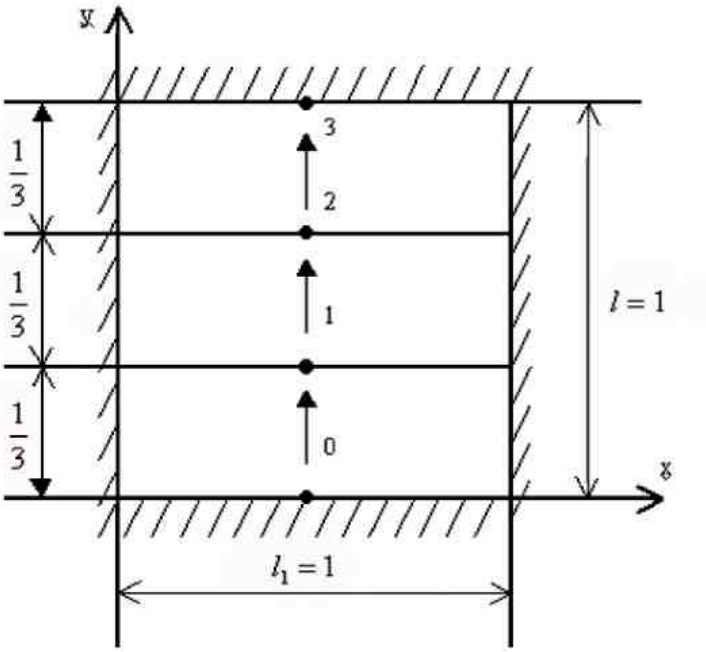


Рисунок 7.3

Таблица 7.2

Условия опирания	Нагрузка	Прогиб в центре пластины Dw(1/2,1/2)	Погреш-ность,%	Изгибающие моменты			
				$M_y(1/2,0)$	Погреш-ность,%	$M_y(1/2,1/2)$	Погреш-ность,%
Жесткая заделка по периметру	$q(x,y)=q$	$12{,}992*10^{-4}q$	+3,1	$-5{,}3886*10^{-2}q$	+5,0	$2{,}4561*10^{-2}q$	+6,3
	$q(x,y)=F\delta(x-1/2)*$ $*\delta(y-1/2)$	$51{,}521*10^{-4}F$	-8,0	$-11{,}8969*10^{-2}F$	-5,3	$19{,}2120*10^{-2}F$	—
	$q(x,y)=M_x\delta'(x-1/2)*$ $*\delta(y-1/2)$	≈0,0	—	≈0,0	—	≈0,0	—
	$q(x,y)=M_y\delta(x-1/2)*$ $*\delta'(y-1/2)$	≈0,0	—	$-41{,}8592*10^{-2}\ M_y$	—	$1{,}2611\ M_y$ $-1{,}2611\ M_y$	—
Шарнирное опирание по периметру	$q(x,y)=q$	$41{,}093*10^{-4}q$	+1,2	0,0	—	$4{,}9202*10^{-2}q$	+2,7
	$q(x,y)=F\delta(x-1/2)*$ $*\delta(y-1/2)$	$107{,}665*10^{-4}F$	-7,2	0,0	—	$21{,}7556*10^{-2}F$	—
	$q(x,y)=M_x\delta'(x-1/2)*$ $*\delta(y-1/2)$	≈0,0	—	0,0	—	≈0,0	—
	$q(x,y)=M_y\delta(x-1/2)*$ $*\delta'(y-1/2)$	≈0,0	—	0,0	—	$1{,}0\ M_y$ $-1{,}0\ M_y$	—

2 Формируем уравнение МГЭ (1.40) пластины, как плоской системы 3 пластин с одинаковыми граничными условиями по торцам. На линии границ подобластей должны быть равны кинематические и статические параметры пластины

$$w^{0-1}(x,l/3)=w^{1-2}(x,0);\ \theta_y^{0-1}(x,l/3)=\theta_y^{1-2}(x,0); \qquad (7.28)$$

$$M_y^{0-1}(x,l/3)=M_y^{1-2}(x,0);\ Q_y^{0-1}(x,l/3)=Q_y^{1-2}(x,0)\ \text{ и т.д.}$$

Применяя к равенствам (7.28) процедуру метода Канторовича-Власова, получим уравнения связи между кинематическими и статическими параметрами обобщенных стержней, которые чисто формально не будут отличаться от соответствующих уравнений обычных стержней. Подчеркнем, что это имеет место только в случае, когда краевые условия по торцам подобластей одинаковы. Уравнения связи между граничными параметрами помещаем в матрицу Y. Значения фундаментальных функций и грузовых членов вычисляем по формулам (7.22) при $\mu=0{,}3$, $y=1/3$, $q(x,y)=q=1$; $C_H=0$; $b=l_1=1$; $C_k=l_1=1$; $d_H=0$; $d_k=1/3$.

$X_* =$

1	$DW^{0-1}(0)=0;M^{2-3}(1/3)$
2	$D\theta^{0-1}(0)=0;M^{2-3}(1/3)$
3	$M^{0-1}(0)$
4	$Q^{0-1}(0)$
5	$DW^{1-2}(0)$
6	$D\theta^{1-2}(0)$
7	$M^{1-2}(0)$
8	$Q^{1-2}(0)$
9	$DW^{2-3}(0)$
10	$D\theta^{2-3}(0)$
11	$M^{2-3}(0)$
12	$Q^{2-3}(0)$

Y=

1	$DW^{0-1}(1/3)=DW^{1-2}(0)$
2	$D\theta^{0-1}(1/3)=D\theta^{1-2}(0)$
3	$M^{0-1}(1/3)=M^{1-2}(0)$
4	$Q^{0-1}(1/3)=Q^{1-2}(0)$
5	$DW^{1-2}(1/3)=DW^{2-3}(0)$
6	$D\theta^{1-2}(1/3)=D\theta^{2-3}(0)$
7	$M^{1-2}(1/3)=M^{2-3}(0)$
8	$Q^{1-2}(1/3)=Q^{2-3}(0)$
9	$DW^{2-3}(1/3)=0$
10	$D\theta^{2-3}(1/3)=0$
11	$M^{2-3}(1/3)$
12	$Q^{2-3}(1/3)$

Уравнение МГЭ пластины примет вид

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$	-1								$M^{2-3}(1/3)$		$-B_{11}^{0-1}$	5
2			$-A_{23}$	$-A_{13}$		-1							$Q^{2-3}(1/3)$		$-B_{21}^{0-1}$	6
3			A_{22}	A_{12}			-1						$M^{0-1}(0)$		B_{31}^{0-1}	3
4			A_{21}	A_{11}				-1					$Q^{0-1}(0)$		B_{41}^{0-1}	4
5					A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	-1				$DW^{1-2}(0)$		$-B_{11}^{1-2}$	9
6					A_{21}	A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{13}$		-1			$D\theta^{1-2}(0)$	=	$-B_{21}^{1-2}$	10
7					$-A_{31}$	$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}			-1		$M^{1-2}(0)$		B_{31}^{1-2}	7
8					$-A_{41}$	$-A_{31}$	A_{21}	A_{11}				-1	$Q^{1-2}(0)$		B_{41}^{1-2}	8
9									A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$DW^{2-3}(0)$		$-B_{11}^{2-3}$	11
10									A_{21}	A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{13}$	$D\theta^{2-3}(0)$		$-B_{21}^{2-3}$	12
11	-1								$-A_{31}$	$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}	$M^{2-3}(0)$		B_{31}^{2-3}	1
12		-1							$-A_{41}$	$-A_{31}$	A_{21}	A_{11}	$Q^{2-3}(0)$		B_{41}^{2-3}	2

Переставляя строки матриц A_*, B, как показано цифрами справа, методом Гаусса определяем начальные обобщенные параметры всех подобластей:

$$M^{2-3}(1/3) = -0{,}345 \cdot 10^{-1} q;\ Q^{2-3}(1/3) = -0{,}307q;$$

$$M^{0-1}(0) = -0{,}0345q;\ Q^{0-1}(0) = 0{,}307q;$$

$$DW^{1-2}(0) = 6{,}549 \cdot 10^{-4} q;\ D\theta^{1-2}(0) = 1{,}73 \cdot 10^{-3} q;\ M^{1-2}(0) = 1{,}16 \cdot 10^{-2} q;$$

$$Q^{1-2}(0) = 0{,}07q;\ DW^{2-3}(0) = 6{,}55 \cdot 10^{-4} q;\ D\theta^{2-3}(0) = -1{,}73 \cdot 10^{-3} q;$$

$$M^{2-3}(0) = 1{,}16 \cdot 10^{-2} q;\ Q^{2-3}(0) = -0{,}069q.$$

Начальные параметры пластины как целого модуля будут равны

$$Q^{0-1}(0) = 0{,}307q; \quad M^{0-1}(0) = -0{,}0345q, \qquad (7.29)$$

т.е. совпадают с начальными параметрами подобласти 0-1 дискретизированной пластины. Прогиб в центре пластины по начальным параметрам модуля 1-2 равен

$$Dw(1/2,1/2)=DW(1/6)*X(1/2)=1{,}29918\cdot10^{-3}q$$

и совпадает с прогибом по таблице 7.2. Данный пример доказывает, что каждую пластину можно дискретизировать на подобласти. В свою очередь подобласти могут выступать как независимые элементы упругой системы и иметь свои краевые условия на торцах. Это позволяет рассматривать пластину со смешанными краевыми условиями в одном направлении как плоскую систему отдельных подобластей.

7.3 Изгиб круглых пластин

Круглые пластины как элементы различных сооружений, машин, приборов, механизмов распространены так же широко, как и прямоугольные пластины. Очевидно, что при рассмотрении изгиба круглых пластин необходимо перейти к полярной системе координат. В рамках технической теории изгиба можно использовать следующие соотношения между частными производными в декартовой и полярной системах координат [30, 71]

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial \rho};\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \varphi};\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2};\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho\partial \varphi}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}, \tag{7.30}$$

а также выражение для оператора Лапласа

$$\nabla^2 w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \tag{7.31}$$

Дифференциальное уравнение изгиба Жермен-Лагранжа (7.6) преобразуется с помощью выражений (7.30), (7.31) к виду

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4}+\frac{1}{\rho^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^2\partial \varphi^2}-\frac{2}{\rho^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \rho\partial \varphi^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial^3 w}{\partial \rho^2}+\frac{4}{\rho^4}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial w}{\partial \rho}=\frac{q(\rho,\varphi)}{D}. \tag{7.32}$$

Данное уравнение дополняют:

кинематические параметры (прогибы и углы поворота)

$$w(\rho,\varphi);\ \theta_\rho(\rho,\varphi)=\frac{\partial w}{\partial \rho};\ \theta_\varphi(\rho,\varphi)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \varphi} \tag{7.33}$$

статические параметры
изгибающие моменты

$$M_\rho(\rho,\varphi)=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\frac{\mu}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}\right]; \tag{7.34}$$

$$M_\varphi(\rho,\varphi)=-D\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}\right]; \tag{7.35}$$

поперечные силы

$$V_\rho(\rho,\varphi)=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 w}{\partial \rho \partial \varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial \rho}-\frac{2}{\rho^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right]; \tag{7.36}$$

$$V_\varphi(\rho,\varphi)=-D\left[\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 w}{\partial \rho^2 \partial \varphi}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi}\right]; \tag{7.37}$$

крутящие моменты

$$M_{\rho\varphi}(\rho,\varphi)=-M_{\varphi\rho}(\rho,\varphi)=-(1-\mu)D\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right]; \tag{7.38}$$

приведенные поперечные силы

$$Q_\rho(\rho,\varphi)=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3}+\frac{(2-\mu)}{\rho^2}\frac{\partial^3 w}{\partial \rho \partial \varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}-\frac{(3-\mu)}{\rho^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial \rho}\right]; \tag{7.39}$$

$$Q_\varphi(\rho,\varphi)=-D\left[\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3}+\frac{(2-\mu)}{\rho}\frac{\partial^3 w}{\partial \rho^2 \partial \varphi}+\frac{2(1-\mu)}{\rho^3}\frac{\partial w}{\partial \varphi}-\frac{(1-2\mu)}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi}\right]. \tag{7.40}$$

7.3.1 Фундаментальные решения

Различные методы решения уравнения изгиба круглых пластин (7.32) по сути исходят из известной схемы разделения переменных по А. Клебшу, когда задаются компоненты перемещения по угловой координате и находят компоненты перемещения по радиальной координате, решая соответствующее дифференциальное уравнение [317]. Примеры и численные результаты такого

подхода приводятся в справочных данных [47-49, 71, 262, 317] и др. Если попытаться решить проблему стыковки прямоугольной и круглой пластин в рамках одномерного варианта МГЭ, то очевидно, что схема А. Клебша не работает, т.к. прямоугольные и круглые подобласти могут стыковаться между собой только по радиальным линиям. Здесь будет работать другая схема разделения переменных, когда задается компонента перемещения по радиальной координате и находится компонента перемещения по угловой координате. В силу этого прогиб точки срединной плоскости круглой пластины представим разложением в ряд по ортогональной системе функций и воспользуемся только одним членом ряда

$$w(\rho,\varphi)=W(\varphi)X(\rho), \tag{7.41}$$

где $X(\rho)$-заданная функция распределения прогибов в радиальном направлении; $W(\varphi)$-искомая функция прогибов в направлении угловой координаты. Функция $X(\rho)$ может быть выбрана по таблице 3.2 с небольшой коррекцией. Вместо координаты x необходимо подставить радиальную координату $(\rho-a)$, где a-расстояние от центра до внутреннего контура круглой пластины (рисунок 7.4).

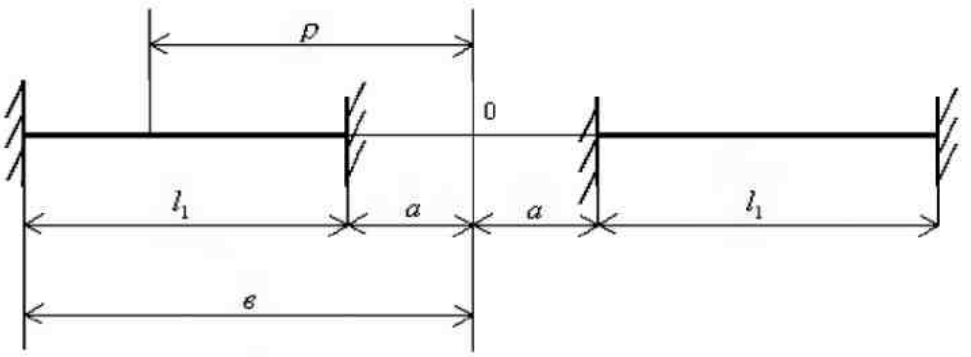


Рисунок 7.4

Используя процедуру вариационного метода Канторовича-Власова, умножаем обе части уравнения (7.32) на $\rho^4 X(\rho)$ (компонента ρ^4 необходима для исключения сингулярных точек в коэффициентах обыкновенного дифференциального уравнения). Применяя операцию интегрирования в пределах радиальной длины пластины, получаем дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$W^{IV}(\varphi)+2r^2W''(\varphi)+s^4W(\varphi)=\frac{q(\varphi)}{D}. \tag{7.42}$$

Коэффициенты и правая часть имеют вид

$$r^2 = B/A;\ s^2 = C/A;\ q(\varphi) = \int_a^b q(\rho,\varphi)\rho^4 X(\rho)d\rho;\ A = \int_a^b X^2(\rho)d\rho;$$

$$B = \int_a^b \left[\rho^2 X''(\rho) - \rho X'(\rho) + 2X(\rho)\right]X(\rho)d\rho; \tag{7.43}$$

$$C = \int_a^b \left[\rho^4 X^{IV}(\rho) + 2\rho^3 X'''(\rho) - \rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho)\right]X(\rho)d\rho.$$

Аналогичные преобразования выполняем для изгибающего момента (7.35) и приведенной поперечной силы (7.40). Кинематические и статические параметры одномерной модели изгиба круглой пластины запишутся так

$$W(\varphi);\ \theta(\varphi) = W'(\varphi);\ M(\varphi) = -DA_M\left[W''(\varphi) + r_M^2 W(\varphi)\right]; \tag{7.44}$$

$$Q(\varphi) = -DA_Q\left[W'''(\varphi) + r_Q^2 W'(\varphi)\right],$$

где

$$A_M = \int_a^b \rho^2 X^2(\rho)d\rho;\ B_M = \int_a^b \left[\mu\rho^4 X''(\rho) + \rho^3 X'(\rho)\right]X(\rho)d\rho;$$

$$r_M^2 = B_M/A_M;\ A_Q = \int_a^b \rho X^2(\rho)d\rho;\ r_Q^2 = B_Q/A_Q; \tag{7.45}$$

$$B_Q = \int_a^b \left[(2-\mu)\rho^3 X''(\rho) - (1-2\mu)\rho^2 X'(\rho) + 2(1-\mu)\rho X(\rho)\right]X(\rho)d\rho.$$

Другие параметры изгиба круглой пластины предстанут в виде

$$\theta_\rho(\rho,\varphi) = W(\varphi)X'(\rho);\ \theta_\varphi(\rho,\varphi) = \frac{1}{\rho}W'(\varphi)X(\rho);$$

$$M_\rho(\rho,\varphi) = -D\left[W(\varphi)X''(\rho) + \frac{\mu}{\rho^2}W''(\varphi)X(\rho) + \frac{\mu}{\rho}W(\varphi)X'(\rho)\right]; \tag{7.46}$$

$$M_\varphi(\rho,\varphi) = -D\left[\frac{1}{\rho^2}W''(\varphi)X(\rho) + \frac{1}{\rho}W(\varphi)X'(\rho) + \mu W(\varphi)X''(\rho)\right];$$

$$V_\rho(\rho,\varphi)=-D\left[W(\varphi)X'''(\rho)+\frac{1}{\rho^2}W''(\varphi)X'(\rho)+\frac{1}{\rho}W(\varphi)X''(\rho)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\rho^2}W(\varphi)X'(\rho)-\frac{2}{\rho^3}W''(\varphi)X(\rho)\right];$$

$$V_\rho(\rho,\varphi)=-D\left[\frac{1}{\rho^3}W'''(\varphi)X(\rho)+\frac{1}{\rho}W(\varphi)X''(\rho)+\frac{1}{\rho^2}W'(\varphi)X'(\rho)\right];$$

$$M_{\rho\varphi}(\rho,\varphi)=-M_{\rho\varphi}(\rho,\varphi)=-(1-\mu)D\left[\frac{1}{\rho}W'(\varphi)X'(\rho)-\frac{1}{\rho^2}W'(\varphi)X(\rho)\right].$$

Из выражений (7.46) следует, что по сравнению с прямоугольной пластиной добавляются условия $M_\rho(a,\varphi)\neq 0;\ M_\rho(b,\varphi)\neq 0$ при шарнирном опирании, т.е. не удовлетворяются однородные краевые условия для изгибающего момента в радиальном направлении. Поскольку эти параметры не входят в исходное уравнение (7.42) и соотношения (7.44), то данный недостаток одномерной модели мало влияет на точность результатов.

Значения коэффициентов по (7.43), (7.45) для круга единичного радиуса и некоторых граничных условий приведены в таблице 7.3. Для вычислений интегралов применялась формула Симпсона в режиме двойной точности с шагом $h=1\cdot 10^{-4}$ (текст программы приведен в Приложении). Достоверность результатов таблицы 7.3 проверялась аналитическим вычислением отдельных интегралов.

Положительные направления нагрузки, формальных кинематических и статических параметров круглой пластины соответствуют параметрам прямоугольной пластины и представлены на рисунке 1.8, 1.10. Вид фундаментальных функций и грузовых членов решения уравнения (7.42) зависит от соотношения между r и s и вида корней (7.19). Из таблицы 7.3 следует, что для круглой пластины основным является случай $s>r$. Фундаментальные функции этого случая имеют вид

$$\phi_1=ch\alpha\varphi\cdot\sin\beta\varphi;\ \phi_2=ch\alpha\varphi\cdot\cos\beta\varphi;\ \phi_3=sh\alpha\varphi\cdot\cos\beta\varphi;\ \phi_4=sh\alpha\varphi\cdot\sin\beta\varphi;$$

$$\alpha=\sqrt{\left(s^2-r^2\right)/2};\ \phi=\sqrt{\left(s^2+r^2\right)/2}.$$

Константы интегрирования уравнения (7.42) определяются из системы уравнений при $\varphi=0$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & 1 & & \\ \hline \beta & & \alpha & \\ \hline & -r^2+r_M^2 & & 2\alpha\beta \\ \hline \beta\left(s^2-2r^2+r_Q^2\right) & & \alpha\left(-s^2-2r^2+r_Q^2\right) & \\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline C_1 \\ \hline C_2 \\ \hline C_3 \\ \hline C_4 \\ \hline\end{array}=\begin{array}{|c|}\hline W(0) \\ \hline \theta(0) \\ \hline -M(0)/DA_M \\ \hline -Q(0)/DA_Q \\ \hline\end{array} \qquad (7.47)$$

$$C_1=\frac{1}{2\beta s^2}\left\{\left(s^2+2r^2-r_Q^2\right)\theta(0)+\left[-Q(0)/DA_Q\right]\right\};\ C_2=W(0);$$

$$C_3=\frac{1}{2\alpha s^2}\left\{\left(s^2-2r^2+r_Q^2\right)\theta(0)-\left[-Q(0)/DA_Q\right]\right\}; \qquad (7.48)$$

$$C_4=-\frac{1}{2\alpha s^2}\left\{\left(-r^2+r_M^2\right)W(0)-\left[M(0)/DA_M\right]\right\}$$

Подставляя константы (7.48) в выражение для обобщенного прогиба $W(\varphi)$ и нормируя фундаментальные функции, представим решение уравнения (7.42) в матричной форме

(7.49)

$$\begin{array}{|c|}\hline DW(\varphi) \\ \hline D\theta(\varphi) \\ \hline M(\varphi) \\ \hline (\varphi) \\ \hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ \hline A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{24} \\ \hline -A_{31} & -A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ \hline -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline DW(0) \\ \hline D\theta(0) \\ \hline M(0) \\ \hline Q(0) \\ \hline\end{array}+\int_0^{\varphi}\begin{array}{|c|}\hline A_{14}(\varphi-\xi) \\ \hline A_{24}(\varphi-\xi) \\ \hline -A_{34}(\varphi-\xi) \\ \hline -A_{44}(\varphi-\xi) \\ \hline\end{array}q(\xi)d(\xi)$$

Если ось OZ круглой пластины направлена “вверх”, то знаки минус опускаются. Фундаментальные ортонормированные функции и грузовые члены примут вид

$$A_{11}=\phi_2-\frac{r_M^2-r^2}{2\alpha\beta}\phi_4;\ A_{12}=\frac{s^2+2r^2-r_Q^2}{2\beta s^2}\phi_1+\frac{s^2-2r^2+r_Q^2}{2\alpha s^2}\phi_3;$$

$$A_{13}=\frac{\phi_4}{2\alpha\beta A_M};\ A_{14}=\frac{\alpha\phi_1-\beta\phi_3}{2\alpha\beta s^2 A_Q};\ A_{21}=\frac{s^2-r_M^2}{2\alpha}\phi_3-\frac{s^2+r_M^2}{2\beta}\phi_1;$$

$$A_{22} = \phi_2 + \frac{r^2 - r_Q^2}{2\alpha\beta}\phi_4;\ \ A_{23} = \frac{\alpha\phi_1 + \beta\phi_3}{2\alpha\beta A_M};\ \ A_{24} = \frac{\phi_4}{2\alpha\beta A_Q};$$

$$A_{31} = \frac{A_M\left(-s^4 + 2r^2 r_M^2 - r_M^4\right)}{2\alpha\beta}\phi_4;\ \ A_{33} = \phi_2 + \frac{r_M^2 - r^2}{2\alpha\beta}\phi_4; \qquad (7.50)$$

$$A_{32} = \frac{A_M\left[-s^2\left(s^2 - r_M^2 + r_Q^2\right) + r_M^2\left(2r^2 - r_Q^2\right)\right]}{2\beta s^2}\phi_1 + \frac{A_M\left[s^2\left(s^2 + r_M^2 - r_Q^2\right) - r_M^2\left(2r^2 - r_Q^2\right)\right]}{2\alpha s^2}\phi_3;$$

$$A_{34} = \frac{A_M}{A_Q}\left(\frac{s^2 + r_M^2}{2\beta s^2}\phi_1 + \frac{s^2 - r_M^2}{2\alpha s^2}\phi_3\right);\ \ A_{42} = \frac{A_Q(-s^4 + 2r^2 r_Q^2 - r_Q^4)}{2\alpha\beta}\phi_4;$$

$$A_{41} = \frac{A_Q\left[-s^2\left(s^2 - r_M^2 + r_Q^2\right) + r_M^2\left(2r^2 - r_Q^2\right)\right]}{2\beta}\phi_1 - \frac{A_Q\left[s^2\left(s^2 + r_M^2 - r_Q^2\right) - r_M^2\left(2r^2 - r_Q^2\right)\right]}{2\alpha}\phi_3;$$

$$A_{43} = \frac{A_Q}{A_M}\left(\frac{s^2 - 2r^2 + r_Q^2}{2\alpha}\phi_3 - \frac{s^2 + 2r^2 - r_Q^2}{2\beta}\phi_1\right);\ \ A_{44} = \phi_2 + \frac{r_Q^2 - r^2}{2\alpha\beta}\phi_4;$$

Таблица 7.3

Граничные условия		Коэффициенты							
Центр пластины	Край пластины	A	B	C	B_M	B_Q	A_M	A_Q	$\gamma_q(\omega)$
Жесткое защемление	Жесткое защемление	1,0359	-0,5716	84,2774	-0,6428	-1,7129	0,2817	0,5180	0,09944
		$Dw(1/2,0)=38,1441*10^{-4}q$; $M_\rho(0,0)=-13,97*10^{-2}q$; $M_\rho(1/2,0)=6,5324*10^{-2}q$; $M_\rho(1,0)=-10,75*10^{-2}q$							
Жесткое защемление	Шарнирное опирание	0,9985	-2,1441	53,3291	-1,1706	-4,2579	0,3489	0,5677	0,1487
		$Dw(1/2,0)=70,8149*10^{-4}q$; $M_\rho(0,0)=-19,65*10^{-2}q$; $M_\rho(1/2,0)=8,3781*10^{-2}q$							
Жесткое защемление	Свободный край	1,8554	1,3821	9,7536	1,8899	1,6913	1,2515	1,4964	0,4217
		$Dw(1/2,0)=495,891*10^{-4}q$; $Dw(1,0)=1460,552*10^{-4}q$; $M_\rho(0,0)=-66,7592*10^{-2}q$; $M_\rho(1/2,0)=-27,6278*10^{-2}q$;							
Шарнирное опирание	Шарнирное опирание	0,5	-0,1450	10,8859	-0,3809	-1,0098	0,1413	0,25	0,0881
		$Dw(1/2,0)=161,942*10^{-4}q$; $M_\rho(1/2,0)=15,9831*10^{-2}q$;							

$$B_{11} = q\left(\frac{\left\{ r^2 \phi_4(\varphi - \varphi_H)_+ + 2\alpha\beta\left[H(\varphi - \varphi_H) - \phi_2(\varphi - \varphi_H)_+ \right] \right\} \gamma_q(\omega)\Big|_{\rho_H}^{b}}{2\alpha\beta s^4 A_Q} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left\{ r^2 \phi_4(\varphi - \varphi_к)_+ + 2\alpha\beta\left[H(\varphi - \varphi_л) - \phi_2(\varphi - \varphi_л)_+ \right] \right\} \gamma_q(\omega)\Big|_{\rho_Л}^{b}}{2\alpha\beta s^4 A_Q} \right) +$$

$$+ F\gamma_F(\omega) \frac{\alpha\phi_1(\varphi - \varphi_F)_+ - \beta\phi_3(\varphi - \varphi_F)_+}{2\alpha\beta s^2 A_Q} + M_\varphi \gamma_{M\varphi}(\omega) \frac{\phi_4(\varphi - \varphi_M)_+}{2\alpha\beta A_Q} +$$

$$+ M_\rho \gamma_{M\rho}(\omega) \frac{\alpha\phi_1(\varphi - \varphi_M)_+ - \beta\phi_3(\varphi - \varphi_M)_+}{2\alpha\beta s^2 A_Q};$$

$$B_{21} = q\left\{ \frac{\left[\alpha\phi_1(\varphi - \varphi_H)_+ - \beta\phi_3(\varphi - \varphi_H)_+ \right] \gamma_q(\omega)\Big|_{\rho_H}^{b}}{2\alpha\beta s^2 A_Q} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left[\alpha\phi_1(\varphi - \varphi_K)_+ - \beta\phi_3(\varphi - \varphi_K)_+ \right] \gamma_q(\omega)\Big|_{\rho_K}^{b}}{2\alpha\beta s^2 A_Q} \right\} +$$

$$+ F\gamma_F(\omega) \frac{\phi_4(\varphi - \varphi_F)_+}{2\alpha\beta A_Q} + + M_\varphi \gamma_{M\varphi}(\omega) \frac{\alpha\phi_1(\varphi - \varphi_M)_+ + \beta\phi_3(\varphi - \varphi_M)_+}{2\alpha\beta A_Q} +$$

$$+ M_\rho \gamma_{M\rho}(\omega) \frac{\phi_4(\varphi - \varphi_M)_+}{2\alpha\beta A_Q};$$

$$B_{31} = q\left(\frac{\left\{ 2\alpha\beta r_M^2 \left[H(\varphi - \varphi_H) - \phi_2(\varphi - \varphi_H)_+ \right] + \left(s^4 - r_M^2 r^2 \right) \phi_4(\varphi - \varphi_H)_+ \right\} \gamma_q(\omega)\Big|_{\rho_H}^{b}}{2\alpha\beta s^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left\{ 2\alpha\beta r_M^2 \left[H(\varphi - \varphi_K) - \phi_2(\varphi - \varphi_K)_+ \right] + \left(s^4 - r_M^2 r^2 \right) \phi_4(\varphi - \varphi_K)_+ \right\} \gamma_q(\omega)\Big|_{\rho_K}^{b}}{2\alpha\beta s^4} \right) \frac{A_M}{A_Q} +$$

$$+ F\gamma_F(\omega) \frac{A_M}{A_Q} \frac{\alpha\left(s^2 + r_M^2 \right) \phi_1(\varphi - \varphi_F)_+ + \beta\left(s^2 + r_M^2 \right) \phi_3(\varphi - \varphi_F)_+}{2\alpha\beta s^2} + \qquad (7.50)$$

$$+M_{\varphi}\gamma_{M\varphi}(\omega)\frac{A_M}{A_Q}\frac{\left(r^2+r_M^2\right)\phi_4(\varphi-\varphi_M)_+ + 2\alpha\beta\phi_2(\varphi-\varphi_M)_+}{2\alpha\beta}+$$

$$+M_{\rho}\gamma_{M\rho}(\omega)\frac{A_M}{A_Q}\frac{\alpha\left(s^2+r_M^2\right)\phi_1(\varphi-\varphi_M)_+ + \beta\left(s^2+r_M^2\right)\phi_3(\varphi-\varphi_M)_+}{2\alpha\beta s^2};$$

$$B_{41}=q\left\{\frac{\left[\alpha\left(s^2+r_Q^2\right)\phi_1(\varphi-\varphi_H)_+ + \beta\left(s^2-r_Q^2\right)\phi_3(\varphi-\varphi_H)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{\rho_H}^{b}}{2\alpha\beta s^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left[\alpha\left(s^2+r_Q^2\right)\phi_1(\varphi-\varphi_K)_+ + \beta\left(s^2-r_Q^2\right)\phi_3(\varphi-\varphi_H)_+\right]\gamma_q(\omega)\Big|_{\rho_K}^{b}}{2\alpha\beta s^2}\right\}+$$

$$+F\gamma_F(\omega)\left[\phi_2(\varphi-\varphi_F)_+ + \frac{r_Q^2-r^2}{2\alpha\beta}\phi_4(\varphi-\varphi_F)_+\right]+$$

$$+M_{\varphi}\gamma_{M\varphi}(\omega)\left[\frac{s^2-2r^2+r_Q^2}{2\alpha}\phi_3(\varphi-\varphi_M)_+ - \frac{s^2+2r^2-r_Q^2}{2\beta}\phi_1(\varphi-\varphi_M)_+\right]+$$

$$+M_{\rho}\gamma_{M\rho}(\omega)\left[\phi_2(\varphi-\varphi_M)_+ + \frac{r_Q^2-r^2}{2\alpha\beta}\phi_4(\varphi-\varphi_M)_+\right];$$

$$\gamma_q(\omega)=\int\rho^4 X(\rho)d\rho; \qquad (7.50)$$

$$\gamma_F(\omega)=\rho_F^3\left[\sin\frac{\omega(\rho_F-a)}{l_1}-sh\frac{\omega(\rho_F-a)}{l_1}-\alpha_*\cos\frac{\omega(\rho_F-a)}{l_1}+\alpha_* ch\frac{\omega(\rho_F-a)}{l_1}\right];$$

$$\gamma_{M\rho}(\omega)=4\rho_M^2\left[-\sin\frac{\omega(\rho_M-a)}{l_1}+sh\frac{\omega(\rho_M-a)}{l_1}+\alpha_*\cos\frac{\omega(\rho_M-a)}{l_1}-\alpha_* ch\frac{\omega(\rho_M-a)}{l_1}\right]+$$

$$+\rho_M^3\left[-\cos\frac{\omega(\rho_M-a)}{l_1}+ch\frac{\omega(\rho_M-a)}{l_1}-\alpha_*\sin\frac{\omega(\rho_M-a)}{l_1}-\alpha_* sh\frac{\omega(\rho_M-a)}{l_1}\right]\frac{\omega}{l_1};$$

$$\gamma_{M\varphi}(\omega)=\rho_M^2\left[\sin\frac{\omega(\rho_M-a)}{l_1}-sh\frac{\omega(\rho_M-a)}{l_1}-\alpha_*\cos\frac{\omega(\rho_M-a)}{l_1}+\alpha_* ch\frac{\omega(\rho_M-a)}{l_1}\right].$$

Фундаментальные функции (7.50) при $A_M = A_Q = A;\ \ r_M^2 = \mu r^2;\ \ r_Q^2 = (2-\mu)r^2$ переходят в известные функции В.З. Власова для прямоугольных пластин [63].

7.3.2 Решение осесимметричных задач

Полученное решение (7.49) с фундаментальными функциями (7.50) обладает значительной степенью общности. Нагрузка на пластину и условия опирания кромки и лини ОА (рисунок 7.5) могут быть произвольными. В частности, вдоль линии ОА могут быть свободные края (пластина с разрезом); жестко защемленные края (пластина с жестким ребром); шарнирное опирание краев и т.д.

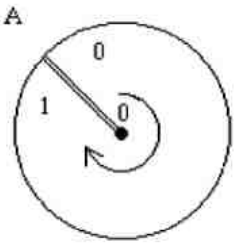


Рисунок 7.5

Рассмотрим случай, когда по линии ОА отсутствуют какие-либо связи, но центр пластины (точка О) имеет жесткое защемление и шарнирное опирание. Эти связи не перемещаются в пространстве. При этом получается обычная круглая пластина с заданными условиями опирания кромки и центральной точки. Такие конструкции встречаются в механизмах распределения жидкости или газа, где пластины выполняют роль клапанов, и в различных сооружениях (например, конструкция крыши аэропорта Пулково в г. С.-Петербурге). К таким задачам сводятся и предельные случаи кольцевых пластин, когда радиус внутреннего кольца стремится к нулю. Пусть нагрузка на пластину будет равномерно распределенной $q(\rho,\varphi) = q = 1$. Тогда, как частный случай, получаем осесимметричные задачи изгиба. Очевидно, что на линии ОА начальные обобщенные параметры пластины при изгибе будут равны конечным параметрам. Матрица C будет единичной и разрешающая система линейных уравнений круглой пластины по схеме (1.46) при $\varphi = 2\pi$ примет вид

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & A_{11}-1 & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\
2 & A_{21} & A_{22}-1 & -A_{23} & -A_{24} \\
3 & -A_{31} & -A_{32} & A_{33}-1 & A_{34} \\
4 & -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44}-1
\end{array}
\begin{array}{|c|}
\hline DW^{0-1}(0) \\ \hline D\theta^{0-1}(0) \\ \hline M^{0-1}(0) \\ \hline Q^{0-1}(0) \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|}
\hline -B_{11}^{0-1} \\ \hline -B_{21}^{0-1} \\ \hline B_{31}^{0-1} \\ \hline B_{41}^{0-1} \\ \hline
\end{array}
\qquad (7.51)
$$

Решая эту систему при исходных данных таблицы 7.3 ($a=0$; $в=1$; $l_1=1$; $\mu=0,3$), получаем начальные параметры (представлены в таблице 7.4). Обобщенный прогиб точки круглой пластины определяется согласно (7.49) по формуле

$$DW(\varphi)=A_{11}(\varphi)\cdot DW(0)+A_{12}(\varphi)\cdot D\theta(0)-A_{13}(\varphi)M(0)-A_{14}(\varphi)Q(0)+B_{11}(\varphi),$$

а функция $X(\rho)$ выбирается по таблице 3.2. Далее можно вычислить действительные прогибы и изгибающие моменты в отдельных точках линии ОА (рисунок 7.5) по выражениям (7.41), (7.46).

Таблица 7.4

Граничные условия		Начальные параметры круглой пластины			
Центр пластины	Край пластины	DW(0)	Dθ(0)	M(0)	Q(0)
Жесткое защемление	Жесткое защемление	$0,236\cdot10^{-2}$	0,0	$0,152\cdot10^{-2}$	0,0
Жесткое защемление	Шарнирное опирание	$0,491\cdot10^{-2}$	0,0	$0,574\cdot10^{-2}$	0,0
Жесткое защемление	Свободный край	$0,536\cdot10^{-1}$	0,0	-0,1013	0,0
Шарнирное опирание	Шарнирное опирание	$0,162\cdot10^{-1}$	0,0	$0,617\cdot10^{-2}$	0,0

При этом учитывалось, что в сингулярной точке $O(0,0)$

$$\lim_{\rho\to0}\frac{X'(\rho)}{\rho}=X''(0);\quad \lim_{\substack{\varphi\to0\\ \rho\to0}}\frac{W''(\varphi)}{\rho^2}=0;\quad W''(0)=0.$$

В таблице 7.3 представлены результаты этих вычислений. Заметим, что данные осесимметричные задачи изгиба имеют трудности математического порядка при интегрировании уравнений равновесия [317, с.69]

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\varphi)\right]=-\frac{Q(r)}{D};\ \ \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]=\frac{Q(r)}{D}.$$

В центре пластины по рисунку 7.5 значения Q и $M\to\infty$. Вся сложность состоит в определении величины Q, учитывающей реакцию в центре, что предопределяет отсутствие решений подобных задач в справочных данных работ [47-49, 71, 142, 262, 317] и др. Ранее отмечалось, что МГЭ имеет математический аппарат, позволяющий раскрывать подобные неопределенности и результаты таблицы 7.3 это подтверждают. Достоверность результатов МГЭ можно подтвердить сравнением с результатами таблиц 65 и 67 монографии проф. С.П. Тимошенко [317, с.332]. Там представлены максимальный прогиб и изгибающие моменты для полукруглой пластинки. Для упругих пластин уменьшение угловой координаты в 2 раза уменьшает примерно в 2 раза и параметры напряженно-деформированного состояния. Данные работы [317]:

жесткое защемление по контуру

$$w(1/2,0)=20{,}2\cdot10^{-4}\,qR^4/D;\ M_\rho(0,0)=-7{,}31\cdot10^{-2}qR^2;$$

$$M_\rho(1/2,0)=3{,}55\cdot10^{-2}qR^2;\ M_\rho(1,0)=-5{,}84\cdot10^{-2}qR^2;$$

шарнирное опирание по контуру

$$w(1/2,0)=81{,}1\cdot10^{-4}\,qR^4/D;\ M_\rho(1/2,0)=8{,}69\cdot10^{-2}qR^2;$$

весьма хорошо согласуются с результатами таблицы 7.3.

7.4 Расчет пластин с комбинированным контуром

В п. 7.2.3. показано, что уравнения МГЭ позволяют разбивать отдельную пластину на подобласти. Этот вывод справедлив и для круглой пластины, что позволяет рассчитывать пластинчатую конструкцию, состоящую из набора прямоугольных и круглых областей. Важным свойством круглого элемента является возможность изменения угла между прямоугольными элементами, что существенно расширяет область применения одномерного варианта МГЭ. Если пластина в плане представляет собой правильную область хотя бы с одной осью симметрии (рисунок 7.6, а), то ее всегда можно аппроксимировать прямоугольными элементами. Однако, неправильные, кососимметричные и многосвязные области не могут быть описаны прямоугольными элементами.

Такие области приближенно можно акироксимировать набором прямоугольных и круглых элементов, т.е. пластина с произвольным контуром заменяется пластиной с комбинированным контуром. Ориентированные графы подобных случаев представлены на рисунке 7.6. Применим одномерные интегральные уравнения (7.20), (7.49) для расчета пластины с "Г"-образной областью, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рисунок 7.6,с).

Пример 7.2. В пластине по рисунку 7.6,с два прямоугольных элемента соединяются под прямым углом посредством кругового сектора. Выполняя процедуру по схеме (1.46), обобщенные граничные параметры каждого элемента находим из решения системы уравнений 12-го порядка, где матрицы лишь минимально отличаются от матриц примера 7.1. Для подобластей 0-1 и 2-3 используются фундаментальные функции (7.22) при a=1, для круговой подобласти 1-2 — (7.50) при $\varphi=\pi/2$. Исходные данные круглого элемента:

$$r^2=-0{,}55178;\ s^2=9{,}01964;\ r_M^2=-2{,}28233;\ r_Q^2=-3{,}30686;$$

$$\alpha=2{,}18763;\ \beta=2{,}05765;\ \mu=0{,}3;\ \varphi=\pi/2;$$

у прямоугольных элементов:

$$r^2=-12{,}30241;\ s^2=22{,}3729;\ \alpha=4{,}16385;\ \beta=2{,}24394;$$

$$\gamma_q(\omega)=0{,}84567;\ \mu=0{,}3;\ l=a=1.$$

Методом Гаусса получаем обобщенные граничные параметры пластины по рисунку 7.6,с

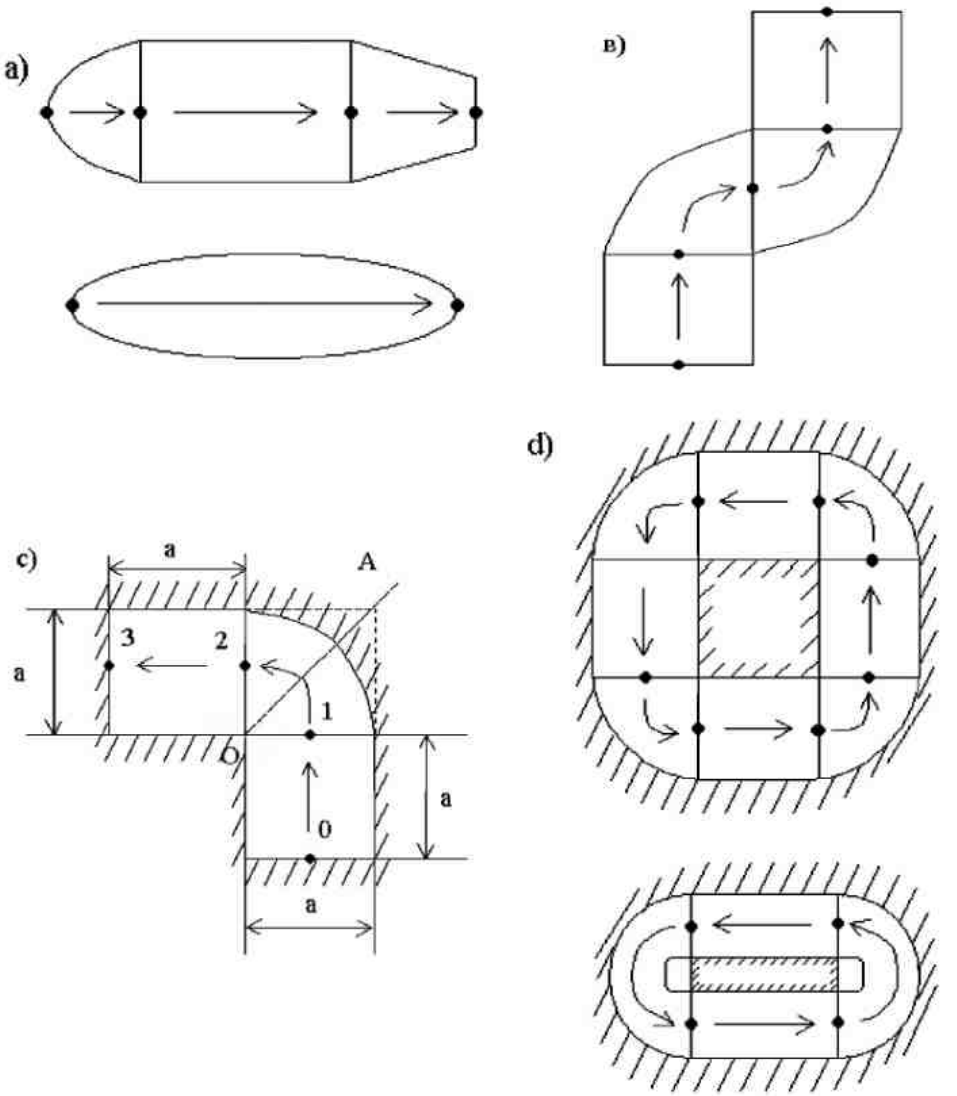


Рисунок 7.6

$M^{2-3}(1)$=-0,037512q; $Q^{2-3}(1)$=-0,31303q; $M^{0-1}(0)$=-0,037512q;

$Q^{0-1}(0)$=0,31303q; $DW^{1-2}(0)$=0,184·10^{-2}q; $D\theta^{1-2}(0)$=0,157·10^{-2}q;

$M^{1-2}(0)$=0,167·10^{-2}q; $Q^{1-2}(0)$=0,577·10^{-2}q; $DW^{2-3}(0)$=0,184·10^{-2}q; (7.52)

$D\theta^{2-3}(0)$=-0,157·10^{-2}q; $M^{2-3}(0)$=0,167·10^{-2}q; $Q^{2-3}(0)$=-0,58·10^{-2}q.

Начальные параметры секториального элемента 1-2 позволяет определить напряженно-деформированное состояние в любой внутренней точке своей области. В частности, результаты расчетов по линии ОА (рисунок 7.6,с) сведены в таблицу 7.5. Там же приведены результаты метода R-функций для подобной пластины, но с прямоугольным средним элементом [268, с.111] (в

этих пластинах не совпадает примерно 22% длины контура). Близкое соответствие между результатами двух задач должно наблюдаться в средней зоне круглого элемента, что и отражается данными таблицы 7.5. Изгибающие моменты в круглом элементе должны быть больше, чем в прямоугольном, т.к. большие прогибы при меньших размерах достигаются за счет больших моментов.

Таблица 7.5

Величины	Метод	Линия OA						
		0,0a	0,2a	0,4a	0,5a	0,6a	0,8a	1,0a
Прогиб $Dw\cdot 10^4/q$	МГЭ	0,0	15,314	35,98	39,27	35,98	15,31	0,0
	R-функций	0,0	18,0	35,0	38,0	37,0	25,0	10,0
Изгибающий момент $M_\rho\cdot 10^2/q$	МГЭ	-14,38	-2,88	5,28	6,72	5,28	-2,88	-11,1
	R-функций	$-\infty$	1,2	4,2	4,3	3,6	1,5	-0,8
Изгибающий момент $M_\varphi\cdot 10^2/q$	МГЭ	-14,38	-6,31	0,13	2,02	0,13	-6,31	-3,3
	R-функций	$-\infty$	-1,8	1,2	2,4	2,89	3,2	2,5

Таким образом, сравнение с результатами метода R-функций подтверждает достоверность результатов МГЭ. При этом, в отличие от метода R-функций, получено аналитическое решение задачи изгиба пластины с неканонической областью в плане и определены первые приближения для изгибающих моментов в сингулярной точке О. По МКЭ такая задача потребует составления и решения алгебраической системы из 150-200 уравнений.

Очевидно, что применение одномерного варианта МГЭ имеет свою золотую середину. Наибольший эффект может быть достигнут там, где область пластины хорошо описывается набором прямоугольных и круглых элементов. При этом существенно (минимум на порядок) уменьшается трудоемкость расчета и облегчается процесс построения вычислительных программ в сравнении с другими численными методами [196]. Там же, где область пластины требует разбиения на большое число круглых и прямоугольных элементов, эффективность метода снижается. В этой связи одномерный вариант МГЭ должен занимать полагающееся ему место в ряду других методов расчета пластинчатых систем.

Добавим, что интегральное уравнение (7.49) может быть применено также для расчета различных секторов. Для этого необходимо соответствующим образом комбинировать нагрузку всей пластины, как показано в работе [317, с.330]. В этих случаях вариационный метод Канторовича-Власова освобождает расчеты от мало удобных в применении функций Бесселя.

7.5 Устойчивость и динамика прямоугольных пластин

Различные задачи устойчивости и динамики тонких изотропных прямоугольных пластин постоянной толщины в рамках гипотезы Кирхгофа-Лява сводятся к решению дифференциального уравнения [262]

$$\nabla^2\nabla^2 w(x,y)-\frac{\gamma h\omega^2}{D}w(x,y)+\frac{N_x(y)}{D}\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}+ \\ +2\frac{N_{xy}}{D}\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y}+\frac{N_y(y)}{D}\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}=\frac{q(x,y)}{D}, \tag{7.53}$$

где $w(x,y)$-амплитудное значение прогиба; γ-плотность материала; ω-частота собственных колебаний; $N_x(y); N_{xy}; N_y(x)$-усилия в срединной плоскости пластины (рисунок 7.7); $q(x,y)$-амплитудное значение поперечной нагрузки. Разработано множество методов решения уравнения (7.53), результаты

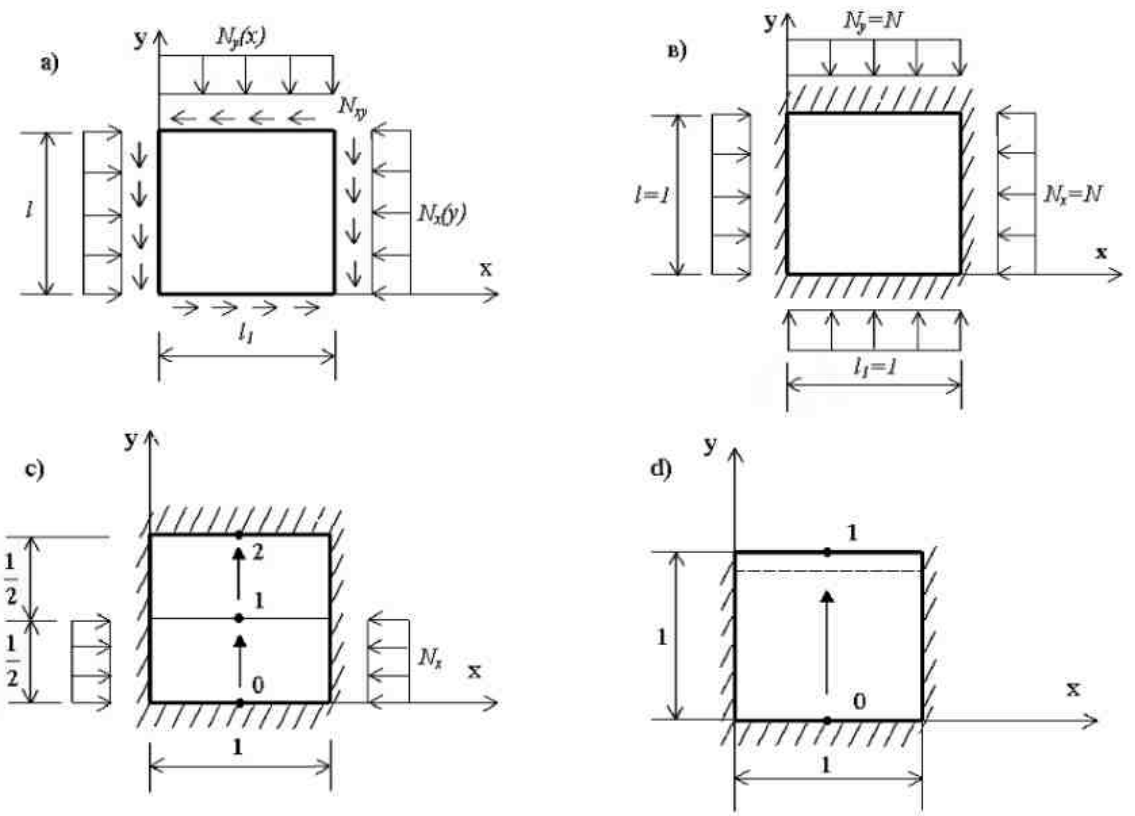


Рисунок 7.7

которых приводятся в справочных данных работ [47, 71, 262, 317] и др. Проф. В.З. Власов, кроме статики пластин, выдвинул идею о применимости своего метода для решения задач устойчивости, однако эта идея не была реализована в полной мере [63].

Уравнение (7.53) по алгоритму вариационного метода Канторовича-Власова приводится к виду

$$W^{IV}(y)+2r^2W''(y)+f^3W'(y)+s^4W(y)=q(y)/D \qquad (7.54)$$

с начальными условиями

$$W(0);\ \theta(0)=W'(0);\ M(0)=-DA\left[W''(0)+\mu r_*^2W(0)\right];$$

$$Q(0)=-DA\left[W'''(0)+(2-\mu)r_*^2W(0)\right] \qquad (7.55)$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (7.54) предстанут выражениями

$$r^2=B/A;\ f^3=G/A;\ s^4=C/A;\ q(y)=\int_0^{l_1}q(x,y)X(x)dx;\ A=\int_0^{l_1}X^2(x)dx;$$

$$B=\int_0^{l_1}\left[X''(x)+N_y(x)X(x)/2D\right]X(x)dx; \qquad (7.56)$$

$$G=\int_0^{l_1}2N_{xy}X'(x)X(x)dx/D;\ r_*^2=\int_0^{l_1}X''(x)X(x)dx/A;$$

$$C=\int_0^{l_1}\left[X^{IV}(x)-\gamma h\omega^2X(x)/D+N_x(y)X''(x)/D\right]X(x)dx.$$

Из выражений (7.56) следует, что $N_y(x)$ может быть любой функцией от x, а $N_x(y)$; N_{xy}-только кусочно-постоянными функциями от y (рисунок 7.8), в противном случае получается дифференциальное уравнение (7.54) с переменными коэффициентами.

Решение задачи Коши (7.54), (7.55) может быть представлено в матричной форме (7.49). Вид фундаментальных функций зависит от корней характеристического уравнения для (7.54)

$$k^4+2r^2k^2+f^3k+s^4=0. \qquad (7.57)$$

Корни этого уравнения в общем случае могут быть определены численно. При f=0 (N_{xy}=0) уравнение (7.57) упрощается и корни вычисляются по формулам (7.19). Рассмотрим 4 основных случая фундаментальных функций.

1 **$|s|>|r|$ Корни (7.19) комплексные** $k_{1-4}=\pm\alpha\pm i\beta.$

Фундаментальные функции представляются выражениями

$$\alpha=\sqrt{\left(s^2-r^2\right)/2};\quad \beta=\sqrt{\left(s^2+r^2\right)/2};$$

$$\phi_1 = ch\alpha y \cdot \sin \beta y;\ \ \phi_2 = ch\alpha y \cdot \cos \beta y;\ \ \phi_3 = sh\alpha y \cdot \cos \beta y;$$

$$\phi_4 = sh\alpha y \cdot \cos \beta y;\ \ A_{11} = \phi_2 + \frac{(1-\mu)r_*^2}{2\alpha\beta}\phi_4;$$

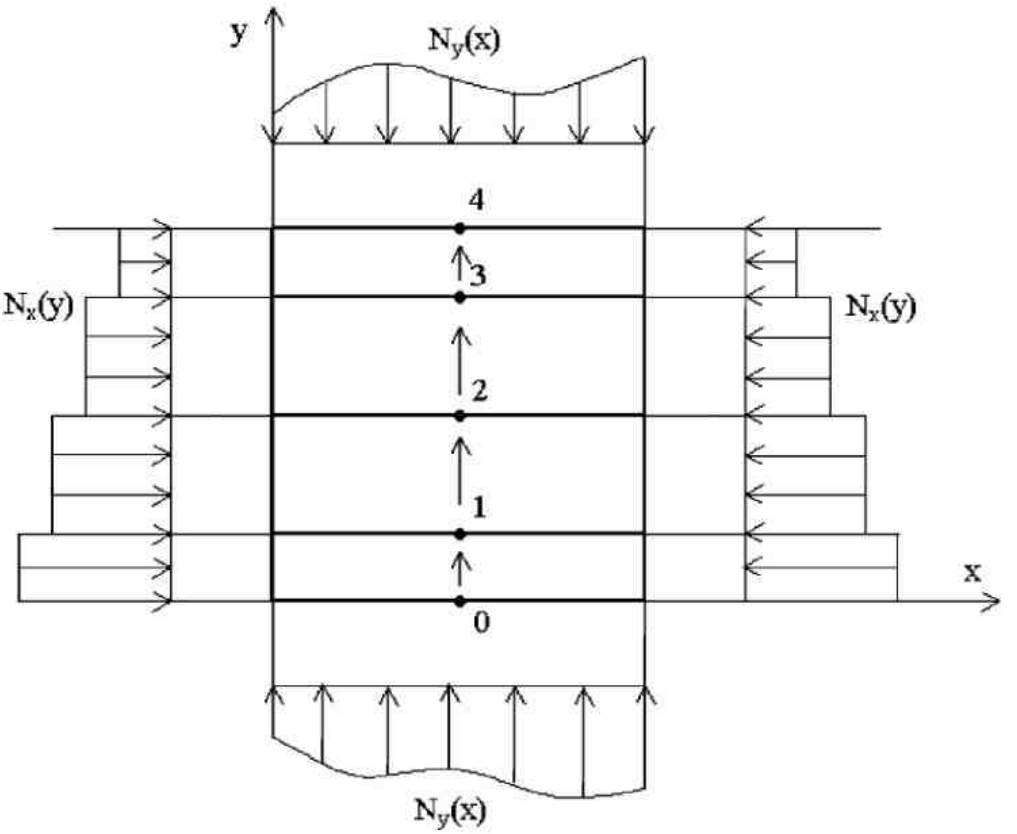


Рисунок 7.8

$$A_{12} = \frac{s^2 - \mu r_*^2}{2\beta s^2}\phi_1 + \frac{s^2 + \mu r_*^2}{2\alpha s^2}\phi_3;\quad A_{13} = \frac{\phi_4}{2\alpha\beta A};\quad A_{14} = \frac{\alpha\phi_1 - \beta\phi_3}{2\alpha\beta s^2 A};$$

$$A_{21} = \frac{s^2 + \mu r_*^2}{2\alpha}\phi_3 - \frac{s^2 - \mu r_*^2}{2\beta}\phi_1;\quad A_{22} = \phi_2 + \frac{(1+\mu)r_*^2}{2\alpha\beta}\phi_4;\quad A_{23} = \frac{\alpha\phi_1 + \beta\phi_3}{2\alpha\beta A};$$

$$A_{24} = A_{13};\quad A_{31} = \frac{A\left[\mu r_*^4(2-\mu) - s^4\right]}{2\alpha\beta}\phi_4;$$

$$A_{32} = \frac{A\left[-s^4 + 2(1-\mu)s^2 r_*^2 + \mu^2 r_*^4\right]}{2\beta s^2}\phi_1 + \frac{A\left[s^4 + 2(1-\mu)s^2 r_*^2 - \mu^2 r_*^4\right]}{2\alpha s^2}\phi_3;$$

$$A_{34}=A_{12};\quad A_{41}=\frac{A\left[-s^4+2(1-\mu)s^2r_*^2+\mu^2r_*^4\right]}{2\beta}\phi_1-\frac{A\left[s^4+2(1-\mu)s^2r_*^2-\mu^2r_*^4\right]}{2\alpha}\phi_3;$$

$$A_{42}=A_{31};\quad A_{43}=A_{21};\quad A_{44}=A_{11};\quad A_{33}=\phi_2-\frac{(1+\mu)r_*^2}{2\alpha\beta}\phi_4; \qquad (7.58)$$

2 **$s^4<0$; $r^2\neq 0$ Корни (7.19) действительные и мнимые** $k_{1,2}=\pm\alpha;$ $k_{3,4}=\pm i\beta.$

$$\alpha=\sqrt{-r^2+\sqrt{r^4-s^4}};\quad \beta=\sqrt{r^2+\sqrt{r^4-s^4}};$$

$$A_{11}=\frac{\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)ch\alpha y+\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)\cos\beta y}{\alpha^2+\beta^2};\quad A_{13}=\frac{ch\alpha y-\cos\beta y}{A\left(\alpha^2+\beta^2\right)};\quad A_{24}=A_{13};$$

$$A_{12}=\frac{\beta\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]sh\alpha y+\alpha\left[\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right]\sin\beta y}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)};$$

$$A_{14}=\frac{\beta sh\alpha y-\alpha\sin\beta y}{A\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)};\quad A_{21}=\frac{\alpha\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)sh\alpha y-\beta\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)\sin\beta y}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{23}=\frac{\alpha sh\alpha y+\beta\sin\beta y}{A\left(\alpha^2+\beta^2\right)};\quad A_{22}=\frac{\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]ch\alpha y+\left[\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right]\cos\beta y}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{31}=A\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)\frac{ch\alpha y-\cos\beta y}{\alpha^2+\beta^2}; \qquad (7.59)$$

$$A_{32}=\frac{A\left\{\beta\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)sh\alpha y-\alpha\left[\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right]\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)\sin\beta y\right\}}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)};$$

$$A_{33}=\frac{\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)ch\alpha y+\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)\cos\beta y}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{34}=\frac{\beta\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)sh\alpha y+\alpha\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)\sin\beta y}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)};$$

$$A_{41}=\frac{A\left\{\alpha\left[\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right]\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)sh\alpha y+\beta\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)\sin\beta y\right\}}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{42}=A\left[\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right]\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]\frac{ch\alpha y-\cos\beta y}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{43}=\frac{\alpha\left[\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right]sh\alpha y-\beta\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]\sin\beta y}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{44}=\frac{\left[\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right]ch\alpha y+\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]\cos\beta y}{\alpha^2+\beta^2};$$

3 $s^4>0$; $|s|<|r|$; $r^2>0$ Корни (7.19) мнимые $k_{1,2}=\pm\alpha i$, $k_{3,4}=\pm\beta i$.

$$\alpha=\sqrt{r^2-\sqrt{r^4-s^4}};\quad \beta=\sqrt{r^2+\sqrt{r^4-s^4}};$$

$$A_{11}=\frac{\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)\cos\alpha y-\left(\alpha^2-\mu r_*^2\right)\cos\beta y}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{13}=\frac{\cos\alpha y-\cos\beta y}{A\left(\beta^2-\alpha^2\right)};\quad A_{24}=A_{13};$$

$$A_{12}=\frac{\beta\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]\sin\alpha y-\alpha\left[\alpha^2-(2-\mu)r_*^2\right]\sin\beta y}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{14}=\frac{\beta\sin\alpha y-\alpha\sin\beta y}{A\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};\quad A_{21}=\frac{-\alpha\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)\sin\alpha y+\beta\left(\alpha^2-\mu r_*^2\right)\sin\beta y}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{23}=\frac{-\alpha\sin\alpha y+\beta\sin\beta y}{A\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{22}=\frac{\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]\cos\alpha y-\left[\alpha^2-(2-\mu)r_*^2\right]\cos\beta y}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{31}=\frac{A\left(\alpha^2-\mu r_*^2\right)\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)\left(-\cos\alpha y+\cos\beta y\right)}{\beta^2-\alpha^2};\qquad (7.60)$$

$$A_{32}=A\frac{-\beta\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]\left(\alpha^2-\mu r_*^2\right)\sin\alpha y+\alpha\left[\alpha^2-(2-\mu)r_*^2\right]\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)\sin\beta y}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{33}=\frac{-\left(\alpha^2-\mu r_*^2\right)\cos\alpha y+\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)\cos\beta y}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{34}=\frac{-\beta\left(\alpha^2-\mu r_*^2\right)\sin\alpha y+\alpha\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)\sin\beta y}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{41}=\frac{A\left\{\alpha\left[\alpha^2-(2-\mu)r_*^2\right]\left(\beta^2-\mu r_*^2\right)\sin\alpha y-\beta\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]\left(\alpha^2-\mu r_*^2\right)\sin\beta y\right\}}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{42}=A\left[\alpha^2-(2-\mu)r_*^2\right]\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]\frac{-\cos\alpha y+\cos\beta y}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{43}=\frac{\alpha\left[\alpha^2-(2-\mu)r_*^2\right]\sin\alpha y-\beta\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]\sin\beta y}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{44}=\frac{-\left[\alpha^2-(2-\mu)r_*^2\right]\cos\alpha y+\left[\beta^2-(2-\mu)r_*^2\right]\cos\beta y}{\beta^2-\alpha^2}.$$

4 $s^4>0$; $r^2<0$; $r^4-s^4>0$. Корни (7.19) действительные и разные $k_{1,2}=\pm\alpha$; $k_{3,4}=\pm\beta$**:**

$$\alpha=\sqrt{-r^2+\sqrt{r^4-s^4}};\quad \beta=\sqrt{-r^2-\sqrt{r^4-s^4}};$$

$$A_{11}=\frac{\left(\beta^2+\mu r_*^2\right)ch\alpha y-\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)ch\beta y}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{12}=\frac{\beta\left[\beta^2+(2-\mu)r_*^2\right]sh\alpha y-\alpha\left[\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right]sh\beta y}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};\quad A_{13}=\frac{-ch\alpha y+ch\beta y}{A\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{14}=\frac{-\beta sh\alpha y+\alpha sh\beta y}{A\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{21}=\frac{\alpha\left(\beta^2+\mu r_*^2\right)sh\alpha y-\beta\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)sh\beta y}{\beta^2-\alpha^2};\qquad (7.61)$$

$$A_{22}=\frac{\left[\beta^2+(2-\mu)r_*^2\right]ch\alpha y-\left[\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right]ch\beta y}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{23}=\frac{-\alpha sh\alpha y+\beta sh\beta y}{A\left(\beta^2-\alpha^2\right)};\quad A_{24}=A_{13};$$

$$A_{31}=\frac{A\left(\beta^2+\mu r_*^2\right)\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)\left(ch\alpha y-ch\beta y\right)}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{32}=\frac{A\left[\beta\left(\beta^2+(2-\mu)r_*^2\right)\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)sh\alpha y-\alpha\left(\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right)\left(\beta^2+\mu r_*^2\right)sh\beta y\right]}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{33}=\frac{-\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)ch\alpha y+\left(\beta^2+\mu r_*^2\right)ch\beta y}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{34}=\frac{A\left[-\beta\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)sh\alpha y+\alpha\left(\beta^2+\mu r_*^2\right)sh\beta y\right]}{A\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};\qquad(7.61)$$

$$A_{41}=\frac{A\left[\alpha\left(\beta^2+\mu r_*^2\right)\left(\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right)sh\alpha y-\beta\left(\alpha^2+\mu r_*^2\right)\left(\beta^2+(2-\mu)r_*^2\right)sh\beta y\right]}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{42}=\frac{A\left(\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right)\left(\beta^2+(2-\mu)r_*^2\right)\left(ch\alpha y-ch\beta y\right)}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{43}=\frac{-\alpha\left(\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right)sh\alpha y+\beta\left(\beta^2+(2-\mu)r_*^2\right)sh\beta y}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{44}=\frac{-\left(\alpha^2+(2-\mu)r_*^2\right)ch\alpha y+\left(\beta^2+(2-\mu)r_*^2\right)ch\beta y}{\beta^2-\alpha^2}.$$

Согласно главам 3 и 4 определение частот собственных колебаний и критических сил упругой системы выполняется после формирования матрицы A_*. В отличии от других методов (см. [47, 262]) здесь предполагается, что граничные статические и кинематические параметры пластины будут отличны от нуля (при бифуркации или при стоячих волнах), если отличны от нуля обобщенные статические и кинематические параметры одномерной модели. Тогда трансцендентное уравнение собственных значений пластинчатой системы примет вид

$$\left|A_*\left(\omega,N_x,N_y,N_{xy}\right)\right|=0.\qquad(7.62)$$

Матрица A_* этого уравнения обладает многими замечательными свойствами. Она является весьма разреженной матрицей общего вида, ее система фундаментальных ортонормированных функций обеспечивает хорошую устойчивость численного процесса решения краевой задачи, в определителе отсутствуют точки разрыва 2-го рода, формируется без привлечения матричных операций. Эти преимущества позволяют эффективно определять спектр собственных значений – корни уравнения (7.62). Точность спектра зависит, естественно, от точности исходной модели, где, напомним, используется только один член ряда (7.2). Уравнение (7.62) позволяет определять критические силы как статическим (при ω=0), так и динамическим методами. При определении собственных значений пластин нужно учитывать, что из уравнения (7.62) можно получить спектры частот и критических сил при фиксированном числе полуволн в направлении оси OX (например, для коэффициентов A, B, C таблицы 7.1 одна полуволна в направлении оси OX и множество полуволн в направлении оси OУ). Вычисляя коэффициенты A, B, C при второй частоте колебаний балки, из уравнения (7.62) можно получить спектры пластины для двух полуволн в поперечном и множества полуволн в продольном направлениях и т.д. Точность решения задач устойчивости и динамики прямоугольных пластин по МГЭ определим из примеров.

Пример 7.3 Рассмотрим жестко защемленную квадратную пластину, нагруженную силами N_x=N_y=N (рисунок 7.7,в). Выше отмечалось, что наибольшая погрешность вариационного метода Канторовича-Власова наблюдается у квадратных пластин, а условия ее опирания не позволяют получить точного аналитического решения задач статики, динамики и устойчивости. Поэтому данная задача позволяет дать оценку точности и эффективности различных методов, в том числе и МГЭ. Матрица устойчивости и ее определитель для краевых условий по рисунке 7.7,в примут вид

$$A_*=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & -A_{13} & -A_{14} \\ \hline & & -A_{23} & -A_{13} \\ \hline -1 & & A_{33} & A_{34} \\ \hline & -1 & A_{43} & A_{44} \\ \hline \end{array} ;\left|A_*\left(N_x,N_y\right)\right|=A_{13}^2-A_{14}A_{23}=0. \qquad (7.63)$$

Задачу решаем статическим методом по программе в среде MATLAB

Обозначения переменных

n =500-число циклов вычисления определителя (7.63);

X- вектор значений сжимающих сил N_y или N_x;

A, $r2$, $s4$-коэффициенты одномерной модели (7.56);

N_y, N_x-сжимающие усилия;

dN_y, dN_x-шаг изменения сжимающих усилий;
d-величина определителя (7.63);
al, bl-коэффициенты α, β;
$F1, F3, F4, A13, A14, A23$-фундаментальные функции.

Текст программы

```
X = zeros(n,1);  A=1.03593604;  n=500;  d = zeros(n,1);  Ny = 0.01;  Nx = 0.0;
dNy = 100/n;  dNx = 0.0/n;
    for m=1:n
        X(m,1)=Ny;
        r2=-12.30261846+0.5*Ny; s4=500.5639014-12.30261846*Nx;
        if (r2^2 - s4) < 0
        al = sqrt(((s4^0.5 - r2)/2));  bl = sqrt(((s4^0.5 + r2)/2));
    F1 = cosh(al) * sin(bl);  F3 = sinh(al) * cos(bl);  F4 = sinh(al) * sin(bl);
    A13 = F4/(2 * al * bl * A);  A14 = (al * F1 - bl * F3)/(2 * al * bl * A * s4^0.5);
    A23 = (al * F1 + bl * F3)/(2 * al * bl * A);  d(m,1) = A13^2 - A14 * A23;
        else if s4<0
        al = sqrt(- r2 + sqrt(r2^2 - s4));  bl = sqrt(r2 + sqrt(r2^2 - s4));
    A13 = (cosh(al) - cos(bl))/(A * (al^2 + bl^2));
    A14 = (bl * sinh(al) - al * sin(bl))/(A * al * bl * (al^2 + bl^2));
    A23 = (al * sinh(al) + bl * sin(bl))/(A * (al^2 + bl^2));
    d(m,1) = A13^2 - A14 * A23;
        else if r2>0
        al = sqrt(r2 - sqrt(r2^2 - s4));  bl = sqrt(r2 + sqrt(r2^2 - s4));
    A13 = (cos(al) - cos(bl))/(A * (bl^2 - al^2));
    A14 = (bl * sin(al) - al * sin(bl))/(A * al * bl * (bl^2 - al^2));
    A23 = (- al * sin(al) + bl * sin(bl))/(A * (bl^2 - al^2));
    d(m,1) = A13^2 - A14 * A23;
          else
        al = sqrt(- r2 + sqrt(r2^2 - s4));  bl = sqrt(- r2 - sqrt(r2^2 - s4));
    A13 = (cosh(al) - cosh(bl))/(A * (al^2 - bl^2));
    A14 = (bl * sinh(al) - al * sinh(bl))/(A * al * bl * (al^2 - bl^2));
    A23 = (al * sinh(al) - bl * sinh(bl))/(A * (al^2 - bl^2));
    d(m,1) = A13^2 - A14 * A23;
    end
    Ny=Ny+dNy; Nx=Nx+dNx;
    end
```

% Построение графика определителя

```
    plot (x,d); grid on
```

```
% Вывод таблицы значений определителя
    [x d];
```

Предварительно строим график изменения определителя $|A_*(N_x)| = f(N_x)$ (см. рисунок 7.9), который позволяет визуально и неточно определить корень уравнения (7.63). В частности, пусть *Ny*=0; *Nx* входит в коэффициент *s*. Уточняя

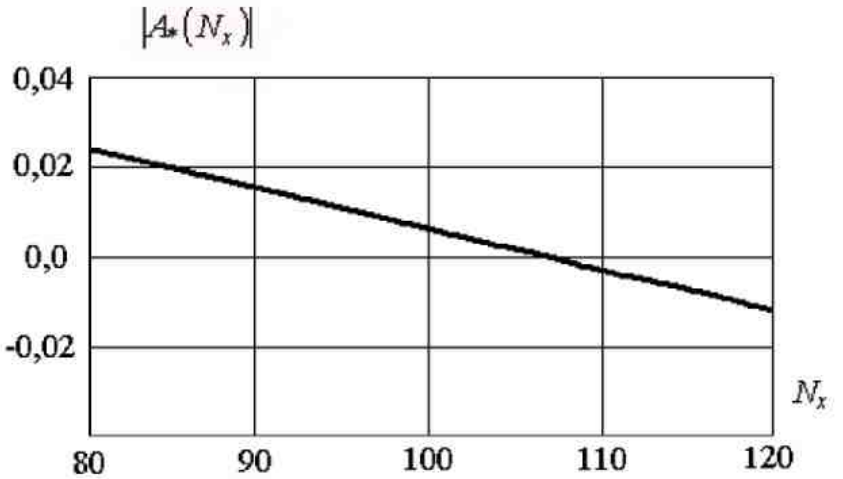


Рисунок 7.9

корень уравнения (7.63) находим, что первая критическая сила равна N_{II}=105.6515*D* (одна полуволна в двух направлениях), что больше на 6.27% критической силы по методу Ритца N_{II}=99.39*D* [101]. Если N_x=0; N_y входит в коэффициент *r*. График определителя (7.63) повторяет характер зависимости на рисунке 7.9 и N_{II}=100.0425*D*, что больше на 0.657% эталонного значения. Когда N_x и N_y одновременного отличны от нуля (параметр *N* входит в коэффициенты *r* и *s*), критическая сила N_{II}=52.7062*D* отличается от точного значения N_{II}=52.24*D*[47] на 0.89%. Для сравнения приведем значение критической силы при N_y=0 по модифицированному асимптотическому методу проф. В.В. Болотина N_{II}=84.0*D*[101]. Старшие критические силы по уравнению (7.62) будут определены с большой погрешностью и здесь нужно использовать решение соответствующего нелинейного уравнения. Высокая точность результатов метода Канторовича-Власова при удержании одного члена ряда (7.2) объясняются тем, что в этом методе удовлетворяются в полном объеме краевые условия по всему периметру пластины, включая и угловые зоны.

Отметим, что несмотря на небольшой объем приведенная программа решения задач устойчивости пластины по МГЭ обладает определенной универсальностью. Если добавить фундаментальные функции (7.58) – (7.61) и менять выражения для определителя $|A_*(N_x, N_y)|$, то кроме любых размеров и

коэффициента Пуассона μ программа будет учитывать и любые классические (не смешанные) граничные условия.

Пример 7.4 Рассмотрим более сложную задачу устойчивости. Определить критическую силу такой же пластины, но нагруженной на части контура (рисунок 7.7,с). Усилие N_x можно продолжить на всю длину кромки с помощью выражения $N_x = N\left[1 - H\left(x - 1/2\right)\right]$, где $H(x\text{-}1/2)$-единичная функция Хевисайда со сдвигом. При включении N_x в коэффициент s критическая сила получается со значительным превышением N_{II}=211.35D. При включении N_x в коэффициент r (путем поворота систем координат) критическая сила получается существенно меньшей N_{II}=100.05D. Среднее значение двух вариантов N_{II}=155.7D. При решении данной задачи предполагалось, что вся область пластины испытывает продольно-поперечный изгиб. Это весьма грубое допущение и критическая сила получилась существенно меньше истинного значения. Задачу можно решить в более точной постановке, т.е. считать, что подобласть 0-1 испытывает продольно-поперечный, а подобласть 1-2– поперечный изгиб в момент потери устойчивости. Если пренебречь искажением указанных напряженных состояний в граничной зоне подобластей, то матрица устойчивости A_* примет вид

$A_*=$

	1	2	3	4	5	6	7	8		
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$	-1				5	
2			$-A_{23}$	$-A_{13}$		-1			6	0-1
3			A_{33}	A_{34}			-1		3	
4			A_{43}	A_{44}				-1	4	
5					A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	7	
6					A_{21}	A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{13}$	8	1-2
7	-1				$-A_{31}$	$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}	1	
8		-1			$-A_{41}$	$-A_{31}$	A_{21}	A_{11}	2	

Методом Гаусса вычисляя определитель и фиксируя изменение его знака, получаем, что N_{II}=178.95D. Если предположить, что уменьшение периметра сжимающей нагрузки в 2 раза увеличивает критическую силу в 1.9 раза (см. пример 7.3), то полученный результат всего на 5.4% меньше условного точного значения критической силы.

При определении частот собственных колебаний жестко защемленной квадратной пластины необходимо использовать уравнение (7.63) при $N_x=N_y=0$, $\omega\neq 0$. Безразмерные величины частот приведены в таблице 7.6, из которой следует хорошее соответствие результатов МГЭ с результатами Эдмана и Игути [262].

Пример 7.5 Изменение граничных условий видоизменяет частотное уравнение. Для пластины по рисунок 7.7,d, где одна кромка шарнирно оперта, матрица A_* и частотное уравнение примут вид

Таблица 7.6

Расчетная схема	Метод	Безразмерные частоты $\omega_{mn}=\omega\sqrt{\gamma h/D}$ m-число полуволн в направлении оси OX n-число полуволн в направлении оси OУ			
		ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
Рисунок 7.7,в	МГЭ	36,05	73,65	132,45	211,35
	Эдмана	35,999	73,405	131,902	210,526
	Игути	35,985	73,400	132,184	—
Рисунок 7.7,d	МГЭ	31,85	63,65	116,95	190,5
	R-функций	31,826	63,331	116,358	—

$$A_*=\begin{vmatrix} & & -A_{13} & -A_{14} \\ -1 & & -A_{23} & -A_{13} \\ & & A_{33} & A_{34} \\ & -1 & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix};\quad |A_*(\omega)| = A_{13}A_{34}-A_{14}A_{33}=0 \qquad (7.64)$$

Корни уравнения (7.64) представлены в таблице 7.6, из которой следует практически полное совпадение результатов МГЭ с результатами метода R-функций проф. В.Л. Рвачева [268].

Анализ результатов примеров 7.3-7.5 приводит к двум важным выводам:

1 Вариационный метод Канторовича-Власова при использовании одного члена ряда (7.2) позволяет практически точно решать задачи на собственные значения упругих изотропных пластин.

2 Основная часть погрешности вариационного метода Канторовича-Власова при использовании одного члена ряда (7.2) связана с неточным описанием внешней нагрузки, а влияние на погрешность побочных коэффициентов линейной системы дифференциальных уравнений проф. В.З. Власова весьма мало.

Последний вывод следует из первого, поскольку в задачах на собственные значения не учитываются как раз побочные коэффициенты.

Пример 7.6 Возможности МГЭ проиллюстрируем решением неконсервативной задачи устойчивости квадратной пластины, нагруженной следящей за углом поворота нагрузкой (рисунок 7.10). Уравнение 7.62 будет включать ω и N_x. Граничные условия в направлении оси OX будут выполнятся

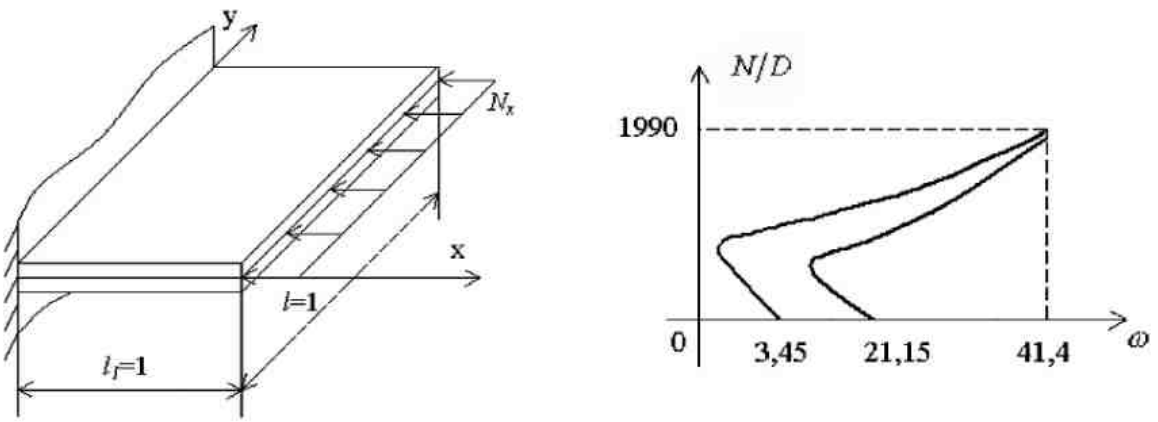


Рисунок 7.10

функцией $X(x)$ (см. таблицу 3.2). Кинематические граничные условия будут удовлетворяться, а статические граничные условия–только в жесткой заделке. Матрица A_* и частотное уравнение для граничных условий в направлении оси OУ примут вид

$$A_*= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & -1 & \\ A_{21} & A_{22} & & -1 \\ -A_{31} & -A_{32} & & \\ -A_{41} & -A_{42} & & \end{vmatrix} ; \quad \left|A_*(\omega, N_x)\right| = A_{31}A_{42} - A_{32}A_{41} = 0 \qquad (7.65)$$

Корни уравнения (7.65) при N_x=0 ω_{11}=3,45$\sqrt{D/\gamma h}$; ω_{12}=21,15$\sqrt{D/\gamma h}$ весьма близки к эталонным значениям (ω_{11}=3,494$\sqrt{D/\gamma h}$;ω_{12}=21,44$\sqrt{D/\gamma h}$) частот

данной пластины [262]. Это позволяет исследовать дальнейшее поведение двух частот по уравнению (7.65). Зависимость между N_x и ω представлена на рисунке 7.10. Неконсервативность действующей нагрузки подтверждается поведением двух соседних частот, стремящихся слиться в одной точке. При этом критическая сила существенно зависит от точности определения координаты слияния частот. Так, N_{II}=180,0D при разности двух частот $\Delta\omega$=0,5$\sqrt{D/\rho h}$; N_{II}=460,0D при $\Delta\omega$=0,3$\sqrt{D/\rho h}$; N_{II}=720,0D при $\Delta\omega$=0,2$\sqrt{D/\rho h}$; N_{II}=1990,0D при $\Delta\omega$=0,1$\sqrt{D/\rho h}$ и т.д. Очевидно, для достоверного определения критической силы необходимо знание пороговой разности соседних частот, при которой наступает флаттер пластины.

7.6 Устойчивость прямоугольных пластин с неоднородными граничными условиями

Если прямоугольная изотропная тонкая пластина сжимается равномерными силами N_y и хотя бы одна загруженная кромка не оперта (свободна), то возникает задача устойчивости с неоднородными граничными условиями (рисунок 7.11). Уравнение устойчивости (7.53) сводится к виду

$$D\nabla^4 w(x,y)+N\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}=0. \qquad (7.66)$$

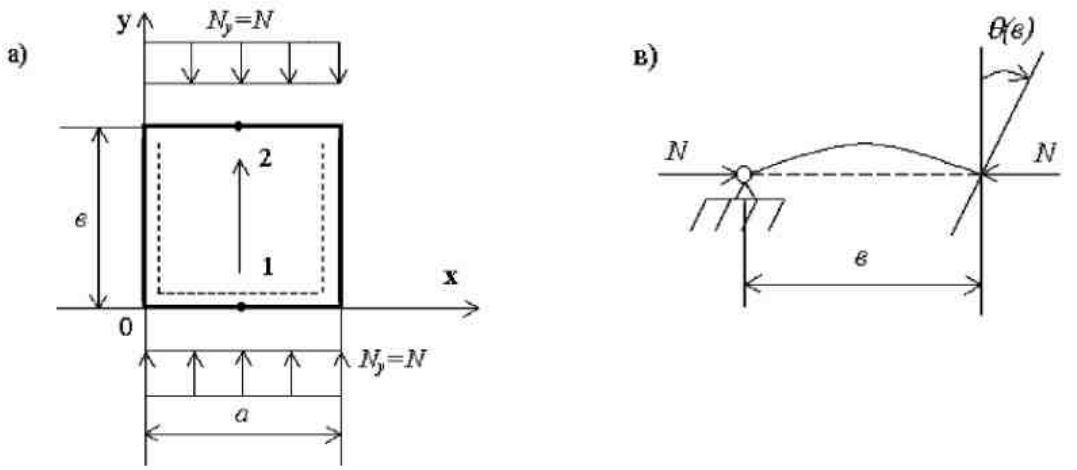


Рисунок 7.11

Приведенная поперечная сила на крае y=$в$ будет равна проекции сжимающей силы (см. рисунок 7.11,в)

$$-D\left[\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^2\partial y}\right]=N\cdot\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta(b)\right)\right]=N\cdot\sin\theta(b).$$

Возникает нелинейное краевое условие при $y=в$, которое в теории устойчивости тонких пластин обычно линеаризуют, т.е. при малых перемещениях

$$\sin\theta(b)=\theta(b)=\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=b}.$$

Граничное условие на свободной нагруженной кромке примет вид

$$D\left[\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^2\partial y}\right]+N\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}=0 \text{ при } y=в. \qquad (7.67)$$

Необходимость учета условия (7.67) существенно усложняет решение данной задачи. Первые результаты с применением одного члена ряда представлены в работах академиков АН СССР Л.С. Лейбензона [168] и А.Ю. Ишлинского [121]. Точность их оказалась недостаточной. В работе [149] обобщены решения Лейбензона-Ишлинского в рамках асимптотического метода. Поскольку сам метод имеет важное практическое значение, то представим его, следуя работе [149].

7.6.1 Асимптотический метод на основе теории возмущений

Согласно рисунку 7.11 приведем граничные условия:

1 На ненагруженных кромках

$$w(x,y)=0;\ \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=0;\ x=a \qquad (7.68)$$

2 На нагруженных кромках

$$w(x,y)=0;\ \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}=0 \text{ при } y=0; \qquad (7.69)$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}=0;\ (7.67) \text{ при } y=в. \qquad (7.70)$$

Сжимающую силу N и прогиб $w(x,y)$ разложим в ряд по степеням малого параметра ε

$$N=N_0+\varepsilon N_1+\varepsilon^2 N_2+\ldots; \qquad (7.71)$$

$$w(x,y)=w_0+\varepsilon w_1+\varepsilon^2 w_2+\ldots, \qquad (7.72)$$

а в окончательном результате нужно принять ε=1. Если продифференцировать (7.72) и подставить полученные производные, а также (7.71) в уравнение устойчивости (7.66) и в граничные условия (7.68)-(7.70), группируя члены при одинаковых степенях ε, то получаем следующую рекуррентную последовательность:

нулевое приближение

$$\varepsilon^0 : D\nabla^4 w_0 = 0; \tag{7.73}$$

$$w_0 = 0;\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x=0;\ x=a; \tag{7.74}$$

$$w_0 = 0;\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y=0; \tag{7.75}$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0;\ D\left[\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3 \partial y}\right] + N_0\frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \text{ при } y=в. \tag{7.76}$$

Уравнения (7.73)-(7.76) и являются уравнениями метода Лейбензона-Ишлинского, т.е. они являются нулевым приближением решения задачи в асимптотической постановке.

Первое приближение

$$\varepsilon^1 : D\nabla^4 w_1 + N_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0; \tag{7.77}$$

$$w_1 = 0;\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x=0;\ x=a; \tag{7.78}$$

$$w_1 = 0;\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y=0; \tag{7.79}$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0;\ D\left[\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3 \partial y}\right] + N_0\frac{\partial w_1}{\partial y} + N_1\frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \text{ при } y=в \tag{7.80}$$

и т.д. Решим задачу в нулевом приближении. Решение ищется в соответствии с методом разделения переменных Фурье в виде

$$w_0 = \mathrm{Y}_0 \cdot \sin\frac{n\pi x}{a}, \tag{7.81}$$

где Y_0-искомая функция, зависящая только от y. Выражение (7.81) удовлетворяет граничным условиям (7.74)–шарнирное опирание. Подставляя (7.81) в (7.73) получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции Y_0

$$\frac{d^4 Y_0}{dy^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 Y_0}{dy^2} + \lambda^4 Y_0 = 0; \ \lambda = \frac{n\pi}{a}. \tag{7.82}$$

Интеграл уравнения (7.82) имеет вид

$$Y_0 = A_0 ch\lambda y + B_0 sh\lambda y + C_0 ch\lambda y + D_0 y sh\lambda y \tag{7.83}$$

и

$$w_0 = Y_0 \cdot \sin \lambda x.$$

Из граничных условий (7.75): $A_0=D_0=0$, тогда

$$w_0 = \left(B_0 sh\lambda y + C_0 y ch\lambda y\right) \cdot \sin \lambda x. \tag{7.84}$$

Подставляя (7.84) в первое из условий (7.76), получим

$$C_0 = -B_0 \lambda F_0; \ F_0 = \frac{(1-\mu) shA}{2shA + A(1-\mu) chA}; \ A = \lambda b = \frac{\pi b n}{a}$$

и

$$w_0 = B_0 \left(sh\lambda y - \lambda y F_0 ch\lambda y\right) \cdot \sin \lambda x. \tag{7.85}$$

Подставляя (7.85) во второе из условий (7.76), находим критические напряжения в нулевом приближении

$$\sigma_0 = \frac{N_0}{h} = H_0 \frac{\pi^2 E}{12\left(1-\mu^2\right)} \left(\frac{h}{a}\right)^2, \tag{7.86}$$

где

$H_0 = \dfrac{(1-\mu) chA + F_0 \left[(1+\mu) chA - (1-\mu) A \cdot shA\right]}{chA - F_0 \left(chA + A \cdot shA\right)}$; h-толщина пластинки.

Представим решение в первом приближении. Подставляя (7.85) в (7.77) и используя

$$w_1 = Y_1 \cdot \sin \lambda x, \tag{7.87}$$

будем иметь

$$\frac{d^4 Y_1}{dy^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 Y_1}{dy^2} + \lambda^4 Y_1 = H_0 \lambda^4 B_0 \left[(2F_0 - 1) sh\lambda y + \lambda y F_0 ch\lambda y \right] \qquad (7.88)$$

Получается неоднородная краевая задача, где правая часть является решением краевой задачи нулевого приближения. Далее алгоритм повторяется при резком возрастании громоздкости решения. Таким образом, можно представить решение задачи в виде ряда по малому параметру для коэффициента H

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \ldots$$

К сожалению, данный ряд метода возмущений может сходиться медленно или расходиться. Для улучшения сходимости ряда можно использовать метод Паде-аппроксимации, т.е. метод дробно-рационального преобразования ряда теории возмущений

$$H \approx H_0 + H_1 \varepsilon + H_2 \varepsilon^2 = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon}{1 + \beta_1 \varepsilon} \text{ при } \varepsilon = 1$$

$$H \approx H_0 + H_1 + H_2 = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{1 + \beta_1}; \ \alpha_0 = H_0; \ \beta_1 = -\frac{H_2}{H_1}; \ \alpha_1 = H_1 + H_0 \beta_1.$$

В таблице 7.7 приведены результаты асимптотического метода, которые оказались практически равны эталонным результатам.

Из изложенного следует, что задача устойчивости тонкой пластины с неоднородными граничными условиями может быть точно решена при условиях:

1 Использовании метода разделения переменных Фурье в виде (7.81), (7.87);

2 Формировании последовательности краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (7.82), (7.88) и т.д.;

3 Применении метода малого параметра в виде (7.71), (7.72);

4 Использовании Паде-аппроксимации.

Очевидно, что если условия опирания пластины на кромках в направлении оси Оу будут отличны от шарнирных, то решение данной задачи существенно усложнится. По видимому из-за этих причин в справочных данных работ [47-49, 71, 262, 299, 300, 316 и др.] приведено решение только рассмотренной задачи. Представим решение данной задачи по МГЭ и покажем, что можно сравнительно просто учесть различные краевые условия и существенно упростить алгоритм решения, а также учесть на свободных кромках сосредоточенные сжимающие силы. Решения последних задач отсутствуют в литературе.

7.6.2 Применение МГЭ

Для решения уравнения (7.66) используем только один член ряда (7.2)

$$w(x,y)=W(y)X(x). \tag{7.89}$$

Процедурой метода Канторовича-Власова уравнение (7.66) сводится к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$W^{IV}(y)+2r^2W''(y)+s^4W(y)=0;\ W(0);\ \theta(0)=W'(0);$$

$$M(0)=-DA\left[W''(0)+\mu r_*^2W(0)\right];\ Q(0)=-DA\left[W'''(0)+(2-\mu)r_*^2W'(0)\right]; \tag{7.90}$$

где другие коэффициенты и система ортонормированных фундаментальных функций определяются выражениями (7.56), (7.58)-(7.61). Неоднородное краевое условие в дифференциальной форме (7.67) также необходимо свести к одномерному краевому условию, но уже в интегральной форме. После соответствующих преобразований получаем выражение для обобщенной поперечной силы при $y=в$ (краевое условие)

$$Q(в)=N_yAW'(в)=\frac{N_yA}{D}D\theta(в), \tag{7.91}$$

где $\theta(в)$-обобщенный угол поворота стержня, заменяющего пластину.

Данное условие следует использовать при выводе уравнения для критических сил.

Краевые условия пластины должны выполняться в двух направлениях. В направлении оси Ox краевые условия выполняются выбором функции $X(x)$. Для некоторых случаев опирания продольных кромок соотношения метода примут вид.

Шарнирное опирание двух краев (см. рисунок 7.11)

$$X(x)=\sin(\pi x/a);\ r_*^2=-\pi^2;\ r^2=-\pi^2+N_y/2D;\ s^4=\pi^4;\ A=0{,}5; \tag{7.92}$$

Жесткое защемление двух краев

$$X(x)=\sin(\omega x/a)-sh(\omega x/a)-\alpha_*\left[\cos(\omega x/a)-ch(\omega x/a)\right];$$

$$\omega=4{,}73004075;\ \alpha_*=1{,}017809411;\ A=1{,}03593604; \tag{7.93}$$

$$r_*^2=-12{,}30261764;\ r^2=r_*^2+N_y/2D;\ s^4=\omega^4.$$

Один край жестко защемлен, другой край шарнирно оперт

$$X(x)=\sin(\omega x/a)-sh(\omega x/a)-\alpha_*[\cos(\omega x/a)-ch(\omega x/a)];$$

$$\omega=3{,}92660231205;\ \alpha_*=0{,}9992232921;\ A=0{,}998446857; \qquad (7.94)$$

$$r_*^2=-11{,}51253121;\ r^2=r_*^2+N_y/2D;\ s^4=\omega^4.$$

В направлении оси Оу граничные условия необходимо учитывать при решении краевой задачи для уравнения (7.49), в результате можно получить уравнения для критических сил различных задач устойчивости существенно проще, чем в работе [149]. Представим некоторые из них.

Один край шарнирно оперт, другой край свободен (в направлении оси Оу).

Конечные граничные параметры обощенного стержня, заменяющего прямоугольную пластину, переносим на место нулевых начальных параметров, учитываем и условие (7.91). Используем схему преобразований (1.46) для задачи по рисунку 7.11

	1	2	3	4			
1	-1	A_{12}		$-A_{14}$	$DW(0)=0;$ $DW(в)$	←	$DW(в)$
2		A_{22}	-1	$-A_{24}$	$D\theta(0)$	—	$D\theta(в)$
3		$-A_{32}$		A_{34}	$M(0)=0;$ $D\theta(в)$	↙ ↖	$M(в)=0$
4		$-A_{42}$	$-\frac{N_y A}{D}$	A_{44}	$Q(0)$		$Q(в)=\frac{N_y A}{D}D\theta(в)$

=0

Раскрывая определитель матрицы коэффициентов, получим трансцендентное уравнение для критических сил вида

$$\left|A_*(N_y)\right|=-A_{32}A_{44}+A_{34}A_{42}+\frac{N_y A}{D}(A_{22}A_{34}-A_{24}A_{32})=0, \qquad (7.95)$$

где аргумент фундаментальных функций принимает значение $y=в$.

Если фундаментальные функции уравнения (7.95) содержат соотношения (7.92), то это уравнение будет моделью задачи устойчивости пластины с тремя шарнирно опертыми краями и одним свободным краем.

Два края свободны.

Вначале нужно выполнить перенос параметров внутри вектора начальных параметров. Для этого все элементы четвертого столбца умножаются на величину $N_y A/D$ и суммируются с элементами второго столбца

	1	2	3	4				
1	A_{11}	A_{12}		$-A_{14}\dfrac{N_y A}{D}$		$DW(0)$		$DW(в)$
2	A_{21}	A_{22}		$-A_{24}\dfrac{N_y A}{D}$		$D\theta(0)$	-	$D\theta(в)$
3	$-A_{31}$	$-A_{32}$		$A_{34}\dfrac{N_y A}{D}$		$M(0)=0$		$M(в)=0$
4	$-A_{41}$	$-A_{42}$		$A_{44}\dfrac{N_y A}{D}$		$Q(0)=\dfrac{N_y A}{D}D\theta(0)$		$Q(в)=\dfrac{N_y A}{D}D\theta(в)$

=0.

Затем на место нулевых начальных параметров переносятся ненулевые граничные параметры $DW(в)$, $D\theta(в)$ и $Q(в)=\dfrac{N_y A}{D}D\theta(в)$

	1	2	3	4		
1	A_{11}	$A_{12}-\dfrac{N_y A}{D}A_{14}$	-1			$DW(0)$
2	A_{21}	$A_{22}-\dfrac{N_y A}{D}A_{24}$		-1		$D\theta(0)$
3	$-A_{31}$	$-A_{32}+\dfrac{N_y A}{D}A_{34}$				$DW(в)$
4	$-A_{41}$	$-A_{42}+\dfrac{N_y A}{D}A_{44}$		$-\dfrac{N_y A}{D}$		$D\theta(в)$

=0.

Преобразованное уравнение краевой задачи приводит к следующему выражению для определителя матрицы коэффициентов:

$$\left|A_*\left(N_y\right)\right| = -A_{31}\left(-A_{42}+\frac{N_y A}{D}A_{44}\right)+A_{41}\left(-A_{32}+\frac{N_y A}{D}A_{34}\right)+$$
$$+\frac{N_y A}{D}\left[A_{21}\left(-A_{32}+\frac{N_y A}{D}A_{34}\right)+A_{31}\left(-A_{22}-\frac{N_y A}{D}A_{24}\right)\right]=0. \qquad (7.96)$$

Один край жестко защемлен, другой край свободен.

Схема решения краевой задачи и уравнение для критических сил примут вид

	1	2	3	4			
1	-1		$-A_{13}$	$-A_{14}$	$DW(0)=0;$ $DW(в)$	-	$DW(в)$
2		-1	$-A_{23}$	$-A_{24}$	$D\theta(0)=0;$ $D\theta(в)$		$D\theta(в)$
3			A_{33}	A_{34}	$M(0)$		$M(в)=0$
4		$-\frac{N_y A}{D}$	A_{43}	A_{44}	$Q(0)$		$Q(в)=\frac{N_y A}{D}D\theta(в)$

=0.

$$\left|A_*\left(N_y\right)\right| = -A_{33}A_{44}+A_{34}A_{43}+\frac{N_y A}{D}\left(-A_{23}A_{34}+A_{24}A_{33}\right)=0. \qquad (7.97)$$

Фундаментальные функции уравнений (7.95)-(7.97) определяются видом корней характеристического уравнения для уравнения (7.90) Рассмотрим задачи устойчивости, когда $N_y=N=const$ и $N_x=0$. В этом случае сжимающее усилие N_y будет входить в коэффициент r^2. Корни уравнений (7.95)-(7.97) будут являться критическими усилиями потери устойчивости пластины с соответствующими условиями опирания. Наиболее просто они могут быть определены методом последовательного перебора. Рекомендуется начальное безразмерное значение N_y принимать равным 0,001 и осуществлять поиск корней с шагом ΔN_y=0,001 при a=1, D=1. Далее значения коэффициентов H можно вычислить по формуле $H=N_{кр}/\pi^2$. По данному алгоритму была составлена программа в среде программирования MATLAB с помощью которой определены коэффициенты H для различных пластин с неоднородными граничными условиями (см. таблицу 7.7).

Анализ данных, приведенных в таблице (7.7), и представленной методики позволяет сделать следующие выводы:

- Методом граничных элементов можно получать весьма точные решения задач устойчивости тонких пластин с однородными и неоднородными граничными условиями при удержании всего одного члена ряда.

- Определение критических напряжений сводится к поиску корней нелинейных трансцендентных уравнений краевых задач устойчивости.

- Уравнение для критических сил МГЭ является определителем матрицы коэффициентов решения задачи Коши, который формируется без привлечения сложных аналитических преобразований и не содержит точек разрыва второго рода.

Кроме рассмотренных задач по МГЭ могут быть учтены ортотропные свойства материала, различные законы изменения толщины h в направлении оси Oy и силы N_y в направлении оси Ox, применены статический и динамический методы решения задач устойчивости пластинчатых систем, что существенно расширяет область его применения.

7.7 Действие сосредоточенных снимающих сил

Здесь представлены решения задач устойчивости тонких изотропных прямоугольных пластин, сжатых сосредоточенными силами. Трудности решения таких задач связаны с формированием математических моделей сосредоточенных сил и первые результаты опубликованы лишь в 50-х годах XX столетия. В фундаментальных монографиях и справочниках приведены результаты только для шарнирного опирания по контуру прямоугольной пластины [47-49,71,262,299,300,316 и др.], а учет других краевых условий еще больше усложняет задачу, что, по-видимому, предопределило отсутствие соответствующих решений.

Таблица 7.7

Коэффициенты H для различных пластин с неоднородными граничными условиями

Опирание кромок, параллельных оси Oy	Условия опирания кромок пластины, параллельных оси ox				
	Одна кромка шарнирно оперта, другая свободная. Критические усилия определяются из уравнения (7.95)				
Шарнирное опирание двух кромок. Используются коэффициенты (7.92)	a/в	1,0	1,5	2,0	3,0
	Эталонные результаты [49]	2,36	2,30	2,19	1,72
	Метод Ишлинского-Лейбензона	1,7635 Δ=25,3%	1,708 Δ=25,7%	1,6393 Δ=25,1%	1,5400 Δ=10, 5%
	Асимптотический метод с удержанием трех членов ряда и применением Паде-аппроксимации [149]	2,3562 Δ=0,16%	2,250 Δ=2,17%	2,0116 Δ=7,94%	1,7127 Δ=0,43%
	Метод граничных элементов (МГЭ) с удержанием одного члена ряда	2,36581 Δ=0,25%	2,31975 Δ=0,86%	2,04314 Δ=6,71%	1,71587 Δ=0,24%
Жесткое защемление двух кромок. Используются(7.93)	МГЭ с удержанием одного члена ряда	3,92569	4,10594	4,28842	3,38869
Жесткое защемление и шарнирное опирание. Используются (7.94)	МГЭ	3,11917	3,30560	3,09891	2,42006
	Две кромки свободные. Критические усилия определяются из уравнения(7.96)				
Шарнирное опирание двух кромок. Используются (7.92)	МГЭ	2,04314	1,71587	1,58213	1,48182
Жесткое защемление двух кромок. Используются(7.93)	МГЭ	3,73318	3,38869	2,72807	2,19411
Жесткое защемление и шарнирное опирание. Используются(7.94)	МГЭ	3,09891	2,42006	2,09279	1,84151
	Одна кромка жестко защемлена, другая свободная. Критические усилия определяются из уравнения(7.97)				
Шарнирное опирание двух кромок. Используются(7.92)	МГЭ	2,39168	2,41803	2,62574	3,66935
Жесткое защемление двух кромок. Используются (7.93)	МГЭ	3,98547	4,24485	4,29956	4,73930
Жесткое защемление и шарнирное опирание, Используются(7.94)	МГЭ	3,19922	3,30966	3,36032	4,14556

Для решения задач устойчивости прямоугольных пластин используем алгоритм численно-аналитического варианта МГЭ, вариационный метод Канторовича-Власова и дифференциальное уравнение технической теории устойчивости (7.66)

Введем в это уравнение малый параметр ξ^{n-1}, а прогиб разложим в ряд (7.2) по ортогональной системе функций $X_n(x)$

$$D\nabla^4 w(x,y)+\xi^{n-1}N_y\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}=0. \qquad (7.98)$$

В качестве ортогональной системы функций $X_n(x)$ принимаем формы собственных колебаний балок с условиями опирания, аналогичными условиям опирания пластин в направлении оси Ox. Тогда каждый член ряда (7.2) будет иметь одно и то же выражение для $X_n(x)$, в которое необходимо подставить лишь свою собственную частоту ω_n. Преобразуем уравнение (7.98) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью процедуры вариационного метода Канторовича-Власова, т.е. ряд (7.2) подставим в уравнение (7.98) умножим его части на $X_n(x)$ и проинтегрируем в пределах ширины пластины 0—a. Если кромки пластины, параллельные оси Oy, имеют шарнирное опирание, то уравнение (7.98) после процедуры метода Канторовича-Власова распадается на n независимых обыкновенных дифференциальных уравнений, каждому из которых будет соответствовать свое критическое усилие.

$$\begin{aligned}
&W_1^{IV}(y)+2r_1^2W_1''(y)+s_1^4W_1(y)=0;\\
&W_2^{IV}(y)+2r_2^2W_2''(y)+s_2^4W_2(y)=0;\\
&\text{----------}\\
&W_n^{IV}(y)+2r_n^2W_n''(y)+s_n^4W_n(y)=0,
\end{aligned} \qquad (7.99)$$

Определяя из краевых задач для уравнений (7.99) критические усилия, получим ряд по степеням ξ, который будет сходиться к точному значению.

$$N_{кр}=N_1+\xi N_2+\xi^2N_3+\ldots+\xi^{n-1}N_n=\sum_{n=1}^{m}\xi^{n-1}N_n, \qquad (7.100)$$

Для условий опирания пластины в направлении оси Oy, отличных от шарнирного, система уравнений (7.99) и ряд (7.100) будут приближенно описывать задачу устойчивости. При действии сосредоточенных сил одного члена ряда (7.2) недостаточно и далее определяются критические силы для пяти членов ряда (7.100). В окончательном

результате принимается ξ=0.1, т.к. при увеличении номера n ряда (7.2) увеличиваются аргументы фундаментальных функций и растут величины N_n. Вариационный метод Канторовича-Власова приводит коэффициенты уравнений (7.99) к виду (см. 7.56)

$$r^2 = r_*^2 + \int_0^a N_y X^2(x)dx/2AD;\ A = \int_0^a X^2(x)dx; \qquad (7.101)$$

$$s^4 = \int_0^a X^{IV}(x)X(x)dx/A + N_x \cdot r_*^2;\ r_*^2 = \int_0^a X''(x)X(x)dx/A.$$

Существуют различные способы учета сосредоточенных сжимающих сил.

На рисунке 7.12 стрелкой указаны начальная и конечная граничные точки 1 и 2. В данной расчетной схеме сосредоточенная сила F_y учтена по математической модели с помощью дельта-функции Дирака

$$N_y = F_y \cdot \delta(x - a_F) \qquad (7.102)$$

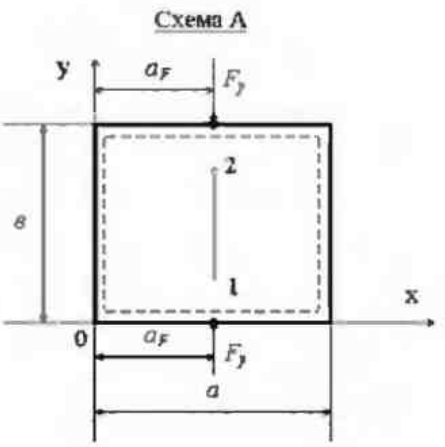


Рисунок 7.12

Интегральные преобразования в методе Канторовича-Власова в случае, когда нагрузка N_x=0, приводят коэффициенты (7.101) к виду

$$r^2 = -(\omega_n/a)^2 + F_y X_n^2(a_F)/2AD; \quad s^4 = (\omega_n/a)^4;\ r_*^2 = -(\omega_n/a)^2. \qquad (7.103)$$

При шарниром опирании кромок, параллельных оси Оу, $X_n = \sin(n\pi x/a)$ и из формул (7.103) следует, что минимальная критическая сила $F_{кр}$ будет при координате $a_F = a/2$ (коэффициент при F_y максимален) и пропадают

члены ряда (7.2) с четными номерами (коэффициент при F_y равен нулю, когда n четное). Эти выводы справедливы и для других симметричных условий опирания. Поэтому далее рассматриваются задачи устойчивости при $a_F = a/2$ и с нечетными членами ряда (7.2). Кроме схемы по рис 7.12, сосредоточенную силу можно учесть другим способом, используя асимптотический подход, предложенный проф. С.П. Тимошенко [315, 316].

В механической модели сосредоточенной силы пластина разбивается на три части. Участки 1—2 и 3—4 при потере устойчивости испытывают статический изгиб, а средняя часть 2—3—продольно-поперечный изгиб (рисунок 7.13). Коэффициенты (7.101) для средней части пластины примут вид (N_y=0)

$$r^2 = -(\omega_n/a)^2;\ s^4 = (\omega_n/a)^4 - (F_x/c)(\omega_n/a)^2/D;\ r_*^2 = -(\omega_n/a)^2. \quad (7.104)$$

При уменьшении размера c равнодействующая сила $F_x = N_x \cdot c$ будет стремиться к сосредоточенной силе, но при некотором достаточно малом значении c вычислительные возможности этой модели будут исчерпаны.

Схема В

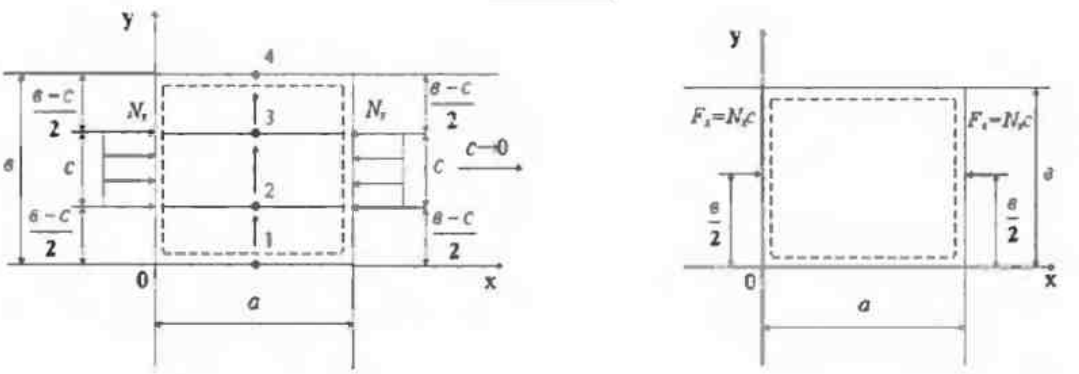
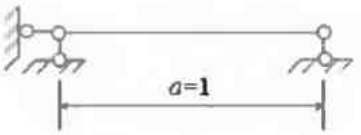


Рисунок 7.13

Коэффициенты (7.103), (7.104) играют определяющую роль при поиске критических сил. Для 5 членов ряда (7.2) они представлены в таблице 7.8 при a=1.

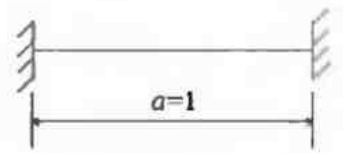
Таблица 7.8



Шарнирное опирание двух продольных краев

$$X_n = \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$\omega_n=n\pi$ $n=1, 3, 5, 7, 9$	$r^2=-(n\pi)^2+F_x/D$ $s^4=(n\pi)^4-(n\pi)^2(F_x/cD)$	$A=0,5$ $X^2=1,0$



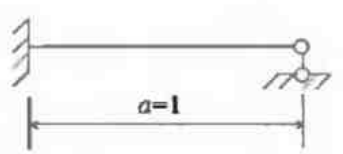
Жесткое защемление двух продольных краев пластин

$$X_n = \sin\frac{\omega_n x}{a} - sh\frac{\omega_n x}{a} - \alpha_*\left(\cos\frac{\omega_n x}{a} - ch\frac{\omega_n x}{a}\right);$$

$$\alpha_* = \frac{\sin\omega_n - sh\omega_n}{\cos\omega_n - ch\omega_n}.$$

Частота собственных колебаний ω_n	Коэффициенты r^2 и s^4	Коэффициенты A, $X^2(a/2)$
$\omega_1=4,730040745$	$r^2=-12,30261846+1,261104272F_x/D$ $s^4=500,5639014-12,30261846(F_x/cD)$	$A=1,035936001$ $X^2=2,612846634$
$\omega_3=10,99560784$	$r^2=-98,90480139+0,988415843F_x/D$ $s^4=14617,63009-98,90480139(F_x/cD)$	$A=1,000067103$ $X^2=1,976964336$
$\omega_5=17,27875966$	$r^2=-263,8185971+1,000182961F_x/D$ $s^4=89135,4075-263,8185971(F_x/cD)$	$A=1,00031910$ $X^2=2,001004239$
$\omega_7=23,5619449$	$r^2=-531,0924623+1,021669813F_x/D$ $s^4=308208,452-531,0924623(F_x/cD)$	$A=0,9787793409$ $X^2=1,99997861$
$\omega_9=29,84513021$	$r^2=-860,378147+1,017019097F_x/D$ $s^4=793403,1336-860,378147(F_x/cD)$	$A=0,983246847$ $X^2=1,99996164$

Частота собственных колебаний ω_n	Коэффициенты r^2 и s^4	Коэффициенты A, $X^2(a/2)$



Жесткое защемление одного края и шарнирное опирание другого

$$X_n = \sin\frac{\omega_n x}{a} - sh\frac{\omega_n x}{a} - \alpha_*\left(\cos\frac{\omega_n x}{a} - ch\frac{\omega_n x}{a}\right);$$

$$\alpha_* = \frac{\sin\omega_n - sh\omega_n}{\cos\omega_n - ch\omega_n}$$

Продолжение таблицы 7.8

ω_1=3,926602312	r^2=-11,51253014+1,043805085F_y/D s^4=237,7210675-11,51253014(F_x/cD)	A=0,9984471776 X^2=2,084368482
ω_3=10,210176125	r^2=-94,03757261+0,845647221F_y/D s^4=10867,5822-94,0375726(F_x/cD)	A=0,9999994434 X^2=1,691293501
ω_5=16,49336143	r^2=-255,5376082+0,853895902F_y/D s^4=74000,84932-255,5376082(F_x/cD)	A=1,000000006 X^2=1,707791816
ω_7=22,77654673	r^2=-495,9945342+0,853538803F_y/D s^4=269123,4344-495,9945342(F_x/cD)	A=1,000000000 X^2=1,707077606
ω_9=29,05973204	r^2=-815,4082939+0,853836451F_y/D s^4=713126,2473-815,4082939(F_x/cD)	A=1,000000000 X^2=1,707072903

Представленные модели сосредоточенных сил по рисункам 7.12 и 7.13 позволяют составить аналитические уравнения для поиска критических сил. Каждому уравнению (7.99) соответствует решение задачи Коши, которое можно представить в матричной форме следующим способом

$$\begin{pmatrix} DW(y) \\ D\theta(y) \\ M(y) \\ Q(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{24} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} DW(0) \\ D\theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} \qquad (7.105)$$

где фундаментальные функции статического изгиба и продольно-поперечного изгиба представлены в п. 7.2, 7.5. Рассмотрим решение задач устойчивости пластин с однородными граничными условиями и схемой А. При шарнирном опирании кромок, параллельных оси Ox (рисунок 7.12), уравнение (7.105) при $y=в$ по алгоритму МГЭ преобразуется к следующему однородному алгебраическому уравнению

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & & A_{12} & & -A_{14} \\
2 & -1 & A_{22} & & -A_{24} \\
3 & & -A_{32} & & A_{34} \\
4 & & -A_{42} & -1 & A_{44}
\end{array}
\cdot
\begin{array}{|c|}
\hline DW(0)=0;\ D\theta(в) \\ \hline D\theta(0) \\ \hline M(0)=0;\ Q(в) \\ \hline Q(0) \\ \hline
\end{array}
-
\begin{array}{|c|}
\hline DW(в)=0 \\ \hline D\theta(в) \\ \hline M(в)=0 \\ \hline Q(в) \\ \hline
\end{array}
=0. \quad (7.106)
$$

Раскрывая определитель матрицы коэффициентов, получаем уравнение для критических сил

$$\left|A_*\left(F_y\right)\right| = A_{12}\cdot A_{34} - A_{14}\cdot A_{32} = 0. \qquad (7.107)$$

Если подставить в уравнение (7.107) коэффициенты r^2 и s^4, соответствующие определенным условиям опирания кромок, параллельных оси Оу, то несложно определить критические силы, как его корни. Наиболее просто они могут быть определены методом последовательного перебора с начальным значением F_y=0,001D и шагом ΔF_y=0,001D. Тестирование уравнения (7.107) при N_y=N=*const*, r^2=-πr^2+N/2D, s^4=π^4 приводит к значению $N_{кр}$=39,4784D/$в^2$, которое практически является точным значением данной задачи [71]. Применение уравнения (7.107) для схемы пластины по рис 7.12 и коэффициентов (7.103) при a=$в$=1 приводит к значениям критических сил, сведенных в таблице 7.9

Таблица 7.9

Частоты собственных колебаний	Критическе силы $F_n в/D$	Члены ряда (5) $\xi^{n-1}F_n в/D$	Критическая сила пластины по схеме А, рисунок 7.12 $F_{кр}=\sum_{n-1}^{9} F_n\xi^{n-1}$
$\omega_1=\pi$	19,7395	19,7395	$F_{кр}$=21,56636D/$в$=$k\pi D$/$в$;
$\omega_3=3\pi$	177,65	1,7765	k=6,86478;
$\omega_5=5\pi$	493,5	0,04935	Δ=15,98%
$\omega_7=7\pi$	990,5	0,0009905	
$\omega_9=9\pi$	1598,5	0,000015985	

Из таблицы 7.9 следует, что полученное решение отличается от эталонного (k=8,17 [71]) примерно на 16,0 %. Данное расхождение не означает, что МГЭ плохо решает данную задачу. Результат таблицы 7.9 получен при точном исходном уравнении (7.107) и точной математической модели сосредоточенной силы (7.102) в рамках технической теории устойчивости пластин. Поэтому значение $F_{кр}$=21,566$D/в$ можно рассматривать как предельно возможный результат для сосредоточенной силы. На практике выполнить условия схемы А по рисунок 7.12 невозможно, сосредоточенная сила реально может быть только распределенной и действительная критическая сила будет больше результата таблицы 7.9.

При жестком защемлении кромок, параллельных оси Ox, краевая задача и уравнение для критических сил примут вид

	1	2	3	4				
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$	·	$DW(0)=0;$ $M(в)$	-	$DW(в)=0$
2			$-A_{23}$	$-A_{24}$		$D\theta(0)=0;$ $Q(в)$		$D\theta(в)=0$
3	-1		A_{33}	A_{34}		$M(0)$		$M(в)$
4		-1	A_{43}	A_{44}		$Q(0)$		$Q(в)$

=0;

$$\left|A_*\left(F_y\right)\right| = A_{13}\cdot A_{24} - A_{14}\cdot A_{23} = 0. \qquad (7.108)$$

Жесткое защемление и шарнирное опирание кромок, параллельных оси Ox, приводит к следующей краевой задаче и уравнению

	1	2	3	4				
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$	·	$DW(0)=0;$ $D\theta(в)$	-	$DW(в)=0$
2	-1		$-A_{23}$	$-A_{24}$		$D\theta(0)=0;$ $Q(в)$		$D\theta(в)$
3			A_{33}	A_{34}		$M(0)$		$M(в)=0$
4		-1	A_{43}	A_{44}		$Q(0)$		$Q(в)$

=0;

$$\left|A_*\left(F_y\right)\right| = A_{13}\cdot A_{34} - A_{14}\cdot A_{33} = 0. \qquad (7.109)$$

Критические силы, определенные из (7.108) и (7.109), приведены в таблице 7.11.

Уравнение краевой задачи схемы В также формируем по алгоритму МГЭ. В граничных точках модулей 2, 3 равенство кинематических и статических параметров уравнения (7.105) обеспечивает непрерывность аналогичных параметров пластины.

Формируем матрицы X_* и Y дискретизированной пластины для шарнирного опирания кромок, параллельных оси OX (рисунок 7.13), где учитываем непрерывность параметров в точках 2, 3 и краевые условия

(7.110)

$$X_* = \begin{array}{|c|l|}\hline 1 & DW^{1-2}(0)=0;\ D\theta^{3-4}(l) \\ \hline 2 & D\theta^{1-2}(0) \\ \hline 3 & M^{1-2}(0)=0;\ Q^{3-4}(l) \\ \hline 4 & Q^{0-1}(0) \\ \hline 5 & DW^{2-3}(0) \\ \hline 6 & D\theta^{2-3}(0) \\ \hline 7 & M^{2-3}(0) \\ \hline 8 & Q^{2-3}(0) \\ \hline 9 & DW^{3-4}(0) \\ \hline 10 & D\theta^{3-4}(0) \\ \hline 11 & M^{3-4}(0) \\ \hline 12 & Q^{3-4}(0) \\ \hline \end{array} \quad Y= \quad \begin{array}{|c|l|}\hline 1 & DW^{1-2}(l)=DW^{2-3}(0) \\ \hline 2 & D\theta^{1-2}(l)=D\theta^{2-3}(0) \\ \hline 3 & M^{1-2}(l)=M^{2-3}(0) \\ \hline 4 & Q^{1-2}(l)=Q^{2-3}(0) \\ \hline 5 & DW^{2-3}(l)=DW^{3-4}(0) \\ \hline 6 & D\theta^{2-3}(l)=D\theta^{3-4}(0) \\ \hline 7 & M^{2-3}(l)=M^{3-4}(0) \\ \hline 8 & Q^{2-3}(l)=Q^{3-4}(0) \\ \hline 9 & DW^{3-4}(l)=0 \\ \hline 10 & D\theta^{3-4}(l) \\ \hline 11 & M^{3-4}(l)=0 \\ \hline 12 & Q^{3-4}(l) \\ \hline \end{array} \qquad (7.110)$$

Матрица коэффициентов уравнения устойчивости примет вид

$X*(F_x)=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		a_{12}		$-a_{14}$	-1							
2		a_{22}		$-a_{24}$		-1						
3		$-a_{32}$		a_{34}			-1					
4		$-a_{42}$		a_{44}				-1				
5					A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	-1			
6					A_{21}	A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{24}$		-1		
7					$-A_{31}$	$-A_{32}$	A_{33}	A_{34}			-1	
8					$-A_{41}$	$-A_{42}$	A_{43}	A_{44}				-1
9									a_{11}	a_{12}	$-a_{13}$	$-a_{14}$
10	-1								a_{21}	a_{22}	$-a_{23}$	$-a_{24}$
11									$-a_{31}$	$-a_{32}$	a_{33}	a_{34}
12			-1						$-a_{41}$	$-a_{42}$	a_{43}	a_{44}

(7.111)

где малыми буквами обозначены фундаментальные функции статического изгиба модулей 1—2 и 3—4 при $y=(в-c)/2$, а большими— фундаментальные функции продольно-поперечного изгиба модуля 2—3 при $y=c$. При поиске критических сил (корней уравнения $|A*(F_x)|=0$) следует помнить, что фундаментальные функции статического изгиба не изменяются, а фундаментальные функции продольно-поперечного изгиба изменяются в соответствии с корнями характеристических уравнений для уравнений (7.99) Тестирование матрицы (7.111) при $c=в=1$, $N_x=N=const$, шарнирном опирании кромок по периметру приводит к значению критического усилия $N_{кр}=39{,}4785D/в^2$, что является точным результатом, т.е. матрица (7.111) точно отображает задачу устойчивости шарнирно опертой пластины. Значения критических сил схемы В по рисунок 7.13 при уменьшении величины ***C*** приведены в таблице 7.10.

Таблица 7.10

Критические силы при использовании первого члена ряда (7.2), $\omega_1=\pi$				
c=1,0	c=0,9	c=0,5	c=0,1	c=0,01
N_1=39,4785 $F_1=N_1 \cdot c$=39,4785	N_1=39,555 F_1=35,5995	N_1=49,6125 F_1=24,8063	N_1=226,975 F_1=22,6975	N_1=2354,65 F_1=23,5465
c=0,001	$c=1\cdot10^{-4}$	$c=1\cdot10^{-5}$	$c=1\cdot10^{-6}$	$c=1\cdot10^{-7}$
N_1=23667,5 F_1=23,6675	N_1=236795,0 F_1=23,6795	N_1=2368150,0 F_1=23,6815	N_1=23681500,0 F_1=23,6815	N_1=236815000,0 F_1=23,6815
Критические силы при использовании других членов ряда (7.2)				
$c=1\cdot10^{-6}$ $\omega_3=3\pi$	$c=1\cdot10^{-6}$ $\omega_5=5\pi$	$c=1\cdot10^{-6}$ $\omega_7=7\pi$	$c=1\cdot10^{-6}$ $\omega_9=9\pi$	$F_{кр}=\sum_{n=1}^{9}\xi^{n-1}\cdot F_n$
N_3=183,85 $\xi^2=1\cdot10^{-2}$ $F_3=\xi^2 N_3$=1,8385	N_5=1220,5 $\xi^4=1\cdot10^{-4}$ F_5=0,12205	N_7=5375,0 $\xi^6=1\cdot10^{-6}$ F_7=0,005375	N_9=17515,0 $\xi^8=1\cdot10^{-8}$ F_9=0,00017515	$F_{кр}$=25,6476$D/в$= =$k\pi D/в$ k=8,1639 Δ=0,075%

Величина критической силы при учете 5 членов ряда (7.100) $F_{кр}$=25,6476$D/в$ отличается от эталонного значения всего лишь на 0,075 %. Данный результат также будет отличаться от действительных критических сил, т.к. весьма сложно реализовать величину $c=1\cdot10^{-6}$ и учесть существенно неоднородное напряженное состояние, создаваемое сосредоточенной силой. При жестком защемлении кромок, параллельных оси Ox, изменятся краевые условия в матрицах X_*, Y (7.110). После учета данных условий матрица устойчивости примет вид

$X_*(F_*)=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1			$-a_{13}$	$-a_{14}$	-1							
2			$-a_{23}$	$-a_{24}$		-1						
3			a_{33}	a_{34}			-1					
4			a_{43}	a_{44}				-1				
5					A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	-1			
6					A_{21}	A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{24}$		-1		
7					$-A_{31}$	$-A_{32}$	A_{33}	A_{34}			-1	
8					$-A_{41}$	$-A_{42}$	A_{43}	A_{44}				-1
9									a_{11}	a_{12}	$-a_{13}$	$-a_{14}$
10									a_{21}	a_{22}	$-a_{23}$	$-a_{24}$
11	-1								$-a_{31}$	$-a_{32}$	a_{33}	a_{34}
12		-1							$-a_{41}$	$-a_{42}$	a_{43}	a_{44}

(7.112)

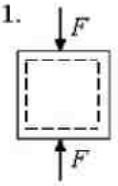
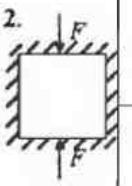
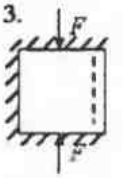
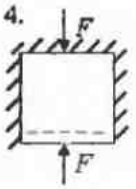
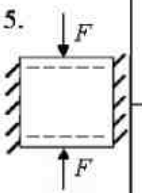
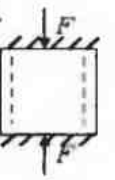
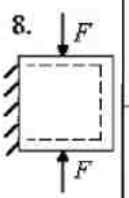
Критические силы задач с данной матрицей приведены в таблице 7.11. Матрица устойчивости для жесткого защемления одной кромки и шарнирного опирания другой в направлении оси OX запишется следующим образом

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1			$-a_{13}$	$-a_{14}$	-1							
2			$-a_{23}$	$-a_{24}$		-1						
3			a_{33}	a_{34}			-1					
4			a_{43}	a_{44}				-1				
5					A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	-1			
6					A_{21}	A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{24}$		-1		
7					$-A_{31}$	$-A_{32}$	A_{33}	A_{34}			-1	
8					$-A_{41}$	$-A_{42}$	A_{43}	A_{44}				-1
9									a_{11}	a_{12}	$-a_{13}$	$-a_{14}$
10	-1								a_{21}	a_{22}	$-a_{23}$	$-a_{24}$
11									$-a_{31}$	$-a_{32}$	a_{33}	a_{34}
12		-1							$-a_{41}$	$-a_{42}$	a_{43}	a_{44}

(7.113)

Критические силы данной расчетной схемы представлены в таблице 7.11 (коэффициенты k) при a=$в$=1, c=1·10^{-6}, μ=0,3 и расчетных схем А, В.

Таблица 7.11

Краевые условия и схема нагружения	Расчетная схема	Коэффициент k	Краевые условия и схема нагружения	Расчетная схема	Коэффициент k	Краевые условия и схема нагружения	Расчетная схема	Коэффициент k
1. 	A	6,8648	2. 	A	13,4113	3. 	A	13,0522
	B	8,1639		B	12,8321		B	11,3716
4. 	A	10,8958	5. 	A	10,4305	6. 	A	11,3838
	B	10,8873		B	10,5103		B	10,0719
7. 	A	10,2241	8. 	A	9,4634	9. 	A	8,2108
	B	9,0336		B	9,1265		B	7,4240

К задачам с неоднородными граничными условиями относятся задачи устойчивости при действии сжимающих сил на свободных краях пластины. В этом случае на свободном крае возникает неоднородное граничное условие для приведенной поперечной силы вида (7.67), а сосредоточенную сжимающую силу в алгоритме МГЭ можно учесть только по схеме А (рисунок 7.12). Если применить к выражению (7.67) процедуру метода Канторовича-Власова и учесть сосредоточенную силу по формуле (7.102), то получим краевое условие вида

$$Q(в)=\frac{F_y X^2(a_F)}{D} D\theta(в). \qquad (7.144)$$

Данное неоднородное краевое условие необходимо использовать при выводе уравнений для критических сил. Рассмотрим шарнирное опирание одной кромки и свободный край другой кромки (рисунок 7.14).

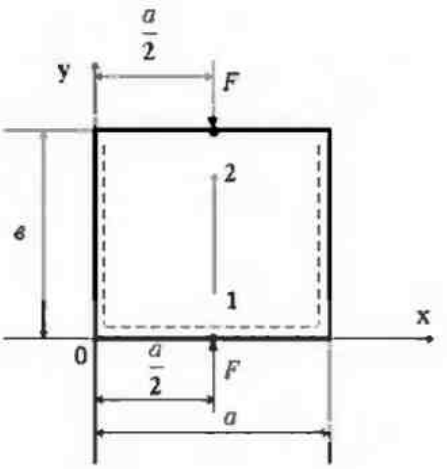


Рисунок 7.14

Для решения этой краевой задачи используем уравнение (7.105) при $y=в$ и условие (7.114)

	1	2	3	4				
1	-1	A_{12}		$-A_{14}$		$DW(0)=0;$ $DW(в)$	-	$DW(в)$
2		A_{22}	-1	$-A_{24}$	.	$D\theta(0)$		$D\theta(в)$
3		$-A_{32}$		A_{34}		$M(0)=0;$ $D\theta(в)$		$M(в)=0$
4		$-A_{42}$	$-\frac{F_y X^2}{D}$	A_{44}		$Q(0)$		$Q(в)=\frac{F_y X^2}{D} D\theta(в)$

=0.

Уравнение устойчивости при раскрытии матрицы коэффициентов примет вид

$$\left|A_*(F_y)\right| = -A_{32}A_{44} + A_{32}A_{42} + \frac{F_y X^2(a_F)}{D}\left[A_{22}A_{34} - A_{34}A_{32}\right] = 0. \qquad (7.115)$$

При жестком защемлении одного края и свободного другого решение краевой задачи и уравнение критических сил запишутся следующим образом

	1	2	3	4				
1	-1		$-A_{13}$	$-A_{14}$		$DW(0)=0;$ $DW(в)$	-	$DW(в)$
2			$-A_{23}$	$-A_{24}$	·	$D\theta(0)=0;$ $D\theta(в)$		$D\theta(в)$
3			A_{33}	A_{34}		$M(0)$		$M(в)=0$
4		$-\frac{F_y X^2}{D}$	A_{43}	A_{44}		$Q(0)$		$Q(в)=\frac{F_y X^2}{D} D\theta(в)$

=0;

$$\left|A_*(F_y)\right| = A_{33}A_{44} - A_{34}A_{43} + \frac{F_y X^2(a_F)}{D}\left[-A_{23}A_{34} + A_{24}A_{33}\right] = 0. \qquad (7.116)$$

Если <u>два края пластины свободны</u> (рисунок 7.15), то для решения данной краевой задачи необходимо учесть неоднородные краевые условия в матрице начальных и конечных параметров одновременно. Это приведет к наложению 2 и 4 столбцов матрицы фундаментальных функций уравнения (7.105). Далее осуществляется перенос конечных параметров по обычной схеме

	1	2	3	4				
1	A_{11}	$A_{12}-A_{14}\frac{F_y X^2}{D}$	-1			$DW(0)$	-	$DW(в)$
2	A_{21}	$A_{22}-A_{24}\frac{F_y X^2}{D}$		-1	·	$D\theta(0)$		$D\theta(в)$
3	$-A_{31}$	$-A_{32}+A_{34}\frac{F_y X}{D}$				$M(0)=0;$ $DW(в)$		$M(в)=0$
4	$-A_{41}$	$-A_{42}+A_{44}\frac{F_y X}{D}$		$-\frac{F_y X^2}{D}$		$Q(в)=\frac{F_y X^2}{D}D\theta(в)$ $D\theta(в)$		$Q(в)=\frac{F_y X^2}{D}D\theta(в)$

=0.

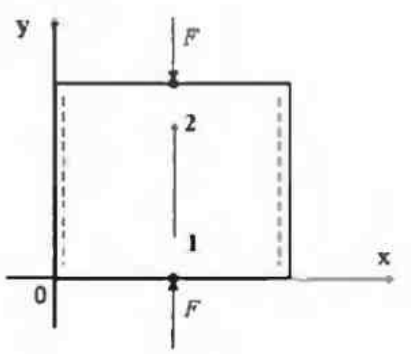


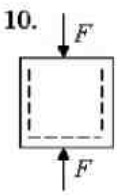
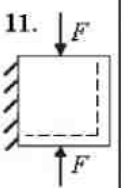
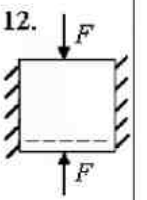
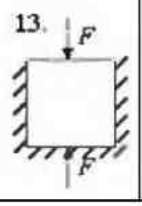
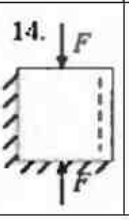
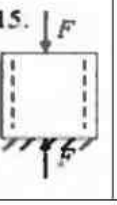
Рисунок 7.15

Раскрывая определитель матрицы коэффициентов, получаем уравнение для вычисления критических сил

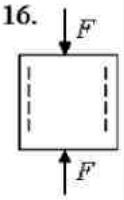
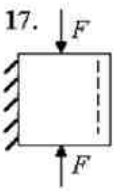
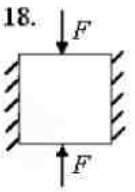
$$\left|A_*\left(F_y\right)\right| = -A_{31}\left(-A_{42}+A_{44}\frac{F_yX^2}{D}\right)+A_{41}\left(-A_{32}+A_{34}\frac{F_yX^2}{D}\right)+$$
$$+\frac{F_yX^2}{D}\left[A_{21}\left(-A_{32}+A_{34}\frac{F_yX^2}{D}\right)+A_{31}\left(A_{22}+A_{24}\frac{F_yX^2}{D}\right)\right]=0. \qquad (7.117)$$

Значения критических сил по уравнениям (7.115), (7.116), (7.117) представлены в таблице 7.12 при a=$в$=1, μ=0,3.

Таблица 7.12

Краевые условия и схема нагружения	Расчетная схема	Коэффициент k	Краевые условия и схема нагружения	Расчетная схема	Коэффициент k	Краевые условия и схема нагружения	Расчетная схема	Коэффициент k
10. 	A	4,0519	11. 	A	5,1358	12. 	A	5,3061
13. 	A	5,3803	14. 	A	5,2548	15. 	A	4,0933

Продолжение таблицы 7.12

Краевые условия и схема нагружения	Расчетная схема	Коэффициент k	Краевые условия и схема нагружения	Расчетная схема	Коэффициент k	Краевые условия и схема нагружения	Расчетная схема	Коэффициент k
16. 	A	3,8464	17. 	A	5,4858	18. 	A	5,4267

Анализ данных таблиц 7.11 и 7.12 показывает, что МГЭ позволяет весьма эффективно и точно решать разнообразные задачи устойчивости тонких пластин. Практическая ценность представленной методики повышается, если учесть, что алгоритм МГЭ можно применить к задачам устойчивости пространственных пластинчатых систем.

Отметим важный вывод, следующий из п. 7.6, 7.7. Он заключается в том, что для успешного решения сложных задач теории пластин (соответственно и теории оболочек) необходимо одновременно использовать значительный арсенал эффективных и весьма мощных методов математической физики. В п. 7.7, как и в п. 7.6, требовалось сразу применить:

1.Метод разделения переменных Фурье;

2.Вариационный метод Канторовича-Власова;

3.Метод решения краевых задач одномерных линейных систем–МГЭ.

4.Метод малого параметра.

7.8 Устойчивость и динамика круглых пластин

Дифференциальное уравнение установившихся поперечных колебаний изотропной круглой пластины в амплитудном состоянии с учетом сжимающих усилий в срединной плоскости следует из (7.53) при использовании соотношений (7.30), (7.31) (рисунок 7.16)

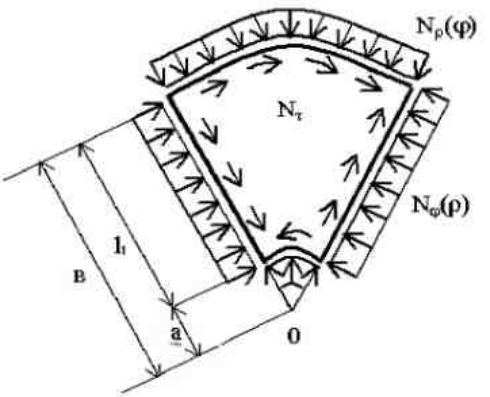


Рисунок 7.16

$$\nabla^2\nabla^2 w(\rho,\varphi)-\frac{\gamma h\omega^2}{D}w(\rho,\varphi)+\frac{Nr(\varphi)}{D}\frac{\partial^2 w(\rho,\varphi)}{\partial\rho^2}+$$
$$+2\frac{N\tau}{D}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w(\rho,\varphi)}{\partial\rho\partial\varphi}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial w(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\right]+ \qquad (7.117)$$
$$+\frac{N\varphi(\rho)}{D}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial w(\rho,\varphi)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right]=\frac{q(\rho,\varphi)}{D}$$

Задача Коши данного уравнения согласно п. 7.3 представляется выражениями

$$W^{IV}(\varphi)+2r^2W''(\varphi)+f^3W'(\varphi)+s^4W(\varphi)=q(\varphi)/D;$$
$$W(0);\ \theta(0)=W'(0);\ M(0)=-DA_M\left[W''(0)+r_M^2W(0)\right]; \qquad (7.118)$$
$$Q(0)=-DA_Q\left[W'''(0)+r_Q^2W'(0)\right],$$

где $W(0)$, $\theta(0)$, $M(0)$, $Q(0)$- соответственно начальные обобщенные прогиб, угол поворота, изгибающий момент и приведенная поперечная сила в направлении угловой координаты φ. Коэффициенты выражений (7.118) имеют вид

$$r^2=B_*/A;\ f^3=G/A;\ s^4=C_*/A;\ B_*=B+\int_a^в N_\varphi(\rho)\rho^2X^2(\rho)d\rho/D;$$

$$G=\int_a^в\left[2N_\tau\rho^3X'(\rho)-2N_\tau\rho^2X(\rho)\right]X(\rho)d\rho/D; \qquad (7.119)$$

$$C_* = C + \int_a^в \left[N_\rho(\varphi)\rho^4 X''(\rho) + N_\rho(\varphi)\rho^3 X'(\rho) - \gamma h\omega^2 \rho^4 X(\rho)\right] X(\rho)d\rho/D;$$

Из (7.119) следует, что для задач динамики и устойчивости круглых пластин необходимо дополнительно вычислить по сравнению с задачами статики следующие интегралы

$$I_1 = \int_a^в \rho^2 X^2(\rho)d\rho/2;\ \ I_2 = \int_a^в \rho^4 X''(\rho)X(\rho)d\rho; \qquad (7.120)$$

$$I_3 = \int_a^в \rho^3 X'(\rho)X(\rho)d\rho;\ \ I_4 = \int_a^в \rho^4 X^2(\rho)d\rho.$$

Данные интегралы вычислялись для пластины с единичным радиусом по формуле Симпсона с шагом h=0.1·10^{-3}, их значения представлены в таблице 7.13. Другие коэффициенты в (7.118), вид функций $X(\rho)$, положительные направления параметров круглой пластины представлены в таблицах 3.2, 7.3 и на рисунке 1.8, 1.10.

В выражениях (7.119) могут быть учтены любые законы изменения усилий в срединной плоскости. Для $N_\varphi(\rho)$ это выполняется непосредственно, для N_τ и $N_\rho(\varphi)$ путем кусочно-постоянной аппроксимации.

Таблица 7.13

Параметры круглых пластин	Краевые условия круглых пластин							
	Центр	Край	Центр	Край	Центр	Край	Центр	Край
	Жесткое защемление	Жесткое защемление	Жесткое защемление	Шарнирное опирание	Жесткое защемление	Свободный край	Шарнирное опирание	Шарнирное опирание
I_1	0,140830103		0.174437352		0.625768423		0.070668244	
I_2	-0,734504282		-2.15772564		0.188696919		-0.562951668	
I_3	-0,422490267		-0.523312036		1.83326479		-0.212004652	
I_4	0,100033342		0.155583304		0.940638360		0.057038952	
R^2	-0,551779305		-2.147395088		0.744932928		-0.289862244	
S^4	81,3538733- -0,708341N- -0.096563ω^2		53.4119876- -2.16108N- -0.15583ω^2		5.2569042+ +0.10170N- -0.50698ω^2		21.7716964- -1.125903N- -0.114078ω^2	
Критическая сила N_{11}/D $N_\varphi=N_r=0$	117.821		27.165		—		20,740	
Безразмерная частота $\omega_{11}\sqrt{\gamma h/D}$ $N_r=N_\varphi=$ $=N_r=0$	32.464		23.573		5.493 (5.176[31])		14,307	

7.8.1 Фундаментальные решения

Решение задачи Коши (7.118), как и в п. 7.3.1, можно записать, в виде интегральных уравнений в матричной форме (7.49). Представим основные случаи фундаментальных ортонормированных функций.

1 случай $|s|>|r|$ Корни (7.19) комплексные $k_{1..4}=\pm\alpha\pm i\beta$

$\alpha=\sqrt{\left(s^2-r^2\right)/2};\quad \beta=\sqrt{\left(s^2+r^2\right)/2}.$ Фундаментальные функции имеют вид (7.50).

2 случай. $s^4<0;\ r^2\neq 0$. Корни (7.19) действительные мнимые

$$k_{1,2}=\pm\alpha;\ k_{3,4}=\pm i\beta;\ \alpha=\sqrt{-r^2+\sqrt{r^4-s^4}};\ \beta=\sqrt{r^2+\sqrt{r^4-s^4}};$$

$$A_{11}=\frac{\left(\beta^2-r_M^2\right)ch\alpha\varphi+\left(\alpha^2+r_M^2\right)\cos\beta\varphi}{\alpha^2+\beta^2};\quad A_{12}=\frac{\beta\left(\beta^2-r_Q^2\right)sh\alpha\varphi+\alpha\left(\alpha^2+r_Q^2\right)\sin\beta\varphi}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)};$$

$$A_{13}=\frac{sh\alpha\varphi-\cos\beta\varphi}{A_M\left(\alpha^2+\beta^2\right)};\ A_{14}=\frac{\beta sh\alpha\varphi-\alpha\sin\beta\varphi}{A_Q\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)};$$

$$A_{21}=\frac{\alpha\left(\beta^2-r_M^2\right)sh\alpha\varphi-\beta\left(\alpha^2+r_M^2\right)\sin\beta\varphi}{\alpha^2+\beta^2};\ A_{22}=\frac{\left(\beta^2-r_Q^2\right)ch\alpha\varphi+\left(\alpha^2+r_Q^2\right)\cos\beta\varphi}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{23}=\frac{\alpha sh\alpha\varphi+\beta\sin\beta\varphi}{A_M\left(\alpha^2+\beta^2\right)};\ A_{24}=\frac{ch\alpha\varphi-\cos\beta\varphi}{A_Q\left(\alpha^2+\beta^2\right)};$$

$$A_{31}=A_M\left(\alpha^2+r_M^2\right)\left(\beta^2-r_M^2\right)\frac{ch\alpha\varphi-\cos\beta\varphi}{\alpha^2+\beta^2};\qquad(7.120)$$

$$A_{33}=\frac{\left(\alpha^2+r_M^2\right)ch\alpha\varphi+\left(\beta^2-r_M^2\right)\cos\beta\varphi}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{32}=\frac{A_M\left[\beta\left(\beta^2-r_Q^2\right)\left(\alpha^2+r_M^2\right)sh\alpha\varphi-\alpha\left(\alpha^2+r_Q^2\right)\left(\beta^2-r_M^2\right)\sin\beta\varphi\right]}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)};$$

$$A_{34}=\frac{A_M}{A_Q}\frac{\beta\left(\alpha^2+r_M^2\right)sh\alpha\varphi+\alpha\left(\beta^2-r_M^2\right)\sin\beta\varphi}{\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)};$$

$$A_{42}=A_Q\left(\alpha^2+r_Q^2\right)\left(\beta^2-r_Q^2\right)\frac{ch\alpha\varphi-\cos\beta\varphi}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{41}=A_Q\frac{\alpha\left(\beta^2-r_M^2\right)\left(\alpha^2+r_Q^2\right)sh\alpha\varphi+\beta\left(\beta^2-r_Q^2\right)\left(\alpha^2+r_M^2\right)\sin\beta\varphi}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{43}=\frac{A_Q}{A_M}\frac{\alpha\left(\alpha^2+r_Q^2\right)sh\alpha\varphi-\beta\left(\beta^2-r_Q^2\right)\sin\beta\varphi}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$A_{44}=\frac{\left(\alpha^2+r_Q^2\right)ch\alpha\varphi+\left(\beta^2-r_Q^2\right)\cos\beta\varphi}{\alpha^2+\beta^2};$$

3 случай $s^4>0$; $|s|<|r|$; $r^2>0$ Корни (7.19) мнимые

$k_{1,2}=\pm i\alpha$; $k_{3,4}=\pm i\beta$; $\alpha=\sqrt{r^2-\sqrt{r^4-s^4}}$; $\beta=\sqrt{r^2+\sqrt{r^4-s^4}}$;

$$A_{11}=\frac{\left(\beta^2-r_M^2\right)\cos\alpha\varphi-\left(\alpha^2-r_M^2\right)\cos\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{12}=\frac{\beta\left(\beta^2-r_Q^2\right)\sin\alpha\varphi-\alpha\left(\alpha^2-r_Q^2\right)\sin\beta\varphi}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{13}=\frac{\cos\alpha\varphi-\cos\beta\varphi}{A_M\left(\beta^2-\alpha^2\right)};\quad A_{14}=\frac{\beta\sin\alpha\varphi-\alpha\sin\beta\varphi}{A_Q\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{21}=\frac{-\alpha\left(\beta^2-r_M^2\right)\sin\alpha\varphi+\beta\left(\alpha^2-r_M^2\right)\sin\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{22}=\frac{\left(\beta^2-r_Q^2\right)\cos\alpha\varphi-\left(\alpha^2-r_Q^2\right)\cos\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{23}=\frac{-\alpha\sin\alpha\varphi+\beta\sin\beta\varphi}{A_M\left(\beta^2-\alpha^2\right)};\quad A_{24}=\frac{\cos\alpha\varphi-\cos\beta\varphi}{A_Q\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{31}=A_M\left(\beta^2-r_M^2\right)\left(\alpha^2-r_M^2\right)\frac{-\cos\alpha\varphi+\cos\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{33}=\frac{-\left(\alpha^2-r_M^2\right)\cos\alpha\varphi+\left(\beta^2-r_M^2\right)\cos\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2};\qquad(7.121)$$

$$A_{32}=A_M\frac{-\beta\left(\beta^2-r_Q^2\right)\left(\alpha^2-r_M^2\right)\sin\alpha\varphi+\alpha\left(\alpha^2-r_Q^2\right)\left(\beta^2-r_M^2\right)\sin\beta\varphi}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{34}=\frac{A_M}{A_Q}\frac{-\beta\left(\alpha^2-r_M^2\right)\sin\alpha\varphi+\alpha\left(\beta^2-r_M^2\right)\sin\beta\varphi}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{41}=A_Q\frac{\alpha\left(\alpha^2-r_Q^2\right)\left(\beta^2-r_M^2\right)\sin\alpha\varphi-\beta\left(\beta^2-r_Q^2\right)\left(\alpha^2-r_M^2\right)\sin\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{42}=A_Q\left(\alpha^2-r_Q^2\right)\left(\beta^2-r_Q^2\right)\frac{-\cos\alpha\varphi+\cos\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{43}=\frac{A_Q}{A_M}\frac{\alpha\left(\alpha^2-r_Q^2\right)\sin\alpha\varphi-\beta\left(\beta^2-r_Q^2\right)\sin\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{44}=\frac{-\left(\alpha^2-r_Q^2\right)\cos\alpha\varphi+\left(\beta^2-r_Q^2\right)\cos\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2}.$$

4 случай $s^4>0$; $|s|<|r|$; $r^2<0$ Корни (7.19) действительные и разные

$k_{1,2}=\pm\alpha$; $k_{3,4}=\pm\beta$; $\alpha=\sqrt{-r^2+\sqrt{r^4-s^4}}$; $\beta=\sqrt{-r^2-\sqrt{r^4-s^4}}$;

$$A_{11}=\frac{\left(\beta^2+r_M^2\right)ch\alpha\varphi-\left(\alpha^2+r_M^2\right)ch\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{12}=\frac{\beta\left(\beta^2+r_Q^2\right)sh\alpha\varphi-\alpha\left(\alpha^2+r_Q^2\right)sh\beta\varphi}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{13}=\frac{-ch\alpha\varphi+ch\beta\varphi}{A_M\left(\beta^2-\alpha^2\right)};\quad A_{14}=\frac{-\beta sh\alpha\varphi+\alpha sh\beta\varphi}{A_Q\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{21}=\frac{\alpha\left(\beta^2+r_M^2\right)sh\alpha\varphi-\beta\left(\alpha^2+r_M^2\right)sh\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{22}=\frac{\left(\beta^2+r_Q^2\right)ch\alpha\varphi-\left(\alpha^2+r_Q^2\right)ch\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2};\qquad(7.122)$$

$$A_{23}=\frac{-\alpha sh\alpha\varphi+\beta sh\beta\varphi}{A_M\left(\beta^2-\alpha^2\right)};\quad A_{24}=\frac{-ch\alpha\varphi+ch\beta\varphi}{A_Q\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{31}=\frac{A_M\left(\beta^2+r_M^2\right)\left(\alpha^2+r_M^2\right)\left(ch\alpha\varphi-ch\beta\varphi\right)}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{33}=\frac{-\left(\alpha^2+r_M^2\right)ch\alpha\varphi+\left(\beta^2+r_M^2\right)ch\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{32}=\frac{A_M\left[\beta\left(\beta^2+r_Q^2\right)\left(\alpha^2+r_M^2\right)sh\alpha\varphi-\alpha\left(\alpha^2+r_Q^2\right)\left(\beta^2+r_M^2\right)sh\beta\varphi\right]}{\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{34}=\frac{A_M\left[-\beta\left(\alpha^2+r_M^2\right)sh\alpha\varphi+\alpha\left(\beta^2+r_M^2\right)sh\beta\varphi\right]}{A_Q\alpha\beta\left(\beta^2-\alpha^2\right)};$$

$$A_{41}=\frac{A_Q\left[\alpha\left(\beta^2+r_M^2\right)\left(\alpha^2+r_Q^2\right)sh\alpha\varphi-\beta\left(\alpha^2+r_M^2\right)\left(\beta^2+r_Q^2\right)sh\beta\varphi\right]}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{42}=\frac{A_Q\left(\alpha^2+r_Q^2\right)\left(\beta^2+r_Q^2\right)\left(ch\alpha\varphi-ch\beta\varphi\right)}{\beta^2-\alpha^2};$$

$$A_{43}=\frac{-\alpha\left(\alpha^2+r_Q^2\right)sh\alpha\varphi+\beta\left(\beta^2+r_Q^2\right)sh\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2}\frac{A_Q}{A_M};$$

$$A_{44}=\frac{-\left(\alpha^2+r_Q^2\right)ch\alpha\varphi+\left(\beta^2+r_Q^2\right)ch\beta\varphi}{\beta^2-\alpha^2}.$$

Выражения (7.120)-(7.122) переходят в фундаментальные функции для прямоугольных пластин, если $r_M^2=\mu r^2$; $r_Q^2=(2-\mu)r^2$; $A_M=A_Q=A$. Добавим, что вариационный метод Канторовича-Власова исключает функции Бесселя, применяемые обычно при решении задач статики, динамики и устойчивости круглых пластин [47, 71, 262, 317 и др.].

7.8.2 Осесимметричные задачи на собственные значения

Собственные значения круглых пластин можно определить из трансцендентного уравнения (7.62), которое в данном случае примет вид

$$\left|A_*\left(\omega,N_\varphi,N_\rho,N_\tau\right)\right|=0. \qquad (7.123)$$

Пример 7.7 Рассмотрим осесимметричные задачи на собственные значения, когда образуется одна полуволна в радиальном направлении и отсутствуют полуволны в направлении угловой координаты (“шляпообразные” формы колебаний и потери устойчивости). Матрица C преобразования (1.46) будет единичной, а матрица собственных значений примет вид ($N_\varphi=N_\tau=0$)

$$A_*(\omega,N_\rho)=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_{11}-1 & A_{12} & -A_{13} & -A_{14}\\ \hline A_{21} & A_{22}-1 & -A_{23} & -A_{24}\\ \hline -A_{31} & -A_{32} & A_{33}-1 & A_{34}\\ \hline -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44}-1\\ \hline\end{array} \qquad (7.124)$$

Вычисляя методом Гаусса определитель матрицы (7.124) (μ=0,3), фиксируем значения N_ρ, ω, при которых выполняется условие (7.123). Критические силы потери устойчивости и частоты собственных колебаний представлены в таблице 7.13. Следуя выводам п. 7.5 отметим, что частоты и критические силы по МГЭ завышены (N_ρ и ω входят в коэффициент s дифференциального уравнения (7.118)) по отношению к точным значениям. Для сравнения приведем значение частоты свободной пластины, расчетная схема которой близка к схеме с жестко защемленной точкой в центре и свободными краями, из работы [31] $\omega = 5{,}176\sqrt{D/\gamma h}$.

В отличие от прямоугольной пластины поведение определителя круглой пластины (7.124) характерно постоянством его знака. Интервал, содержащий корни трансцендентного уравнения (7.123), в этом случае находится при нарушении монотонного изменения определителя. Визуально это проявляется в резком уменьшении порядка значений определителя. Относительная величина шага изменения определителя h=0.001 надежно выявляет подозрительные на корни интервалы. Далее корни уточняются.

7.9 Определение собственных значений пластин с комбинированным контуром

Пластины со сложными геометрическими и краевыми условиями могут быть дискретизированы на ряд отдельных прямоугольных и круглых подобластей. Для дискретизированной пластины составляется трансцендентное уравнение (7.123), из которого определяются собственные значения. Чем меньше отклонение контура пластины от контура заменяющей ее пластины, тем точнее будут собственные значения.

Пример 7.8 Определить критическую силу и частоты собственных колебаний Г-образной пластины с комбинированным

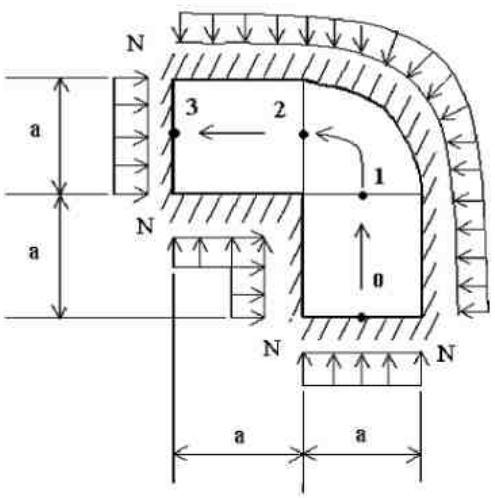


Рисунок 7.17

контуром (рисунок 7.17). Здесь предполагается, что круглый и прямоугольные элементы находятся в условиях всестороннего сжатия. При этом для прямоугольных подобластей ($\gamma=h=D=a=1$; $\mu=0{,}3$):$r^2=-12{,}302617+N/2$; $s^4=500{,}5638-12{,}302617N-\omega^2$; для секториальной подобласти: $r^2=-0{,}551779+0{,}135945N$; $s^4=81{,}35387-1{,}116859N-0{,}096563\omega^2$. Матрица уравнения (7.123) пластины примет вид

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$	-1								3	
2			$-A_{23}$	$-A_{13}$		-1							4	0-1
3			A_{33}	A_{34}			-1						7	
4			A_{43}	A_{44}				-1					8	
5					A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	-1				5	
6					A_{21}	A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{24}$		-1			6	
7					$-A_{31}$	$-A_{32}$	A_{33}	A_{34}			-1		11	1-2
8					$-A_{41}$	$-A_{42}$	A_{43}	A_{44}				-1	12	
9									A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	9	
10									A_{21}	A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{13}$	10	
11	-1								$-A_{31}$	$-A_{32}$	A_{33}	A_{34}	1	2-3
12		-1							$-A_{41}$	$-A_{42}$	A_{43}	A_{44}	2	

Переставляя строки матрицы A_* в новом порядке, как показано цифрами справа, методом Гаусса находим корни ее определителя. Наличие в расчетной схеме круглого и прямоугольных элементов требует синхронизации в замене

фундаментальных функций. Для данной пластины синхронная смена фундаментальных функций выполнялась автоматически и в соответствии с таблицей 7.14. При этом поведение определителя матрицы A_* характеризовалось четким изменением знаков при переходе через его корни.

Таблица 7.14

Устойчивость		
Корни характеристического уравнения		Интервалы изменения сжимающего усилия
Прямоугольные элементы	Круглый элемент	
$k_{1-4}=\pm\alpha\pm i\beta$	$k_{1-4}=\pm\alpha\pm i\beta$	$0<N<37,0$
$k_{1-2}=\pm i\alpha;\ k_{3-4}=\pm i\beta$	$k_{1-4}=\pm\alpha\pm i\beta$	$37,5<N<40,5$
$k_{1-2}=\pm\alpha;\ k_{3-4}=\pm i\beta$	$k_{1-4}=\pm\alpha\pm i\beta$	$41,0<N<45,0$
$k_{1-2}=\pm\alpha;\ k_{3-4}=\pm i\beta$	$k_{1-2}=\pm i\alpha;\ k_{3-4}=\pm i\beta$	$45,6<N<72,5$
$k_{1-2}=\pm\alpha;\ k_{3-4}=\pm i\beta$	$k_{1-2}=\pm\alpha;\ k_{3-4}=\pm i\beta$	$73,0<N$
Собственные колебания		
Корни		Интервалы изменения частот
$k_{1-4}=\pm\alpha\pm i\beta$	$k_{1-4}=\pm\alpha\pm i\beta$	$0<\omega<18,5$
$k_{1-2}=\pm\alpha;\ k_{3-4}=\pm\beta$	$k_{1-4}=\pm\alpha\pm i\beta$	$19,0<\omega<22,0$
$k_{1-2}=\pm\alpha;\ k_{3-4}=\pm i\beta$	$k_{1-4}=\pm\alpha\pm i\beta$	$22,5<\omega<28,5$
$k_{1-2}=\pm\alpha;\ k_{3-4}=\pm i\beta$	$k_{1-2}=\pm\alpha;\ k_{3-4}=\pm\beta$	$29,0<\omega<29,02$
$k_{1-2}=\pm\alpha;\ k_{3-4}=\pm i\beta$	$k_{1-2}=\pm\alpha;\ k_{3-4}=\pm i\beta$	$29,3<\omega$

Первая критическая сила оказалась равной N_{11}=39,6041D. Подобная задача, но с прямоугольным средним элементом, решена в работе [268, с.155], где первая критическая сила, приведенная к размерам пластины по рисунок 7.17, равна N_{11}=34,0D. Учитывая, что круглая подобласть в данной пластине более устойчива (за счет меньшей площади в плане), чем прямоугольная, можно сделать вывод о достоверности полученного результата. Частоты собственных колебаний равны (N=0):

$\omega_{11}=24,75\sqrt{D/\gamma h};\ \omega_{12}=35,425\sqrt{D/\gamma h};\ \omega_{13}=40,35\sqrt{D/\gamma h};$

$\omega_{14}=46,35\sqrt{D/\gamma h};\ \omega_{15}=68,15\sqrt{D/\gamma h};\ \omega_{16}=78,75\sqrt{D/\gamma h}$ и т.д.

Достоверность результатов косвенно подтверждается снижением значений и уменьшением промежутков между собственными частотами по сравнению с частотами отдельных пластин.

7.10 Построение соотношений МГЭ для складчатых цилиндрических и пологих оболочек

В данном параграфе построены основные соотношения МГЭ для цилиндрических складчатых и пологих оболочек. Рассмотрим сначала цилиндрические складчатые оболочки, как конструкции, имеющих более простые дифференциальные уравнения деформирования составляющих элементов.

Элементами этих конструкций являются относительно тонкие пластины, работающие в условиях изгиба и плоской задачи теории упругости. Метод расчета напряженно-деформированного состояния цилиндрических складчатых систем разработал В.З. Власов [63]. Здесь был применен вариационный метод для понижения мерности дифференциальных уравнений изгиба и плоской задачи, что позволило успешно решить проблемы расчета систем подобного типа. К недостаткам метода В.З. Власова следует отнести сложную логику формирования разрешающей системы уравнений, необходимость решать дифференциальные уравнения для каждого элемента конструкции, ограничения на торцевые условия опирания элементов складчатых систем (они должны быть одинаковыми), относительную трудность реализации алгоритма на ЭВМ.

Позже были разработаны другие эффективные методы расчета складчатых систем. Отметим метод перемещений, основанный на решениях М. Леви (изгиб) и Л. Файлона (плоская задача) для прямоугольных пластин [4] и различные модификации метода перемещений и смешанного метода [186, 344]. Метод перемещений устраняет многие недостатки метода В.З. Власова в части реализации алгоритма расчета на ЭВМ. Однако, он привносит в методику расчета недостатки, связанные с природой метода перемещений. В частности, формирование матрицы реакций требует привлечения матричных операций. Обязательное формирование основной системы привносит недостатки, связанные с ее использованием. Необходимы промежуточные вычисления для перехода от перемещений узлов к напряженно-деформированному состоянию во внутренних точках элементов системы. Метод разработан только для шарнирного опирания торцов конструкции. Сходные недостатки можно обнаружить и в смешанном методе. Следует отметить, что последний недостаток метода перемещений устраним, поскольку решения М. Леви и Л. Файлона являются частными случаями вариационного метода В.З. Власова. Поэтому можно разработать метод перемещений для произвольного опирания торцов складчатой системы. Если пренебречь влиянием побочных коэффициентов системы дифференциальных уравнений В.З. Власова, то алгоритм формирования матриц реакций и нагрузки останется прежним, а изменяется лишь фундаментальные функции. Можно дальше модифицировать метод перемещений. В I разделе отмечалось, что на базе соотношений МГЭ

можно построить матрицу жесткости упругого модуля. Для пластинчатых систем также возможен переход от фундаментальных решений к соотношениям МКЭ [4]. В данном случае получится метод, аналогичный МКЭ для плоских стержневых систем [184].

Здесь предлагается метод расчета цилиндрических складчатых систем, основанный на выводах первой главы и первого раздела. Теоретической основой метода является, как и для рассмотренных выше двумерных задач, вариационный метод Канторовича-Власова. Уравнение, описывающее изгиб прямоугольной пластины, представлено в п. 7.2, уравнение изгиба круглой пластины – в п. 7.3. Построим аналогичное уравнение для плоской задачи теории упругости прямоугольных пластин.

7.10.1 Плоская задача теории упругости для прямоугольных пластин

Решение плоской задачи связано с определением функции напряжений Д. Эйри. Последняя может быть определена как решение бигармонического уравнения, имеющего одинаковую символьную форму записи с уравнением изгиба (7.6)

$$\nabla^2\nabla^2\varphi(x,y)=q(x,y), \tag{7.125}$$

где $q(x,y)$ - правая часть, зависящая от объемных нагрузок q_x и q_y, приведенных к срединной плоскости пластины. Выражение для правой части получается из процедуры составления бигармонического уравнения (7.125)

$$q(x,y)=\int\left[\frac{\partial^2 q_x}{\partial y^2}\right]dx+\int\left[\frac{\partial^2 q_y}{\partial x^2}\right]dy-\mu\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}, \tag{7.126}$$

где μ - коэффициент Пуассона. Напряжения (соответственно и силы) выражаются через функцию Д. Эйри зависимостями

$$\sigma_x=N_x/h=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\int qxdx;\ \ \sigma_y=N_y/h=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\int qydy;$$

$$\tau_{xy}=S_{xy}/h=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \tag{7.127}$$

где h–толщина пластины. Простая нагрузка с помощью обобщенных функций может быть записана в виде (рисунок 7.18,а,в)

$$\begin{aligned}q_x &= q_x[H(x-a_H)H(y-b_H)-H(x-a_K)H(y-b_K)]+\\ &+F_x\delta(x-a_F)\delta(y-b_F);\end{aligned} \tag{7.128}$$

$$q_y = q_y[H(x-a_H)H(y-b_H) - H(x-a_K)H(y-b_K)] + \\ + F_y\delta(x-a_F)\delta(y-b_F). \qquad (7.128)$$

Не представляет трудностей составить аналитическое выражение и для более сложной нагрузки. Выражения правой части (7.126) для нагрузки (7.128) примет вид

$$q(x,y) = q_x[(x-a_H)_+\delta'(y-b_H) - (x-a_K)_+\delta'(y-b_K)] + F_x H(x-a_F)\delta''(y-b_F) - \\ - \mu\{q_x[\delta(x-a_H)H(y-b_H) - \delta(x-a_K)H(y-b_K)] + F_x\delta'(x-a_F)\delta(y-b_F)\} + \\ + q_y[\delta'(x-a_H)(y-b_H)_+ - \delta'(x-a_K)(y-b_K)_+] + F_y\delta'''(x-a_F)H(y-b_F) - \\ - \mu\{q_y[H(x-a_H)\delta(y-b_H) - H(x-a_K)\delta(y-b_K)] + F_y\delta(x-a_F)\delta'(y-b_F)\} \qquad (7.126)$$

В большинстве случаев объемная нагрузка у пластины отсутствует и задается только поверхностная нагрузка вида (рисунок 7.18,с)

$$q_x = q_x[H(x-a_H) - H(x-a_K)]\delta(y-l) + F_x\delta(x-a_F)\delta(y-l); \qquad (7.127)$$
$$q_y = -q_y[H(x-a_H) - H(x-a_K)]\delta(y-l) + F_y\delta(x-a_F)\delta(y-l).$$

Для этого случая $q(x,y)$ примет вид

$$q(x,y) = q_x[(x-a_H)_+ - (x-a_K)_+]\delta''(y-l) + F_x H(x-a_F)\delta''(y-l) - \\ - \mu\{q_x[\delta(x-a_H) - \delta(x-a_K)]\delta(y-l) + F_x\delta'(x-a_F)\delta(y-l)\} - \\ - q_y[\delta'(x-a_H) - \delta'(x-a_K)]H(y-l) - F_y\delta'''(x-a_F)H(y-l) + \\ + \mu\{q_y[H(x-a_H) - H(x-a_K)]\delta'(y-l) + F_y\delta(x-a_F)\delta'(y-l)\} \qquad (7.128)$$

Следуя методу Фурье разделения переменных [122], разложим функции напряжений и перемещений в направлении осей Ox, Oy в ряды по ортогональным системам функций

$$\varphi(x,y) = Z(y)X(x);\ U(x,y) = U(y)X'(x);\ V(x,y) = V(y)X(x). \qquad (7.129)$$

Ряды представлены κ-ми членами, а индексы опущены. Функция $X(x)$ в плоской задаче (по В.З. Власову [63]) должна удовлетворять в первую очередь статическим и, по возможности, кинематическим граничным условиям на продольных кромках пластины. Интересно, что при изгибе требования к функции $X(x)$ противоположны. Применяя процедуру вариационного метода Канторовича-Власова к бигармоническому уравнению (7.125), статическим (7.127) и кинематическим параметрам

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y};\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}; \qquad (7.130)$$

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \mu\sigma_y;\ E\varepsilon_y = \sigma_y - \mu\sigma_x;\ G\gamma_{xy} = \tau_{xy}$$

получим задачу Коши для определения неизвестной функции $Z(y)$

$$Z^{IV}(y) - 2r^2 Z''(y) + s^4 Z(y) = q(y);\ N(y) = -Z(y) + P_1(y);$$

$$S(y) = -Z'(y);\ r^2 EV(y) = Z'''(y) - (2+\mu)r^2 Z'(y) - P_3(y);$$

$$r^2 EU(y) = -Z''(y) - \mu r^2 Z(y) + P_2(y);\ r^2 = \frac{B}{A};\ s^4 = \frac{C}{A}; \qquad (7.131)$$

$$q(y) = \int_0^{l_1} q(x,y)X(x)dx;\ A = \int_0^{l_1} X^2(x)dx;\ B = -\int_0^{l_1} X''(x)X(x)dx;$$

$$C = \int_0^{l_1} X^{IV}(x)X(x)dx;\ P_1(y) = \int_0^{l_1}\left[\int q_y dy\right]X(x)dx/B;$$

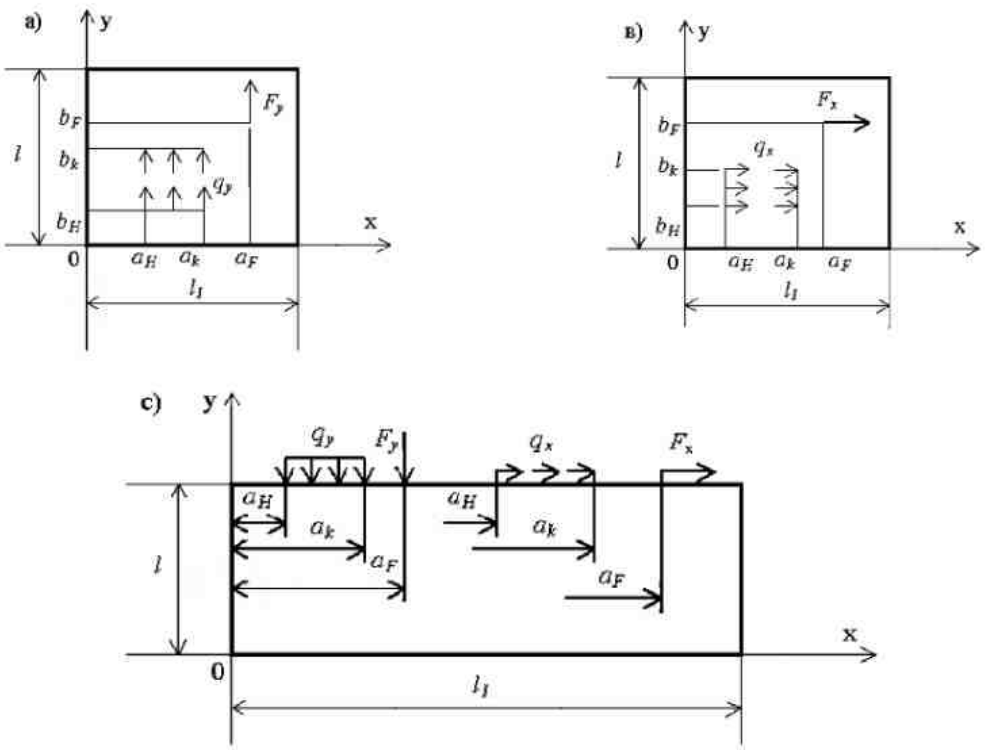


Рисунок 7.18

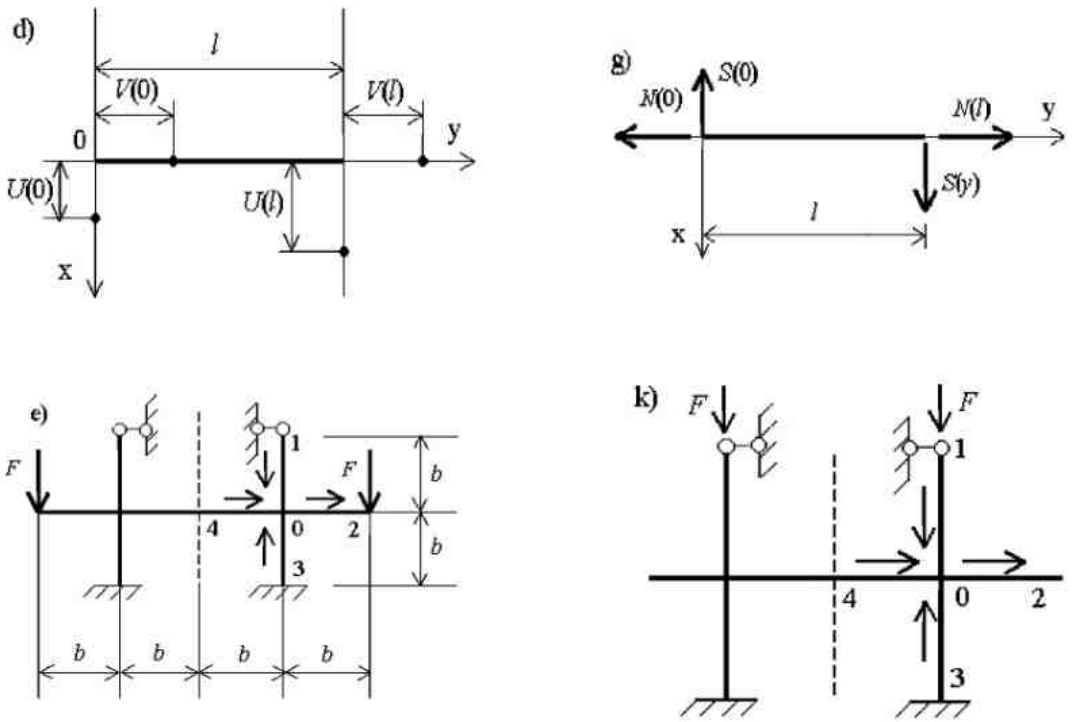


Рисунок 7.18

$$P_2(y)=\int_0^{l_1}\left[\int q_x dx\right]X(x)dx/A-\mu\int_0^{l_1}\left[\int q_x dy\right]X(x)dx/A;$$
$$P_3(y)=\frac{dP_2(y)}{dy}; \qquad (7.132)$$

где $N(y)$; $S(y)$; $V(y)$; $U(y)$ - соответственно формальные (обобщенные) нормальная и сдвигающая силы, продольное и поперечное (в плоскости пластины) перемещения. Положительные направления статических и кинематических параметров представлены на рисунке 7.18, d, g. В данной модели не удовлетворяются однородные кинематические граничные условия при жестком защемлении продольных кромок пластины, что мало влияет на точность результатов. Аналогичная ситуация имеет место при изгибе, но для статических параметров при свободных продольных кромках. Из (7.131) следует, что одномерная модель плоской задачи принципиально не отличается от модели изгиба прямоугольной пластины (7.13). Соответственно не будут отличаться и фундаментальные функции, но поменяются местами параметры плоской задачи. Используя принцип независимости действия сил и объединяя интегральные уравнения изгиба и плоской задачи, получим уравнение для расчета цилиндрических складчатых

$DW(y)$		A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$					$DW(0)$		B_{11}		
$D\theta(y)$		A_{21}	A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{13}$					$D\theta(0)$		B_{21}		
$M(y)$		$-A_{31}$	$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}					$M(0)$		$-B_{31}$		
$Q(y)$		$-A_{41}$	$-A_{31}$	A_{21}	A_{11}					$Q(0)$		$-B_{41}$		
$N(y)$	=					A_{11}	A_{12}	$-A_{14}$	A_{13}	$N(0)$	+	$-B_{51}$		(7.133)
$S(y)$						A_{21}	A_{22}	$-A_{13}$	A_{23}	$S(0)$		$-B_{61}$		
$EV(y)$						$-A_{41}$	A_{31}	A_{11}	$-A_{21}$	$EV(0)$		B_{71}		
$EU(y)$						$-A_{31}$	A_{32}	$-A_{12}$	A_{22}	$EU(0)$		B_{81}		

систем, где

$$B_{51} = P_1(0)A_{11} - P_2(0)A_{13} + P_3(0)A_{14} + B_{11};$$

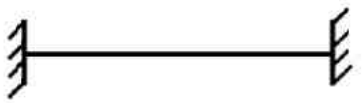
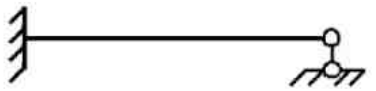
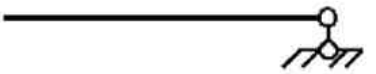
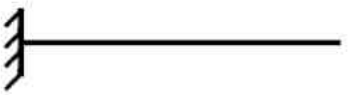
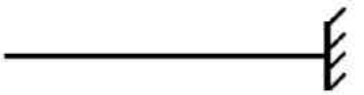
$$B_{61} = P_1(0)A_{21} - P_2(0)A_{23} + P_3(0)A_{13} + B_{21};$$

$$B_{71} = P_1(0)A_{41} - P_2(0)A_{21} + P_3(0)A_{11} + B_{41};$$

$$B_{81} = P_1(0)A_{31} - P_2(0)A_{22} + P_3(0)A_{12} + B_{31}.$$

В большинстве случаев $P_1(0)$; $P_2(0)$; $P_3(0)$ будут равны нулю. В фундаментальных функциях плоской задачи коэффициент A заменяется на $1/r^2$, а μ на $(-\mu)$. При $X(x)=\sin(n\pi x/l_1)$ из (7.133) следуют решения М. Леви и Л. Файлона. Отметим также, что граничные условия параметров изгиба и плоской задачи противоположны. Это относится и к условиям для выбора функции $X(x)$. В таблице 7.15 представлены граничные условия изгиба и плоской задачи, приводящие к одинаковым выражениям для фундаментальных функций и $X(x)$. Уравнение (7.133) является общим решением уравнения деформирования элемента складчатой оболочки (не учитывается только поперечный сдвиг в направлении оси Oy), для частных же случаев можно применять упрощенное уравнение меньшего порядка.

Таблица 7.15

Таблица соответствия граничных условий	
Изгиб пластины	Плоская задача теории упругости
	
	
	
	
	
	

7.10.2 Расчет цилиндрических складчатых систем

В данном параграфе покажем практическое применение уравнения (7.133). Оболочка или плитно-балочная система дискретизируется на отдельные модули. Решение краевой задачи выполняется при граничном значении переменных каждого модуля. При этом уравнение системы сводится к системе алгебраических уравнений по схеме МГЭ (1.46). Решением этой системы определяются начальные параметры всех модулей, а искомые функции $W(y)$ и $Z(y)$ из выражений

$$DW(y)=A_{11}DW(0)+A_{12}D\theta(0)-A_{13}M(0)-A_{14}Q(0)+B_{11};$$

$$Z(y)=-A_{11}N(0)-A_{12}S(0)+A_{14}EV(0)-A_{13}EU(0)+B_{51}+P_1(y).$$

Далее можно определить функции прогиба $w(x,y)$, напряжений $\varphi(x,y)$ и все другие параметры элементов складчатой системы.

Алгоритм МГЭ устраняет практически все отмеченные выше недостатки существующих методов. Так, для формирования системы уравнений (1.46) не используются матричные операции, не формируется основная система, снимаются ограничения на условия опирания модулей по торцам (граничные условия могут быть любым, а каждый модуль может иметь смешанные граничные условия и включать как прямоугольные, так и круглые подмодули), матрица A_* сильно разрежена, хорошо обусловлена и может применяться в задачах статики, динамики и устойчивости, возможен учет ортотропии, ребер жесткости в двух направлениях, упругого основания, переменной толщины, температуры и т.д. Таким образом, уравнение (7.133) с преобразованием (1.46) охватывает практически наиболее общий случай расчета. Перечисленные преимущества сопровождаются, как это бывает всегда, и недостатками. В частности, порядок матрицы A_* может значительно превышать порядок матрицы реакций метода перемещений. Однако, этот недостаток компенсируется тем, что больший порядок системы уравнений (1.46) позволяет получить существенно больше информации, чем по методу перемещений. Точность МГЭ покажем на тестовом примере [4, с.379].

Пример 7.9 Поперечное сечение пластинчатой системы показано на рисунке 7.18,е. Вследствие симметрии рассмотрим правую часть, где ось Ox направлена перпендикулярно рисунку. Систему разбиваем на 4 модуля, стрелками обозначаем орграф, нумеруем граничные точки. Толщины всех модулей одинаковы, $l=b$, $l_1=5{,}24b$, на торцах модулей шарнирное опирание, $\mu=0{,}15$. Формируем матрицы $X(0)$, $Y(l)$. Данная конструкция позволяет пренебречь плоской задачей (узловые линии не смещаются), поэтому в матрицах использованы параметры только изгиба. Порядок чередования модулей в матрицах произвольный, а уравнения равновесия и совместности перемещений узлов составляются точно так же, как и для плоских стержневых систем. Для начальных и конечных параметров учтены и краевые условия. Фундаментальные функции соответствуют случаю шарнирного опирания (7.23), когда $r=s=n\pi/l_1$. В матрице $X(0)$ нулевыми оказались 1, 3, 6, 8, 9, 10 и 13 строки, соответственно обнуляем столбцы матрицы A с теми же номерами. Определив адреса и значения компенсирующих элементов, граничное уравнение, преобразованное по схеме (1.46), для пластинчатой системы показано ниже. Как и в других задачах, в матрице A_* появляются нулевые ведущие элементы. Вариант перестановки строк показан в (7.134) цифрами справа. При расчетах было принято $b=1$, $F=1$. В частности, при n=1, l_1=5,24 методом Гаусса определяем начальные параметры:

модуль 0-2

$D\theta^{0-2}(0)=0{,}3523;\ M^{0-2}(0)=-0{,}78302;\ Q^{0-2}(0)=1{,}00223;$

$X_*=$

1	$DW^{1-0}(0);\ Q^{1-0}(l)$
2	$D\theta^{1-0}(0)$
3	$M^{1-0}(0)=0;\ M^{4-0}(l)$
4	$Q^{1-0}(0)$
5	$DW^{4-0}(0)$
6	$D\theta^{4-0}(0)=0;\ Q^{4-0}(l)$
7	$M^{4-0}(0)$
8	$Q^{4-0}(0)=0;\ M^{3-0}(l)$
9	$DW^{3-0}(0)=0;\ Q^{3-0}(l)$
10	$D\theta^{3-0}(0)=0;\ DW^{0-2}(l)$
11	$M^{3-0}(0)$
12	$Q^{3-0}(0)$
13	$DW^{0-2}(0)=0;\ D\theta^{0-2}(l)$
14	$D\theta^{0-2}(0)$
15	$M^{0-2}(0)$
16	$Q^{0-2}(0)$

;

$Y=$

1	$DW^{1-0}(l)=0$
2	$D\theta^{1-0}(l)=D\theta^{0-2}(0)$
3	$M^{1-0}(l)=M^{0-2}(0)-M^{4-0}(l)-M^{3-0}(l)$
4	$Q^{1-0}(l)$
5	$DW^{4-0}(l)=0$
6	$D\theta^{4-0}(l)=D\theta^{0-2}(0)$
7	$M^{4-0}(l)$
8	$Q^{4-0}(l)$
9	$DW^{3-0}(l)=0$
10	$D\theta^{3-0}(l)=D\theta^{0-2}(0)$
11	$M^{3-0}(l)$
12	$Q^{3-0}(l)$
13	$DW^{0-2}(l)$
14	$D\theta^{0-2}(l)$
15	$M^{0-2}(l)=0$
16	$Q^{0-2}(l)=0$

модуль 3-0

$M^{3-0}(0)=0{,}18234;\ Q^{3-0}(0)=-0{,}56001;$

модуль 4-0

$DW^{4-0}(0)=-0{,}01656;\ M^{4-0}(0)=-0{,}08366;$

модуль 1-0

$D\theta^{1-0}(0)=-0{,}01699;\ Q^{1-0}(0)=-0{,}28703.$

Изгибающие моменты можно вычислить по выражениям (7.16). Для модуля 0-2 в начальной точке будем иметь

$$M_y^{0-2}(l_1/2,0)=-D\left[W''(0)X(l_1/2)+\mu W(0)X''(l_1/2)\right]=-1{,}566bF/l_1.$$

Повторяя вычисления при n=3, 5, 7 и 9, определяем начальные параметры всех модулей для 5 членов ряда. Трудности численной реализации при больших

аргументах гиперболических функций преодолеваются обычными мерами (см. [5, с.100]). В таблице 7.16 представлены изгибающие моменты по МГЭ и методу перемещений, из которой следует полное совпадение результатов двух разных методов. Отметим, что результаты метода перемещений являются точными, поскольку составлялось лишь одно уравнение, и погрешности из-за решения системы уравнений отсутствуют. По МГЭ составлена в 16 раз большая система уравнений и получены практически точные результаты. Этот метод наглядно иллюстрирует возможности МГЭ, вытекающие из внутренней структуры построения матриц и свойств ортонормированной системы фундаментальных функций. Кроме того, данный пример является доказательством возможности модульного подхода к расчету цилиндрических складчатых систем. Объединяя последовательный (см. пример 7.1) и разветвляющийся орграфы, можно представить любую оболочечную и плитную складчатую систему в виде определенного набора модулей. Дальнейший расчет выполняется по представленной методике.

Пример 7.10. Возможности МГЭ проиллюстрируем решением задач устойчивости и динамики рассмотренной системы (рисунок 7.18,е). Собственные значения конструкции определяются как корни трансцендентного уравнения (3.2), где, в отличие от метода перемещений, отсутствуют точки разрыва 2-го рода. Пусть сжимающая сила приложена к модулям 1-0 и 3-0 (рисунок 7.18,к). В матрице A_* системы уравнений (7.134) необходимо менять фундаментальные функции по методике п. 7.5. При определении критической силы принято: $r^2 = \pi^2 - F/2$; $s = \pi$; изменяются фундаментальные функции модулей 1-0 и 3-0; $l_1 = 1$; $l = 1/5{,}24$. Первая критическая сила симметричной формы потери устойчивости равна $N_{11} = 410{,}185D$. При определении частот симметричных форм собственных колебаний необходимо менять фундаментальные функции всех модулей ; $r = \pi$; $s^4 = \pi^4 - \omega^2$. Из уравнения (3.2), где матрица A_* из (7.134), методом Гаусса определяем, что $\omega_{11} = 83{,}25\sqrt{D/\gamma h}$; $\omega_{12} = 133{,}5\sqrt{D/\gamma h}$; $\omega_{13} = 270{,}5\sqrt{D/\gamma h}$; $\omega_{14} = 408{,}5\sqrt{D/\gamma h}$ и т.д. Частоты и критическая сила соответствуют собственным формам с одной полуволной в направлении оси Ох. Собственные значения кососимметричных форм определяются при других граничных условиях и с учетом сил инерции линейно-подвижных модулей. Отметим также, что плоская задача теории упругости в полярных координатах может быть представлена уравнением поперечного изгиба круглой пластины (7.42) с минимальными изменениями.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16			
1		A_{12}		$-A_{14}$													$Q^{1\text{-}0}(l)$		2
2		A_{22}		$-A_{13}$										-1			$D\theta^{1\text{-}0}(0)$		4
3		$-A_{32}$	1	A_{12}				1							-1		$M^{4\text{-}0}(l)$		8
4	-1	$-A_{31}$		A_{11}													$Q^{1\text{-}0}(0)$		1
5					A_{11}		$-A_{13}$										$DW^{4\text{-}0}(0)$		5
6					A_{21}		$-A_{23}$							-1			$Q^{4\text{-}0}(l)$		7
7			-1		$-A_{31}$		A_{22}										$M^{4\text{-}0}(0)$		3
8					$-A_{41}$	-1	A_{21}										$M^{3\text{-}0}(l)$		6
9											$-A_{13}$	$-A_{14}$					$Q^{3\text{-}0}(l)$	=	11
10											$-A_{23}$	$-A_{13}$		-1			$DW^{0\text{-}2}(l)$		14
11								-1			A_{22}	A_{12}					$M^{3\text{-}0}(0)$		12
12									-1		A_{21}	A_{11}					$Q^{3\text{-}0}(0)$		9
13										-1				A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$D\theta^{0\text{-}2}(l)$		10
14													-1	A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{13}$	$D\theta^{0\text{-}2}(0)$		13
15														$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}	$M^{0\text{-}2}(0)$		15
16														$-A_{31}$	A_{21}	A_{11}	$Q^{0\text{-}2}(0)$	$\pm F$	16

(7.134)

Таблица 7.16

n	$M^{0-2}(l_1/2,0)l_1/Fb$		$M^{3-0}(l_1/2,l)l_1/Fb$	
	МГЭ	МП	МГЭ	МП
1	-1,56603	-1,565	0,75611	0,756
3	0,48865	0,487	-0,19391	-0,193
5	-0,13516	-0,135	0,04712	0,047
7	0,03778	0,038	-0,01270	-0,013
9	-0,01080	-0,01	0,00360	0,003
$\sum_{k=1}^{5} M_K$	-2,23842	-2,235	1,01344	1,012
n	$M^{4-0}(l_1/2,l)l_1/Fb$		$M^{1-0}(l_1/2,0)l_1/Fb$	
1	0,22971	0,23	0,58021	0,58
3	-0,12614	-0,126	-0,16860	-0,168
5	0,042292	0,043	0,045511	0,045
7	-0,01250	-0,012	-0,01258	-0,012
9	0,00360	0,003	0,00360	0,003
$\sum_{k=1}^{5} M_K$	0,41487	0,414	0,81010	0,808

7.10.3 Интегрирование уравнений статики пологих оболочек

Уравнение статики прямоугольных в плане пологих оболочек выведены В.З. Власовым в 1944 г. [63]

$$\begin{cases} D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) - \nabla_K^2 \varphi(x,y) = q_z(x,y); \\ \nabla^2\nabla^2 \varphi(x,y) + Eh\nabla_K^2 w(x,y) = q_{xy}(x,y), \end{cases} \tag{7.135}$$

где $w(x,y)$ - поперечный прогиб; $\varphi(x,y)$ - функция напряжений; D – цилиндрическая жесткость; E – модуль Юнга; ∇^2 - оператор Лапласа;

$$\nabla_K^2 = k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y};$$

k_x; k_y; k_{xy} - соответствующие кривизны; h – толщина оболочки. Вывод уравнения (7.135) показывает, что их правые части определяются выражениями

$$q_z(x,y) = P_z - \int_0^x P_x dx - \int_0^y P_y dy; \tag{7.136}$$

$$q_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2\left(\int\limits_0^y P_y dy\right)}{dx^2}-\mu\frac{\partial^2\left(\int\limits_0^x P_x dx\right)}{dx^2}+$$
$$+\frac{\partial^2\left(\int\limits_0^x P_x dx\right)}{dy^2}-\mu\frac{\partial^2\left(\int\limits_0^y P_y dy\right)}{dy^2}, \qquad (7.136)$$

где P_z; P_x; P_y - нормальная и тангенциальные составляющие нагрузки; μ – коэффициент Пуассона.

Система уравнения (7.135) приближенно решается вариационным методом Бубнова-Галеркина при любых граничных условиях и произвольной внешней нагрузке [63]. Этим методом расчетная схема оболочки дискретизируется по двум направлениям. Очевидны также значительные трудности метода при расчете систем оболочек.

Более совершенной расчетной моделью является континуальная модель в одном направлении и дискретная в другом. Такая схема реализована в методе перемещений, но только для шарнирного опирания продольных краев оболочки [4]. Для произвольных граничных условий пологой оболочки подобные решения отсутствуют.

Уравнения (7.135) путем подстановки

$$w(x,y)=\nabla^2\nabla^2 T(x,y)+\nabla_K^2 Z(x,y)\frac{1}{D};$$
$$\varphi(x,y)=\nabla^2\nabla^2 Z(x,y)-Eh\nabla_K^2 T(x,y) \qquad (7.137)$$

сводятся к двум отдельным уравнениям с одинаковой структурой

$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 T(x,y)+Eh\nabla_K^2\nabla_K^2 T(x,y)\frac{1}{D}=q_z(x,y)\frac{1}{D};$$
$$\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 Z(x,y)+Eh\nabla_K^2\nabla_K^2 Z(x,y)\frac{1}{D}=q_{xy}(x,y). \qquad (7.138)$$

Для решения уравнений (7.138) воспользуемся методом разделения переменных Фурье и вариационным методом Канторовича-Власова. Согласно методу Фурье неизвестные функции представляются в виде рядов

$$T(x,y)=R(y)X_1(x);\ Z(x,y)=\Gamma(y)X_2(x). \qquad (7.139)$$

Ряды представлены k-ми членами, а индексы здесь и далее опущены. Безразмерная функция $X_1(x)$ описывает поперечное распределение прогибов оболочки, а безразмерная функция $X_2(x)$ – распределение функции напряжений

в направлении оси Ox. Функции $X_1(x)$; $X_2(x)$ определяются как решение дифференциального уравнения поперечных колебаний балки при соответствующих граничных условиях. Для моментного и безмоментного состояния оболочки граничные условия, определяющие вид функций $X_1(x)$ и $X_2(x)$, в общем случае различны и совпадают только для шарнирного опирания (см. таблицу 7.15). Подставляем (7.139) в (7.138). Далее применяем процедуру вариационного метода Канторовича-Власова, т.е. умножаем обе части первого уравнения из (7.138) на $X_1(x)$, а обе части второго уравнения – на $X_2(x)$ и интегрируем в пределах ширины оболочки. Получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} &A_1 R^{VIII}(y)+B_1 R^{VI}(y)+C_1^* R^{IV}(y)+G_1 R''(y)+H_1 R(y)=\frac{q_z(y)}{D};\\ &A_2 \Gamma^{VIII}(y)+B_2 \Gamma^{VI}(y)+C_2^* \Gamma^{IV}(y)+G_2 \Gamma''(y)+H_2 \Gamma(y)=q_{xy}(y), \end{aligned} \tag{7.140}$$

где коэффициенты первого уравнения имеют вид

$$A_1=\int_0^{l_1} X_1^2(x)dx;\ B_1=\int_0^{l_1} 4X_1''(x)X_1(x)dx;\ q_z(y)=\int_0^{l_1} q_z(x,y)X_1(x)dx;$$

$$C_1^*=\int_0^{l_1}\left[6X_1^{IV}(x)+\frac{Eh}{D}k_x^2 X_1(x)\right]X_1(x)dx; \tag{7.141}$$

$$G_1=\int_0^{l_1}\left[4X_1^{IV}(x)+\frac{Eh}{D}2k_x k_y X_1''(x)\right]X_1(x)dx;$$

$$H_1=\int_0^{l_1}\left[X_1^{VIII}(x)+\frac{Eh}{D}k_y^2 X_1^{IV}(x)\right]X_1(x)dx;$$

l_1 – ширина оболочки. Такие же выражения для коэффициентов будут у второго уравнения, но с функцией $X_2(x)$. Для упрощения принято, что k_{xy}=0, т.е. уравнения (7.140) будут справедливы для оболочки, имеющей поверхности эллиптического (гиперболического) параболоида и цилиндра. Отметим также, что при шарнирном опирании продольных краев оболочки, когда $X_1(x)$=$X_2(x)$, ряды (7.139) будут сходиться к точному решений уравнений (7.135). При других граничных условиях на продольных краях решение этим методом уравнений (7.135) будет приближенным.

Характеристическое уравнение для первого уравнения (7.140) имеет вид

$$A_1 k^8+B_1 k^6+C_1^* k^4+G_1 k^2+H_1=0. \tag{7.142}$$

Данное уравнение подстановкой $Z = k^2 + \frac{B_1}{2A_1}$ сводится к неполному уравнению четвертой степени

$$Z^4 + P_1 Z^2 + q_1 Z + r_1 = 0, \tag{7.143}$$

где

$$P_1 = \frac{8A_1C_1^* - 3B_1^2}{8A_1^2};\ q_1 = \frac{B_1^3 - 4A_1B_1C_1^* + 8A_1^2G_1}{8A_1^3}; \tag{7.144}$$

$$r_1 = \frac{-3B_1^4 + 16A_1B_1^2C_1^* - 64A_1^2B_1G_1 + 256A_1^3H_1}{256A_1^4}.$$

Корни уравнения (7.143) вычисляются по формулам

$$Z_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}\right),\ Z_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3}\right),$$

$$Z_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3}\right),\ Z_4 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}\right), \tag{7.145}$$

где x_1; x_2; x_3 – корни кубичного уравнения

$$x^3 + 2P_1x^2 + \left(P_1^2 - 4r_1\right)x - q_1^2 \tag{7.146}$$

Корни уравнения (7.146) можно вычислить по формулам Кардано. Для этого сведем (7.146) подстановкой $x = y - \frac{2P_1}{3}$ к неполному кубичному уравнению

$$y^3 + my + n = 0 \tag{7.147}$$

где

$$m = -\frac{P_1^2 + 12r_1}{3};\ n = \frac{-2P_1^3 + 72P_1r_1 - 27q_1^2}{27}. \tag{7.148}$$

Корни уравнения (7.147) имеют вид

$$y_1 = A + B;\ y_2 = \frac{1}{2}\left[-(A+B) + i(A-B)\sqrt{3}\right],\ y_3 = \frac{1}{2}\left[-(A+B) - i(A-B)\sqrt{3}\right], \tag{7.149}$$

$$A=\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{Q_*}};\ B=\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{Q_*}};\ Q_*=\left(\frac{m}{3}\right)^3+\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$x_1=y_1-\frac{2P_1}{3};\ x_2=y_2-\frac{2P_1}{3};\ yx_3=y_3-\frac{2P_1}{3}.$$

Тогда корни характеристического уравнения (7.142) запишутся следующим образом

$$k_{1,2}=\pm\sqrt{Z_1-\frac{B_1}{4A_1}};\ k_{3,4}=\pm\sqrt{Z_2-\frac{B_1}{4A_1}};\qquad(7.150)$$

$$k_{5,6}=\pm\sqrt{Z_3-\frac{B_1}{4A_1}};\ k_{7,8}=\pm\sqrt{Z_4-\frac{B_1}{4A_1}}.$$

Из выражений (7.150) можно сгруппировать окончательный вид корней для (7.142)

$$k_{1-4}=\pm\alpha_1\pm i\beta_1;\ k_{5-8}=\pm\alpha_2\pm i\beta_2.\qquad(7.151)$$

То же для второго уравнения (7.140) (с коэффициентами $A_2;\ B_2;\ C_2^*;\ G_2;\ H_2$)

$$k_{1-4}=\pm\alpha_3\pm i\beta_3;\ k_{5-8}=\pm\alpha_4\pm i\beta_4.\qquad(7.152)$$

В соответствии с видом корней (7.151), (7.152) решения однородных уравнений для (7.140) примут вид

$$R(y)=\sum_{i=1}^{8}C_i\Phi_i(y);\ \Gamma(y)=\sum_{i=1}^{8}C_i\mathcal{Ж}_i(y),\qquad(7.153)$$

где фундаментальные функции $\Phi_i(y),\ \mathcal{Ж}_i(y)$ имеют повторяющуюся структуру типа

$$\Phi_1=ch\alpha_1 y\sin\beta_1 y;\ \Phi_2=ch\alpha_1 y\cos\beta_1 y;\ \Phi_3=sh\alpha_1 y\cos\beta_1 y;\ \Phi_4=sh\alpha_1 y\sin\beta_1 y.$$

То же для Φ_5- Φ_8, но с α_2, β_2 и $\mathcal{Ж}_{1\text{-}8}$ с α_3, β_3; α_4, β_4. Константы интегрирования в (7.153) можно получить из решения системы уравнений для обобщенных параметров оболочки в направлении оси Oy при y=0. Моментное состояние оболочки определяется выражениями

$$w(x,y)=\nabla^2\nabla^2 T(x,y)+\frac{1}{D}\nabla_K^2 Z(x,y);\ \theta_y(x,y)=\frac{\partial w(x,y)}{\partial y};$$

$$M_y(x,y)=-D\left[\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}\right]; \qquad (7.154)$$

$$Q_y(x,y)=-D\left[\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x\partial y^2}\right].$$

Безмоментное состояние – соответственно

$$\varphi(x,y)=\nabla^2\nabla^2 Z(x,y)-Eh\nabla_K^2 T(x,y);\ N_y(x,y)=\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2}-\int_0^y P_y dy;$$

$$S_y(x,y)=-\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x\partial y^2};\ N_x(x,y)=\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2}-\int_0^x P_x dx; \qquad (7.155)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-k_x w(x,y)=\frac{1}{Eh}\left[N_x(x,y)-\mu N_y(x,y)\right];$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-k_y w(x,y)=\frac{1}{Eh}\left[N_y(x,y)-\mu N_x(x,y)\right]$$

Параметры оболочки также разлагаем в ряды по ортогональным системам функций

$$w(x,y)=W(y)X_1(x);\ \varphi(x,y)=P(y)X_2(x); \qquad (7.156)$$

$$u(x,y)=U(y)X_2'(x);\ v(x,y)=V(y)X_2(x).$$

Выражения для обобщенных параметров НДС оболочки выводятся из геометрических и физических уравнений теории пологих оболочек с помощью процедуры метода Канторовича-Власова, когда соответствующее уравнение моментного состояния умножается на $X_1(x)$ и безмоментного состояния – на $X_2(x)$ и интегрируется в пределах оболочки. В этом случае через функции $R(y)$ и $\Gamma(y)$ можно выразить статические и кинематические параметры оболочки. Для этого необходимо построить 7 производных фундаментальных функций (см. таблицу 7.17) и использовать соотношения (7.154)-(7.156). Получается 8 уравнений. Система 8 уравнений при $y=0$ в силу свойств фундаментальных функций $\Phi_i(0)$, $\mathcal{K}_i(0)$ распадается на две системы 4-го порядка

1	3	5	7				
a_{11}	a_{13}	a_{15}	a_{17}	C_1	=	$\Theta(0)$	; (7.157)
a_{31}	a_{33}	a_{35}	a_{37}	C_3		$-Q(0)/DA_1$	
a_{51}	a_{53}	a_{55}	a_{57}	C_5		$-S(0)$	
a_{71}	a_{73}	a_{75}	a_{77}	C_7		$EhV(0)/A_2-P_3(0)$	

2	4	6	8				
a_{22}	a_{24}	a_{26}	a_{28}	C_2	=	$W(0)$	, (7.158)
a_{42}	a_{44}	a_{46}	a_{48}	C_4		$-M(0)/DA_1$	
a_{62}	a_{64}	a_{66}	a_{68}	C_6		$N(0)+P_1(0)$	
a_{82}	a_{84}	a_{86}	a_{88}	C_8		$EhU(0)/A_2-P_2(0)$	

где

$$a_{11} = -e_{21} - n_{21};\ e_{21} = \beta_1\left[-5\alpha_1^4 + 10\alpha_1^2\beta_1^2 - \beta_1^4 + B_1\left(\beta_1^2 - 3\alpha_1^2\right)\Big/ 2A_1 - \frac{C_{1*}}{A_1}\right];$$

$$n_{21} = \beta_3\left[G_{1*}\left(\beta_3^2 - 3\alpha_3^2\right)\Big/ A_1 - \frac{H_{1*}}{A_1}\right];\ a_{13} = f_{21} + P_{21};\ a_{15} = -g_{21} - t_{21};$$

$$f_{21} = \alpha_1\left[\alpha_1^4 - 10\alpha_1^2\beta_1^2 + 5\beta_1^4 + \frac{B_1\left(\alpha_1^2 - 3\beta_1^2\right)}{2A_1} + \frac{C_{1*}}{A_1}\right];\ P_{21} = \alpha_3\left[G_{1*}\frac{\alpha_3^2 - 3\beta_3^2}{A_1} + \frac{H_{1*}}{A_1}\right];$$

$$g_{21} = \beta_2\left[-5\alpha_2^4 + 10\alpha_2^2\beta_2^2 - \beta_2^4 + \frac{B_1\left(\beta_2^2 - 3\alpha_2^2\right)}{2A_1} - \frac{C_{1*}}{A_1}\right]; \qquad (7.159)$$

$$t_{21} = \beta_4\left[\frac{G_{1*}\left(\beta_4^2 - 3\alpha_4^2\right)}{A_1} - \frac{H_{1*}}{A_1}\right];$$

$$a_{17} = m_{21} + S_{21};\ a_{31} = -e_{41} - n_{41};\ S_{21} = \alpha_4\left[\frac{G_{1*}\left(\alpha_4^2 - 3\beta_4^2\right)}{A_1} - \frac{H_{1*}}{A_1}\right];$$

$$m_{21} = \alpha_2\left[\alpha_2^4 - 10\alpha_2^2\beta_2^2 + 5\beta_2^4 + \frac{B_1\left(\alpha_2^2 - 3\beta_2^2\right)}{2A_1} + \frac{C_{1*}}{A_1}\right];\ a_{33} = f_{41} + P_{41};$$

$$e_{41}=\beta_1\left[-7\alpha_1^6+35\alpha_1^4\beta_1^4-21\alpha_1^2\beta_1^4+\beta_1^6+a_4\left(-\beta_1^4+10\alpha_1^2\beta_1^2-5\alpha_1^4\right)+a_5\left(\beta_1^2-3\alpha_1^2\right)-a_6\right];$$

$$n_{41}=\beta_3\left[b_1\left(-\beta_3^4+10\alpha_3^2\beta_3^2-5\alpha_3^4\right)+b_5\left(\beta_3^2-3\alpha_3^2\right)-b_6\right];\ a_{35}=-g_{41}-t_{41};$$

$$f_{41}=\alpha_1\left[\alpha_1^6-21\alpha_1^4\beta_1^2+35\alpha_1^2\beta_1^4-7\beta_1^6+a_4\left(\alpha_1^4-10\alpha_1^2\beta_1^2+5\beta_1^4\right)+a_5\left(\alpha_1^2-3\beta_1^2\right)+a_6\right];$$

$$P_{41}=\alpha_3\left[b_1\left(\alpha_3^4-10\alpha_3^2\beta_3^2+5\alpha_3^4\right)+b_5\left(\alpha_3^2-3\beta_3^2\right)-b_6\right];\ a_{37}=m_{41}+S_{41};\qquad(7.159)$$

$$g_{41}=\beta_2\left[-7\alpha_2^6+35\alpha_2^4\beta_2^2-21\alpha_2^2\beta_2^4+\beta_2^6+a_4\left(-\beta_2^4+10\alpha_2^2\beta_2^2-5\alpha_2^4\right)+a_5\left(\beta_2^2-3\alpha_2^2\right)-a_6\right];$$

$$t_{41}=\beta_4\left[b_1\left(-\beta_4^4+10\alpha_4^2\beta_4^2-5\alpha_4^4\right)+b_5\left(\beta_4^2-3\alpha_4^2\right)-b_6\right];\ a_{51}=-e_{61}-n_{61};$$

$$m_{41}=\alpha_2\left[\alpha_2^6-21\alpha_2^4\beta_2^2+35\alpha_2^2\beta_2^4-7\beta_2^6+a_4\left(\alpha_2^4-10\alpha_2^2\beta_2^2+5\alpha_2^4\right)+a_5\left(\alpha_2^2-3\beta_2^2\right)-a_6\right];$$

$$S_{41}=\alpha_4\left[b_1\left(\alpha_4^4-10\alpha_4^2\beta_4^2+5\alpha_4^4\right)+b_5\left(\alpha_4^2-3\beta_4^2\right)-b_6\right];$$

$$e_{61}=\beta_1\left[\frac{G_{2^*}\left(\beta_1^2-3\alpha_1^2\right)}{A_2}-\frac{H_{2^*}}{A_2}\right];$$

$$n_{61}=\beta_3\left[-5\alpha_3^4+10\alpha_3^2\beta_3^2-\beta_3^4+\frac{B_2\left(\beta_3^2-3\alpha_3^2\right)}{2A_2}+\frac{C_{2^*}}{A_2}\right];\ a_{53}=f_{61}+P_{61};$$

Таблица 7.17

Функция	Φ_1 нечетная	Φ_2 четная	Φ_3 нечетная	Φ_4 четная
Φ	$ch\alpha y sin\beta y$	$ch\alpha y cos\beta y$	$sh\alpha y cos\beta y$	$sh\alpha y sin\beta y$
Φ'	$\alpha\Phi_4+\beta\Phi_2$	$\alpha\Phi_3-\beta\Phi_1$	$\alpha\Phi_2-\beta\Phi_4$	$\alpha\Phi_1+\beta\Phi_3$
Φ''	$(\alpha^2-\beta^2)\Phi_1+2\alpha\beta\Phi_3$	$(\alpha^2-\beta^2)\Phi_2-2\alpha\beta\Phi_4$	$(\alpha^2-\beta^2)\Phi_3-2\alpha\beta\Phi_1$	$(\alpha^2-\beta^2)\Phi_4+2\alpha\beta\Phi_2$
Φ'''	$\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\Phi_4-$ $-\beta(\beta^2-3\alpha^2)\Phi_2$	$\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\Phi_3+$ $+\beta(\beta^2-3\alpha^2)\Phi_1$	$\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\Phi_2+$ $+\beta(\beta^2-3\alpha^2)\Phi_4$	$\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\Phi_1-$ $-\beta(\beta^2-3\alpha^2)\Phi_3$
Φ^{IV}	$(\alpha^4-6\alpha^2\beta^2+\beta^4)\Phi_1-$ $-4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)\Phi_3$	$(\alpha^4-6\alpha^2\beta^2+\beta^4)\Phi_2-$ $-4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)\Phi_4$	$(\alpha^4-6\alpha^2\beta^2+\beta^4)\Phi_3-$ $-4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)\Phi_1$	$(\alpha^4-6\alpha^2\beta^2+\beta^4)\Phi_4-$ $-4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)\Phi_2$
Φ^{V}	$\alpha(\alpha^4-10\alpha^2\beta^2+5\beta^4)\Phi_3-$ $-\beta(-\beta^4+10\alpha^2\beta^2-5\alpha^4)\Phi_1$	$\alpha(\alpha^4-10\alpha^2\beta^2+5\beta^4)\Phi_3+$ $-\beta(-\beta^4+10\alpha^2\beta^2-5\alpha^4)\Phi_1$	$\alpha(\alpha^4-10\alpha^2\beta^2+5\beta^4)\Phi_2+$ $+\beta(-\beta^4+10\alpha^2\beta^2-5\alpha^4)\Phi_4$	$\alpha(\alpha^4-10\alpha^2\beta^2+5\beta^4)\Phi_1-$ $-\beta(-\beta^4+10\alpha^2\beta^2-5\alpha^4)\Phi_3$

Продолжение таблица 7.17

Функции	Φ_1 нечетная	Φ_2 четная	Φ_3 нечетная	Φ_4 четная
Φ^{VI}	$(\alpha^6-15\alpha^4\beta^2+15\alpha^2\beta^4-\beta^6)\Phi_1+$ $+2\alpha\beta(3\alpha^4-10\alpha^2\beta^2+3\beta^4)\Phi_3$	$(\alpha^6-15\alpha^4\beta^2+15\alpha^2\beta^4-\beta^6)\Phi_2+$ $+2\alpha\beta(3\alpha^4-10\alpha^2\beta^2+3\beta^4)\Phi_4$	$(\alpha^6-15\alpha^4\beta^2+15\alpha^2\beta^4-\beta^6)\Phi_3-$ $-2\alpha\beta(3\alpha^4-10\alpha^2\beta^2+3\beta^4)\Phi_1$	$(\alpha^6-15\alpha^4\beta^2+15\alpha^2\beta^4-\beta^6)\Phi_4+$ $+2\alpha\beta(3\alpha^4-10\alpha^2\beta^2+3\beta^4)\Phi_2$
Φ^{VII}	$\alpha(\alpha^6-21\alpha^4\beta^2+35\alpha^2\beta^4-$ $-7\beta^6)\Phi_4-\beta(-7\alpha^6+35\alpha^4\beta^2-$ $-21\alpha^2\beta^4+\beta^6)\Phi_2$	$\alpha(\alpha^6-21\alpha^4\beta^2+35\alpha^2\beta^4-$ $-7\beta^6)\Phi_3-\beta(-7\alpha^6+35\alpha^4\beta^2-$ $-21\alpha^2\beta^4+\beta^6)\Phi_1$	$\alpha(\alpha^6-21\alpha^4\beta^2+35\alpha^2\beta^4-$ $-7\beta^6)\Phi_2-\beta(-7\alpha^6+35\alpha^4\beta^2-$ $-21\alpha^2\beta^4+\beta^6)\Phi_4$	$\alpha(\alpha^6-21\alpha^4\beta^2+35\alpha^2\beta^4-$ $-7\beta^6)\Phi_1-\beta(-7\alpha^6+35\alpha^4\beta^2-$ $-21\alpha^2\beta^4+\beta^6)\Phi_3$
$\int\Phi dy$	$\frac{\alpha\Phi_4-\beta\Phi_2}{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\alpha\Phi_3+\beta\Phi_1}{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\alpha\Phi_2+\beta\Phi_4}{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\alpha\Phi_1-\beta\Phi_3}{\alpha^2+\beta^2}$

$$m_{61}=\beta_3\left[-5\alpha_3^4+10\alpha_3^2\beta_3^2-\beta_3^4+\frac{B_2\left(\beta_3^2-3\alpha_3^2\right)}{2A_2}+\frac{C_{2*}}{A_2}\right];\ a_{53}=f_{61}+P_{61};$$

$$f_{61}=\alpha_1\left[\frac{G_{2*}\left(\alpha_1^2-3\beta_1^2\right)}{A_2}+\frac{H_{2*}}{A_2}\right];\ a_{55}=-g_{61}-t_{61};\ a_{57}=m_{61}+S_{61};$$

$$P_{61}=\alpha_3\left[\alpha_3^4-10\alpha_3^2\beta_3^2+5\beta_3^4+\frac{B_2\left(\alpha_3^2-3\beta_3^2\right)}{2A_2}+\frac{C_{2*}}{A_2}\right];\ a_{71}=-e_{81}-n_{81};$$

$$t_{61}=\beta_4\left[-5\alpha_4^4+10\alpha_4^2\beta_4^2-\beta_4^4+\frac{B_2\left(\beta_4^2-3\alpha_4^2\right)}{2A_2}-\frac{C_{2*}}{A_2}\right];\ a_{73}=f_{81}+P_{81};$$

$$g_{61}=\beta_2\left[\frac{G_{2*}\left(\beta_2^2-3\alpha_2^2\right)}{A_2}-\frac{H_{2*}}{A_2}\right];\ m_{61}=\alpha_2\left[\frac{G_{2*}\left(\alpha_2^2-3\beta_2^2\right)}{A_2}+\frac{H_{2*}}{A_2}\right];$$

$$S_{61}=\alpha_4\left[\alpha_4^4-10\alpha_4^2\beta_4^2+5\beta_4^4-\frac{B_2\left(\alpha_4^2-3\beta_4^2\right)}{2A_2}-\frac{C_{2*}}{A_2}\right];\ a_{75}=-g_{81}-t_{81};\quad (7.159)$$

$$n_{81}=\beta_3\left[7\alpha_3^6-35\alpha_3^4\beta_3^2+21\alpha_3^2\beta_3^4-\beta_3^6+c_1\left(\beta_3^4-10\alpha_3^2\beta_3^2+5\alpha_3^4\right)+c_2\left(-\beta_3^2+3\alpha_3^2\right)+c_3\right];$$

$$e_{81}=\beta_1\left[d_1\left(-\beta_1^2+3\alpha_1^2\right)+d_2\right];\ f_{81}=\alpha_1\left[d_1\left(-\alpha_1^2+3\beta_1^2\right)-d_2\right];\ a_{77}=m_{81}+S_{81};$$

$$P_{81}=\alpha_3\left[-\alpha_3^6+21\alpha_3^4\beta_3^2-35\alpha_3^2\beta_3^4+7\beta_3^6+c_1\left(-\alpha_3^4+10\alpha_3^2\beta_3^2-5\beta_3^4\right)+c_2\left(-\alpha_3^2+3\beta_3^2\right)-c_3\right];$$

$$t_{81}=\beta_4\left[7\alpha_4^6-35\alpha_4^4\beta_4^2+21\alpha_3^2\beta_4^4-\beta_4^6+c_1\left(\beta_4^4-10\alpha_4^2\beta_4^2+5\alpha_4^4\right)+c_2\left(-\beta_4^2+3\alpha_4^2\right)+c_3\right];$$

$$g_{81}=\beta_2\left[d_1\left(-\beta_1^2+3\alpha_2^2\right)+d_2\right];\ m_{81}=\alpha_2\left[d_1\left(-\alpha_2^2+3\beta_2^2\right)-d_2\right];\ a_{22}=e_{11}+n_{11};$$

$$S_{81}=\alpha_4\left[-\alpha_4^6+21\alpha_4^4\beta_4^2-35\alpha_4^2\beta_4^4+7\beta_4^6+c_1\left(-\alpha_4^4+10\alpha_4^2\beta_4^2-5\beta_4^4\right)+c_2\left(-\alpha_4^2+3\beta_4^2\right)-c_3\right];$$

$$e_{11}=\alpha_1^4-6\alpha_1^2\beta_1^2+\beta_1^4+\frac{B_2\left(\alpha_1^2-\beta_1^2\right)}{2A_1}+\frac{C_{1*}}{A_1};\ n_{11}=\frac{G_{1*}\left(\alpha_3^2-\beta_3^2\right)}{A_1}+\frac{H_{1*}}{A_1};$$

$$a_{24}=f_{11}+P_{11};\ f_{11}=4\alpha_1\beta_1\left(\alpha_1^2-\beta_1^2\right)+\alpha_1\beta_1\frac{B_1}{A_1};\ P_{11}=2\alpha_3\beta_3\frac{G_{1*}}{A_1};$$

$$a_{26}=g_{11}+t_{11};\ g_{11}=\alpha_2^4-6\alpha_2^2\beta_2^2+\beta_2^4+\frac{B_1\left(\alpha_2^2-\beta_2^2\right)}{2A_1}+\frac{C_{1*}}{A_1};\ a_{28}=m_{11}+S_{11};$$

$$t_{11}=\frac{G_{1*}\left(\alpha_4^2-\beta_4^2\right)}{A_1}+\frac{H_{1*}}{A_1};\ S_{11}=2\alpha_4\beta_4\frac{G_{1*}}{A_1};\ a_{42}=e_{31}+n_{31};\ a_{44}=f_{31}+P_{31};$$

$$m_{11}=4\alpha_2\beta_2\left(\alpha_2^2-\beta_2^2\right)+\alpha_2\beta_2\frac{B_1}{A_1};\ P_{31}=4b_1\alpha_3\beta_3\left(\alpha_3^2-\beta_3^2\right)+2b_2\alpha_3\beta_3;$$

$$e_{31}=\alpha_1^6-15\alpha_1^4\beta_1^2+15\alpha_1^2\beta_1^4-\beta_1^6+a_1\left(\alpha_1^4-6\alpha_1^2\beta_1^2+\beta_1^4\right)+a_2\left(\alpha_1^2-\beta_1^2\right)+a_3;$$

$$n_{31}=b_1\left(\alpha_3^4-6\alpha_3^2\beta_3^2+\beta_3^4\right)+b_2\left(\alpha_3^2-\beta_3^2\right)+b_3;$$

$$t_{31}=b_1\left(\alpha_4^4-6\alpha_4^2\beta_4^2+\beta_4^4\right)+b_2\left(\alpha_4^2-\beta_4^2\right)+b_3;$$

$$f_{31}=2\alpha_1\beta_1\left(3\alpha_1^4-10\alpha_1^2\beta_1^2+3\beta_1^4\right)+4\alpha_1\beta_1a_1\left(\alpha_1^2-\beta_1^2\right)+2\alpha_1\beta_1a_2;$$

$$a_{46}=g_{31}+t_{31};\ t_{31}=b_1\left(\alpha_4^4-6\alpha_4^2\beta_4^2+\beta_4^4\right)+b_2\left(\alpha_4^2-\beta_4^2\right)+b_3;\ a_{48}=m_{31}+S_{31};$$

$$g_{31}=\alpha_2^6-15\alpha_2^4\beta_2^2+15\alpha_2^2\beta_2^4-\beta_2^6+a_1\left(\alpha_2^4-6\alpha_2^2\beta_2^2+\beta_2^4\right)+a_2\left(\alpha_2^2-\beta_2^2\right)+a_3;$$

$$m_{31}=2\alpha_2\beta_2\left(3\alpha_2^4-10\alpha_2^2\beta_2^2+3\beta_2^4\right)+4a_1\alpha_2\beta_2\left(\alpha_2^2-\beta_2^2\right)+2\alpha_2\beta_2a_2;$$

$$S_{31}=4b_1\alpha_4\beta_4\left(\alpha_4^2-\beta_4^2\right)+2\alpha_4\beta_4b_2;\ a_{62}=e_{51}+n_{51};\ a_{64}=f_{51}+P_{51};$$

$$e_{51}=\frac{G_{2*}\left(\alpha_1^2-\beta_1^2\right)}{A_2}+\frac{H_{2*}}{A_2};\ n_{51}=\alpha_3^4-6\alpha_3^2\beta_3^2+\beta_3^4+\frac{B_2\left(\alpha_3^2-\beta_3^2\right)}{2A_2}+\frac{C_{2*}}{A_2};$$

$$f_{51}=2\alpha_1\beta_1\frac{G_{2*}}{A_2};\ P_{51}=4\alpha_3\beta_3\left(\alpha_3^2-\beta_3^2\right)+\alpha_3\beta_3\frac{B_2}{A_2};\ a_{66}=g_{51}+t_{51};$$

$$g_{51}=\frac{G_{2*}\left(\alpha_2^2-\beta_2^2\right)}{A_2}+\frac{H_{2*}}{A_2};\ t_{51}=\alpha_4^4-6\alpha_4^2\beta_4^2+\beta_4^4+\frac{B_2\left(\alpha_4^2-\beta_4^2\right)}{2A_2}+\frac{C_{2*}}{A_2};$$

$$a_{68}=m_{51}+S_{51};\ m_{51}=2\alpha_2\beta_2\frac{G_{2*}}{A_2};\ S_{51}=4\alpha_4\beta_4\left(\alpha_4^2-\beta_4^2\right)+\alpha_4\beta_4\frac{B_2}{A_2};$$

$$a_{82}=e_{71}+n_{71};\ e_{71}=d_3\left(\alpha_1^2-\beta_1^2\right)-d_4;\ a_{84}=f_{71}+P_{71};\ f_{71}=2\alpha_1\beta_1d_3;$$

$$n_{71}=\alpha_3^6-15\alpha_3^4\beta_3^2+15\alpha_3^2\beta_3^4-\beta_3^6+c_4\left(\alpha_3^4-6\alpha_3^2\beta_3^2+\beta_3^4\right)+c_5\left(\alpha_3^2-\beta_3^2\right)+c_6;$$

$$P_{71}=2\alpha_3\beta_3\left[3\alpha_3^4-10\alpha_3^2\beta_3^2+3\beta_3^4+2c_4\left(\alpha_3^2-\beta_3^2\right)+c_5\right];\ a_{86}=g_{71}+t_{71};$$

$$t_{71}=\alpha_4^6-15\alpha_4^4\beta_4^2+15\alpha_4^2\beta_4^4-\beta_4^6+c_4\left(\alpha_4^4-6\alpha_4^2\beta_4^2+\beta_4^4\right)+c_5\left(\alpha_4^2-\beta_4^2\right)+c_6;$$

$$g_{71}=d_3\left(\alpha^2-\beta_2^2\right)-d_4;\ a_{88}=m_{71}+S_{71};\ m_{71}=2\alpha_2\beta_2 d_3; \qquad (7.159)$$

$$P_{71}=2\alpha_4\beta_4\left[3\alpha_4^4-10\alpha_4^2\beta_4^2+3\beta_4^4+2c_4\left(\alpha_4^2-\beta_4^2\right)+c_5\right];\ C_{1*}=\int_0^{l_1}X_1^{IV}(x)X_1(x)dx;$$

$$C_{1*}=\int_0^{l_1}k_xX_2(x)X_1(x)dx\frac{1}{D};\ H_{1*}=\int_0^{l_1}\frac{k_y}{D}X_2''(x)X_1(x)dx;$$

$$a_1=(2+\mu)\frac{B_1}{4A_1};\ a_2=\frac{8A_1C_{1*}+\mu B_1^2}{8A_1^2};\ a_3=\mu\frac{B_1C_{1*}}{4A_1^2};$$

$$b_1=\frac{G_{1*}}{A_1};\ b_2=\frac{4A_1H_{1*}+\mu B_1G_{1*}}{4A_1^2};\ b_3=\mu\frac{B_1H_{1*}}{4A_1^2};\ a_4=(4-\mu)\frac{B_1}{4A_1};$$

$$a_2=\frac{8A_1C_{1*}+(2-\mu)B_1^2}{8A_1^2};\ a_6=(2-\mu)\frac{B_1C_{1*}}{4A_1^2};\ b_5=\frac{4A_1H_{1*}+(2-\mu)B_1^2G_{1*}}{4A_1^2};$$

$$b_6=(2-\mu)\frac{B_1H_{1*}}{4A_1^2};\ C_{2*}=\int_0^{l_1}X_2^{IV}(x)X_2(x)dx;\ G_{2*}=-\int_0^{l_1}Ehk_xX_1(x)X_2(x)dx;$$

$$H_{2*}=-\int_0^{l_1}Ehk_yX_1'(x)X_2(x)dx;\ P_1(0)=4\int_0^{l_1}\left[\int_0^yP_ydy\right]X_2(x)dx\frac{1}{B_2};$$

$$P_3(0)=\frac{dP_2(0)}{dy}\frac{1}{A_2};\ P_2(0)=4\int_0^{l_1}\left[\int_0^xP_xdx-\mu\int_0^yP_ydy\right]X_2(x)\frac{1}{A_2}dx;$$

$$c_1=(4+\mu)\frac{B_1}{4A_2};\ c_2=\frac{C_{2*}}{A_2}+(2+\mu)\frac{B_2^2}{8A_2^2}-\frac{G_{1*}G_{2*}}{A_1A_2};\ c_4=(2-\mu)\frac{B_2}{4A_2};$$

$$c_3=(2+\mu)\frac{B_2C_{2*}}{4A_2^2}-\frac{H_{1*}G_{2*}}{A_1A_2};\ d_1=\frac{H_{2*}}{A_2}-\frac{B_1G_{2*}}{2A_1A_2}+(2+\mu)\frac{B_2G_{2*}}{4A_2^2};$$

$$d_2=(2+\mu)\frac{B_2H_{2*}}{4A_2^2}-\frac{C_{1*}G_{2*}}{A_1A_2};\ c_5=\frac{C_{2*}}{A_2}-\mu\frac{B_2^2}{8A_2^2}-\frac{G_{1*}G_{2*}}{A_1A_2};\qquad(7.159)$$

$$c_6=\mu\frac{B_2C_{2*}}{4A_2^2}+\frac{H_{1*}G_{2*}}{A_1A_2};\ d_3=\frac{H_{2*}}{A_2}-\frac{B_1G_{2*}}{2A_1A_2}-\mu\frac{B_2G_{2*}}{4A_2^2};$$

$$d_4=\mu\frac{B_2H_{2*}}{4A_2^2}+\frac{C_{1*}G_{2*}}{A_1A_2}.$$

Весьма удобно представить решения систем (7.157), (7.158) по правилу Крамера. В этом случае частные определители можно разложить по элементам столбцов и константы интегрирования примут вид

$$C_1=\left\{\Delta_{1\theta}\theta(0)+(-\Delta_{1Q})\left[-\frac{Q(0)}{DA_1}\right]+\Delta_{1S}[-S(0)]+(-\Delta_{1V})\left[\frac{EhV(0)}{A_2}-P_3(0)\right]\right\}\frac{1}{\Delta_1};$$

$$C_3=\left\{(-\Delta_{3\theta})\theta(0)+\Delta_{3Q}\left[-\frac{Q(0)}{DA_1}\right]+(-\Delta_{3S})[-S(0)]+\Delta_{3V}\left[\frac{EhV(0)}{A_2}-P_3(0)\right]\right\}\frac{1}{\Delta_1};$$

$$C_5=\left\{\Delta_{5\theta}\theta(0)+(-\Delta_{5Q})\left[-\frac{Q(0)}{DA_1}\right]+\Delta_{5S}[-S(0)]+(-\Delta_{5V})\left[\frac{EhV(0)}{A_2}-P_3(0)\right]\right\}\frac{1}{\Delta_1};$$

$$C_7=\left\{(-\Delta_{7\theta})\theta(0)+\Delta_{7Q}\left[-\frac{Q(0)}{DA_1}\right]+(-\Delta_{7S})[-S(0)]+\Delta_{7V}\left[\frac{EhV(0)}{A_2}-P_3(0)\right]\right\}\frac{1}{\Delta_1};\qquad(7.160)$$

$$C_2=\left\{\Delta_{2W}W(0)+(-\Delta_{2M})\left[-\frac{M(0)}{DA_1}\right]+\Delta_{2N}[N(0)+P_1(0)]+(-\Delta_{2U})\left[\frac{EhU(0)}{A_2}+P_2(0)\right]\right\}\frac{1}{\Delta_2};$$

$$C_4=\left\{(-\Delta_{4W})W(0)+\Delta_{4M}\left[-\frac{M(0)}{DA_1}\right]+(-\Delta_{4N})[N(0)+P_1(0)]+\Delta_{4U}\left[\frac{EhU(0)}{A_2}+P_2(0)\right]\right\}\frac{1}{\Delta_2};$$

$$C_6=\left\{\Delta_{6W}W(0)+(-\Delta_{6M})\left[-\frac{M(0)}{DA_1}\right]+\Delta_{6N}[N(0)+P_1(0)]+(-\Delta_{6U})\left[\frac{EhU(0)}{A_2}+P_2(0)\right]\right\}\frac{1}{\Delta_2};$$

$$C_8=\left\{(-\Delta_{8W})W(0)+\Delta_{8M}\left[-\frac{M(0)}{DA_1}\right]+(-\Delta_{8N})[N(0)+P_1(0)]+\Delta_{8U}\left[\frac{EhU(0)}{A_2}+P_2(0)\right]\right\}\frac{1}{\Delta_2},$$

где обобщенные начальные параметры оболочки имеют следующие обозначения: $W(0)$ - поперечный прогиб; $\theta(0)$ - угол поворота нормали; $M(0)$ - изгибающий момент; $Q(0)$ - приведенная поперечная сила; $N(0)$ - продольная сила; $S(0)$ - сдвигающая сила в плоскости xoy; $U(0)$ - перемещение в направлении оси Ox; $V(0)$ - продольное перемещение; Δ_1 - определитель системы (7.157); Δ_2 - определитель системы (7.158). Частные определители $\Delta_{1\theta}$, Δ_{1Q}, …, Δ_{8U} получаются из определителей Δ_1, Δ_2 путем вычеркивания соответствующих столбцов и строк. Например, $\Delta_{1\theta}$ получается из Δ_1 вычеркиванием 1-го столбца и строки, содержащей $\theta(0)$ (см. (7.157)), Δ_{4N} получается из Δ_2 вычеркиванием 4-го столбца и строки, содержащей $N(0)$ (см. (7.158)) и т.д. Подставляя константы (7.160)в (7.153), а функции $R(y)$, $\Gamma(y)$ в уравнения для обобщенных параметров НДС оболочки, получим решения задач Коши для уравнений (7.153). Далее дифференцированием можно получить по уравнениям (7.154), (7.155) остальные параметры оболочки. Объединяя 8 уравнений в матричную форму, представим решение системы (7.135) в виде одномерных уравнений (7.161). В этом уравнении блоки ортонормированных фундаментальных функций по главной диагонали описывают собственно моментное и безмоментное НДС оболочки в направлении оси Oy. Блоки функций побочной диагонали описывают связь моментного и безмоментного состояний (для складчатой цилиндрической оболочки эти блоки нулевые, см. (7.133)).

Вывод составляющих частей уравнения (7.161) показал, что система ортонормированных фундаментальных функций статики пологих оболочек обладает свойством повторяемости. При этом базисные функции имеют вид

$$i = 1,3,5,7$$

$$\begin{aligned} A_{i1} = \{&[\Delta_{2W} e_{i1} + (-\Delta_{4W}) f_{i1}]\Phi_2 + [-\Delta_{2W} f_{i1} + (-\Delta_{4W}) e_{i1}]\Phi_4 + \\ &+ [\Delta_{6W} g_{i1} + (-\Delta_{8W}) m_{i1}]\Phi_6 + [-\Delta_{6W} m_{i1} + (-\Delta_{8W}) g_{i1}]\Phi_8 + \\ &+ [\Delta_{2W} n_{i1} + (-\Delta_{4W}) P_{i1}]\mathcal{K}_2 + [-\Delta_{2W} P_{i1} + (-\Delta_{4W}) n_{i1}]\mathcal{K}_4 + \\ &+ [-\Delta_{6W} t_{i1} + (-\Delta_{8W}) S_{i1}]\mathcal{K}_6 + [-\Delta_{6W} S_{i1} + (-\Delta_{8W}) t_{i1}]\mathcal{K}_8\}\frac{1}{\Delta_2}; \end{aligned} \tag{7.162}$$

$$\begin{aligned} A_{i2} = \{&[\Delta_{1\theta} e_{i1} + (-\Delta_{3\theta}) f_{i1}]\Phi_1 + [\Delta_{1\theta} f_{i1} + (-\Delta_{3\theta}) e_{i1}]\Phi_3 + \\ &+ [\Delta_{5\theta} g_{i1} + (-\Delta_{7\theta}) m_{i1}]\Phi_5 + [\Delta_{5\theta} m_{i1} + (-\Delta_{7\theta}) g_{i1}]\Phi_7 + \\ &+ [\Delta_{1\theta} n_{i1} + (-\Delta_{3\theta}) P_{i1}]\mathcal{K}_1 + [-\Delta_{1\theta} P_{i1} + (-\Delta_{3\theta}) n_{i1}]\mathcal{K}_3 + \\ &+ [\Delta_{5\theta} t_{i1} + (-\Delta_{7\theta}) S_{i1}]\mathcal{K}_5 + [-\Delta_{5\theta} S_{i1} + (-\Delta_{7\theta}) t_{i1}]\mathcal{K}_7\}\frac{1}{\Delta_1}; \end{aligned}$$

DW(y)	A_{11}	A_{12}	$\frac{-A_{11M}}{A_1}$	$\frac{-A_{12Q}}{A_1}$	A_{11N}	$-A_{12S}$	$\frac{A_{11U}}{A_2}$	$\frac{A_{12V}}{A_2}$	DW(0)	+	B_{11}
Dθ(y)	A_{21}	A_{22}	$\frac{-A_{21M}}{A_1}$	$\frac{-A_{22Q}}{A_1}$	A_{21N}	$-A_{22S}$	$\frac{A_{21U}}{A}$	$\frac{A_{22V}}{A_2}$	Dθ(0)		B_{21}
M(y)	A_1A_{31}	$-A_1A_{32}$	A_{31M}	A_{32Q}	$-A_1A_{31N}$	A_1A_{32S}	$\frac{-A_1A_{31U}}{A_2}$	$\frac{-A_1A_{32V}}{A_2}$	M(0)		$-B_{31}$
Q(y)	A_1A_{41}	$-A_1A_{42}$	A_{41M}	A_{42Q}	$-A_1A_{41N}$	A_1A_{42S}	$\frac{-A_1A_{41U}}{A_2}$	$\frac{-A_1A_{42V}}{A_2}$	Q(0)		$-B_{41}$
DN(y)	A_{51}	A_{52}	$\frac{-A_{51M}}{A_1}$	$\frac{-A_{52Q}}{A_1}$	A_{51N}	$-A_{52S}$	$\frac{A_{51U}}{A_2}$	$\frac{A_{52V}}{A_2}$	DN(0)		$-B_{51}$
DS(y)	$-A_{61}$	$-A_{62}$	$\frac{A_{61M}}{A_1}$	$\frac{A_{62Q}}{A_1}$	$-A_{61N}$	A_{62S}	$\frac{-A_{61U}}{A_2}$	$\frac{-A_{62V}}{A_2}$	DS(0)		$-B_{61}$
DEhU(y)	AA_{71}	A_2A_{72}	$\frac{-A_2A_{71M}}{A_1}$	$\frac{-A_2A_{72Q}}{A_1}$	A_2A_{71N}	$-A_2A_{72S}$	A_{72U}	A_{72V}	DEhU(0)		B_{71}
DEhV(y)	A_2A_{81}	A_2A_{82}	$\frac{-A_2A_{81M}}{A_1}$	$\frac{-A_2A_{81Q}}{A_1}$	A_2A_{81N}	$-A_2A_{82S}$	A_{81U}	A_{82V}	DEhV(0)		B_{81}

= (7.161)

$$i = 2,4,6,8$$

$$\begin{aligned}
A_{i1} = \{&[\Delta_{2W} e_{i1} + (-\Delta_{4W}) f_{i1}]\Phi_1 + [\Delta_{2W} f_{i1} - (-\Delta_{4W}) e_{i1}]\Phi_3 + \\
&+ [\Delta_{6W} g_{i1} + (-\Delta_{8W}) m_{i1}]\Phi_5 + [\Delta_{6W} m_{i1} - (-\Delta_{8W}) g_{i1}]\Phi_7 + \\
&+ [\Delta_{2W} n_{i1} + (-\Delta_{4W}) P_{i1}]\mathcal{K}_1 + [\Delta_{2W} P_{i1} - (-\Delta_{4W}) n_{i1}]\mathcal{K}_3 + \\
&+ [\Delta_{6W} t_{i1} + (-\Delta_{8W}) S_{i1}]\mathcal{K}_5 + [\Delta_{6W} S_{i1} - (-\Delta_{8W}) t_{i1}]\mathcal{K}_7\}\frac{1}{\Delta_2};
\end{aligned} \tag{7.162}$$

$$\begin{aligned}
A_{i2} = \{&[-\Delta_{1\theta} e_{i1} + (-\Delta_{3\theta}) f_{i1}]\Phi_2 + [\Delta_{1\theta} f_{i1} + (-\Delta_{3\theta}) e_{i1}]\Phi_4 + \\
&+ [-\Delta_{5\theta} g_{i1} + (-\Delta_{7\theta}) m_{i1}]\Phi_6 + [\Delta_{5\theta} m_{i1} + (-\Delta_{7\theta}) g_{i1}]\Phi_8 + \\
&+ [-\Delta_{1\theta} n_{i1} + (-\Delta_{3\theta}) P_{i1}]\mathcal{K}_2 + [\Delta_{1\theta} P_{i1} + (-\Delta_{3\theta}) n_{i1}]\mathcal{K}_4 + \\
&+ [-\Delta_{5\theta} t_{i1} + (-\Delta_{7\theta}) S_{i1}]\mathcal{K}_6 + [\Delta_{5\theta} S_{i1} + (-\Delta_{7\theta}) t_{i1}]\mathcal{K}_8\}\frac{1}{\Delta_1}.
\end{aligned}$$

Все другие фундаментальные функции матрицы A уравнения (7.161) образуются из выражений (7.162) путем замены частных определителей. Например, функции A_{51M}, A_{62Q} образуются из функций A_{51}, A_{62} путем замены частных определителей с индексами W и θ на частные определители с индексами M и Q и своими знаками, взятыми из выражений для констант (7.160), т.е.

$$\begin{aligned}
A_{51M} = \{&[(-\Delta_{2M}) e_{51} + \Delta_{4M} f_{51}]\Phi_2 + [-(-\Delta_{2M}) f_{51} + \Delta_{4M} e_{51}]\Phi_4 + \\
&+ [(-\Delta_{6M}) g_{51} + \Delta_{8M} m_{51}]\Phi_6 + [-(-\Delta_{6M}) m_{51} + \Delta_{8M} g_{51}]\Phi_8 + \\
&+ [(-\Delta_{2M}) n_{51} + \Delta_{4M} P_{51}]\mathcal{K}_2 + [-(-\Delta_{2M}) P_{51} + \Delta_{4M} n_{51}]\mathcal{K}_4 + \\
&+ [(-\Delta_{6M}) t_{51} + \Delta_{8M} S_{51}]\mathcal{K}_6 + [-(-\Delta_{6M}) S_{51} + \Delta_{8M} t_{51}]\mathcal{K}_8\}\frac{1}{\Delta_2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{62Q} = \{&[-(-\Delta_{1Q}) e_{61} + \Delta_{3Q} f_{61}]\Phi_2 + [(-\Delta_{1Q}) f_{61} + \Delta_{3Q} e_{61}]\Phi_4 + \\
&+ [-(-\Delta_{5Q}) g_{61} + \Delta_{7Q} m_{61}]\Phi_6 + [(-\Delta_{5Q}) m_{61} + \Delta_{7Q} g_{61}]\Phi_8 + \\
&+ [-(-\Delta_{1Q}) n_{61} + \Delta_{3Q} P_{61}]\mathcal{K}_2 + [(-\Delta_{1Q}) P_{61} + \Delta_{3Q} n_{61}]\mathcal{K}_4 + \\
&+ [-(-\Delta_{5Q}) t_{61} + \Delta_{7Q} S_{61}]\mathcal{K}_6 + [(-\Delta_{5Q}) S_{61} + \Delta_{7Q} t_{61}]\mathcal{K}_8\}\frac{1}{\Delta_1}
\end{aligned}$$

и т.д. Правые части уравнения (7.161) с функциями Грина представляются следующим образом

$$B_{11}=\int_0^y\left[\frac{A_{12Q}(y-\xi)}{A_1}q_z(\xi)-\frac{A_{12V}(y-\xi)D}{A_2}q_{xy}(\xi)\right]d\xi+$$
$$+D\left[-P_1(0)A_{11N}+P_2(0)A_{11U}-P_3(0)A_{12V}\right];$$
$$B_{21}=\int_0^y\left[\frac{A_{22Q}(y-\xi)}{A_1}q_z(\xi)-\frac{A_{22V}(y-\xi)D}{A_2}q_{xy}(\xi)\right]d\xi+$$
$$+D\left[-P_1(0)A_{21N}+P_2(0)A_{21U}-P_3(0)A_{22V}\right];$$

$$B_{31}=\int_0^y\left[\frac{A_{32Q}(y-\xi)}{1}q_z(\xi)-\frac{A_{32V}(y-\xi)DA_1}{A_2}q_{xy}(\xi)\right]d\xi+$$
$$+D\left[-P_1(0)A_{31N}+P_2(0)A_{31U}-P_3(0)A_{32V}\right];$$

$$B_{41}=\int_0^y\left[A_{42Q}(y-\xi)q_z(\xi)-\frac{A_{42V}(y-\xi)DA_1}{A_2}q_{xy}(\xi)\right]d\xi+$$
$$+DA_1\left[-P_1(0)A_{41N}+P_2(0)A_{41U}-P_3(0)A_{42V}\right];$$

$$B_{51}=\int_0^y\left[\frac{A_{52Q}(y-\xi)}{A_1}q_z(\xi)-\frac{A_{52V}(y-\xi)D}{A_2}q_{xy}(\xi)\right]d\xi+$$
$$+D\left[-P_1(0)A_{51N}+P_2(0)A_{51U}-P_3(0)A_{52V}\right];$$

$$B_{61}=\int_0^y\left[A_{62Q}(y-\xi)q_z(\xi)\frac{1}{A_1}-\frac{A_{62V}(y-\xi)D}{A_2}q_{xy}(\xi)\right]d\xi+$$
$$+D\left[-P_1(0)A_{61N}+P_2(0)A_{61U}-P_3(0)A_{62V}\right];$$

$$B_{71}=\int_0^y\left[\frac{A_{72Q}(y-\xi)A_2}{A_1}q_z(\xi)-\frac{A_{72V}(y-\xi)D}{1}q_{xy}(\xi)\right]d\xi+$$
$$+DA_2\left[-P_2(y)-P_1(0)A_{71N}+P_2(0)A_{71U}-P_3(0)A_{72V}\right];$$

$$B_{81}=\int_0^y\left[\frac{A_{82Q}(y-\xi)A_2}{A_1}q_z(\xi)-A_{82V}(y-\xi)Dq_{xy}(\xi)\right]d\xi+$$
$$+DA_2\left[P_3(y)-P_1(0)A_{81N}+P_2(0)A_{81U}-P_3(0)A_{82V}\right]. \qquad (7.163)$$

Выражения (7.163) всегда можно проинтегрировать, что позволяет сформировать правые части уравнения (7.161). В качестве примера представим только один элемент правой части для нормальной составляющей нагрузки $P_z\left(P_x=P_y=0\right)$.

Сосредоточенная сила с координатами c_F, d_F

$$P_z = F\delta(x - c_F)\delta(y - d_F).$$

Фильтрующее свойство дельта-функции Дирака делает очень простой операцию интегрирования. В данном случае подинтегральное выражение в (7.163) не изменяется и первый элемент примет вид

$$\begin{aligned} B_{11} = F\gamma_F(\omega)\big[&a_{111}\Phi_1(y - d_F)_+ + a_{113}\Phi_3(y - d_F)_+ + a_{115}\Phi_5(y - d_F)_+ + \\ &+ a_{117}\Phi_7(y - d_F)_+ + b_{111}\mathcal{K}_1(y - d_F)_+ + b_{113}\mathcal{K}_3(y - d_F)_+ + \\ &+ b_{115}\mathcal{K}_5(y - d_F)_+ + b_{117}\mathcal{K}_7(y - d_F)_+\big]\frac{1}{\Delta_1 A_1}, \end{aligned} \tag{7.164}$$

где

$$a_{111} = \big[(-\Delta_{1Q})e_{11} - \Delta_{3Q}f_{11}\big];\ a_{113} = \big[(-\Delta_{1Q})f_{11} + \Delta_{3Q}e_{11}\big];$$

$$a_{115} = \big[(-\Delta_{5Q})g_{11} - \Delta_{7Q}m_{11}\big];\ a_{117} = \big[(-\Delta_{5Q})m_{11} + \Delta_{7Q}g_{11}\big];$$

$$b_{111} = \big[(-\Delta_{1Q})n_{11} - \Delta_{3Q}P_{11}\big];\ b_{113} = \big[(-\Delta_{1Q})P_{11} + \Delta_{3Q}n_{11}\big];$$

$$b_{115} = \big[(-\Delta_{5Q})v_{11} - \Delta_{7Q}S_{11}\big];\ b_{117} = \big[(-\Delta_{5Q})S_{11} + \Delta_{7Q}t_{11}\big];$$

$$\gamma_F(\omega) = \int_0^{l_1} X_1(x)\delta(x - c_F)dx = X_1(c_F).$$

Равномерно распределенная нагрузка (см. (1.28))

$$P_z = q\big[H(x - c_H)H(y - d_H) - H(x - c_K)H(y - d_K)\big].$$

Для получения правых частей можно проинтегрировать выражения типа (7.164)

$$\begin{aligned} B_{11} = q\big(\gamma_q(\omega)\big)_{|C_H}^{l_1}\Big\{&\big[(\alpha_1 a_{113} - \beta_1 a_{111})\Phi_2(y - d_H)_+ + (\alpha_1 a_{111} + \beta_1 a_{113})\Phi_4(y - d_H)_+\big]\frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \\ &+ \big[(\alpha_2 a_{117} - \beta_2 a_{115})\Phi_6(y - d_H)_+ + (\alpha_2 a_{115} + \beta_2 a_{117})\Phi_8(y - d_H)_+\big]\frac{1}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \\ &+ \big[(\alpha_3 b_{113} - \beta_3 b_{111})\mathcal{K}_2(y - d_H)_+ + (\alpha_3 b_{111} + \beta_3 b_{113})\mathcal{K}_4(y - d_H)_+\big]\frac{1}{\alpha_3^2 + \beta_3^2} + \end{aligned} \tag{7.165}$$

$$+\left[(\alpha_4 b_{117}-\beta_4 b_{115})Ж_6(y-d_H)_+ +(\alpha_4 b_{115}+\beta_4 b_{117})Ж_8(y-d_H)_+\right]\frac{1}{\alpha_4^2+\beta_4^2}\Big\}-$$

$$-\gamma_q(\omega)\Big|_{C_K}^{l_1}\{\}\Big)\frac{1}{\Delta_1 A_1};$$

$$\gamma_q(\omega)=\int X_1(x)dx.$$

Выражение во вторых фигурных скобках отличается от выражения в первых фигурных скобках только координатой нагрузки, т.е. вместо d_H необходимо подставить d_K.

Сосредоточенный момент в направлении оси Ox

$$P_z=M_x\delta'(x-c_M)\delta(y-d_M).$$

Выражения для правых частей совпадают со случаем сосредоточенной силы (см. (7.164)), а коэффициент

$$\gamma_{Mx}(\omega)=\int_0^{l_1} X_1(x)\delta'(x-c_M)dx=-X_1'(c_M).$$

Сосредоточенный момент в направлении оси Oy

$$P_z=M_y\delta(x-c_M)\delta'(y-d_M)$$

Для этого случая можно продифференцировать выражения типа (7.164)

$$\begin{aligned}B_{11}=M_y\gamma_{My}(\omega)\Big[&(\alpha_1 a_{113}+\beta_1 a_{111})Ф_2(y-d_M)_+ +(\alpha_1 a_{111}-\beta_1 a_{113})Ф_4(y-d_M)_+ +\\ &+(\alpha_2 a_{117}+\beta_2 a_{115})Ф_6(y-d_M)_+ +(\alpha_2 a_{115}-\beta_2 a_{117})Ф_8(y-d_M)_+ +\\ &+(\alpha_3 b_{113}+\beta_3 b_{111})Ж_2(y-d_M)_+ +(\alpha_3 b_{111}-\beta_3 b_{113})Ж_4(y-d_M)_+ +\\ &+(\alpha_4 b_{117}+\beta_4 b_{115})Ж_6(y-d_M)_+ +(\alpha_4 b_{115}-\beta_4 b_{117})Ж_8(y-d_{MH})_+\Big]\frac{1}{\Delta_1 A_1};\end{aligned} \qquad (7.166)$$

$$\gamma_{My}(\omega)=\int_0^{l_1} X_1(x)\delta(x-c_M)dx=X_1(c_M).$$

Равномерно распределенная вдоль линии нагрузка

$$P_z=q_1[H(x-c_H)-H(x-c_K)]\delta(y-d_q).$$

$$P_z=q_2\delta(x-c_q)[H(y-d_H)-H(y-d_K)].$$

Для q_1 правые части совпадают с выражениями типа (7.164), для q_2 - с выражениями типа (7.165) и

$$\gamma_{q_1}(\omega)=\int X_1(x)dx;\ \gamma_{q_2}(\omega)=\int_0^{l_1} X_1(x)\delta(x-c_q)dx=X_1(c_q).$$

Для более сложной нагрузки, когда отсутствуют обобщенные функции, выражения для правых частей несложно получить на (7.163) по обычным правилам интегрирования.

7.11 Предложения по учету дополнительных факторов

Решения задач изгиба прямоугольной (7.20) и круглой (7.49) пластин сравнительно просто могут быть приспособлены для учета разнообразных дополнительных факторов. Рассмотрим наиболее существенные из них.

1 Учет ортотропности материала пластин

Дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластины имеет вид [5]

$$D_1\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4}+3D_3\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4}=q(x,y), \qquad (7.167)$$

где жесткости определяются формулами

$$D_1=\frac{E_x h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})};\ D_2=\frac{E_y h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})};\ D_K=\frac{Gh^3}{12};$$

$$D_3=D_1\mu_{xy}+2D_K=D_2\mu_{yx}+2D_K.$$

Если применить к уравнению (7.167) процедуру метода Канторовича-Власова, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка вида (7.13), где изменятся лишь коэффициенты

$$B=D_3\int_0^{l_1} X''(x)X(x)dx/D_1;\ C=D_2\int_0^{l_1} X^{IV}(x)X(x)dx/D_1,$$

т.е. учет ортотропности материала будет выполнятся коэффициентами α и β фундаментальных функций.

2 Учет ребер жесткости в двух направлениях

Если воспользоваться теорией проф. В.З. Власова о воздействии ребер жесткости на пластину [63, 205], то правая часть уравнения (7.6) примет вид

$$\bar{q}(x,y)=q(x,y)-\sum_{i=1}^{n}EI_x W^{IV}(y)X(a_i)\delta(x-a_i)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[EI_\omega W^{IV}(y)X'(a_i)-GI_K W''(y)X'(a_i)\right]\delta'(x-a_i),$$

где EI_x, EI_ω, GI_K - жесткости i-го ребра на изгиб и кручение; a_i - координата расположения i-го ребра. Подставляя $\bar{q}(x,y)$ в уравнение (7.6) и применяя метод Канторовича-Власова, придем только к новым выражениям для коэффициентов

$$\bar{A}=A+\sum_{i=1}^{n}\left\{EI_x X^2(a_i)+EI_\omega\left[X'(a_i)\right]^2\right\};\quad \bar{B}=B+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}EI_K\left[X'(a_i)\right]^2$$

и параметры жесткости ребер попадают в коэффициенты α, β фундаментальных функций (7.22). Для учета ребер жесткости в другом направлении нужно дискретизировать пластину, как показано на рисунке 7.19, и применить алгоритм МГЭ. Здесь ребро жесткости в направлении оси Ox учитывается как часть пластины с высотой (h+h_1) и длиной $в_2$, т.е. ребро жесткости и пластина рассматриваются как единое целое.

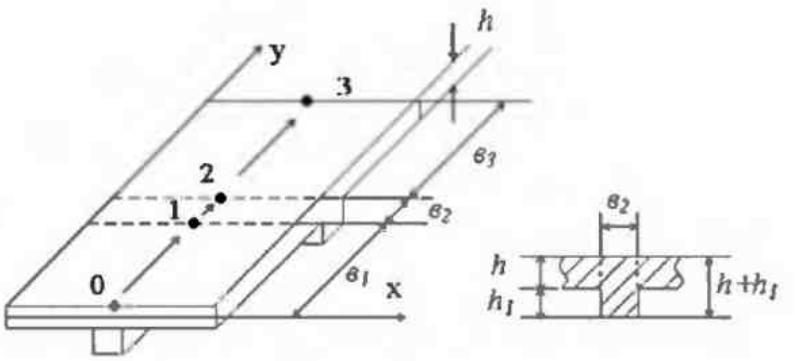


Рисунок 7.19

3 Учет упругого основания

Дифференциальное уравнение изгиба пластины на упругом основании с двумя коэффициентами постели приводится к виду

$$\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4}+K_1\frac{w(x,y)}{D}-$$
$$-K_2\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}\right)\frac{1}{D}=\frac{q(x,y)}{D},$$

где K_1, K_2 – коэффициенты упругого основания. Применяя к этому уравнению процедуру метода Канторовича-Власова, получим следующие коэффициенты, отличные от (7.14)

$$\overline{B}=B-\int_0^{l_1}X^2(x)K_2\,dx/2D;\ \overline{C}=C+\int_0^{l_1}\left[K_1X^2(x)-K_2X''(x)X(x)\right]dx/D.$$

Видно, что учет упругого основания сводится к усложнению коэффициентов α, β фундаментальных функций.

Ограничившись этими случаями, отметим, что и другие дополнительные факторы могут быть учтены путем рассмотрения более точных дифференциальных уравнений и усложнением коэффициентов их фундаментальных функций.

4 Учет геометрической или физической нелинейностей

Здесь представим только общие соображения по расчету нелинейных систем, поскольку эта тема выходит за рамки данной работы. Нелинейные задачи деформирования стержней, пластин и оболочек весьма разнообразны и каждая задача требует индивидуального подхода. Однако, если нелинейные модули образуют целостную систему, то для узловых точек (линий) всегда будут справедливы уравнения равновесия между статическими параметрами и уравнения совместности перемещений между кинематическими параметрами. Это значит, что топологическая матрица C в алгоритме МГЭ для нелинейных систем будет формироваться из анализа матриц X и Y точно так же, как для упругих систем. Основные же трудности решения нелинейных задач заключаются в определении внутреннего содержания матриц A и B, т.к. построить фундаментальные функции нелинейных дифференциальных уравнений за небольшим исключением не удается. В этой связи получили развитие различные подходы к решению нелинейных краевых задач [83]. К первому направлению относятся проекционные и вариационные методы типа методов Бубнова и Ритца, методы конечных разностей и конечных элементов. Этими методами нелинейные краевые задачи сводятся к системам нелинейных

алгебраических или трансцендентных уравнений. Для решения подобных систем можно использовать алгоритм продолжения решения по параметру [83].

Второе направление основано на сведении нелинейных краевых задач к решению последовательности линейных краевых задач.

Очевидно, что второе направление является весьма перспективным для применения одномерного варианта МГЭ. Здесь, в отличие от линейных задач, расчет нелинейной системы по МГЭ сведется к последовательному многократному решению системы уравнений $A_* X_* = -B$. Причем матрица C (набор компенсирующих элементов) при всех итерациях останется неизменной.

Также возможна реализация алгоритма МГЭ в рамках первого направления. Однако, решение нелинейной или трансцендентной системы уравнений существенно сложнее решений систем уравнений второго направления.

Кроме физически и геометрически нелинейных задач, алгоритмом МГЭ могут быть решены и конструктивно нелинейные задачи. К таким задачам относится расчет стержневых систем по деформированной схеме. Алгоритм здесь следующий [26]:

1 Упругая система рассчитывается на действующую статическую нагрузку без учета продольно-поперечного изгиба стержней. Выявляются стержни, где отличны от нуля сжимающие и растягивающие силы.

2 Расчет системы повторяется уже с учетом продольно-поперечного изгиба отдельных стержней. Определяются вторые приближения для нормальных сил.

3 Расчет граничных параметров циклически повторяется до тех пор, пока принятые и полученные значения нормальных сил будут близки.

Данный процесс быстро сходится ввиду того, что реальные сооружения обладают большой жесткостью. В каждом цикле можно менять и значения жесткостей EI, EA, GI_K и т.д., т.е. дополнительно учитывать физическую нелинейность системы [307].

Приложение А
Программы, реализующие отдельные вопросы алгоритма МГЭ в средах программирования Visual Fortran и Delphi

Программа примера 2.4 Предназначена для решения системы уравнений $A*X*=-B$ методом исключения Гаусса без выбора главных элементов и реализует следующую блок-схему

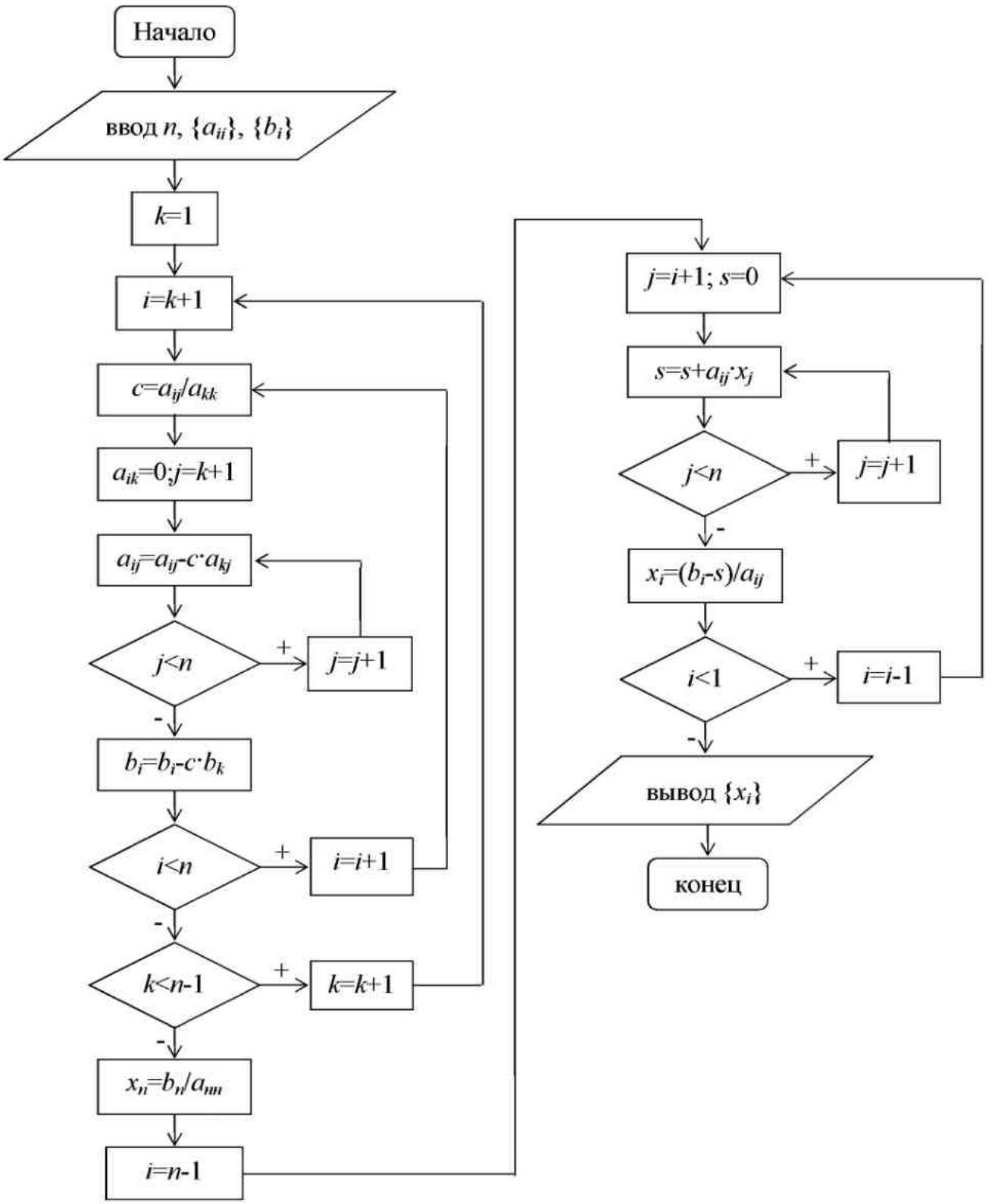


Рисунок 1.П

Обозначения переменных, принятых в программе:

AZ (12, 12) – матрица коэффициентов A_*;

X (12) – матрица начальных и конечных параметров X_*;

B (12) – вектор нагрузки B;

K, C, S – вспомогательные переменные алгоритма метода Гаусса;

AK – изгибно-крутильная характеристика сечения тонкостенного стержня (2.15);

N – порядок системы уравнений (1.46).

Результаты работы программы выводятся в файл с именем rez.for, который помещается в ту же папку, где находится головная программа.

Среда Visual Fortran

```
      PROGRAM PR3
      DOUBLE PRECISION AZ(12, 12), X(12), B(12), C, S, AK
      OPEN (1, file = 'rez.for')
      N = 12
      DO 1 I = 1, N
      DO 1 J = 1, N
      B (I) = Ø.Ø
1     AZ (I, J) = Ø.Ø
      AZ (1, 1) = -1.Ø
      AZ (1, 3) = AK*DSINH (AK*8.Ø)
      AZ (1, 4) = DCOSH (AK*8.Ø)
      B (1) = -DSINH (AK*8.Ø)/AK
      AZ (2, 2) = -1.Ø
      AZ (2, 7) = AK*DSINH (AK*6.Ø)
      AZ (2, 8) = DCOSH (AK*6.Ø)
      B (2) = -3.2*DCOSH (AK*3.Ø)
      AZ (3, 3) = - (DCOSH (AK*8.Ø) -1.Ø)
      AZ (3, 4) = - (DSINH (AK*8.Ø) - AK*8.Ø)/AK
      B (3) = - (-1.Ø)*((DCOSH (AK*8.Ø) - 1.Ø)/AK**2-32.Ø)
      AZ (4, 3) = DCOSH (AK*8.Ø)
      AZ (4, 4) = DSINH (AK*8.Ø)/AK
      AZ (4, 7) = -1.Ø
      B (4) = -DSINH (AK*8.Ø)/AK
      AZ (5, 5) = -1.Ø
      AZ (5, 1Ø) = -1.Ø
      AZ (5, 11) = - (DCOSH (AK*2.Ø) -1.Ø)
      AZ (5, 12) = - (DSINH (AK*2.Ø) - AK*2.Ø)/AK
      AZ (6, 3) = AK*DSINH (AK*8.Ø)
      AZ (6, 4) = AZ (3, 3)
      AZ (6, 6) = -1.Ø
      B (6) = (DSINH (AK*8.Ø)/AK-8.Ø)
      AZ (7, 6) = 6.Ø
      AZ (7, 7) = - (DCOSH (AK*6.Ø) -1.Ø)
      AZ (7, 8) = - (DSINH (AK*6.Ø) - AK*6.Ø)/AK
```

```
      B (7) = 3.2*(DSINH (AK*3.Ø) - AK*3.Ø)/AK
      AZ (8, 7) = DCOSH (AK*6.Ø)
      AZ (8, 8) = DSINH (AK*6.Ø)/AK
      AZ (8, 11) = -1.Ø
      B (8) = - 3.2*DSINH (AK*3.Ø)/AK
      AZ (9, 9) = -1.Ø
      AZ (9, 1Ø) = 1.Ø
      AZ (9, 11) = -AK*DSINH (AK*2.Ø)
      AZ (9, 12) = AZ (5, 11)
      AZ (1Ø, 6) = 1.Ø
      AZ (1Ø, 7) = -AK*DSINH (AK*6.Ø)
      AZ (1Ø, 8) = AZ (7, 7)
      AZ (1Ø, 1Ø) = -1.Ø
      B (1Ø) = 3.2*(DCOSH (AK*3.Ø) -1.Ø)
      AZ (11, 11) = DCOSH (AK*2.Ø)
      AZ (11, 12) = DSINH (AK*2.Ø)/AK
      B (11) = -1.Ø
      AZ (12, 9) = 1.Ø
      AZ (12, 11) = -AZ (9, 11)
      AZ (12, 12) = AZ (11, 11)
      K=1
5     I=K+1
51    C=AZ (I, K)/AZ (K, K)
      AZ (I, K) = Ø.Ø
      J=K+1
7     AZ (I, J) = AZ (I, J)-C*AZ (K, J)
      IF (J. LT. N) GO TO 6
      B (I) =B (I)-C*B (K)
      IF (I. LT. N) GO TO 8
      IF (K. LT. (N-1)) GO TO 9
      GO TO 11
6     J=J+1
      GO TO 7
8     I=I+1
      GO TO 51
9     K=K+1
      GO TO 5
11    X (N) =B (N)/AZ (N, N)
      I=N-1
12    J=I+1
      S= Ø.Ø
16    S=S+AZ (I, J)*X (J)
      IF (J. LT. N) GO TO 14
      X (I) = (B (I)-S)/AZ (I, I)
      GO TO 15
```

```
14    J=J+1
      GO TO 16
15    IF (I. GT. 1) GO TO 17
18    FORMAT (E 4Ø.9)
      WRITE (1, 18)(X (I), I=1,N)
      STOP
17    I=I-1
      GO TO 12
      END
```

Программа примера 2.7 Предназначена для решения системы уравнений $A*X*=-B$ методом исключения Гаусса без выбора главных элементов и реализует блок-схему по рисунку 1 приложения.

Обозначения переменных, принятых в программе:

n – порядок системы уравнений (1.46);

c, s, i, j, k – переменные алгоритма метода Гаусса;

a – матрица коэффициентов $A*$; x – вектор неизвестных $X*$; b – вектор нагрузки B.

Результаты работы программы выводятся в файл с именем rez.pas, который помещается в папку temp на диске C.

Среда Delhi

```
    Program pr6;
label 1, 2, 3, 4, 5; coust n=16;
var c, s: real; array [1..n, 1..n] of real;
x, b: array [1..n] of real; i, j, k: integer; f1: text;
    begin
assign (f1, 'c:\temp\ rez.pas');
a[1, 1]: = -1; a[1, 4]: = 1; b[1]: = 4; ; a[2, 2]: = -1; ; a[2, 8]: = 1;
b[2]: = 4; a[3, 3]: = -32; a[3, 4]: = 256/3; b[3]: = -256/6;
a[4, 3]: = -8; a[4, 4]: = -32; a[4, 6]: = -1; b[4]: = -32; b[7]: = 16.0;
a[5, 5]: = -1; a[5, 12]: = 1; b[5]: = 12; a[6, 6]: = 6; a[6, 7]: = -18;
a[6, 8]: = -36; b[6]: = -18; a[7, 3]: = 1; a[7, 4]: = 8; a[7, 7]: = -1;
a[8, 6]: = 1; a[8, 7]: = -6; a[8, 8]: = -18; a[8, 1Ø]: = -1; b[8]: = -18;
a[9, 9]: = -1; a[9, 14]: = 2; a[9, 15]: = -2; a[9, 16]: = -1/3; b[9]: = -4/3;
a[1Ø, 1Ø]: = 6; a[1Ø, 11]: = -18; a[1Ø, 12]: = -36; b[1Ø]: = -1Ø8;
a[11, 7]: = 1; a[11, 8]: = 6; a[11, 11]: = -1; b[11]: = 12; a[12, 11]: =1;
a[12, 12]: = 6; a[12, 15]: = -1; b[12]: = 36; a[13, 13]: = -1;
a[13, 14]: = 1; a[13, 15]: = -2; a[13, 61]: = -2; b[13]: = -8/3;
a[14, 1Ø]: = 1; a[14, 11]: = -6; a[14, 12]: = -18; a[14, 14]: = -1;
b[14]: = -72; a[15, 15]: = 1; a[15, 16]: = 2; b[15]: = 4; a[16, 16]: =1;
b[16]: = 4; k: = 1; 1: i: = k+1; 2: c: = a[i, k]/a[k, k]; a[i, k]: = Ø;
j: = k+1; 3: a[i, j]: = a[i, j]-c* a[k, j];
if j<n then begin j: = j+1; goto 3; end
else b[i]: = b[i]-c*b[k]; if i<n then begin i: = i+1; goto 2; end
else if k<(n-1) then begin k: = k+1; goto 1; end
else x[n]: = b[n]/a[n, n]; i: = n-1; 4: j: = i+1; s: = Ø;
5: s: = s + a[i, j]*x[j]; if j<n then begin i: =j+1; goto 5; end
else x[i]: = (b[i]-s)/a[i, i];
if i>1 then begin i: = i-1; goto 4; end else begin
rewrite (f1); for i: = 1 to n do
writeln ('x[', i, ']=', x[i]: 12: 4); end; close (f1);
end.
```

Программа примера 3.4 Предназначена для поиска частот собственных колебаний упругих систем путем вычисления определителя $|A_*(\omega)|$ методом исключения Гаусса без выбора главных элементов на определенном интервале и реализует следующую блок-схему

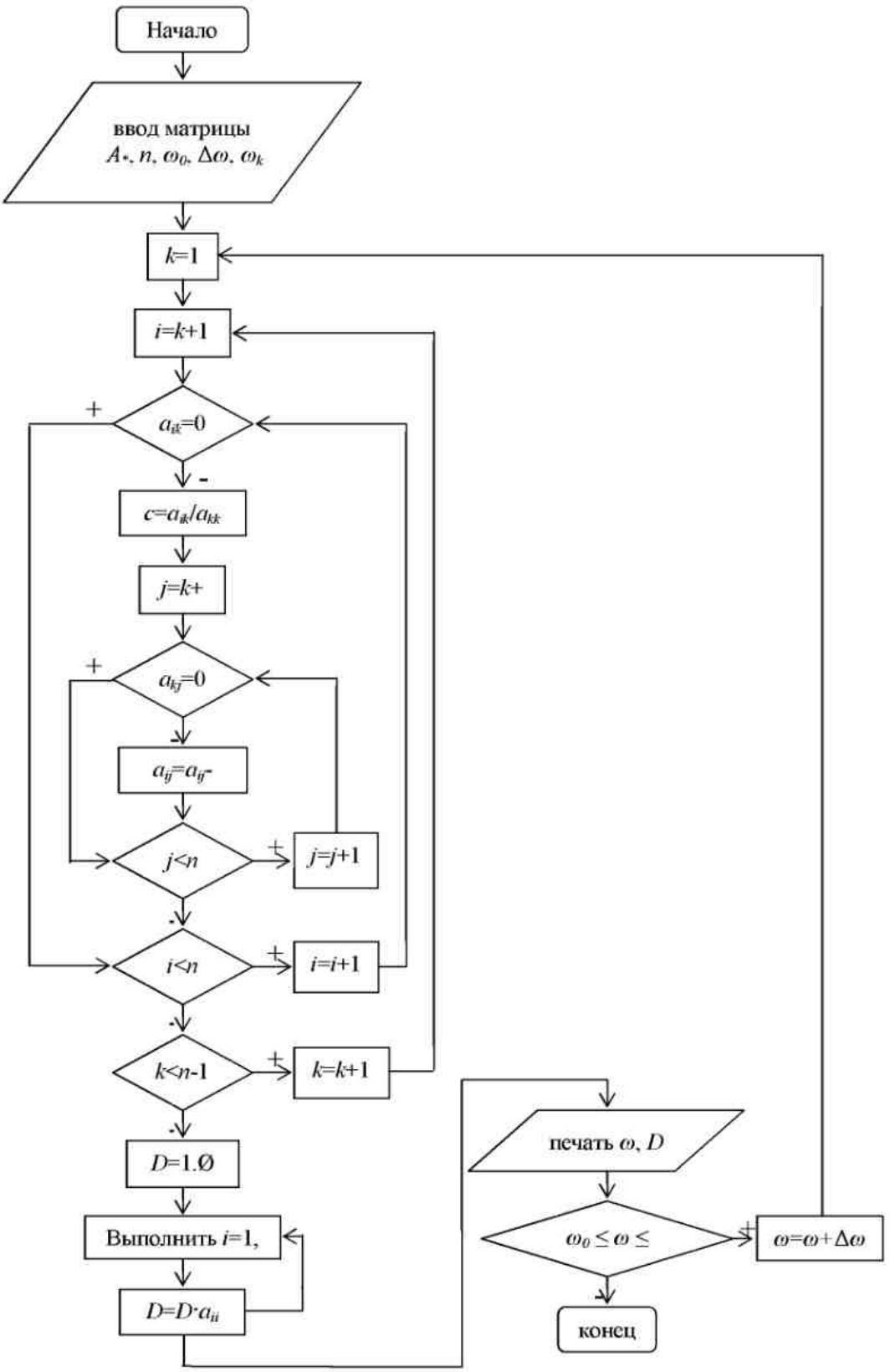


Рисунок 2.П

Обозначения переменных, принятых в программе:
AZ (15, 15) – матрица частотного уравнения (3.2);
N – порядок матрицы A_*;
D – величина определителя $|A_*(\omega)|$;
NN, K, C – вспомогательные переменные метода Гаусса;
AM – частота собственных колебаний ω;
X1, X2, X3 – длины элементов рамы l^{0-1}, l^{2-1}, l^{1-3};
AM1, AM2, AM3 – массы элементов рамы m^{0-1}, m^{2-1}, m^{1-3};
EI1, EI2, EI3 – поперечные жесткости стержней EI^{0-1}, EI^{2-1}, EI^{1-3};
AL1, AL2, AL3 – параметры поперечных колебаний стержней λ^{0-1}, λ^{2-1}, λ^{1-3};
DAM – шаг изменения частоты $\Delta\omega$;
N1 – число циклов вычисления определителя $|A_*(\omega)|$;

Среда Visual Fortran

```
      PROGRAM PR13
      DOUBLE PRECISION AZ (15, 15), C, AM, X1, X2, X3, AM1, AM2, AM3, *
EI1, EI2, EI3, AL1, AL2, AL3, D, DAM
      OPEN (1, file = 'rez.for')
      N1 = 1ØØØ
      N = 15
      NN = N-1
      AM = Ø.1
      DAM = Ø.Ø1
      X1 = 1.Ø
      X2 = 1.Ø
      X3 = 1.Ø
      AM1 = 1.Ø
      AM2 = 1.Ø
      AM3 = 1.2
      EI1 = 1.Ø
      EI2 = 1.Ø
      EI3 = 1.Ø
      DO 19 L = 1, N1
      DO 1 I = 1, N
      DO 1 J = 1, N
      1 AZ (I, J) = Ø.Ø
      AL1 = (AM**2*AM1/EI1) **Ø.25
      AL2 = (AM**2*AM2/EI2) **Ø.25
      AL3 = (AM**2*AM3/EI3) **Ø.25
      AZ (1, 1) = -1.Ø
      AZ (1, 7) = (DSINH (AL3*X3) + DSIN (AL3*X3)) / (2.Ø*AL3)
      AZ (1, 8) = - (DCOSH (AL3*X3) - DCOS (AL3*X3)) / (2.Ø*AL3**2)
      AZ (1, 9) = - (DSINH (AL3*X3) - DSIN (AL3*X3)) / (2.Ø*AL3**3)
      AZ (2, 2) = (DSINH (AL1*X1) + DSIN (AL1*X1)) / (2.Ø*AL1)
      AZ (2, 4) = - (DSINH (AL1*X1) - DSIN (AL1*X1)) / (2.Ø*AL1**3)
```

```
      AZ (3, 3) = -1.Ø
      AZ (3, 7) = - AL3*(DSINH (AL3*X3) - DSIN (AL3*X3)) / 2.Ø
      AZ (3, 8) = (DCOSH (AL3*X3) + DCOS (AL3*X3)) / 2.Ø
      AZ (3, 9) = (DSINH (AL3*X3) + DSIN (AL3*X3)) / (2.Ø*AL3)
      AZ (4, 2) = (DCOSH (AL1*X1) + DCOS (AL1*X1)) / 2.Ø
      AZ (4, 4) = - (DCOSH (AL1*X1) - DCOS (AL1*X1)) / (2.Ø*AL1**2)
      AZ (4, 7) = -1.Ø
      AZ (5, 5) = -1.Ø
      AZ (5, 1Ø) = 1.Ø
      AZ (6, 2) = - AL1*(DSINH (AL1*X1) - DSIN (AL1*X1)) / 2.Ø
      AZ (6, 4) = (DSINH (AL1*X1) + DSIN (AL1*X1)) / (2.Ø*AL1)
      AZ (6, 6) = 1.Ø
      AZ (6, 8) = -1.Ø
      AZ (7, 7) = -1.Ø
      AZ (7, 12) = (DCOSH (AL2*X2) + DCOS (AL2*X2)) / 2.Ø
      AZ (7, 14) = - (DCOSH (AL2*X2) - DCOS (AL2*X2)) / (2.Ø*AL2**2)
      AZ (8, 7) = - (DCOSH (AL2*X2) - DCOS (AL2*X2)) *AL2**2 / 2.Ø
      AZ (8, 8) = - AZ (3, 7)
      AZ (8, 9) = AZ (3, 8)
      AZ (9, 7) = AZ (3, 8)
      AZ (9, 8) = - AZ (3, 9)
      AZ (9, 9) = AZ (1, 8)
      AZ (1Ø, 1Ø) = - 1.Ø
      AZ (1Ø, 11) = 1.Ø
      AZ (11, 11) = - 1.Ø
      AZ (11, 12) = - (DCOSH (AL2*X2) - DCOS (AL2*X2)) *AL2**2 / 2.Ø
      AZ (11, 14) = AZ (7, 12)
      AZ (12, 12) = (DSINH (AL2*X2) + DSIN (AL2*X2)) / (2.Ø*AL2)
      AZ (12, 14) = - (DSINH (AL2*X2) - DSIN (AL2*X2)) / (2.Ø*AL2**3)
      AZ (13, 2) = AZ (4, 4)*AL1**4
      AZ (13, 4) = AZ (4, 2)
      AZ (13, 9) = - 1.Ø
      AZ (13, 13) = - 1.Ø
      AZ (14, 6) = - 1.Ø
      AZ (14, 12) = AZ (12, 14)*AL2**4
      AZ (14, 14) = AZ (12, 12)
      AZ (15, 13) = - 1.Ø
      AZ (15, 15) = 1.Ø
      K = 1
5     I = K+1
51    IF (AZ (I, K). EQ. Ø. Ø) GO TO 13
      C = AZ (I, K) / AZ (K, K)
      J = K+1
7     IF (AZ (K, J). EQ. Ø. Ø) GO TO 77
      AZ (I, J) = AZ (I, J) – C*AZ (K, J)
```

```
77      IF (J. LT. N) GO TO 6
13      IF (I. LT. N) GO TO 8
        IF (K. LT. NN) GO TO 9
        GO TO 11
6       J = J+1
        GO TO 7
8       I = I+1
        GO TO 51
9       K = K+1
        GO TO 5
11      D = 1.Ø
        DO 12 I = 1, N
        D = D*AZ (I, I)
12      CONTINUE
14      WRITE (1, 18) AM, D
18      FORMAT (2E 3Ø. 9)
19      AM = AM+DAM
        STOP
        END
```

Значения N1 выбирают в пределах 1000-10000. Результаты вычисления определителя D с шагом DAM помещаются в файл с именем rez.for. Сам файл помещается в папку, где находится головная программа. Просмотр файла позволяет найти корень уравнения (3.2) – частоту собственных колебаний упругой системы.

Программа примера 3.6 Предназначена для поиска частот собственных колебаний упругих систем (вычисления определителя $|A_*(\omega)|$ в циклическом режиме) методом исключения Гаусса без выбора главных элементов и реализует блок-схему по рисунку 2. П.

Обозначения переменных, принятых в программе:

a – матрица A_*; n – порядок матрицы A_*; n1 – число циклов вычисления определителя D(λ); d – величина определителя D(λ);

c, i, j, k – переменные прямого хода метода Гаусса; f1 – файловая переменная;

m1, m2, m3 – погонные массы стержней 0-1, 1-2, 2-3 соответственно;

l1, l2, l3 – длины стержней 0-1, 1-2, 2-3 соответственно;

EI1, EI2, EI3 – поперечные жесткости стержней 0-1, 1-2, 2-3;

la1, la2, la3 – коэффициенты λ фундаментальных функций стержней 0-1, 1-2, 2-3;

sh1, sh2, sh3 – гиперболические синусы фундаментальных функций стержней 0-1, 1-2, 2-3;

ch1, ch2, ch3 – гиперболические косинусы фундаментальных функций стержней 0-1, 1-2, 2-3;

am – частота собственных (ω) колебаний;

dam – шаг изменения частоты;

Результаты работы программы (частота (ω) и определитель D(λ)) выводятся в файл с именем rez.pas, который помещается в папку temp на жестком диске C.

Среда Delphi

```
PROGRAM PR14;
label 1, 2, 3, 4, 5; const n = 12;
var a: array [1..n, 1..n] of real; n1, i, j, k, m: integer;
f1: text; m1, m2, m3, EI1, EI2, EI3, l1, l2, l3, la1, la2, la3, sh1, sh2, sh3, ch1, ch2, ch3, d, am, dam, c: real;
begin
assign (f1, 'C: \temp\ rez.pas'); rewrite (f1);
m1: = 1.Ø; m2: = 1.Ø; m3: = 1.Ø; EI1: = 1.Ø; EI2: = 1.Ø; EI3: = 1.Ø;
l1: = 6.Ø; l2: = 4.Ø; l3: = 6.Ø; am: = Ø.3Ø; dam: = Ø.Ø1;
n1: = 24;
for m: = 1 to n1 do begin
la1: = exp (Ø.25*ln(am*am*m1 / EI1));
la2: = exp (Ø.25*ln(am*am*m2 / EI2));
la3: = exp (Ø.25*ln(am*am*m3 / EI3));
sh1: = (exp (la1*l1) - exp (-la1*l1)) / 2.Ø;
sh2: = (exp (la2*l2) - exp (-la2*l2)) / 2.Ø;
sh3: = (exp (la3*l3) - exp (-la3*l3)) / 2.Ø;
ch1: = (exp (la1*l1) + exp (-la1*l1)) / 2.Ø;
ch2: = (exp (la2*l2) + exp (-la2*l2)) / 2.Ø;
ch3: = (exp (la3*l3) + exp (-la3*l3)) / 2.Ø;
for i: = 1 to n do for j: = 1 to n do a[i, j]: = Ø.Ø;
```

```
a[1, 1]: = -1.Ø; a[1, 3]: = sqr (la1)*sqr (la1)*(sh1 – sin (la1*l1)) /
(2.Ø*la1*la1*la1); a[1, 4]: = (ch1+cos (la1*l1)) / 2.Ø;
a[7, 3]: = a[1, 4]; a[7, 4]: = (sh1+sin (la1*l1)) / (2.Ø*la1); a[7, 7]: = -1.Ø;
a[4, 3]: = -a[7, 4]; a[4, 4]: = - (ch1-cos (la1*l1)) / (2.Ø*la1*la1);
a[4, 6]: = -2.Ø; a[3, 3]: = a[4, 4];
a[3, 4]: = - (sh1-sin (la1*l1)) / (2.Ø*la1*la1*la1);
a[6, 6]: = (sh2+sin (la2*l2)) / (2.Ø*la2);
a[6, 7]: = - (ch2-cos (la2*l2)) / (2.Ø*la2*la2);
a[6, 8]: = - (sh2-sin (la2*l2)) / (2.Ø*la2*la2*la2); a[8, 1Ø]: = - Ø.5;
a[8, 6]: = (ch2+cos (la2*l2)) / 2.Ø; a[8, 7]: = - a[6, 6]; a[8, 8]: = a[6, 7];
a[11, 6]: = sqr (la2)*sqr (la2)*a[6, 8]; a[11, 7]: = a[8, 6]; a[11, 8]: = a[6, 6];
a[11, 11]: = -1.Ø; a[2, 2]: = -1.Ø; a[2, 6]: = sqr (la2)*sqr (la2)*a[6, 7];
a[2, 7]: = - a[11, 6]; a[2, 8]: = a[8, 6];
a[1Ø, 1Ø]: = (sh3+sin (la3*l3)) / (2.Ø*la3);
a[1Ø, 11]: = - (ch3-cos (la3*l3)) / (2.Ø*la3*la3);
a[1Ø, 12]: = - (sh3-sin (la3*l3)) / (2.Ø*la3*la3*la3);
a[5, 5]: = -1.Ø; a[5, 1Ø]: = (ch3+cos (la3*l3)) / 2.Ø; a[5, 11]: = - a[1Ø, 1Ø];
a[5, 12]: = - a[1Ø, 11]; a[12, 1Ø]: = sqr (la3)*sqr (la3)*a[1Ø, 12];
a[12, 11]: = a[5, 1Ø]; a[12, 12]: = a[1Ø, 1Ø]; a[9, 9]: = -1.Ø;
a[9, 1Ø]: = sqr (la3)*sqr (la3)*a[5, 12]; a[9, 11]: = - a[12, 1Ø];
a[9, 12]: = a[5, 1Ø];
k: = 1; 1: i: = k+1; 2: if a[i, k] = Ø.Ø then goto 3 else
c: = a[i, k] / a[k, k]; j: = k+1; 4: if a[k,j] = Ø.Ø then goto 5
else a[i, j]: = a[i, j] – c*a[k, j]; 5: if j<n then begin
j: = j+1; goto 4; end else 3: if i<n then begin i: = i+1;
goto 2; end else if k<(n-1) then begin k: = k+1; goto 1; end
else d: = 1.Ø; for i: = 1 to n do d: = d*a[i, i];
writeln (f1, 'am = ', am: 12: 6, 'd = ', d); am: = am + dam;
end; close (f1); end.
```

Программа для определения частот собственных колебаний по модели С.П. Тимошенко. Вычисляет значения определителей D1, D2, D3, D4 (см. таблицу 4.3) и реализует блок-схему

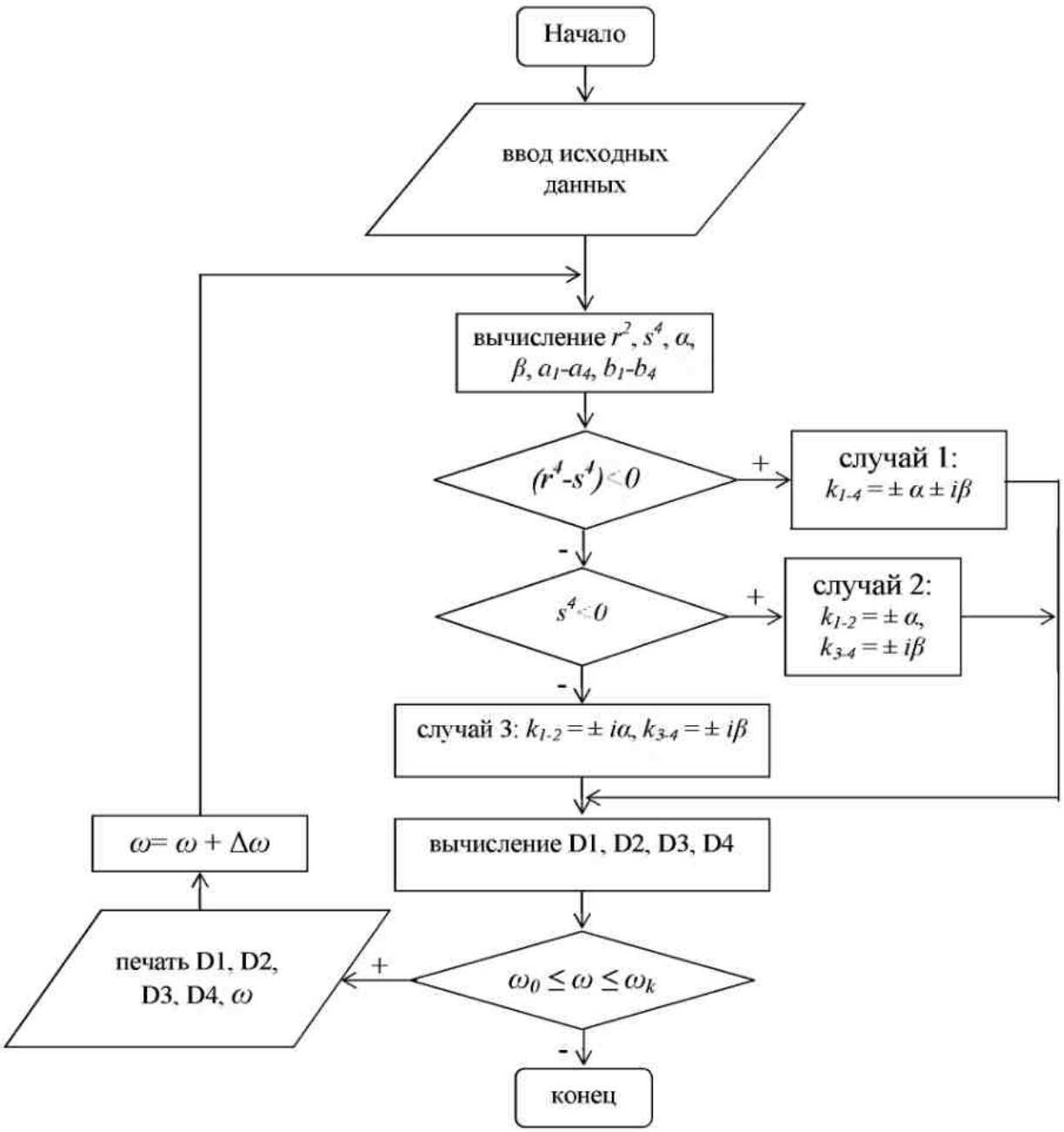


Рисунок 3.П

Обозначения переменных, принятых в программе:

N – число циклов вычисления определителей D_1-D_4;

TI – осевой момент инерции сечения $I=hb^3/12$;

EI – поперечная жесткость сечения стержня;

AM – частота собственных колебаний ω;

DAM – шаг изменения частоты ω;

R2 – коэффициент r^2; S4 - коэффициент s^4;

A1 – A8 – коэффициенты a_1 - a_4; b_1 - b_4;

AL – коэффициент α; B – коэффициент β;

A12 – A44 – фундаментальные функции уравнения (4.38);

FP1 – FP2 – гиперболотригонометрические функции $\Phi_1 - \Phi_4$;

D1 – D4 – определители таблицы №4.3; FX – продольная сила F_x;

Среда Visual Fortran

```
PROGRAM TIMOSCHENKO
DOUBLE PRECISION TI, EI, AL1, AM, DAM, R2, S4, A1, A2, A4, A5, A6,
*A8, AL, B, A12, A13, A14, A23, A24, A33, A34, A43, A44, FP1, FP2, FP3,
*FP4, D1, D2, D3, D4, FX
OPEN (1, file = 'rez.for')
N = 1000
TI = 8.333333*1Ø.Ø** (-6.Ø)
EI = 2.1*1Ø.Ø**11.Ø*TI
AM = Ø.Ø1
DAM = Ø.Ø1
FX = Ø.Ø
DO 1 II = 1, N
R2 = (2.163ØØ5*1Ø.Ø**13.Ø*AM**2*TI + (78ØØ.Ø*TI*AM**2+
*6.73Ø83*1Ø.Ø*8.Ø)*FX) / (TI*(2.82695*1Ø.Ø**2Ø.Ø+
*4.2*1Ø.Ø*11.Ø*FX))
S4 = (AM**2*(6.Ø84*1Ø.Ø**5.Ø*AM**2 – 5.25ØØ474*1Ø.Ø**1Ø.Ø))
*/ (TI*(1.4134743*1Ø.Ø*2Ø.Ø+2.1*1Ø.Ø**11.Ø*FX))
A1 = 1.Ø+1.4857*1Ø.Ø** (-9.Ø)*FX
A2 = 1.15884668*1Ø.Ø** (-7.Ø)*AM**2+4.761904762*1Ø.Ø** (-12.Ø)
**FX/TI
A4 = 4.761904762*1Ø.Ø** (-12.Ø)*FX/TI
A5 = (6.73Ø83*1Ø.Ø**8.Ø+FX) / (6.73Ø83*1Ø.Ø**8.Ø-
*78ØØ.Ø*AM**2*TI)
A6 = (2.163ØØ474*TI*1Ø.Ø**13.Ø*AM**2+ (6.73Ø83*1Ø.Ø**8.Ø+
*78ØØ.Ø*TI*AM**2)*FX) / (TI*(1.4134743*1Ø.Ø*2Ø.Ø-TI*
*AM**2*1.638*1Ø.Ø*15.Ø))
A8 = FX*AM**2/ (1.812146538*1Ø.Ø**16.Ø – 2.1*1Ø.Ø**11.Ø*TI*
*AM**2)
IF ((R2**2 – S4). LT. Ø.Ø) GO TO 2
IF (S4. LT. Ø.Ø) GO TO 3
AL = (R2 – (R2**2 – S4) **Ø.5) **Ø.5
B = (R2 + (R2**2 – S4) **Ø.5) **Ø.5
```

```
      A12 = (B*(A6 – A5*B**2)*DSIN (AL) – AL*(A6 – A5*AL**2)*DSIN (B))/
      (A5*AL*B*(AL**2 – B**2))
      A13 = (-DCOS (AL) + DCOS (B)) / (A1*(AL**2 – B**2))
      A14 = (-B*DSIN (AL) + AL*DSIN (B)) / (A5*AL*B*(AL**2 – B**2))
      A23 = (AL*DSIN (AL) – B*DSIN (B)) / (A1*(AL**2 – B**2))
      A24 = (-DCOS (AL) + DCOS (B)) / (A5*(AL**2 – B**2))
      A33 = (- (A2 – A1*AL**2)*DCOS (AL) + (A2 – A1*B**2)*DCOS (B)) /
      *(A1*(AL**2 – B**2))
      A34 = (-B*(A2 – A1*AL**2)*DSIN (AL) + AL*(A2 – A1*B**2)*
      DSIN (B)) / (AL*B*(AL**2 – B**2) *A5)
      A43 = (AL*(A6 – A5*AL**2)*DSIN (AL) - B*(A6 – A5*B**2)*
      DSIN (B)) / (A1*(AL**2 – B**2))
      A44 = (- (A6 – A5*AL**2)*DSIN (AL) + (A6 – A5*B**2)*
      DCOS (B)) / (A5*(AL**2 – B**2))
      GOTO 4
2     AL = ((S4**Ø.5 – R2) / 2.Ø) **Ø.5
      B = ((S4**Ø.5 + R2) / 2.Ø) **Ø.5
      FP1 = DCOSH (AL)*DSIN (B)
      FP2 = DCOSH (AL)*DCOS (B)
      FP3 = DSINH (AL)*DCOS (B)
      FP4 = DSINH (AL)*DSIN (B)
      A12 = (B*(A6 – A5*(B**2 - 3.Ø*AL**2))*FP3 – AL*(A6 + A5*(AL**2 -
      *3.Ø*B**2))*FP1) / (2.Ø*AL*B*A5*S4**Ø.5)
      A13 = FP4 / (2.Ø*AL*B*A1)
      A14 = (AL*FP1 – B*FP3) / (2.Ø*A5*AL*B*S4**Ø.5)
      A23 = (AL*FP1 + B*FP3) / (2.Ø*AL*B*A1)
      A24 = FP4 / (2.Ø*AL*B*A5)
      A33 = FP2 + (A2 – A1*R2)*FP4 / (2.Ø*AL*B*A1)
      A34 = ((AL*(A2 – A5*R2) + 2.Ø*AL*B**2*A1)*FP1 – (B*(A2 - A1*R2) -
      *+ 2.Ø*AL**2*B*A1)*FP3) / (2.Ø*AL*B*A5*S4**Ø.5)
      A43 = (AL*(A6 + A5*(AL**2 - 3.Ø*B**2))*FP1 + B*(A6 - A5*(B**2 -
      *3.Ø*AL**2))*FP3) / (2.Ø*AL*B*A1)
      A44 = FP2 + (A6 – A5*R2)*FP4 / (2.Ø*AL*B*A5)
      GOTO 4
3     AL = (- R2 + (R2**2 – S4) **Ø.5) **Ø.5
      B = (R2 + (R2**2 – S4) **Ø.5) **Ø.5
      A12 = (-B*(A6 – A5*B**2)*DSINH (AL) + AL*(A6 + A5*AL**2)*DSIN
      *(B)) / (AL*B*A5*(AL**2 + B**2))
      A13 = (DCOSH (AL) - DCOS (B)) / (A1*(AL**2 + B**2))
      A14 = (B*DSINH (AL) - AL*DSIN (B)) / (A5*AL*B*(AL**2 + B**2))
      A23 = (AL*DSINH (AL) + B*DSIN (B)) / (A1*(AL**2 + B**2))
      A24 = (DCOSH (AL) - DCOS (B)) / (A5*(AL**2 + B**2))
      A33 = ((A2 + A1*AL**2)*DCOSH (AL) - (A2 – A1*B**2)*DCOS (B)) /
      *(A1*(AL**2 + B**2))
```

```
      A34 = (B*(A2 + A1*AL**2)*DSINH (AL) - AL*(A2 – A1*B**2)*DSIN (B))
      */ (AL*B*A5*(AL**2 + B**2))
      A43 = (AL*(A6 + A5*AL**2)*DSINH (AL) + B*(A6 – A5*B**2)*DSIN
      *(B)) / (A1*(AL**2 + B**2))
      A44 = ((A6 + A5*AL**2)*DCOSH (AL) - (A6 – A5*B**2)*DCOS (B)) /
      *(A5*(AL**2 + B**2))
4     D1 = A13*A24 – A14*A23
      D2 = A13*A34 – A14*A33
      D3 = A33*A44 – A34*A43
      D4 = A12*A34 – A14*A32
5     FORMAT (5E14.6)
      WRITE (1, 5) AM, D1, D2, D3, D4
1     AM = AM + DAM
      STOP
      END
```

Значения частоты ω и определителей D_1-D_4 выводятся в файл с именем rez.for, который помещается в папку, где находится головная программа.

Программа для вычисления определенных интегралов. Вычисляет определенные интегралы по формулам Симпсона с назначаемым шагом интегрирования.

Обозначения переменных, принятых в программе:

Y (1ØØØ1) – массив значений подынтегральной функции *f(x)*;

H - шаг интегрирования; T – множитель для определения аргумента *x*;

CH – частота собственных колебаний балки ω;

AL1 – ширина пластины l_1 (длина соответствующей балки);

S1 –сумма ординат *f(x)*, умножаемых на 2;

S2 –сумма ординат *f(x)*, умножаемых на 4;

AZ – коэффициент α_* функции *X(x)*;

P – аргумент *x* подынтегральной функции *f(x)*;

Z – аргумент тригонометрических и гиперболических функций;

X – величина функции *X(x)*;

S – значение определенного интеграла по формуле Симпсона.

Величина определенного интеграла S выводится в файл под именем rez.for, который помещается в той же папке, где находится головная программа.

Среда Visual Fortran

```
      PROGRAM SIMPSON
      DOUBLE PRECISION Y (1ØØØ1), H, T, CH, AL1, S1, S2, AZ, P, Z, S, X
      OPEN (1, file = 'rez.for')
      H = Ø.ØØØ1
      T = 1.Ø
      S1 = Ø.Ø
      S2 = Ø.Ø
      AZ = (DSIN (CH) - DSINH (CH)) / (DCOS (CH) - DCOSH (CH))
      DO 1 I = 1,1ØØØ1
      P = H*(T - 1.Ø)
      Z = CH*P / AL1
      X = DSIN (Z) – DSINH (Z) – AZ*(DCOS (Z) - DCOSH (Z))
      Y (I) = X*X
1     T = T + 1.Ø
      DO 2 I = 1,4999
      K = 2*I + 1
2     S1 = S1 + Y(K)*2.Ø
      DO 3 I = 1,5ØØØ
      K = 2*I
3     S2 = S2 + Y(K)*4.Ø
      S = (Y(1) + S1 + S2 + Y (1ØØØ1))*H / 3.Ø
      WRITE (1, 4) S
4     FORMAT (E3Ø.9)
      STOP
      END
```

Программа для вычисления определенных интегралов. Вычисляет определенные интегралы по формуле Симпсона с заданной точностью и автоматическим делением шага интегрирования и реализует блок-схему

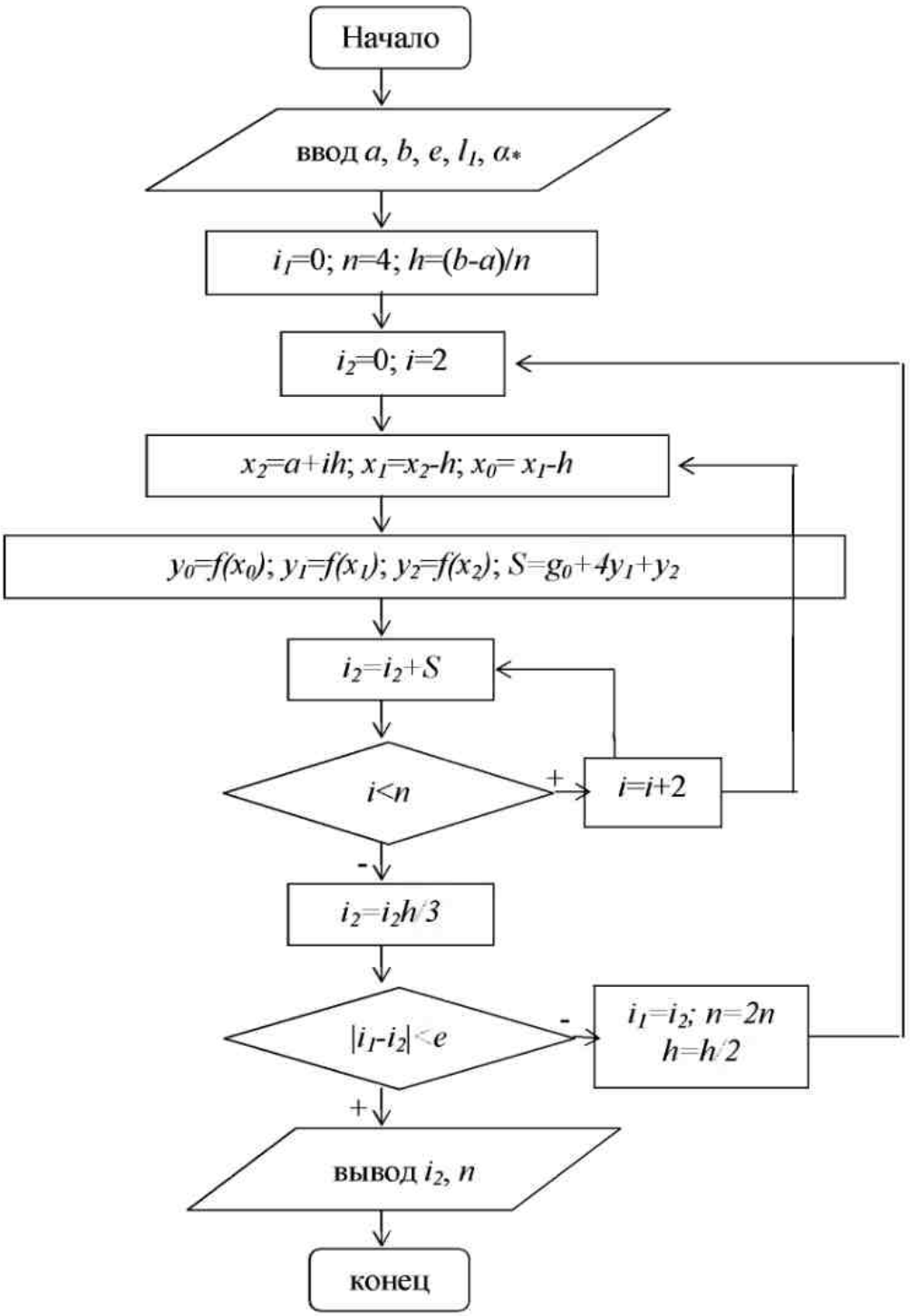


Рисунок 4.П

Обозначения переменных, принятых в программе:
am – частота собственных колебаний балки ω;
l1 – длина балки l_1;
a – нижний предел интегрирования;
b – верхний предел интегрирования;
i1 – первое значение интеграла;
i2 – уточненное значение интеграла;
h – шаг интегрирования;
xn – начальное значение аргумента x;
x1 – среднее значение аргумента x на участке интегрирования;
x2 – конечное значение аргумента x;
yn. y1, y2 – соответственно значения функции $f(x)$;
e – точность вычисления определенного интеграла;
s – значение текущей площади криволинейной трапеции;
i – составляющая шага интегрирования;
az – коэффициент α_*;
n – число участков криволинейной трапеции.
Значение определенного интеграла выводится в файл с именем rez.pas, который помещается в папку temp на жестком диске C.

Среда Delphi

```
Program Metsimp;
label 1, 2, 3; const am = 4.73ØØ4Ø75;
var l1, a, b, i1, i2, h, xn, x1, x2, yn, y1, y2, e, s, az: real;
i, n: integer; f1: text;
function f (z: real): real;
begin
f: = sqr (SIN (am*z / l1) – (exp (am*z / l1) - (-am*z / l1) / 2.Ø – az*(COS
(am*z / l1) - (exp (am*z / l1) + exp (-am*z / l1)) / 2.Ø)); end;
begin
assign (f1, 'c: / \temp\ rez.pas'); rewrite (f1);
writeln ('Введите исходные данные a, b, e, l1, az');
readln (a, b, e, l1, az); i1: = 0; n: = 4; h: = (b - a) / n;
1: i2: = 0; i: = 2;
2: x2: = a + i*h; x1: = x2 – h; xn: = x1 – h;
yn: = f (xn); y1: = f (x1); y2: = f (x2); s: = yn + 4* y1 + y2; i2i2: = i2 + s;
if i < n then begin i: = 1 + 2; goto 2; end
else i2: = i1*h / 3;
if abs (i1 – i2) < e then begin
writeln (f1, 'integral = ', i2, '  n = ', n); goto 3; end
else begin i1: = i2; n: =2*n; h: = h / 2; goto 1; end;
3: close (f1); end.
```

Приложение В
Варианты заданий, рекомендуемые для самостоятельной работы

Статически определимые фермы. Варианты заданий заимствованы из кн. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебн. пособие для техн. вузов / Яблонский А. А., Норейко С.С., Вольфсон С.Ф. и др. – М.: Высшая школа, 1985. – 367 с.

Таблица 1. П

Номер варианта	F_1	F_2	F_3	a	h	2, град
	кН			М		
1	4	9	2	2,0	—	30
2	10	3	4	2,5	—	60
3	2	12	6	3,0	—	60
4	10	10	5	4,0	—	60
5	2	4	2	—	2,0	60
6	3	7	5	4,0	3,0	—
7	4	6	3	4,0	—	60
8	5	7	7	3,2	—	45
9	10	8	2	5,0	—	60
10	3	4	5	4,4	3,3	—
11	2	6	8	2,5	3,0	—
12	5	7	2	4,0	—	60
13	4	6	2	4,8	3,6	—
14	3	5	5	3,0	—	60
15	2	2	10	4,0	6,0	—
16	5	6	2	5,0	—	60
17	4	4	10	4,0	6,0	—
18	5	2	8	—	5,0	60
19	8	4	10	5,0	10,0	6,
20	2	3	5	4,0	6,0	—
21	3	2	7	6,0	—	45
22	4	2	9	4,0	—	45
23	5	8	8	4,0	9,0	30
24	6	10	2	3,6	—	45
25	7	10	5	4,4	3,3	—
26	8	12	2	4,0	—	30
27	9	4	4	4,0	3,0	—
28	10	5	3	5,0	—	30
29	12	8	2	60,	—	45
30	5	10	4	4,0	2,0	—

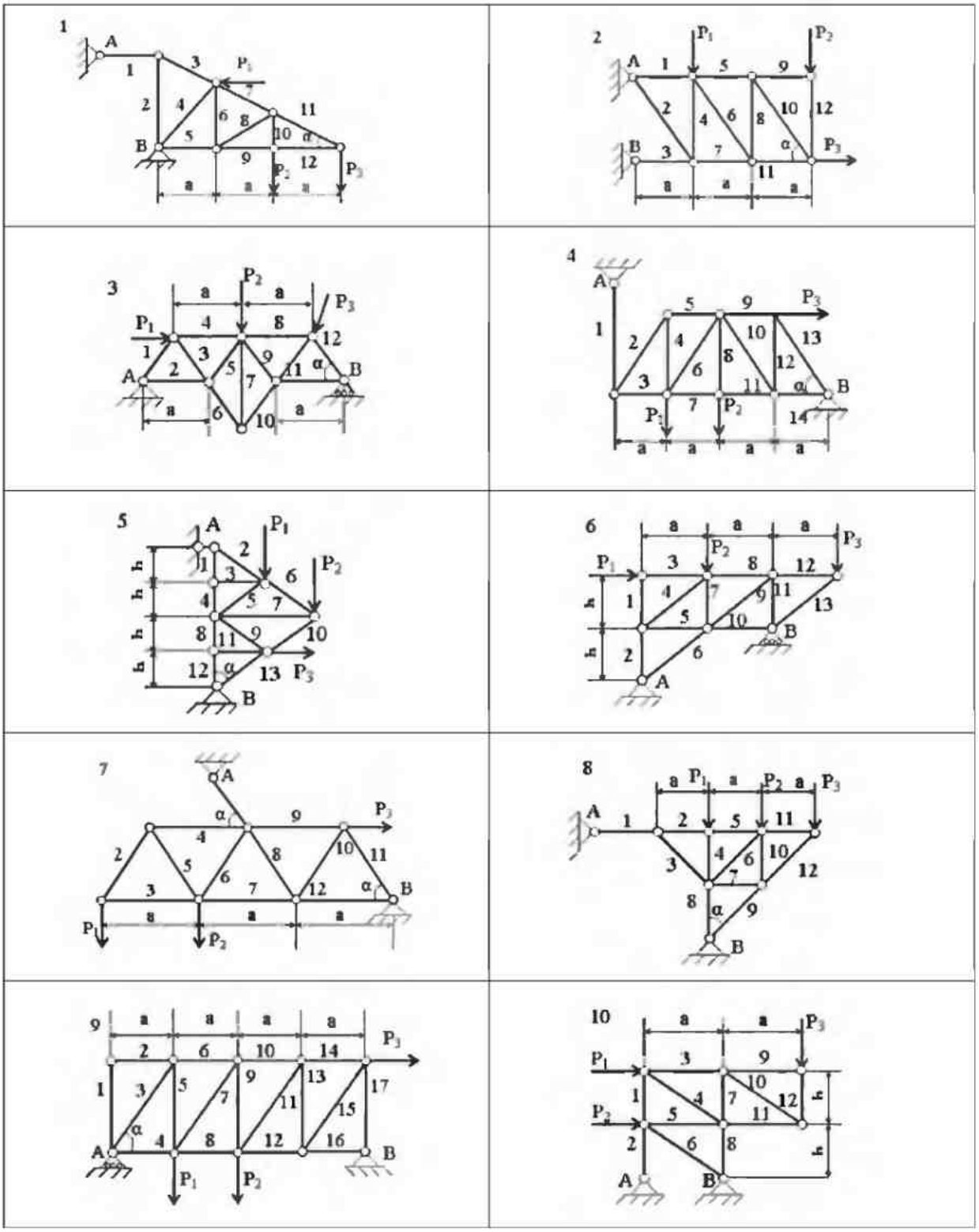

1
A
B
P1
P2
P3
a
2
A
B
P1
P2
P3
a
3
P1
P2
P3
A
B
a
4
A
P1
P2
P3
B
a
5
A
P1
P2
B
h
6
P1
P2
P3
B
A
a
7
A
P1
P2
P3
B
a
8
A
P1
P2
P3
B
a
9
P1
P2
P3
A
B
a
10
P1
P2
P3
A
B
a
h

Рисунок 5. П

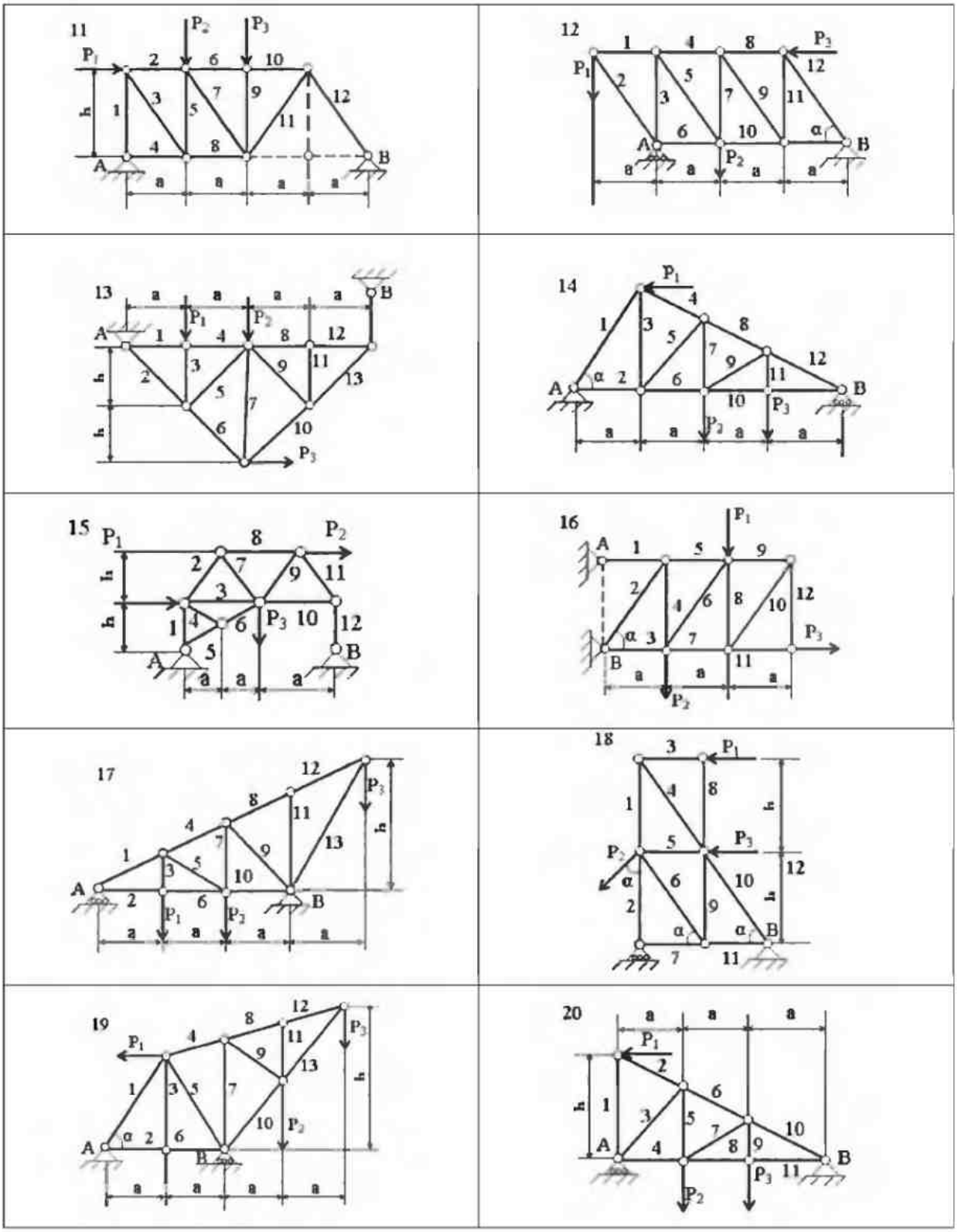


Рисунок 6. П

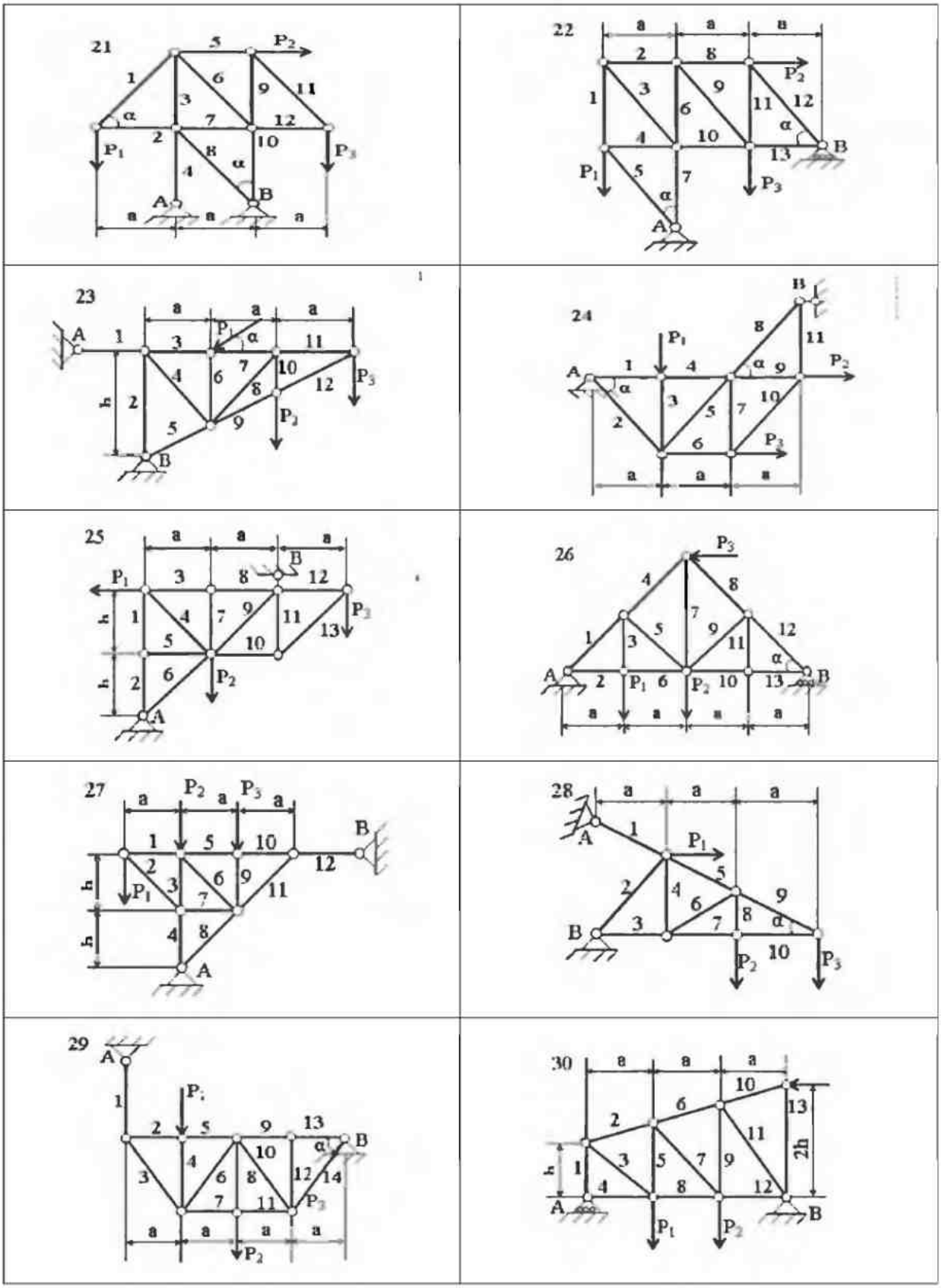


Рисунок 7. П

Неразрезные балки.

Таблица 2. П

№ варианта	l_1	l_2	l_3	l_4	a	b	c	F	F_1	F_2	M	M_1	M_2	q	q_1	q_2
	M							*kH*			*kHM*			*kH/M*		
1	2	3	3	1	1	2	1	10	20	30	6	8	10	10	12	8
2	2	4	4	2	2	1	2	40	50	60	10	8	6	8	15	6
3	4	3	5	1,5	3	3	1,5	5	15	20	20	30	40	6	10	12
4	5	6	6	3	2	2	3	25	35	45	25	36	38	4	8	6
5	6	8	7	2,5	1	1	1	10	8	6	12	6	18	2	4	3
6	7	5	8	1	3	2,5	1,5	10	15	25	15	20	25	12	2	7
7	6	4	7	1,5	1	1,5	2,5	30	40	50	40	35	16	20	8	10
8	5	3	6	2	2	2	1,5	60	70	80	10	15	20	15	12	15
9	4	4	5	1	1,5	1	2	30	15	18	25	30	35	12	2	5
10	3	6	4	1,5	3	1,5	1	28	32	24	40	45	50	8	4	10
11	2	5	5	1	2	1,5	1,5	12	14	16	10	18	28	6	8	15
12	4	8	3	2	1	1,5	2	5	15	10	40	12	10	10	12	2
13	3	10	4	4	1	2	2	3	22	30	10	14	16	18	12	14
14	5	4	5	2	1	1,5	3	40	24	26	20	30	35	10	30	15
15	2	5	6	1,5	2	1,5	2	15	10	8	15	18	20	5	20	10
16	2	6	3	1	1	2	1	10	20	30	6	8	10	10	12	8
17	2	7	4	2	2	1	2	40	50	60	10	8	6	8	15	6
18	4	5	5	1,5	3	3	1,5	5	15	20	20	30	40	6	10	12
19	5	3	6	3	2	2	1,5	25	35	45	25	36	38	4	8	6
20	6	5	7	2,5	1	1	1	10	8	6	12	6	18	2	4	3
21	7	4	8	1	3	1,5	1,5	10	15	25	15	20	25	12	2	7
22	6	8	7	1,5	1	2	2,5	30	40	50	40	35	16	20	8	10
23	5	6	6	2	2	2	1,5	60	70	80	10	15	20	15	12	15
24	4	7	5	1	1,5	1	2	30	15	18	25	30	35	12	2	5
25	3	5	4	1,5	3	1,5	1	28	32	24	40	45	50	8	4	10
26	2	4	5	1	2	2	1,5	12	14	16	10	18	28	6	8	15
27	4	6	3	2	1	1,5	2	5	15	10	40	12	10	10	12	2
28	3	5	4	4	1	2	2	3	22	30	10	14	16	18	12	14
29	5	4	5	2	1	1,5	1,5	40	24	26	20	30	35	10	30	15
30	2	3	6	1,5	2	1	2	15	10	8	15	18	20	5	20	10

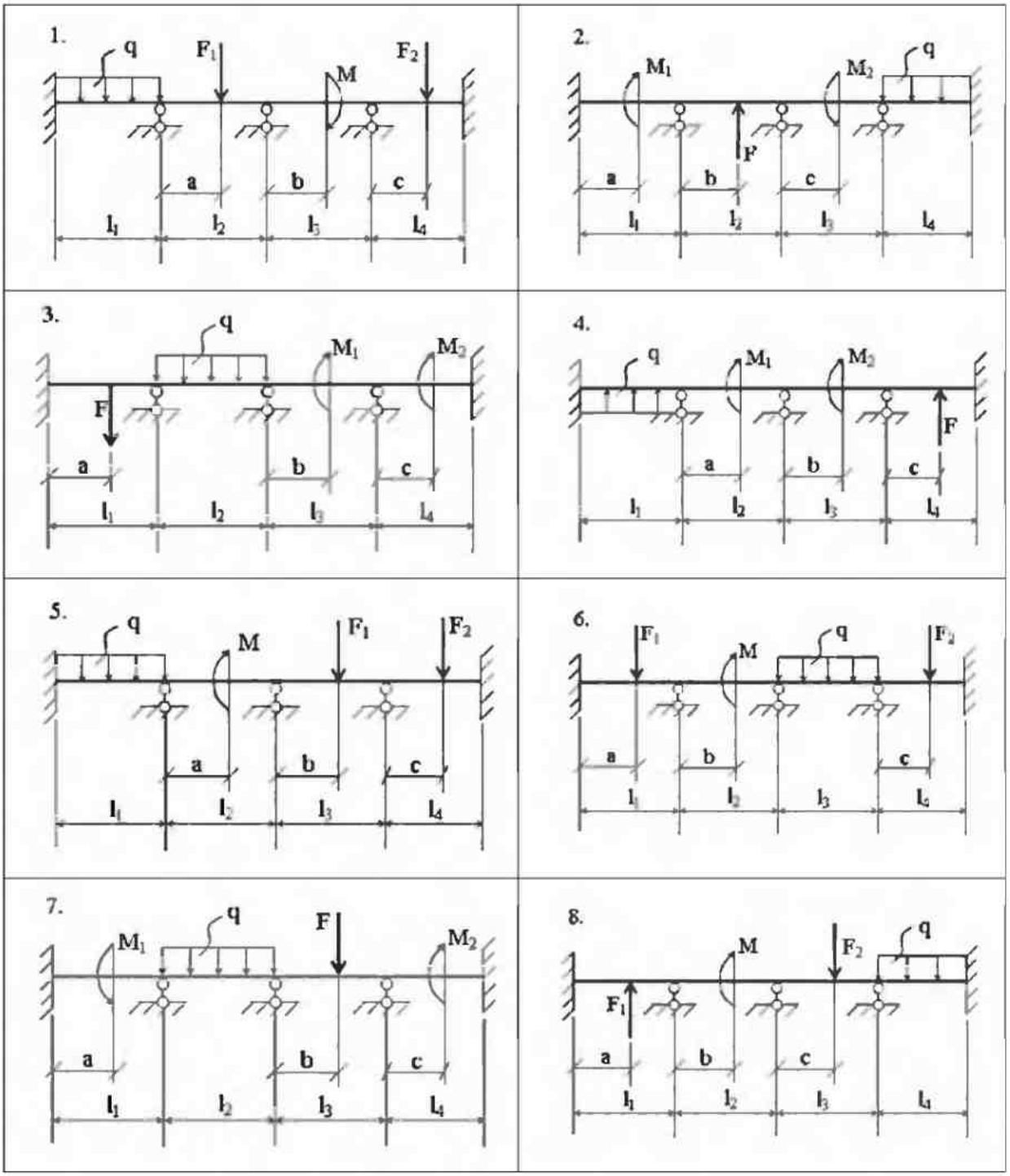

1.
q
F1
M
F2
a
b
c
l1
l2
l3
l4
2.
M1
M2
q
F
a
b
c
l1
l2
l3
l4
3.
q
M1
M2
F
a
b
c
l1
l2
l3
l4
4.
q
M1
M2
F
a
b
c
l1
l2
l3
l4
5.
q
M
F1
F2
a
b
c
l1
l2
l3
l4
6.
F1
M
q
F2
a
b
c
l1
l2
l3
l4
7.
M1
q
F
M2
a
b
c
l1
l2
l3
l4
8.
M
F2
q
F1
a
b
c
l1
l2
l3
l4

Рисунок 8. П

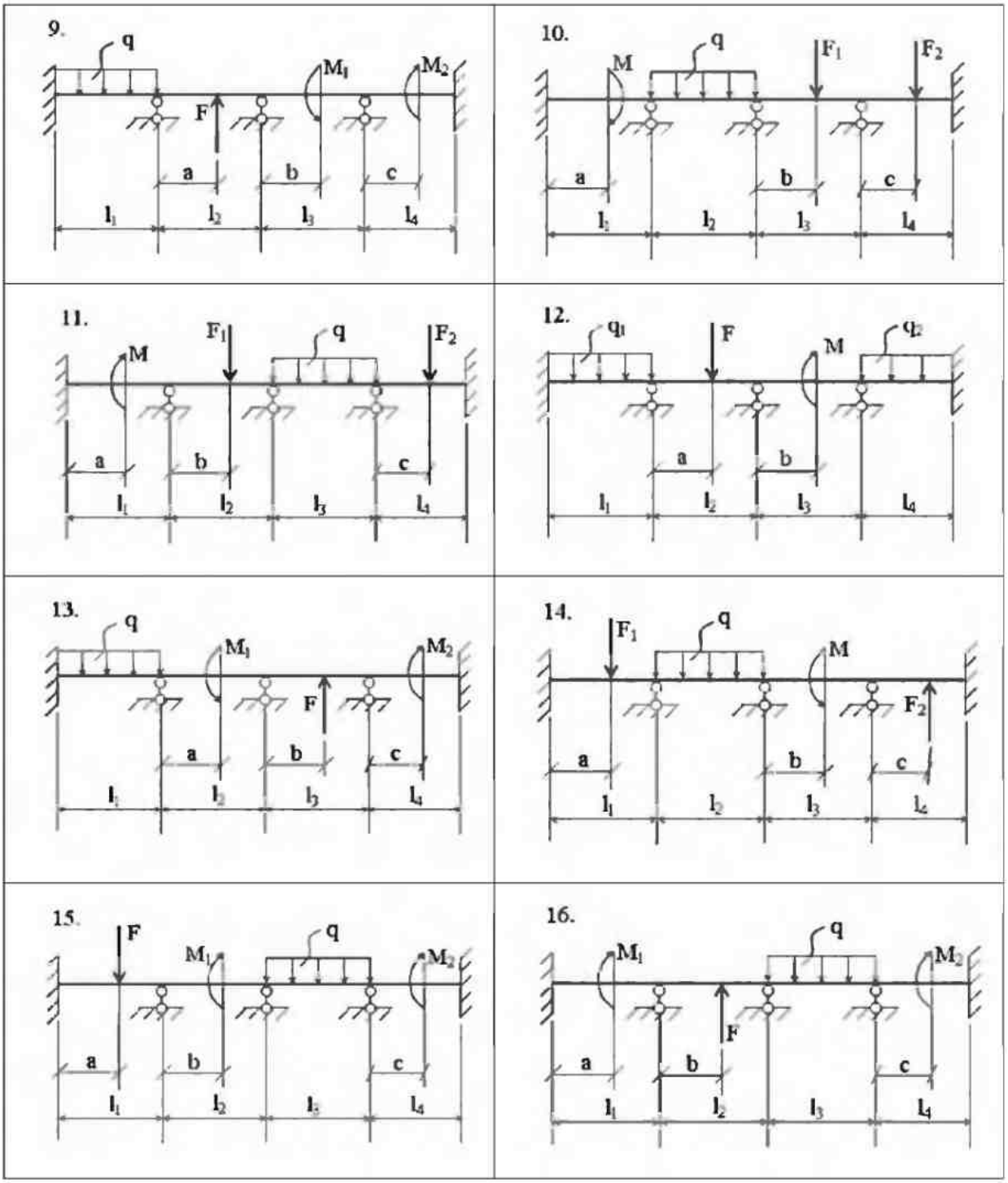

9.
q
M1
M2
F
a
b
c
l1
l2
l3
l4
10.
M
q
F1
F2
11.
M
F1
q
F2
12.
q1
F
M
q2
13.
q
M1
M2
F
14.
F1
q
M
F2
15.
F
M1
q
M2
16.
M1
q
M2
F

Рисунок 9. П

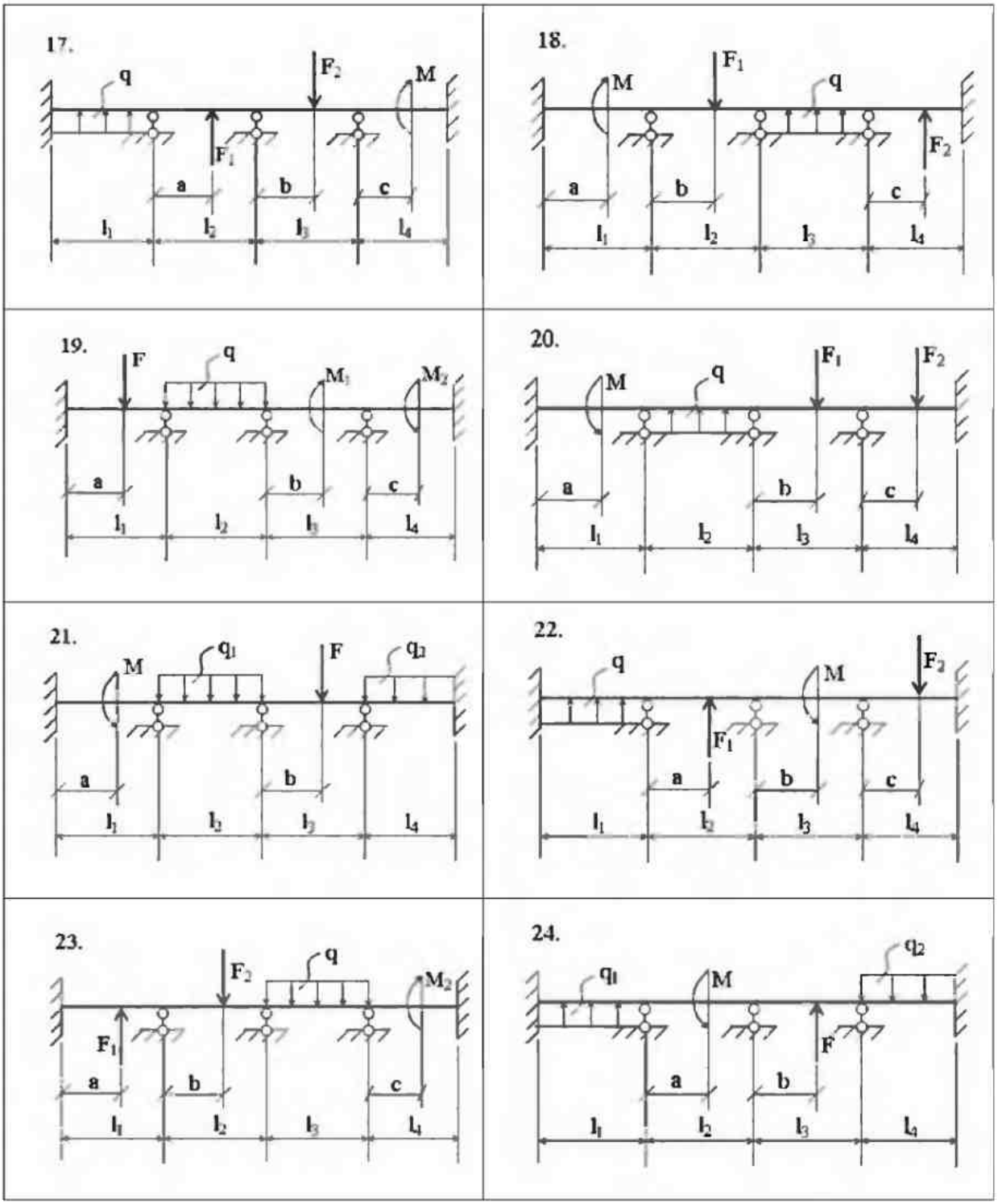

17.
q
F2
M
F1
a
b
c
l1
l2
l3
l4
18.
M
F1
q
F2
a
b
c
l1
l2
l3
l4
19.
F
q
M1
M2
a
b
c
l1
l2
l3
l4
20.
M
q
F1
F2
a
b
c
l1
l2
l3
l4
21.
M
q1
F
q2
a
b
l1
l2
l3
l4
22.
q
M
F2
F1
a
b
c
l1
l2
l3
l4
23.
F2
q
M2
F1
a
b
c
l1
l2
l3
l4
24.
q1
M
q2
F
a
b
l1
l2
l3
l4

Рисунок 10. П

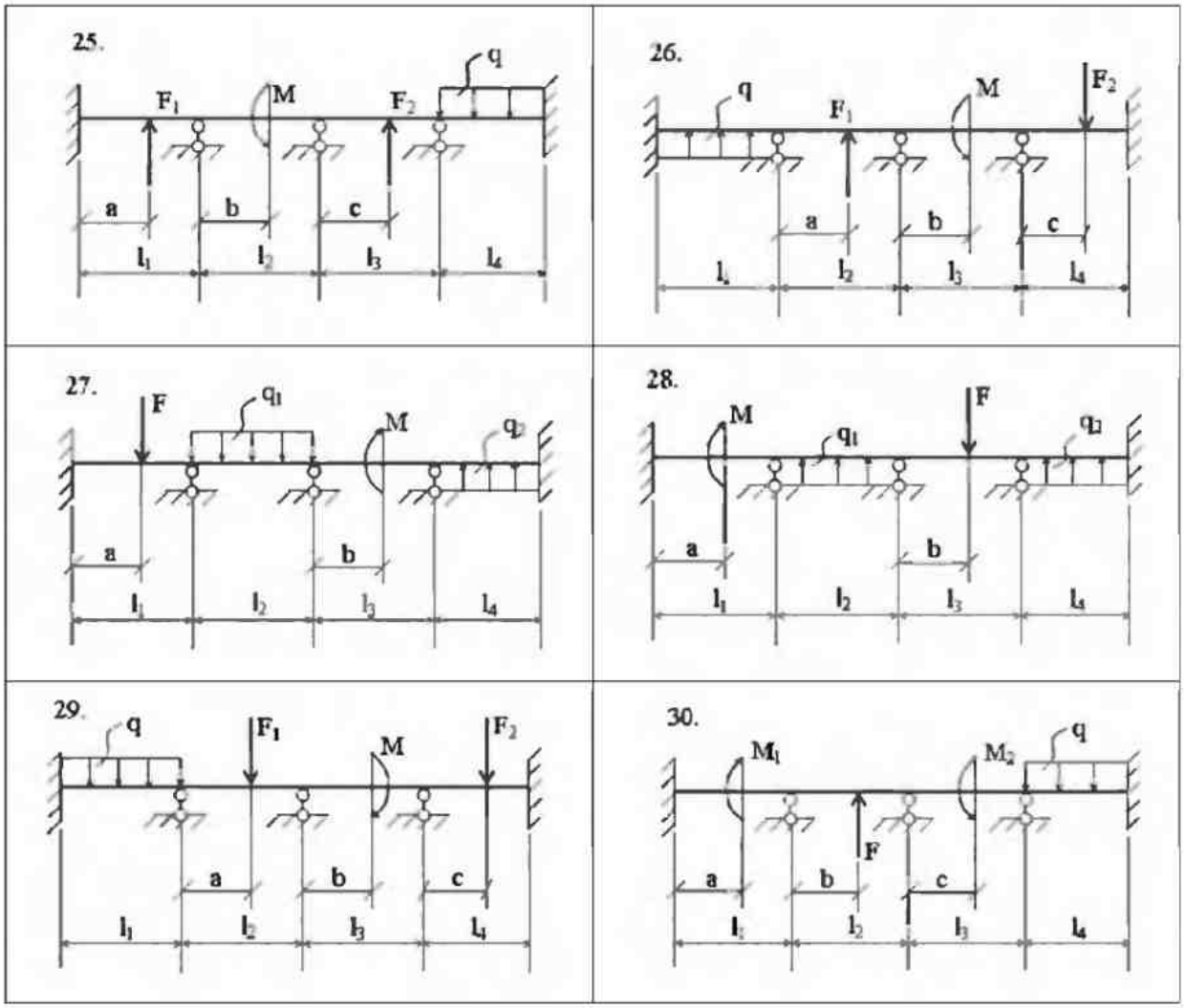

25.
q
F1
M
F2
a
b
c
l1
l2
l3
l4
26.
q
F1
M
F2
a
b
c
l1
l2
l3
l4
27.
F
q1
M
q2
a
b
l1
l2
l3
l4
28.
M
q1
F
q2
a
b
l1
l2
l3
l4
29.
q
F1
M
F2
a
b
c
l1
l2
l3
l4
30.
M1
M2
q
F
a
b
c
l1
l2
l3
l4

Рисунок 11. П

Статически неопределимые рамы

Таблица 3. П

№ варианта	l_1	l_2	l_3	h_1	h_2	h_3	F	M	q
	M						*kH*	*kHM*	*kH/M*
1	1	3	4	2	3	4	10	16	10
2	2	2	5	3	1	2	40	12	8
3	3	4	2	2	1	2	5	20	6
4	5	4	1	2	1	2	25	25	4
5	5	1	3	3	4	4	10	15	2
6	2	6	4	2	2	1	10	15	12
7	1	3	3	2	1	2	30	40	20
8	1	3	1	1	2	1,5	60	15	15
9	2	1	3	1,2	1	1,5	30	25	12
10	3	1	2	4	2	1	28	40	8
11	1	1	2	1	2	2	12	15	6
12	4	5	4	1	2	3	5	40	10
13	2	3	4	2	1	1	3	15	18
14	2	1	1	2	4	3	40	20	10
15	5	2	4	4	3	2	15	15	5
16	1	3	2	4	5	1	20	6	12
17	5	4	2	3	2	2	40	10	10
18	1	2	1	4	3	1	25	20	8
19	3	1	4	2,5	4	5	25	25	14
20	5	4	1	2	4	5	15	16	12
21	1	2	3	5	4	3	10	15	16
22	4	2	4	3	2	1	30	40	22
23	5	4	2	4	4	2	60	18	17
24	1	3	5	2	4	5	30	25	14
25	4	2	2	1	2	4	28	40	10
26	5	3	2	2	1	2	20	18	6
27	3	2	1	2	3	4	25	40	10
28	5	4	4	2	3	4	20	15	18
29	2	3	1	3	4	5	40	20	10
30	1	2	5	4	5	1	15	15	7

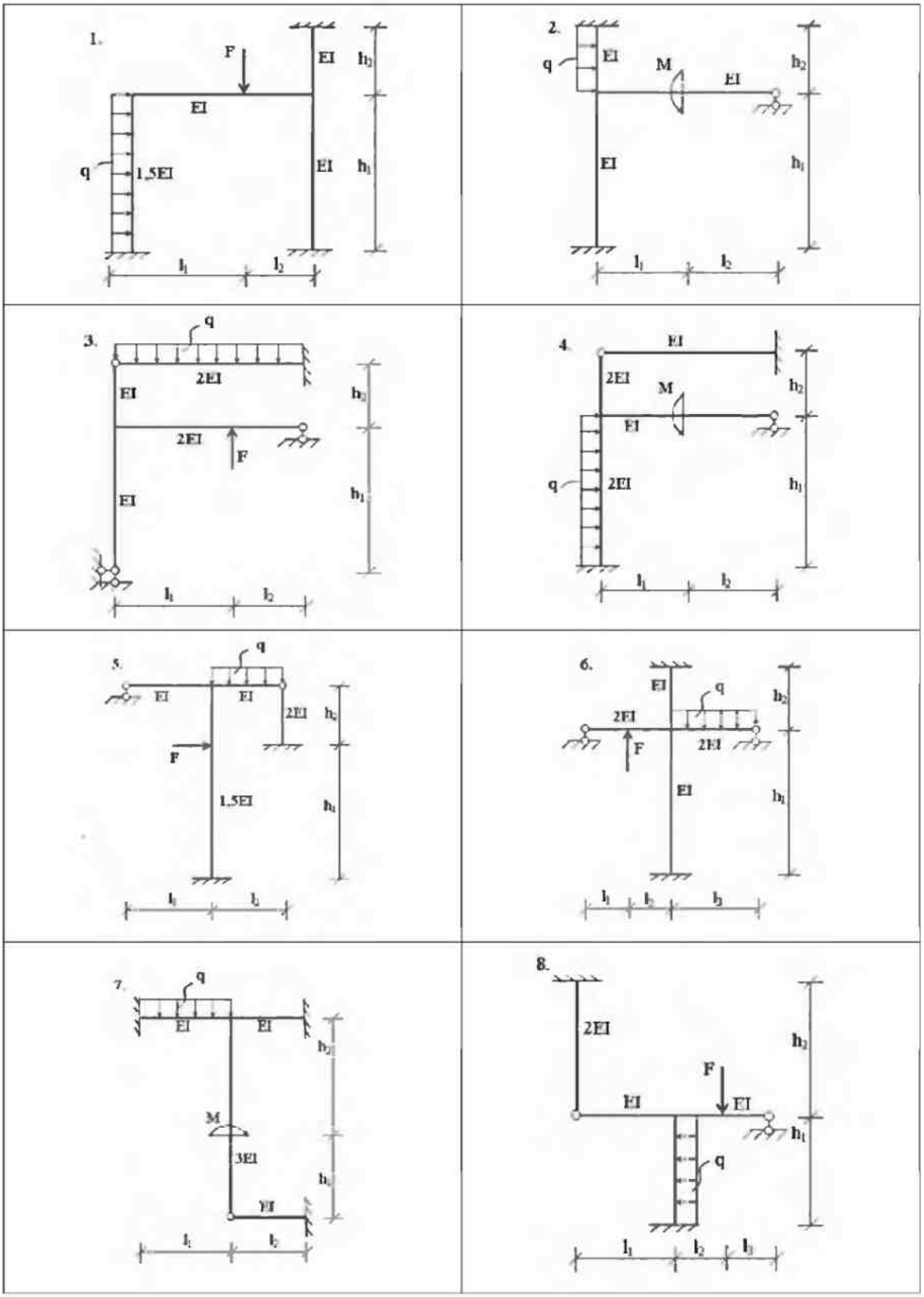

1.
F
EI
EI
q
1,5EI
EI
h2
h1
l1
l2
2.
q
EI
M
EI
h2
EI
h1
l1
l2
3.
q
2EI
EI
h2
2EI
F
EI
h1
l1
l2
4.
EI
2EI
M
h2
EI
q
2EI
h1
l1
l2
5.
q
EI
EI
2EI
h2
F
1,5EI
h1
l1
l2
6.
EI
q
h2
2EI
F
2EI
EI
h1
l1
l2
l3
7.
q
EI
EI
h2
M
3EI
h1
EI
l1
l2
8.
2EI
h2
F
EI
EI
h1
q
l1
l2
l3

Рисунок 12. П

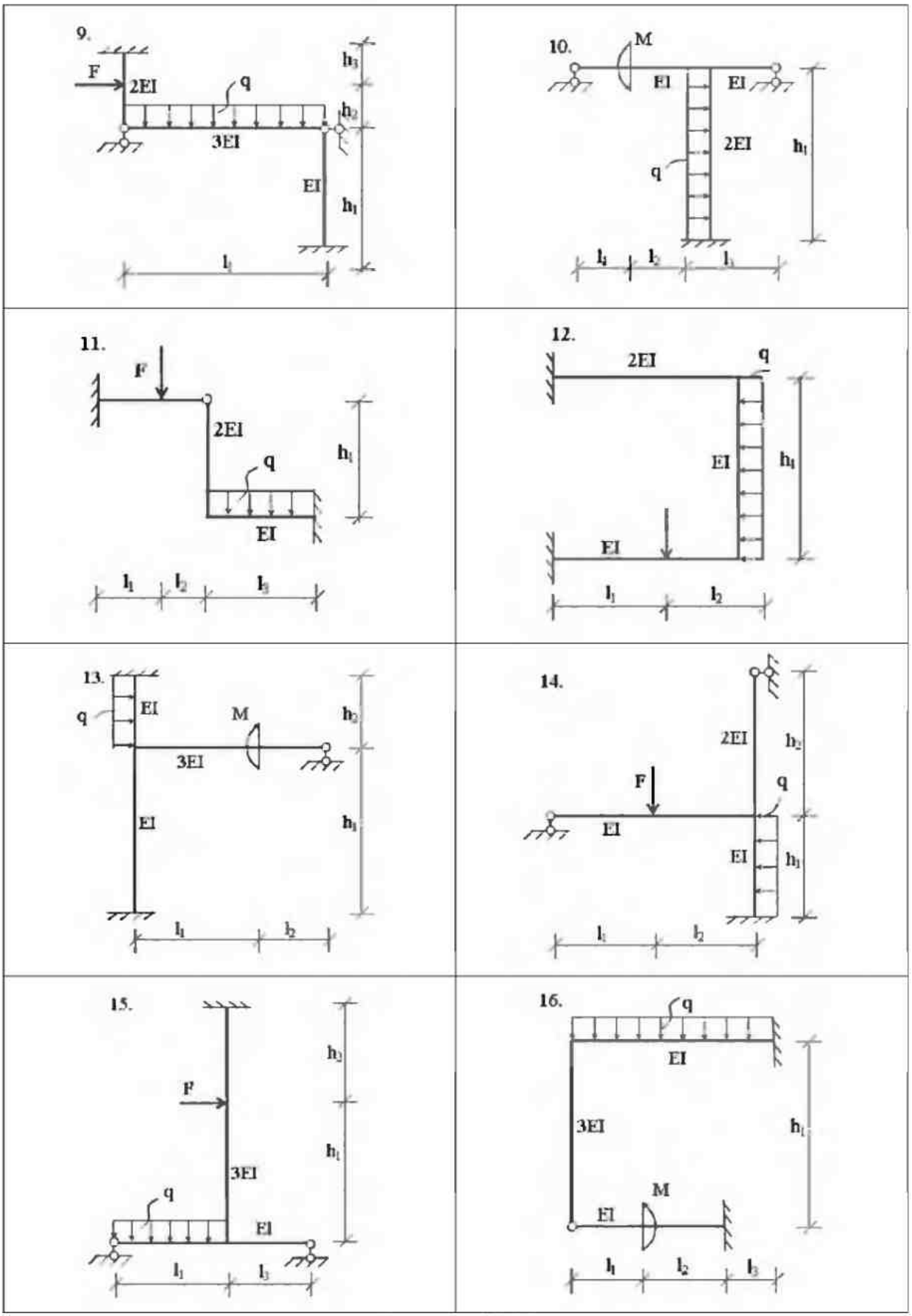

9.
F
2EI
q
3EI
EI
h3
h2
h1
l1
10.
M
EI
EI
2EI
q
h1
l1
l2
l3
11.
F
2EI
q
EI
h1
l1
l2
l3
12.
2EI
q
EI
EI
h1
l1
l2
13.
q
EI
M
3EI
EI
h2
h1
l1
l2
14.
2EI
F
q
EI
EI
h2
h1
l1
l2
15.
F
3EI
q
EI
h3
h1
l1
l3
16.
q
EI
3EI
M
EI
h1
l1
l2
l3

Рисунок 13. П

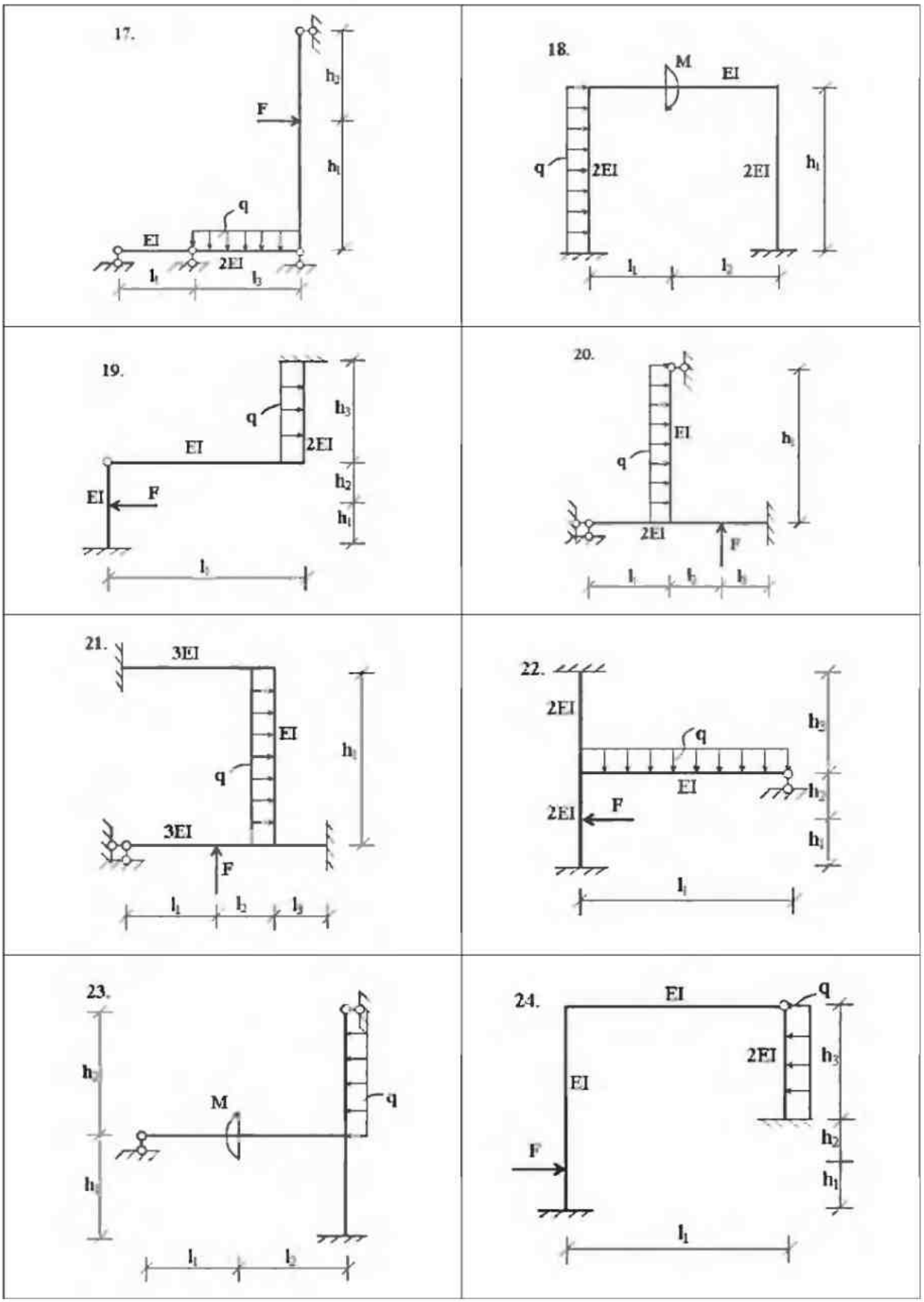

17.
F
q
EI
2EI
18.
M
EI
q
2EI
2EI
19.
q
EI
2EI
EI
F
20.
EI
q
2EI
F
21.
3EI
EI
q
3EI
F
22.
2EI
q
EI
2EI
F
23.
M
q
24.
EI
q
2EI
EI
F

Рисунок 13. П

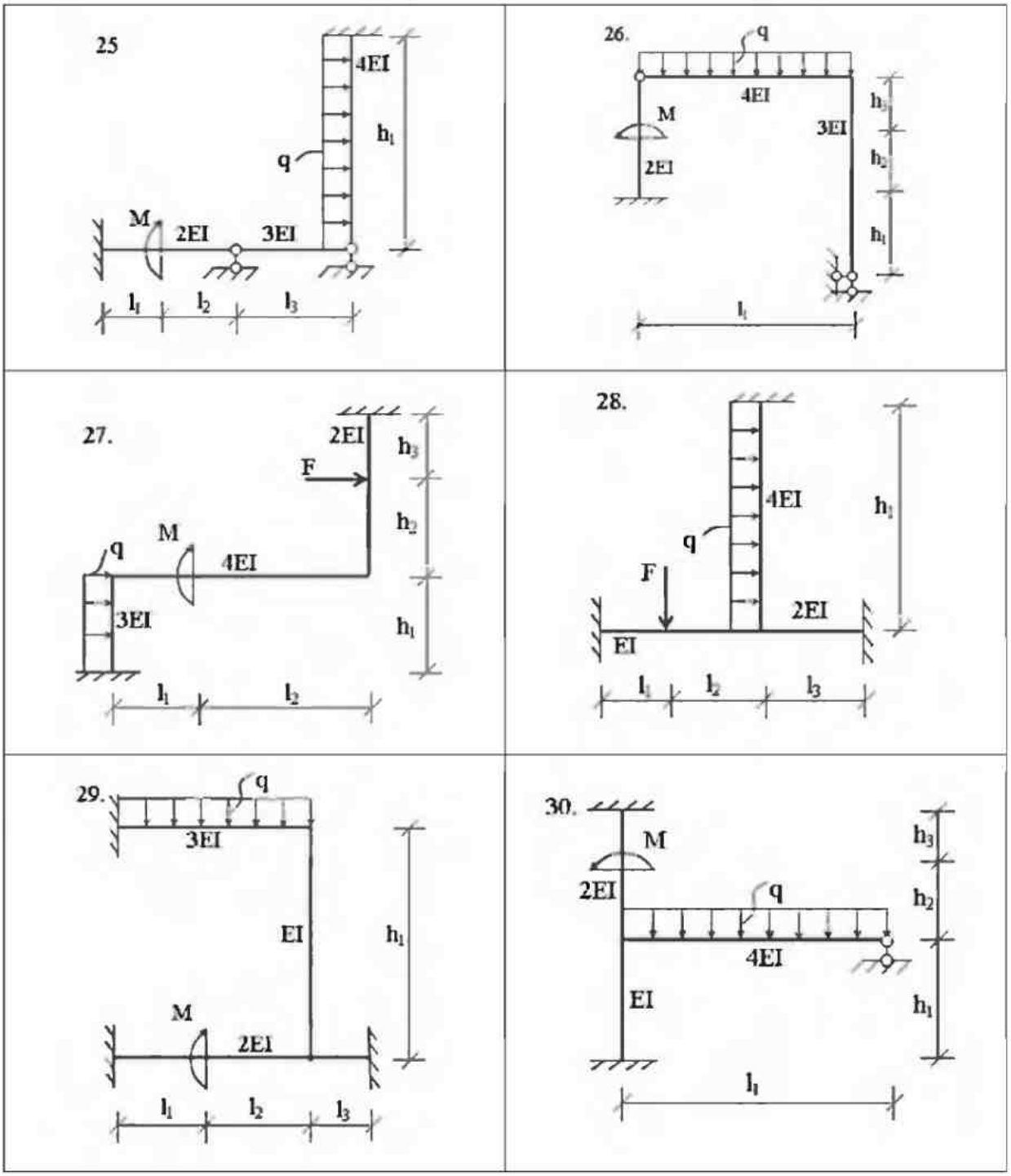

25
4EI
h1
q
M
2EI
3EI
l1
l2
l3
26.
q
4EI
M
3EI
2EI
h3
h2
h1
l1
27.
2EI
h3
F
h2
M
q
4EI
3EI
h1
l1
l2
28.
4EI
h1
q
F
2EI
EI
l1
l2
l3
29.
q
3EI
EI
h1
M
2EI
l1
l2
l3
30.
M
h3
2EI
q
h2
4EI
EI
h1
l1

Рисунок 14. П

ЛИТЕРАТУРА

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и тории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 288 с.
2. Авдонин А.С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1969. – 404 с.
3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
4. Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
5. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. – 398 с.
6. Александров А.Я. Вопросы расчета элементов авиационных конструкций. – М.: Оборонгиз, 1959. – 286 с.
7. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформированного тела. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
8. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1978. – 462 с.
9. Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.
10. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С. Ребристые цилиндрические оболочки. – К.: Нукова думка, 1973. – 248 с.
11. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. – М.: Машгиз, 1962. – 454 с.
12. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. – М.: Мир, 1976. – 311 с.
13. Анурьев В.И. Справочник конструктора-машиностроителя: В 2т. – М.: Машиностроение, 1978.
14. Аронсон А.Я. и др. Расчет на прочность деталей гидротурбин. – М.-Л.: Машиностроение, 1965. – 392 с.
15. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.А. Кручение упругих тел. – М.: Физматгиз, 1963. – 686 с.
16. Афанасьев А.М., Калинин Н.Г., Марьин В.А. Основы строительной механики. – М.: Оборонгиз, 1951. – 524 с.
17. Баженов В.А., Гранат С.Я., Шишов О.В. Будівельна механіка. Комп'ютерний курс. – К.: ВІПОЛ, 1999. – 584 с.
18. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика. Применение метода граничных элементов. – Одесса: Астропринт, 2001. – 288 с.
19. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Ухов О.В. Будівельна механіка та металеві конструкції. – Одеса: Астропринт, 2001. – 428 с.
20. Байда Э.Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. – 231 с.
21. Бахвалов Н.С. и др. Численные методы. – м.: Наука, 1987. – 598 с.
22. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.

23. Безухов Н.И. Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1965. – 320 с.
24. Безухов Н.И. Сборник задач по теории упругости и пластичности. – М.: ГИИТЛ, 1957. – 288 с.
25. Безухов Н.И., Лужин О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. – М.: Высшая школа, 1974. – 200 с.
26. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.. Устойчивость и динамика сооружений. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.
27. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 607 с.
28. Беляев Н.М. Труды по теории упругости и пластичности. – М.: Гостехиздат, 1957. – 632 с.
29. Бенерджи П.К., Баттерфилд Р.Методы граничных элементов в прикладных науках/ Под ред. Р.В. Гольдшейна. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
30. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М: Машиностроение, 1977. – 488 с.
31. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
32. Биргер И.А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. – М.: Оборонгиз, 1956. – 152 с.
33. Биргер И.А. Круглые пластинки и оболочки вращения. – М.: Оборонгиз, 1961. – 368 с.
34. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
35. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иоселевич Г.Б. Расчеты на прочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
36. Блох В.И. Теория упругости. Харьков: Изд-во Харьковск. Гос. Ун-та, 1964. – 438 с.
37. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
38. Болотин В.В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. – 335 с.
39. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. – М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1965. – 279 с.
40. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 446 с.
41. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. – М.: Машиностроение, 1973. – 456 с.
42. Бреббиа К., Теллес Д., Вроубел Л. Методы граничных элементов / Под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
43. Бреббиа К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике / Под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
44. Булгаков В.Н. Статика тороидальных оболочек. – К.: Изд-во АН УССР, 1962. – 100 с.
45. Бубнов И.Г. Труды по теории пластин. – М.: Гостехиздат, 1953. – 428 с.

46. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М.: Стройиздат, 1952. – 475 с.
47. Вайнберг Д.В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин. – К.: Будівельник, 1973. – 488 с.
48. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. - Будівельник, 1970.– 435 с.
49. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Пластины, диски, балки-стенки. – К.: Стройиздат, 1959. – 1049 с.
50. Вайнберг Д.В., Синявский А.Л. Расчет оболочек. – К.: Гостехиздат, 1961. – 119 с.
51. Ван-Цзи-Де. Прикладная теория упругости. – М.: Физматгиз, 1959.–400 с.
52. Валиашвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1976. – 278 с.
53. Варвак П.М. Новые методы решения задач сопротивления материалов. – К.: Вища школа, 1977. – 159 с.
54. Варвак П.М. и др. Метод конечных элементов. – К.: Вища школа, 1981. – 176 с.
55. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во Ассоциации строит. Вузов, 1995. – 576 с.
56. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 544 с.
57. Васильков Б.С. Расчет оболочек с несимметричным контуром. – М.: Госстройиздат, 1962. – 123 с.
58. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. – Тбилиси: Мецниереба, 1965. – 101 с.
59. Вершинский А.В., Гохберг М.М., Семенов В.Ф. Строительная механика и металлические конструкции / Под ред. М.М Гохберга. – Л.: Машиностроение, 1984. – 231 с.
60. Верюжский Ю.В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной метематики. – Киев: Вища школа, 1978. – 183 с.
61. Винокуров Л.П. Теория упругости и пластичности. – Харьков: Изд-во Харьковск. гос. ун-та, 1965. – 328 с.
62. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 318 с.
63. Власов В.З. Избранные труды: В 3т. – М.: Изд-во АН СССР, 1962 – 1963.
64. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 784 с.
65. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. – М.: Стройиздат, 1958. – 502 с.
66. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.-Л.: Физматгиз, 1959. – 568 с.
67. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматиздат, 1960. – 490 с.
68. Волков А.Н. Статика толстых оболочек. – М.: Изд-во Ун-та Дружбы народов, 1974. – 147 с.

69. Волошин И.И., Громов В.Г. О критерии устойчивости стержня на упругом основании при действии следящей силы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1977. - №4. – с. 169-171.
70. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 419 с.
71. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
72. Галеркин Б.Г. Упругие тонкие плиты. – М.: Госстройиздат, 1933.- 370 с.
73. Галимов К.З., Паймушин В.Н. Теории оболочек сложной формы. – Казань, Изд-во Казанск. Ун-та, 1985. – 163 с.
74. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 303 с.
75. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
76. Гастев В.А. Курс теории упругости и основ теории пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1973. – 180 с.
77. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции. Вып. 1-3. – М.: Физматгиз, 1958.
78. Глушков Г.С., Синдеев В.А. Курс сопротивления материалов. – М.: Высшая школа, 1965. – 768 с.
79. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
80. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.
81. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // Успехи математических наук. – 1961. – т. XVI. – Вып. 3. – с. 171-174.
82. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи по теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 416 с.
83. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
84. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища школа, 1979. – 280 с.
85. Григорьев Л.Я. Судовые сосуды, работающие под давлением (определение напряжений и деформаций). – Л.: Судостроение, 1965.– 196с.
86. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. – Львов: Вища школа, 1981. – 136 с.
87. Гудьер Дж., Ходж Ф.Г. Упругость и пластичность. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 190 с.
88. Гузь А.Н., Заруцкий В.А., Амиро И.Я. и др. Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций. – К.: Наукова думка, 1984. – 240 с.
89. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Методы возмущения в пространственных задачах теории упругости. – К.: Вища школа, 1982. – 350 с.

90.Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Шнеренко К.И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. – К.: Наукова думка, 1970. – 323 с.
91.Гузь А.Н., Бабич И. Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. – Киев: Вища школа, 1980. – 168 с.
92.Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. – Львов: Вища школа, 1978. - 190 с.
93.Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1985. – 607 с.
94.Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1975. – 654 с.
95.Дащенко А.Ф., Белоус П.А., Оробей В.Ф. и др. Опір матеріалів. - Одесса: Астропринт, 2002. – 160 с.
96.Дащенко А.Ф., Кириллов В.Х., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. MATLAB в научных и инженерных расчетах. – Одесса: Астропринт, 2003. – 210 с.
97.Дащенко А.Ф., Белоус П.А., Оробей В.Ф. и др. Теорія пружності. – Одесса: Астропринт, 2003. – 247 с.
98.Демидов С.П. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.
99.Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
100.Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем. – М.: Мир, 1984. – 334с.
101.Дикинсон С.М. Применение модифицированного метода Болотина для исследования устойчивости и колебаний напряженных пластинок // Ракетная техника и космонавтика. – 1975. – Т. 13. - №12. – с. 151-152.
102.Дикович В.В. Пологие прямоугольные в плане оболочки вращения. – М.-Л.: Госстройиздат, 1960. – 143 с.
103.Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1975. – 407 с.
104.Доннел Л.Г. Балки, пластины и оболочки / Под ред. Э.М. Григолюка. – М.: Наука, 1982. – 567 с.
105.Дьяконов В.П. MATLAB 6. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. – 592 с.
106.Дьяконов В.П., Круглов В.Н. Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2001. – 480 с.
107.Дьяконов В.П. SIMULINK 4. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002. – 528 с.
108.Дьяконов В.П. MATLAB 6 /6.1/ 6.5. Simulink 4/5. Основы применения. – М.: СОЛОН – Пресс, 2002. – 768 с.
109.Егер Дж. К. Упругость, пластичность и текучесть. – М.: Машгиз, 1961. – 172 с.
110.Ершова В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / Под ред. В.И. Азаматовой. – Минск: Вышэйшая школа, 1976. – 255 с.
111.Жемочкин Б.Н. Расчет круглых плит на упругом основании на симметричную нагрузку. – М.: ВИИА, 1938. – 134 с.

112.Жемочкин Б.Н. Теория упругости. – М.: ГИЛСА, 1957. – 256 с.
113.Жемочкин Б.Н., Синицын А.П. Прикладные методы расчета фундаментальных балок и плит на упругом основании. – М.: Госстройиздат, 1962. – 239 с.
114.Земанян А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1974. – 399 с.
115.Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
116.Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. – 368 с.
117.Иванов Н.И. Сопротивление материалов. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1942. – 646 с.
118.Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
119.Ильюшин А.А., Ленский В.С. Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1959. – 372 с.
120.Ильюшин А.А., Огибалов П.М. Упруго-пластические деформации полых цилиндров. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 227 с.
121.Ишлинский А.Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Украинский математический журнал. – 1954. - №2. – с. 140-146.
122.Каленюк П.И,, Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н. Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наукова думка, 1993. – 232 с.
123.Калманок А.С. Расчет пластинок. Справочное пособие. – М.: Госстройиздат, 1959. – 212 с.
124.Калманок А.С. Строительная механика пластинок. – М.: Госстройиздат, 1950. – 304 с.
125.Кан С.Н. Строительная механика оболочек. – М.: Машиностроение, 1966. – 508 с.
126.Кан С.Н., Пановко Я.Г. Элементы строительной механики тонкостенных конструкций. – М.: Оборонгиз, 1949. – 127 с.
127.Кан С.Н., Свердлов И.А. Расчет самолета на прочность. – М.: Машиностроение, 1966. – 519 с.
128.Канторович З.Б. Основы расчета химических машин и аппаратов. – М.: Машгиз, 1960. – 743 с.
129.Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
130.Карзов Г.П., Леонов В.П., Тимофеев Б.Т. Сварные сосуды высокого давления. – Л.: Машиностроение, 1982. – 287 с.
131.Карякин Н.И. Основы расчета тонкостенных конструкций. – М.: Высшая школа, 1960. – 239 с.
132.Кац А.М. Теория упругости. – М.-Л.: ГИИТЛ, 1956. – 208 с.
133.Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 311 с.
134.Кинасошвили Р.С. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1975.– 384 с.
135.Киселев В.А. Плоская задача теории упругости. – М.: Высшая школа, 1976. – 151 с.

136.Киселев В.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
137.Китовер К.А. Круглые тонкие плиты. – М.-Л.: Стройиздат, 1953. – 113 с.
138.Китовер К.А., Франк-Каменецкий Г.Х. Расчет гладких и оребренных кольцевых элементов конструкций. – Л.: Машиностроение, 1982. – 216 с.
139.Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. – К.: Наукова думка, 1965. – 204 с.
140.Коваленко А.Д. Избранные труды. – К.: Наукова думка, 1976. – 762 с.
141.Коваленко А.Д. Круглые пластинки переменной толщины. – М.: Физматгиз, 1959. – 294 с.
142.Коваленко А.Д. Пластины и оболочки в роторах турбомашин. – К.: Изд-во АН УССР, 1955. – 303 с.
143.Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Ильин Л.А. Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении. – К.: Изд-во АН УССР, 1963. – 287 с.
144.Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Лобкова И.А. Расчет конических оболочек линейно переменной толщины. – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – 327 с.
145.Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. – М.: Высшая школа, 1972. – 296 с.
146.Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Палько Д.А. Прочность полых цилиндров. – М.: Машиностроение, 1981. – 264 с.
147.Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – М.: Высшая школа, 1975. – 526 с.
148.Колтунов М.А. и др. Прикладная механика деформируемого твердого тела. – М.: Высшая школа, 1983. – 349 с.
149.Колесник И.А., Рейнгард А.И. Об асимптотическом методе решения задач устойчивости на основе теории возмущений // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1990. - №7. – с. 37-41.
150.Колоушек В. Динамика строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1965. – 632 с.
151.Корнілов О.А. Інженерні застосування плоскої задачі теорії пружності в розрахунках на міцність. – К.: Изд-во НМК ВО, 1991. – 278 с.
152.Королев В.И. Упруго-пластические деформации оболочек. – М.: Машиностроение, 1970. – 304 с.
153.Короткин Я.И., Постнов В.А., Сиверс Н.Л. Строительная механика корабля и теория упругости. Т. 1. – Л.: Судостроение, 1968. – 423 с.
154.Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – К.: Вища школа, 1975. – 227 с.
155.Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстостенные многосвязные пластины. – К.: Наукова думка, 1978. – 239 с.
156.Костюк А.Г. Динамика и прочность турбомашин. – М.: Машиностроение, 1982. – 264 с.
157.Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
158.Крылов А.Н. Избранные труды. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1958. – 804 с.

159.Кубланов Н.П., Спенглер И.Е. Строительная механика и металлические конструкции кранов. – К.: Будівельник, 1968. – 268 с.
160.Кун П. Расчет на прочность оболочек в самолетостроении. – М.: Оборонгиз, 1961. – 306 с.
161.Купрадзе В.Д. и др. Трехмерные задачи теории упругости. – Тбилиси: Изд-во Тбилисск. Ун-та, 1968. – 627 с.
162.Курдюмов А.А., Локшинов А.З., Иосифов Р.А., Козляков В.В. Строительная механика корабля и теория упругости Т.2. – Л.: Судостроение, 1968. – 419 с.
163.Лазарян В.А. Энергия деформации и перемещения линейных систем. – Киев: Наукова думка, 1972. – 140 с.
164.Лазарян В.А., Конашенко С.И. Обобщенные функции в задачах механики. – К.: Наукова думка, 1974. – 191 с.
165.Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1965. – 202 с.
166.Лейбензон Л.С. Вариационные методы решения задач теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 287 с.
167.Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. – М.: .: Гостехиздат, 1947.–464с.
168.Лейбензон Л.С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек // Собр. Тр. – Т.1. – М.: АН СССР, 1951.
169.Ленский В.С. Лекции по теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1964. – 204 с.
170.Лехницкий С.Г. Строительная механика. – К.: Вища школа, 1980.– 479 с.
171.Лихарев К.К., Сухова Н.А. Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов». – М.: Машиностроение, 1980. – 224 с.
172.Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 491 с.
173.Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 252 с.
174.Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
175.Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. – М.: Мир, 1982. – 542 с.
176.Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
177.Майзель В.М. Температурная задача теории упругости. – К.: Изд-во АН УССР, 1951. – 149 с.
178.Макеев В.П., Гриненко Н.И., Павлюк Ю.С. Статистические задачи динамики упругих конструкций. – М.: Наука, 1984. – 231 с.
179.Макушин В.М. Деформация и напряженное состояние деталей в местах контакта. – М.: Машгиз, 1952. – 244 с.
180.Малинин Н.Н. Прочность турбомашин. – М.: Машгиз, 1962. – 292 с.
181.Мартынович Т.Л., Юринец В.Е. Контактное взаимодействие пластин с упругими элементами. – Львов: Вища школа, 1984. – 160 с.
182.Матевосян Р.Р. Устойчивость сложных стержневых систем (качественная теория). – М.: Госстройиздат, 1961. – 252 с.

183.Масленников А.М. Расчет статически неопределимых систем в матричной форме. – Л.: Стройиздат, 1970. – 128 с.
184.Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. – 225 с.
185.Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под ред. А.Н. Гузя. – К.: Наукова думка, 1980-1981.
186.Милейковский И.Е., Трушин С.И. Расчет тонкостенных конструкций. – М.: Стройиздат, 1989. – 197 с.
187.Михайлов Б.К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – 196 с.
188.Можаровский Н.С., Антипов Б.А. Упруго-пластическое деформирование и разрушение материалов при нестационарных силовом и температурном воздействиях. – К.: Вища школа, 1985. – 139 с.
189.Молчанов И.Н. Численные методы решения некоторых задач теории упругости. – К.: Наукова думка, 1979. – 315 с.
190.Морозов Н.Ф. Избранные двухмерные задачи теории упругости. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 182 с.
191.Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С. Контактные задачи математической теории упругости. – К.: Наукова думка, 1985. – 173 с.
192.Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1966. – 707 с.
193.Муллагулов М.Х. Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости стержней, сжатых следящими силами // Проблемы прочности. – 1994. - №6. – с. 53-59.
194.Мышкис А.Д. Математика для ВТУЗов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971. – 632 с.
195.Метьюз Дж. Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MATLAB. Пер. с англ. – М.: Изд. Дом "Вильямс", 2001. – 480 с.
196.Мяченков В.И., Мальцев В.П. Методы и алгоритмы расчета пространственных конструкций на ЭВМ ЕС. – М.: Машиностроение, 1984. – 280 с.
197.Назаров А.А. Основы теории и методов расчета пологих оболочек. – М.-Л.: Стройиздат, 1966. – 303 с.
198.Немиш Ю.Н., Блошко Н.М. Напряженное состояние упругих цилиндров с выточками. – К.: Наукова думка, 1987. – 174 с.
199.Нерубайло Б.В. Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. – М.: Машиностроение, 1983. – 248 с.
200.Никифоров С.Н. Теория упругости и пластичности. – М.: Госстройиздат, 1955. – 284 с.
201.Новацкий В. Динамика сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – 376 с.
202.Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. – 872 с.
203.Новожилов В.В. Вопросы механики сплошной среды. – Л.: Судостроение, 1989. – 396 с.
204.Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962.–431 с.

205.Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 665 с.
206.Образцов И.Ф., Онанов Г.Г. Строительная механика скошенных систем. – М.: Машиностроение, 1973. – 654 с.
207.Огибалов П.М. Изгиб пластинок (прочность, устойчивость, колебания). – М.: Изд-во МГУ, 1958. – 389 с.
208.Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1969. – 695 с.
209.Одинг И.А. Основы прочности паровых котлов, турбин и турбогенераторов. – М.: ГЭИ, 1949. – 560 с.
210.Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2ч. У 5кн. / В.Г. Піскунов, Ю.М. Федоренко, В.Д. Шевченко та ін. За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища школа, 1994-1995. 1995. – 271 с.
211.Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Расчет ферм методом граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1989. - №10. – с. 107-111.
212.Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Решение задач статики стержневых систем методом граничных интегральных уравнений // Сопротивление материалов и теория сооружений. - Киев: Будівельник, - 1989. - №54. – с. 90-95.
213.Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Статический расчет комбинированных арочных систем методом граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1989. - №12. – с. 24-28.
214.Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Решение задач статики тонкостенных стержневых систем методом граничных интегральных уравнений // Сопротивление материалов и теория сооружений. - Киев: Будівельник, - 1989. - №55. – с. 81-86.
215.Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Решение задач динамики и устойчивости стержневых систем методом граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1990. - №12. – с. 27-31.
216.Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Метод граничных интегральных уравнений в устойчивости упругих стержневых систем от следящих сил // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1991. - №11. – с. 22-28.
217.Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Неконсервативные комбинированные задачи устойчивости упругих систем // Изв. вузов. Строительство. – 1992. - №1. – с. 23-28.
218.Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Расчет пластин на изгиб одномерным вариантом метода граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство. – 1993. - №1. – с. 20-27.
219.Оробей В.Ф., Орлов С.А., Орлов Н.А. Метод граничных интегральных уравнений в динамике и устойчивости прямоугольных пластин // Изв. вузов. Строительство. – 1994. - №3. – с. 25-31.
220.Оробей В.Ф. Расчет пластин с комбинированным контуром методом граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство. – 1994. - №4. – с. 9-16.

221.Оробей В.Ф. Расчет цилиндрических складчатых систем методом граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство. – 1995. - №2. – с. 31-38.
222.Оробей В.Ф. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задач на собственные значения пластин с круглым и комбинированным контуром // Изв. вузов. Строительство. – 1995. - №7-8. – с. 37-44.
223.Оробей В.Ф., Дащенко А.Ф., Андриенко Н.Н. Метод граничных интегральных уравнений в расчетах линейных систем. – К.: Наукова думка, 1996. – 391 с.
224.Оробей В.Ф., Дащенко А.Ф. К вопросу об интегрировании уравнений статики пологих оболочек (Сообщение 1) // Изв. вузов. Строительство. – 1996. - №5. – с. 19-27.
225.Оробей В.Ф., Дащенко А.Ф. К вопросу об интегрировании уравнений статики пологих оболочек (Сообщение 2) // Изв. вузов. Строительство. – 1996. - №7. – с. 32-37.
226.Оробей В.Ф., Варивода В.А. Об одномерных моделях расчета упругих стержневых систем на упругом основании // Изв. вузов. Строительство. – 1998. - №11-12. – с. 8-14.
227.Оробей В.Ф., Дащенко А.Ф., Храпак А.В. Уточненное решение для неконсервативных задач устойчивости упругого стержня // Тр. Одес. политехн. у-та. – Одесса, 2000. – Вып. 2 (11). – с. 13-19.
228.Оробей В.Ф., Храпак А.В. Применение модели Тимошенко для определения резонансных режимов аксиально-поршневых гидронасосов // Холодильна техніка і технологія. – Одесса: Издание Одесской государственной академии холода, 2001. – №4 (73). – с. 57-60.
229.Оробей В.Ф. Устойчивость пластин, сжатых сосредоточенными силами // Известия вузов. Строительство. – 2002. – №33. – с. 20-26.
230.Оробей В.Ф., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В. Применение метода граничных элементов для определения устойчивости прямоугольных пластин // Тр. Одес. политехн. у-та. – Одесса, 2002. – Вып. 2 (18). – с. 8-12.
231.Оробей В.Ф., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В. Расчет форм потери устойчивости упругих систем и их сейсмостойкости методом граничных элементов // Тр. Одес. политехн. у-та. – Одесса, 2003. – Вып. 2 (19). – с. 11-18.
232.Оробей В.Ф., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В. Вариационный метод Канторовича-Власова в задачах устойчивости тонких пластин // Тр. Одес. политехн. у-та. – Одесса, 2004. – Вып. 2 (21). – с. 8-25.
233.Основы строительной механики ракет / Под ред. Л.И. Балабуха. – М.: Высшая школа, 1969. – 494 с.
234.Панасюк В.В., Теплий М.Й. Деякі контактні задачі теорії пружності. – К.: Наукова думка, 1975. – 195 с.
235.Пановко Я.Г. Механика деформированного твердого тела. – М.: Наука, 1985. – 287 с.

236.Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
237.Папкович П.Ф. Теория упругости. – М.: Оборонгиз, 1939. – 486 с.
238.Папкович П.Ф. Труды по строительной механике корабля. В 4 т. – Л.: Судпромгиз, 1962-1963.
239.Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической термоупругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
240.Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. – Львов: Вища школа, 1978. – 159 с.
241.Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наукова думка, 1973. – 248 с.
242.Пикуль В.В. Прикладная механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1989. – 220 с.
243.Писаренко Г.С., Агарев В.А., Квитка А.Л., Попков В.Г., Уманский Э.С. Сопротивление материалов. – К.: Вища школа, 1986. – 775 с.
244.Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наукова думка, 1988. – 734 с.
245.Пискунов В.Г., Вериженко В.Е., Присяжнюк В.К. и др. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов. – К.: Вища школа, 1987. – 197 с.
246.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т. 1. – М.: Наука, 1985. – 430 с.
247.Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 344 с.
248.Подгорный А.Н., Марченко Г.А., Пустынников В.И. Основы и методы прикладной теории упругости. – К.: Вища школа, 1981. – 327 с.
249.Подильчук Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости. – К.: Наукова думка, 1979. – 240 с.
250.Подстригач Я.С., Повстенко Ю.С. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. – К.: Наукова думка, 1985. – 200 с.
251.Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наукова думка, 1978. – 343 с.
252.Пономарев К.К. Деформации упругих цилиндрических оболочек. – М.: ВЗИИП, 1958. – 112 с.
253.Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.И. Расчеты на прочность в машиностроении: В 3т. – М.: Машгиз, 1956-1960.
254.Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. – Киев-Одесса: Высшая школа, 1982. – 167 с.
255.Посацький С.Л. Опір матеріалів. – Львів: Вища школа, 1973. – 404 с.
256.Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 280 с.
257.Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 341 с.

258.Постнов В.А., Суслов В.П. Строительная механика корабля и теория упругости. – Т. 1, 2. – Л.: Судостроение, 1987.
259.Прагер В. Введение в механику сплошных сред. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 311 с.
260.Прокопович И.Е., Слезингер И.Н., Штейнберг М.В. Расчет цилиндрических оболочек. – К.: Будівельник, 1967. – 240 с.
261.Пространственные задачи теории упругости и теории пластичности: В 6 т. / Под ред. А.Н. Гузя. – К.: Наукова думка, 1984-1985.
262.Прочность, устойчивость, колебания: Справочник: в 3 т. / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968.
263.Рабинович Ю.М. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 580 с.
264.Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
265.Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. – М.: Гос. изд-во физ. мат. лит., 1972. – 455 с.
266.Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. – М.: Мир, 1984. – 264 с.
267.Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / Под ред. В.И. Мяченкова. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
268.Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. – Киев: Наукова думка, 1987. – 175 с.
269.Резников Р.А. Решения задач строительной механики на ЭВМ. – М.: Стройиздат, 1971. – 311 с.
270.Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. Расчет оболочек сложной геометрии. – М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1985. – 176 с.
271.Рекач В.Г. Руководство к решению задач по прикладной теории упругости. – М.: Высшая школа, 1984. -287 с.
272.Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
273.Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 440 с.
274.Рогицкий С.А. Новый метод расчета на прочность и устойчивость. – Москва-Свердловск: Машгиз, 1960. – 352 с.
275.Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М.: Стройиздат, 1977. – 129 с.
276.Розин Л.А. Теоремы и методы статики деформируемых систем. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. – 276 с.
277.Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А. Расчет статически неопределимых стержневых систем. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – 328 с.
278.Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А. Расчет статически определимых стержневых систем. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1983. – 227 с.

279.Руководство к практическим занятиям по строительной механике / Г.К. Клейн, Н.Н. Леонтьев, М.Г. Ванюшенков и др. – М.: Высшая школа,1980. – 384 с.
280.Савин Г.Н., Тульчий В.И. Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. – К.: Наукова думка, 1971. – 268 с.
281.Савин Г.Н. Основы плоской задачи линейной теории упругости. – К.: Изд-во КГУ, 1965. – 234 с.
282.Савин Г.Н. Распределение напряжений вокруг отверстий. – К.: Наукова думка, 1968. – 887 с.
283.Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. – К.: Наукова думка, 1964. – 384 с.
284.Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.
285.Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В. и др. Метод конечных элементов в механике твердого тела. – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.
286.Светлицкий В.А. Механика стержней. Части 1, 2. – М.: Высшая школа, 1987.
287.Сегаль А.И. Прикладная теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1961.– 268с.
288.Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
289.Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. – М.: Наука, 1983-1984.
290.Серенсен С.В. Основы технической теории упругости. – Харьков-Киев: Гостехиздат Украины, 1934. – 364 с.
291.Симвулиди И.А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании. – М.: Высшая школа, 1987. – 575 с.
292.Снеддон И.Н., Бери Д.С. Классическая теория упругости. – М.: Физматгиз, 1961. – 219 с.
293.Снитко Н.К. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1980. – 432 с.
294.Соколов В.Н. Основы расчета и конструирования машин и аппаратов пищевых производств. – М.: Машиностроение, 1983. – 447 с.
295.Соляник-Красса К.В. Осесимметричные задачи теории упругости. – М.: Стройиздат, 1987. – 334 с.
296.Сопротивление материалов / Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Высшая школа, 1975. – 480 с.
297.Спицына Д.Н. Строительная механика стержневых машиностроительных конструкций. – М.: Высшая школа, 1977. – 248 с.
298.Справочник машиностроителя. В 6 т. / Под ред. С.В. Серенсена. – М.: Машгиз, 1962.
299.Справочник по строительной механика корабля: В 3-х т. / Под ред. Ю.А. Шиманского. – Л.: Судпромгиз, 1958-1960.
300.Справочник по строительной механика корабля: В 3-х т. / Под ред. проф. О.М. Палия. – Л.: Судостроение, 1982.
301.Справочник по теории упругости / Под ред. П.М. Варвака и А.Ф. Рябова. – К.: Будівельник, 1971. – 419 с.

302.Справочник проектировщика. Расчетно-теоретический / Под ред. А.А. Уманского. – М.: Стройиздат, 1960. – 1040 с.
303.Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
304.Строительная механика / Ю.И. Бутенко, Н.А. Засядко, С.Н. Кан и др. – К.: Вища школа, 1989. – 480 с.
305.Строительная механика. Руководство к практическим занятиям / Ю.И. Бутенко, Н.А. Засядько, С.Н. Канн и др. – Киев: Вища школа, 1989.–367 с.
306.Строительная механика. Стержневые системы / А.Ф. Смирнов и др. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
307.Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений \ Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 415 с.
308.Теллес Д.К.Ф. Применение метода граничных элементов для решения неупругих задач. – М.: Стройиздат, 1987. – 160 с.
309.Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Физматлит, 1984. – 319 с.
310.Терегулов И.Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1984. – 472 с.
311.Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов. – М.: Гостехиздат, 1957. – 536 с.
312.Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 439 с.
313.Тимошенко С.П. Сопротивление материалов: В 2 ч. – М.: Наука, 1965.
314.Тимошенко С.П. Статистические и динамические проблемы теории упругости. – К.: Наукова думка, 1975. – 563 с.
315.Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1955. – 568 с.
316.Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – 807 с.
317.Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 625 с.
318.Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979.-560с.
319.Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука,1985. – 232 с.
320.Турчак Л.И. Основы численных методов. - М.: Наука, 1987. – 319 с.
321.Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Казань: Изд-во Казанск. Ун-та, 1986. – 296 с.
322.Уманский А.А. Строительная механика самолета. – М.: Оборонгиз, 1961. – 529 с.
323.Ухов А.В., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В. Расчет и проектирование металлоконструкций мобильных машин и механизмов: В 4 ч. – Одесса: Астропринт, 1998.
324.Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.

325.Феодосьев В.И. Упругие элементы точного приборостроения. – М.: Оборонгиз, 1949. – 342 с.
326.Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Будівельник, 1970. – 308 с.
327.Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела: В 2 т. – М.: Наука, 1975-1978.
328.Филин А.П. Матрицы в статике стержневых систем. – М.-Л.: - Стройиздат, 1966. – 438 с.
329.Филин А.П. Элементы теории оболочек. – Л.: Стройиздат, 1987. – 383 с.
330.Филин А.П. Элементы расчета арок. – Л.: Изд-во ЛИИЖТ, 1963. – 132 с.
331.Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. – М.: Физматгиз, 1959. – 364 с.
332.Филоненко-Бородич М.М., Изюмов С.М., Олисов Б.А. и др. Курс сопротивления материалов: В 2 ч. – М.: Гостехиздт, 1949.
333.Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
334.Фильчаков П.Ф. Численные и графические методы прикладной математики. – К.: Наукова думка, 1970. – 800 с.
335.Флюгге Я.Б. Статика и динамика оболочек. – М.: Госстройиздат, 1961. – 306 с.
336.Форсайт Дж., Малькольм М, Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
337.Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее приложения. – М.: Мир, 1988. – 343 с.
338.Чижевский К.Г. Расчет круглых и кольцевых пластин. Справочное пособие. – Л.: Машиностроение, 1977. – 182 с.
339.Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. – М.: Наука, 1968. – 465 с.
340.Чернуха Ю.А. Циліндричній згин слабо викривлених пластин. – К.: Изд-во АН УССР, 1963. – 117 с.
341.Черных К.Ф. Линейная теория оболочек: В 2 ч. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1962-1964.
342.Численные методы прикладной теории упругости / А.П. Филиппов, В.Н. Булгаков, Ю.С. Воробьев и др. – К.: Наукова думка, 1968. – 250 с.
343.Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. – Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1987. – 338 с.
344.Чудновский В.Г. Исследование колебаний и устойчивости пластин и пластинчатых систем методом расчленения уравнений в частных производных // Расчет пространственных конструкций. – М.: Стройиздат, 1967. – Вып. XI. – с. 171-230.
345.Шагивалеев К.Ф. Расчет на прочность замкнутых цилиндрических оболочек. – Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1991. – 206 с.
346.Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем: В 2 ч. – К.: Изд-во Ин-та системн. исследований Украины, 1993.

347.Шереметьев М.П. Пластинки с подкрепленным краем. – Львов: Вища школа, 1960. – 258 с.
348.Шиманский И.Я. Изгиб пластин. – М.: ОНТИ, 1934. – 418 с.
349.Шиманский Ю.А. Строительная механика подводных лодок. – Л.: Судпромгиз, 1948. – 528 с.
350.Шнейдерович Р.Н. Прочность при статическом и повторно-статическом нагружениях. – М.: Машиностроение, 1968. – 344 с.
351.Штаерман И.Я. Контактные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1949. – 370 с.
352.Яременко А.Ф., Балдук П.Г. Механика материалов и конструкций. – Одесса: Внешрекламсервис, 2001. – 251 с.
353.Shastry B., Rao G.V. Free vibratious short beams. J. of Sound and Vibration. – 1985. - №100. p. 305 – 308.
354.Nemat-Nasser S. Instability je cantilever under a follower force according Timoshenko… I. Appl. Mech. – 1967. - №34. – 484-485.
355.Kounadis A.N. Shear and rotatory inertial effect on Beck's column. J. of Sound and Vibration. – 1976. - №49. – p. 171-178.
356.Sandararamaiah V., Rao G.V. Effect of shear deformation and rotatory inertia on stability of Beck's… AAIA J. -1980. - №18. – p. 124-125.