

**Редакционный совет:**

Главный редактор В. А. Садовничий  
Ответственный редактор А. В. Борисов

И. Антониу  
В. В. Белокуров  
А. В. Болсинов  
К. А. Валиев  
В. А. Журавлев  
В. В. Козлов  
В. Д. Лахно

И. С. Мамаев  
И. Пригожин  
Г. Ю. Ризниченко  
К. Симо  
И. А. Тайманов  
Д. В. Трещев  
О. А. Хрусталев





**А.В.Борисов, И.С.Мамаев (ред.)**

**В.В.Козлов  
А.В.Карапетян  
А.П.Маркеев  
А.С.Сумбатов  
Ю.Н.Федоров  
А.А.Килин  
А.С.Кулешов**

# **НЕГОЛОНОМНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

**ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ  
ХАОС  
СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ**



**Москва • Ижевск**

**2002**

Интернет-магазин  
**MATHESIS**

<http://shop.rcd.ru>

- физика
  - математика
  - биология
  - техника
- 

Работа выполнена в лаборатории нелинейной динамики  
института машиноведения им. А. А. Благонравова РАН  
и Удмуртском государственном университете

Борисов А. В., Мамаев И. С.

**Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы / Сборник статей.** — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 328 стр.

В сборнике представлены статьи ведущих российских специалистов по основным динамическим эффектам в движении неголономных систем. Большинство статей написаны специально для этого сборника и содержат новые результаты, в частности, численно исследованы трехмерные отображения, возникающие в задачах о качении тел. Приведены новые геометрические образы динамики и различные иерархии поведения систем.

Для студентов и аспирантов, физиков и математиков, специалистов по динамическим системам.

**ISBN 5-93972-167-2**

© Институт компьютерных исследований, 2002

<http://rcd.ru>

# Оглавление

## I. ВВЕДЕНИЕ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ИСТОРИЧЕСКИЕ КОММЕНТАРИИ

- |   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | ◇ <i>А. В. Борисов, И. С. Мамаев.</i> Краткий очерк развития неголономной механики . . . . . | 11 |
| 2 | ◇ <i>А. С. Сумбатов.</i> Неголономные системы . . . . .                                      | 20 |
|   | 1. Введение . . . . .  | 20 |
|   | 2. Примеры неголономных связей, идеальных по Лагранжу . . . . .                              | 22 |
|   | 3. Уравнения движения . . . . .  | 24 |
|   | 4. Обобщения принципа Гамильтона . . . . .   | 35 |
|   | 5. Обобщение теоремы Гамильтона – Якоби . . . . .  | 42 |

## II. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

- |   |   |    |
|---|---|----|
| 3 | ◇ <i>В. В. Козлов, Н. Н. Колесников.</i> О теоремах динамики . . . . .  | 51 |
| 4 | ◇ <i>А. П. Маркеев.</i> Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью . . . . . | 59 |
| 5 | ◇ <i>Ю. Н. Федоров.</i> О движении твердого тела в шаровом подвесе . . . . .  | 63 |
| 6 | ◇ <i>А. В. Борисов, Ю. Н. Федоров.</i> О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики . . . . .                               | 67 |
| 7 | ◇ <i>А. В. Борисов, И. С. Мамаев.</i> Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара . . . . .                                     | 71 |
| 8 | ◇ <i>А. А. Килин.</i> Динамика шара Чаплыгина в абсолютном пространстве . . . . .   | 76 |
|   | 1. Введение . . . . .   | 76 |
|   | 2. Уравнения движения и их интегрирование . . . . .   | 77 |
|   | 2.1. Уравнения движения и интегралы . . . . .   | 77 |
|   | 2.2. Интегрирование уравнений движения в случае нулевой константы площадей . . . . .  | 78 |

2.3. Интегрирование уравнений движения в случае ненулевой константы площадей . . . . .	83
3. Бифуркационная диаграмма, периодические решения и точка контакта . . . . .	86
3.1. Случай $(M, \gamma) = 0$ . . . . .	86
3.2. Случай $(M, \gamma) \neq 0$ . . . . .	86
3.3. Случай $M \parallel \gamma$ . . . . .	91
4. Качение шара с гироскопом . . . . .	95
<b>9</b> $\diamond$ <b>А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. А. Килин.</b> Динамика качающегося диска . . . . .	99
1. Введение . . . . .	99
2. Качение твердого тела по плоскости . . . . .	101
2.1. Уравнения движения и их интегралы . . . . .	101
2.2. Качение тяжелого диска . . . . .	103
2.3. Приведение к интегрируемой одностепенной гамильтоновой системе . . . . .	104
2.4. Квадратуры для углов собственного вращения и прецессии . . . . .	107
2.5. Движение точки контакта . . . . .	107
3. Качественный анализ и результаты . . . . .	108
3.1. Бифуркационный анализ приведенной системы . . . . .	109
3.2. Качественный анализ движения апексов . . . . .	112
3.3. Анализ движения точки контакта . . . . .	115
<b>10</b> $\diamond$ <b>А. В. Борисов, И. С. Мамаев.</b> Шар Чаплыгина, задача Суслова и задача Веселовой. Интегрируемость и реализация связей . . . . .	118
1. Задача Суслова. Уравнения движения и квадратуры . . . . .	118
2. Задача Веселовой . . . . .	122
3. Некоторые замечания. Многомерные обобщения . . . . .	125
4. Качение шара Чаплыгина по прямой (А. П. Веселов, Л. Е. Веселова) . . . . .	126
5. Универсальная реализация связей задачи Чаплыгина, Суслова и Веселовой и их комбинаций . . . . .	127
<b>11</b> $\diamond$ <b>А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. А. Килин.</b> Интегрируемость качения шара по произвольному цилиндру . . . . .	131
1. Уравнения движения шара по поверхности и их интегралы . . . . .	131
2. Движение по цилиндру . . . . .	133
3. Эллиптический цилиндр. Компьютерные иллюстрации . . . . .	136
<b>12</b> $\diamond$ <b>А. В. Борисов, И. С. Мамаев.</b> Препятствие к гамильтоновости неголомомных систем . . . . .	138

<b>13</b> ♦ <b>Список известных интегрируемых задач неголономной механики</b> . . . . .	143
---	-----

### **III. ИЕРАРХИЯ ДИНАМИКИ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ**

<b>14</b> ♦ <b>В. В. Козлов. К теории интегрирования уравнений неголономной механики</b> . . . . .	149
1. Введение . . . . .	149
2. Дифференциальные уравнения с инвариантной мерой . . . . .	150
3. Задача С. А. Чаплыгина . . . . .	153
4. Обобщение задачи С. А. Чаплыгина . . . . .	155
5. Задача Г. К. Суслова и ее обобщения . . . . .	157
6. Использование первых интегралов в качестве связей . . . . .	162
7. Симметрии неголономных связей . . . . .	164
8. Существование инвариантной меры . . . . .	167
<b>15</b> ♦ <b>А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Качение твердого тела по плоскости и сфере. Иерархия динамики</b> . . . . .	173
1. Уравнения движения твердого тела по плоскости и сфере без проскальзывания (неголономное качение) . . . . .	174
2. Тело на плоскости . . . . .	176
3. Тело на сфере . . . . .	193
4. Заключение . . . . .	202
<b>16</b> ♦ <b>А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. А. Килин. Качение шара по поверхности. Новые интегралы и иерархия динамики</b> . . . . .	206
1. Введение . . . . .	206
2. Уравнения движения шара по поверхности . . . . .	207
3. Движение шара по поверхности вращения . . . . .	209
4. Качение шара по поверхностям второго порядка — неголономная задача Якоби . . . . .	221
5. Движение шара по цилиндрической поверхности . . . . .	226

### **IV. ДИНАМИКА КЕЛЬТСКИХ КАМНЕЙ**

<b>17</b> ♦ <b>А. П. Маркеев. О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости</b> . . . . .	235
<b>18</b> ♦ <b>А. В. Карапетян, А. С. Кулешов. Стационарные движения неголономных систем</b> . . . . .	247
1. Общие положения теории Рауса . . . . .	248
2. Механические системы с симметрией . . . . .	252

3.	Стационарные движения шара на абсолютно шероховатой плоскости . . . . .	257
4.	Стационарные движения неголономных систем Чаплыгина. Общая теория . . . . .	264
5.	Динамика кельтского камня . . . . .	272
6.	Стационарные движения неголономных систем с неизвестными первыми интегралами . . . . .	281
7.	Стационарные движения диска на абсолютно шероховатой плоскости . . . . .	284
8.	Заключение . . . . .	291
<b>19</b>	<b>◇ А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Странные аттракторы в динамике кельтских камней . . . . .</b>	<b>296</b>
1.	Исторические комментарии и уравнения движения . . . . .	296
2.	Модели поверхности — параболоид и эллипсоид . . . . .	299
3.	Переменные Андуайе–Депри и трехмерные отображения Пуанкаре . . . . .	300
4.	Симметрии потока и отображения . . . . .	301
5.	Устойчивость перманентных вращений (И. А. Астапов, А. В. Карапетян) . . . . .	303
6.	Бифуркация Хопфа. Рождение цикла (А. В. Карапетян) . . . . .	304
7.	Нелинейные колебания вблизи положения равновесия (А. П. Маркеев) . . . . .	305
8.	Несуществование инвариантной меры (В. В. Козлов) . . . . .	307
9.	Численные исследования Линдберга, Лонгмана . . . . .	307
10.	Глобальная динамика кельтского камня . . . . .	308
	Приложение 1. Интегрирование кельтского камня . . . . .	321
	Приложение 2. Пример обратимого отображения плоскости . . . . .	324



I

---

**ВВЕДЕНИЕ. УРАВНЕНИЯ  
ДВИЖЕНИЯ И ИСТОРИЧЕСКИЕ  
КОММЕНТАРИИ**



# КРАТКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКИ

*А. В. Борисов, И. С. Мамаев*

В этом введении мы хотим выделить основные аспекты развития механики неголономных систем не столько с исторической точки зрения, а по степени влияния различных работ на последующее развитие теории динамических систем. С этой точки зрения многие направления, на которые были затрачены большие усилия, оказались мало востребованными современной наукой, с другой стороны, исследования, которым не придавали большой роли — вновь возрожденными к жизни и получившими новое развитие. Мы также сразу укажем на свое негативное отношение к излишнему современному формализму в динамике, который, вообще говоря, связан с ее недавней бурбакизацией. Как и во всей математике, механике и в обсуждаемой книге области, такого сорта методы почти ни к чему не привели и мы здесь подчеркиваем свое предпочтение к исследованию конкретных систем, обнаружению действительных динамических эффектов в новых и классических задачах. Эти положения и продиктовали выбор работ для этого сборника.

В развитии неголономной механики можно выделить два направления, в каждом из которых имеются интересные исследования. *Одно из них* связано с общим формализмом уравнений динамики, который отличается от лагранжева и гамильтонова метода составления уравнений движения. Исторически ряд ошибок известных математиков, среди которых можно назвать К. Неймана [33] и Э. Линделефа [32] был связан с некорректностью применения уравнений Лагранжа при наличии неинтегрируемых связей для описания задачи о качении тела без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Общее понимание неприменимости уравнений Лагранжа и вариационных принципов в неголономной механике принадлежит Г. Герцу, который обсуждает эти вопросы

в своем фундаментальном труде «Принципы механики, изложенные в новой связи» [4]. Заметим, что этот труд в основном посвящен концепции скрытых циклических параметров (координат, масс), которую Герц противопоставлял обычному представлению о взаимодействии как результате действия сил.

Замечания Герца развил А. Пуанкаре [13] в своей известной работе «Идеи Герца в механике», из которой здесь мы приведем несколько абзацев, иллюстрирующих взгляды обоих ученых.

«Герц называет системы *голономными*, если связи не позволяют непосредственно переходить из одного положения в другое бесконечно близкое положение, то они не позволяют также переходить от первого положения ко второму косвенно. В таких системах существуют только жесткие связи.

Видно, что наша сфера<sup>1</sup> не является голономной системой.

Итак, бывает, что принцип наименьшего действия не применим к неголономным системам. Действительно, можно перейти от положения  $A$  к положению  $B$  таким путем, который мы только что рассмотрели, и, несомненно, множеством других путей. Среди всех этих путей есть, очевидно, один, который соответствует наименьшему действию. Следовательно, сфера должна была бы быть в состоянии проследовать по этому пути из  $A$  в  $B$ . Но это не так: каковы бы ни были начальные условия движения, сфера никогда не перейдет из  $A$  в  $B$ .

Более того, если сфера действительно переходит из положения  $A$  в положение  $A'$ , она не всегда движется тем путем, который соответствует минимальному действию.

Принцип наименьшего действия больше не является верным.

«В этом случае, — говорит Герц, — сфера, которая подчинялась бы этому принципу, казалась бы живым существом, которое сознательно преследовало бы определенную цель, тогда как сфера, которая следовала бы закону природы, имела бы вид неодушевленной однообразно катящейся массы... Но подобных связей в природе не существует. Так называемое качество без проскальзывания является на самом деле качеством с небольшим проскальзыванием. Это явление входит в ряд необратимых явлений, таких как трение, еще плохо изученных, к которым мы еще не умеем применять истинные принципы Механики.»

«Качение без проскальзывания, — ответим мы, — не противоречит ни закону сохранения энергии, ни какому-либо из известных законов физики. Это явление может быть осуществлено в наблюдаемом мире с такой точностью, которая позволяет использовать его для конструирования самых точных машин интегрирования (планиметры, гармонические анализаторы и т. д.) Мы не имеем никакого права исключать его как невозможное. Проблемы же наши остаются независимо от того, реализуется ли такое качество в точности или же лишь приблизительно. Для того, чтобы принять принцип, необходимо потребовать, чтобы его применение к задаче, данные которой близки к точным, давало бы и близкие к точным результаты. К тому же, другие, жесткие связи также лишь

---

<sup>1</sup>Здесь рассматривается сфера, катящаяся по плоскости без проскальзывания.

приблизительно осуществимы в природе. Однако их ведь не исключают из рассмотрения . . . »

Основное отличие неголономной механики от обычной лагранжевой состоит в том, что уравнения связей, записанные через обобщенные координаты  $q_j$  и обобщенные скорости  $\dot{q}_j$  в виде

$$f_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \quad (1)$$

не могут быть представлены в конечном (интегральном) виде

$$F_i(\mathbf{q}, t) = 0, \quad (2)$$

задающем ограничения только на обобщенные координаты. В этом смысле говорят, что связи являются неинтегрируемыми (дифференциальными). По Герцу [4] они также называются неголономными<sup>2</sup>.

Исторически первой общей формой уравнений неголономной механики следует считать уравнения Феррерса с неопределенными множителями  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  (1871 г.)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}. \quad (3)$$

В уравнениях (3)  $T$  — кинетическая энергия,  $Q_i$  — обобщенные силы, а  $\lambda_j$  являются неопределенными множителями, которые, вообще говоря, однозначно восстанавливаются из условия связи  $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ . Рассматриваемые в неголономной механике связи, как правило, являются линейными по обобщенным скоростям

$$f_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_k a_{ik}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_k + a_i(\mathbf{q}, t) = 0. \quad (4)$$

Именно такие связи реализуются в содержательных задачах. Тем не менее, Больцманом и Гамелем был указан несколько искусственный пример нелинейной неголономной связи. Феррерс также исключил неопределенные множители и получил некоторый аналог лагранжевых уравнений движения [27].

Кроме уравнений Феррерса в неголономной механике используются также уравнения Аппеля, Чаплыгина, Маджи, Вольтерра, Больцмана —

---

<sup>2</sup>Термин голономный происходит от двух греческих слов  $\delta\lambda\omicron\varsigma$  (целый, интегрируемый) и  $\nu\omicron\mu\omicron\varsigma$  (закон).

Гамеля. Такое разнообразие форм уравнений, вообще говоря, не является значительным продвижением. Все эти формы связаны с различными способами исключения неопределенных множителей и на практике, как правило, не используются. *При составлении конкретных уравнений движения, связанных, например, с качением обычно пользуются общими уравнениями динамики или универсальными уравнениями в форме (3).*

В качестве интересного факта отметим, что, например, С. А. Чаплыгин, получивший общую форму уравнений неголономной механики, носящей его имя, при решении конкретных неголономных задач (принесших ему мировую известность) пользовался не этими уравнениями, а общими принципами динамики. С другой стороны, известный киевский механик П. В. Воронец, также получивший общие динамические неголономные уравнения, кстати говоря, имеющие очень громоздкую форму, настойчиво старался использовать их при изучении конкретных систем. К сожалению, во многих случаях это привело лишь к неоправданным усложнениям в анализе и, видимо, только препятствовало открытию новых динамических результатов.

*Второе направление*, имеющее, по нашему мнению, для динамики существенно большее значение представляет собой исследования, связанные с анализом конкретных неголономных систем. Первые постановки подобных задач восходят к Э. Раусу, С. А. Чаплыгину, П. В. Воронцу, П. Аппелю и Г. К. Суслову, которые нашли замечательные интегрируемые ситуации и дали их аналитическое и качественное описание. Большинство из этих задач опять же связано с качением тел. Кроме нахождения интегрируемых случаев было выполнено множество исследований устойчивости частных решений (как правило, стационарных вращений) для общих, неинтегрируемых, систем. Среди них наиболее известны исследования, связанные с устойчивостью вращений вокруг вертикальной оси так называемого *кельтского камня*, который демонстрирует удивительную зависимость устойчивости от направления вращения. Наиболее полные аналитические результаты получены здесь А. В. Карапетяном, И. С. Астаповым, А. П. Маркеевым, М. Паскаль, которые, тем не менее, не решили полностью проблему описания эволюции такой системы (предварительные численные результаты имеются в [31]). До сих пор имеется ряд свойств кельтских камней, отличающихся несовпадением геометрических и динамических осей, не получивших надлежащего теоретического объяснения. Новые подходы к этой задаче, использующие в основном современные численно-аналитические методы содержатся в работе авторов (см. статью 19 этого сборника).

В последние два десятилетия развитие исследований неголономных систем связано с нахождением новых интегрируемых задач, которые принадлежат В. В. Козлову, А. П. Маркееву, А. П. и Л. Е. Веселовым,

Ю. Н. Федорову и авторам, а также с компьютерными и качественными исследованиями как в интегрируемых, так и в неинтегрируемых ситуациях. Основные работы указанных авторов собраны в этом сборнике, эти результаты также систематизированы в написанных нами обзорных статьях 15, 16.

С другой стороны, укажем также на ряд работ [21, 22, 23, 25], в которых содержится некоторая информация методического характера о различных способах записи неголономных систем. В работе [35] предложена почти гамильтонова форма записи уравнений неголономной механики (кососимметричная форма записи без сохранения тождества Якоби), без обсуждения препятствий к гамильтоновости. Один из динамических эффектов, препятствующих существованию пуассоновой структуры, связанный с несуществованием инвариантной меры и асимптотическими свойствами был отмечен В. В. Козловым в фундаментальной работе [10] (см. статью 14 этого сборника).

Любопытно, что работы С. А. Чаплыгина [16, 17, 18], Г. К. Сулова [15], В. Вагнера [2], В. В. Козлова [10] не были переведены на иностранные (в частности, английский) языки и оказались недоступными большинству западных специалистов. Вследствие этого возникли пересечения полученных результатов, а также различные подходы при обсуждении сходных проблем (например, проблемы интегрируемости). В качестве замечания только отметим, что для русской школы более характерным оказалось исследование конкретных задач, а для западной — общего геометрического и динамического формализма. По-видимому, формальное перенесение многих известных фактов гамильтоновой механики (циклические координаты, отображение момента и пр.) на неголономную ситуацию не всегда оправдано. Здесь ситуация аналогична с множеством форм записи неголономных уравнений движения — *в конкретных задачах большинство результатов общего формализма совсем не используется и на первый план выходят совсем другие вопросы, касающиеся характерных динамических эффектов неголономных систем.*

Укажем здесь на также сравнительно недавние замечательные исследования В. А. Ярошук [19, 20], обнаружившей новые случаи существования инвариантной меры, а также работы А. В. Карапетяна [7] и В. В. Козлова [9], посвященных вопросу реализации неголономных связей. Эти работы развивают более ранние исследования К. Каратеодори [24], который связывал вопрос происхождения неинтегрируемых связей с наличием сил вязкого трения с бесконечно большим коэффициентом вязкости. Относительно других моделей динамики систем с неинтегрируемыми связями — о механике Дирака и вакономной механике можно прочитать в обзорах [1, 36].

С современными достижениями в исследовании устойчивости неголономных систем можно познакомиться по книге [8], более элементарные вопросы разобраны в [12, 14].

По неголономной механике имеется всего лишь две специальные монографии, принадлежащие Ю. И. Неймарку, Н. А. Фуфаеву [12] и В. В. Добронравову [6]. Они уже сильно устарели, а вторая из них содержит также множество некорректных утверждений. Более поздние обзоры, принадлежащие Ф. Гриффитсу [5], А. М. Вершику и В. Я. Гершковичу [3] можно отнести скорее к неголономной геометрии (восходящей к Картану, Вагнеру и Рашевскому), поскольку в них не обсуждаются собственно проблемы неголономной динамики. Кроме того, в упомянутых работах, например, уравнения движения постулируются из вариационного принципа, несправедливость которого для неголономной механики была указана еще Г. Герцем и А. Пуанкаре. При этом, например, для качения диска на плоскости получаются уравнения вакономной механики, которые не описывают качение тел. (В вакономной механике связи реализуются при помощи присоединенных масс — с подобными вопросами можно ознакомиться по работам [1, 9].) По-видимому, из теоретических работ только работа В. Вагнера [2] представляет интерес для динамики (в которой, кстати, Вагнер привел чисто механическую интерпретацию связи задачи Суслова в отличие от ошибочной реализации той же связи, данной самим Сусловым [15]).

Существенно более современной по сравнению с указанными монографиями и обзорами является замечательная книга А. П. Маркеева [11]. В настоящем сборнике мы приводим две работы А. П. Маркеева, — о динамике кельтского камня и об интегрируемом движении шара, несущего гиростат.

В заключении отметим также, что на многих исторических подробностях и новых достижениях, не упомянутых в этом очерке, мы останавливаемся в двух наших работах, посвященных качению твердого тела по неподвижной поверхности без проскальзывания — классической области приложения неголономной динамики. В сборнике представлена также статья А. С. Сумбатова (см. статью 2), специально посвященная некоторым аспектам истории неголономных систем, опущенных в этом очерке.

В заключение укажем полученные нами и нашими учениками новые результаты в неголономной механике, вошедшие в этот сборник: открытие иерархии динамики неголономных систем, новые интегрируемые случаи в задачах о качении тела по поверхности, описание странного аттрактора в динамике кельтского камня. Мы считаем также, что этими результатами открывается новая страница в исследовании неголономных систем, связанная с эффективным использованием компьютерных мето-



дов (систем аналитических вычислений, визуализации движения, численных экспериментов). На этом пути могут быть получены результаты, о которых было даже сложно было предполагать, владея только аналитическими методами. Видимо, в этом новом направлении исследований и будут происходить основные открытия в ближайшие десятилетия.

## Литература

- [1] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Скобки Дирака в геометрии и механике. В кн. *Дирак П.* Лекции по теоретической физике. Ижевск, 2001, 230 с.
- [2] *Вагнер В.* Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1941, вып. 5, с. 301–327.
- [3] *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи. ВИНТИ, 1987, Итоги науки и техники: Фундаментальные направления, т. 16, с. 5–85.
- [4] *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959, 386 стр. Пер. с нем.: *Hertz H.* Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Ges. Werke, Bd. 3, Leipzig, Barth., 1910, 3129.
- [5] *Гриффитс П. А.* Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. М.: Мир, 1986.
- [6] *Добронравов В. В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высшая школа, 1970, 271 с.
- [7] *Карапетян А. В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивость кельтских камней. ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 42–51.
- [8] *Карапетян А. В.* Устойчивость стационарных движений. УРСС, 1998, 150 с.
- [9] *Козлов В. В.* О реализации неинтегрируемых связей в классической механике. ДАН СССР, 1983, т. 272, №3.
- [10] *Козлов В. В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики. Успехи механики. 1985. т. 8. №3. с. 85–101. (См. статью 14).
- [11] *Маркеев А. П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992, 336 с.
- [12] *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967, 519 с.
- [13] *Пуанкаре А.* Идеи Герца в механике. В кн. *Последние работы А. Пуанкаре*, пер. с франц. Ижевск: Изд-во «РХД», 2001.
- [14] *Рубановский В. Н., Самсонов В. А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988, 304 с.

- [15] *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М., Гостехиздат, М–Л, 1946, 655 с.
- [16] *Чаплыгин С. А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Матем. сб., 1911, т. 28, вып. 2.
- [17] *Чаплыгин С. А.* О катании шара по горизонтальной плоскости. Собр. соч. т. 1, М.–Л., ОГИЗ, 1948, с. 76–101.
- [18] *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелого твердого тела вращения на горизонтальной плоскости. Собр. соч. т. 1, М.–Л., ОГИЗ, 1948, с. 57–75.
- [19] *Ярошук В. А.* Новые случаи существования интегрального инварианта в задаче о качении твердого тела без проскальзывания по неподвижной поверхности. Вестник МГУ, Сер. 1, мат., мех., 1992, №6, с. 26–30.
- [20] *Ярошук В. А.* Интегральный инвариант в задаче о качении без скольжения эллипсоида со специальным распределением масс по неподвижной плоскости. Изв. РАН, Мех. тв. тела, 1995, №2, с. 54–57.
- [21] *Bates L., Cushman R.* What is a completely integrable nonholonomic dynamical system? Rep. on Math. Phys., 1999, v. 44, №1/2, p. 29–35.
- [22] *Bates L., Śniatycki J.* Nonholonomic reduction. Rep. on Math. Phys., 1993, v. 32, №1, p. 99–115.
- [23] *Bloch A. M., Krishnaprasad P. S., Marsden J. E., Murray R. M.* Nonholonomic mechanical systems with symmetry. Arch. Rational Mech. Anal., 1996, v. 136, p. 21–99.
- [24] *Caratheodory C.* Der Schlitten. ZAMM, 1933, B. 13, S. 71–76.
- [25] *Cushman R., Kemppainen D., Śniatycki J., Bates L.* Geometry of nonholonomic constraints. Rep. on Math. Phys., 1995, v. 36, №2/3, p. 275–286.
- [26] *Cushman R., Hermans J., Kemppainen D.* The rolling disk. 1995, preprint University of Calgary, 51 p.
- [27] *Ferrers N. M.* Extension of Lagrange's equations. Quart. J. of pure and applied mathematics. 1872, V. 12, № 45, P. 1–5.
- [28] *Hermans J.* A symmetric sphere rolling on a surface. Nonlinearity, 1995, v. 8(4), p. 493–515.
- [29] *Kholmskaya A. G.* Motion of a disk within a sphere. Regular and Chaotic Dynamics, 1998, V. 3, №2, P. 74–81.
- [30] *Kholmskaya A. G.* On a disk rolling within a sphere. Regular and Chaotic Dynamics, 1998, V. 3, №1, P. 1–7.
- [31] *Lindberg R. E., Longman R. W.* On the dynamic behavior of the wobblestone. Acta Mech., 1983, V. 49, P. 81–94.
- [32] *Lindelöf E.* Sur le mouvement d'un corps de revolution roulant sur un plan horizontal. Acta Societ., Scient., Fennicae, 1985, t. 20, №10, p. 1–18.

- [33] *Neumann C.* Über die rollende Bewegung einer Körper auf einer gegebenen Horizontal Ebene unter dem Einfluss der Schwerkraft. *Math. Annal.*, 1886, Bd. 27, S. 478–505.
- [34] *O'Reilly O.M.* The Dynamics of rolling disks and sliding disks. *Nonlinear Dynamics*, 1996, v. 10, p. 287–305.
- [35] *van der Schaft A.J., Maschke B.M.* On the hamiltonian formulation of nonholonomic mechanical systems. *Rep. on Math. Phys.*, 1994, v. 34, №2, p. 225–233.
- [36] *Weber R.* Hamiltonian systems with constraints and their meaning in mechanics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1986, v. 91, p. 309–335.

# НЕГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ<sup>1</sup>

*А. С. Сумбатов*

## 1. Введение

Термин «неголономная система» в механику ввел Г. Герц [64]. Так называются материальные системы, стесненные связями, которые налагают ограничения на скорости точек системы, но не ограничивают положение (конфигурацию) системы.

Более точно. Пусть в области  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  заданы  $m$  векторных полей  $X_1, \dots, X_m$ . Координаты каждого из векторов  $X_i$  обозначаются  $\xi_i^1(x_1, \dots, x_n), \dots, \xi_i^n(x_1, \dots, x_n)$  и предполагаются непрерывно дифференцируемыми функциями до  $k$ -го порядка включительно. Каждому вектору  $X_i$  сопоставим оператор

$$X_i = \xi_i^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \xi_i^n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Траектории каждого такого оператора  $X_i$  определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt_i} = \xi_i^1(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{dx_n}{dt_i} = \xi_i^n(x_1, \dots, x_n),$$

где  $t_i$  — параметр, к которому отнесены траектории оператора  $X_i$ .

В  $n$ -мерной области  $G$  в каждой точке векторы  $X_i$  образуют  $m$ -мерное направление. Поле этих  $m$ -мерных направлений называется вполне неголономным, если система дифференциальных уравнений с частными производными

$$X_1 f = X_2 f = \dots = X_m f = 0,$$

где  $f(x_1, \dots, x_n)$  — искомая функция, имеет только тривиальное решение  $f \equiv \text{const}$ . Как известно, для этого достаточно, чтобы среди операторов  $X_1, \dots, X_m$  и полученных из них составлением коммутаторов

<sup>1</sup>Sumbatov A. S. *Nonholonomic systems*, Reg. & Chaot. Дуп., 2002, V. 7, №2, p. 221–238.

(нагромождая коммутаторов друг на друга, если требуется) нашлись  $n$  линейно независимых операторов во всех точках области  $G$ .

Пусть операторы  $X_1, \dots, X_m$  порождают вполне неголономное поле  $m$ -мерных направлений в области  $G$ . Тогда из любой точки области  $G$  можно попасть в любую другую точку этой области, смещаясь конечное число раз по траекториям операторов  $X_1, X_2, \dots, X_m$  [24].

Неголономные связи возникают в системах с качением твердых тел по поверхностям без скольжения. В качестве примера рассмотрим тяжелый однородный обруч радиуса 1, который катится и вертится по неподвижной горизонтальной плоскости. Выберем неподвижные оси  $OX$  и  $OY$  в опорной плоскости, а неподвижную ось  $OZ$  направим вертикально вверх. Пусть  $\xi, \eta, z$  — координаты центра тяжести  $G$  обруча относительно этих осей, а  $\varphi, \psi, \theta$  — эйлеровы углы поворота обруча вокруг осей Кенига  $GX'Y'Z'$ , параллельных неподвижным осям  $OXYZ$ .

Уравнения связей имеют вид [48]:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} - \dot{\theta} \sin \psi \sin \theta + \dot{\psi} \cos \psi \cos \theta + \dot{\varphi} \cos \psi &= 0, \\ \dot{\eta} + \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta + \dot{\psi} \sin \psi \cos \theta + \dot{\varphi} \sin \psi &= 0, \\ \dot{z} - \dot{\theta} \cos \theta &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Третье уравнение выражает конечную геометрическую связь  $z = \cos \theta$ , а два первых уравнения — неголономные связи. Действительно, в каждой точке  $(\xi, \eta, \theta, \psi, \varphi)$  конфигурационного многообразия они задают 3-х мерное направление с базисными векторами, например, равными

$$\begin{aligned}X_1 &= \sin \psi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \xi} - \cos \psi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ X_2 &= -\cos \psi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \psi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \psi}, \\ X_3 &= -\cos \psi \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \psi \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

Поле этих 3-х мерных направлений является вполне неголономным, так как операторы  $X_1, X_2, X_3$  и<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}X_4 &= (X_2, X_3) = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} - \cos \psi \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ X_5 &= (X_2, X_4) = \cos \psi \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \psi \frac{\partial}{\partial \eta}\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Здесь  $(\cdot, \cdot)$  — коммутатор векторных полей. — *Прим. ред.*

линейно независимы в каждой точке  $(\xi, \eta, \theta, \psi, \varphi)$  конфигурационного многообразия. Следовательно, из любого положения обруч можно перекатить (в соответствии с уравнениями связей (1.1)) в другое положение, в котором обруч касается произвольно заданной точкой своего обода заранее определенной произвольной точки опорной плоскости и при этом имеет произвольно заданную ориентацию в пространстве. Впрочем, это утверждение геометрически очевидно.

## 2. Примеры неголономных связей, идеальных по Лагранжу

Самый широкий класс идеальных неголономных связей, встречающихся в классической механике, дают системы, в которых твердые тела, имея точечный контакт с неподвижными или подвижными опорными поверхностями, катаются по ним или вертятся без скольжения. Если  $\mathbf{v} = 0$  — мгновенная относительная скорость точки тела, которой оно в рассматриваемое мгновение касается опоры, то при любом возможном (виртуальном) перемещении тела выполняется условие  $\delta \mathbf{v} = 0$  [48], и, следовательно, виртуальная работа сосредоточенной силы реакции опоры  $\mathbf{R}$  на этом перемещении равна нулю:  $\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$ . Связи, которые реализуются силами, не совершающими работы на *всех* возможных перемещениях системы, называются идеальными (по Лагранжу).

Кроме указанного класса идеальных неголономных связей есть еще несколько примеров механических систем с принципиально другими неголономными связями, также идеальными по Лагранжу.

Первый пример предложен С. А. Чаплыгиным [40]. Твердое тело опирается на горизонтальную плоскость тремя точками; две из этих точек представляют свободно скользящие ножки; третья есть точка  $A$  прикосновения острого колесика (лезвия), горизонтальная ось которого зафиксирована в движущемся теле. Колесико не может скользить в направлении, перпендикулярном к его плоскости. Это кинематическое условие записывается так:

$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0, \quad (2.1)$$

где  $(x, y)$  — плоские координаты точки касания  $A$ ,  $\varphi$  — угол между неподвижной осью  $OX$  и плоскостью колесика. Физически, острое колесико как бы врезается в опорную плоскость, образуется неглубокая бороздка, вдоль которой колесико может легко скользить, но которая препятствует смещению колесика в поперечном направлении. С другой стороны,

в число кинематически допустимых связью (2.1) движений входит вращение тела вокруг точки  $A$ , «бороздка» тоже мешает такому движению. Чтобы как-то сгладить этот эффект, лезвие предполагается не плоским (конек), а круглым (колесико). Описанную систему называют иногда «санями Чаплыгина».

Второй пример дан Г. К. Суловым [34]. Два твердых тела вращаются вокруг своих неподвижных точек и связаны друг с другом длинным гибким нескручиваемым тросом, толщиной которого пренебрегают. Предполагается, что закрепление троса к поверхности тела выполнено так, что касательная  $\tau$  к тросу в точке закрепления фиксирована в теле. Условие нескручивания троса приводит к кинематическому условию — проекция мгновенной угловой скорости вращения тела на направление  $\tau$  равна нулю. Это неголономная связь. Один конец троса может быть присоединен к оси часового механизма ( $\omega_\tau = \text{const}$ ) или закреплен неподвижно ( $\omega_\tau = 0$ ).<sup>2</sup>

П. В. Воронец [5] рассматривал общие линейные интегралы некоторых голономных систем с нулевыми значениями постоянных интегрирования как неголономные связи. Строго говоря, первые интегралы никаких кинематических ограничений на систему не налагают, поскольку не требуют для своей реализации приложения дополнительных сил. Но формально условие идеальности выполняется  $\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \cdot \delta \mathbf{r} = 0$ , и можно понизить порядок системы уравнений движения, составляя уравнения в формах, разработанных для неголономных систем.

Все предыдущие примеры относятся к случаю линейных по скоростям идеальных неголономных связей. Теоретически можно рассматривать и нелинейные неголономные связи, однако конструирование и проверка условия идеальности таких связей остаются проблематичными. В работе [49] рассматривалась система с идеальными линейными неголономными связями, из которой путем предельного перехода по одному из параметров, понижающего порядок системы дифференциальных уравнений движения (см. также [62, 18]), получается система с нелинейной связью

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \dot{z}^2 \quad (a = \text{const}) \quad (2.2)$$

и лагранжианом  $L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2 - mgZ$  тяжелой частицы массы  $m$ . Этот пример Аппеля является едва ли не единственным для иллюстрации некоторых общетеоретических построений в механике систем с идеальными по Лагранжу нелинейными неголономными связями.

<sup>2</sup>О другом возможном способе реализации связи задачи Сулова и иных различных в способах реализации неголономных связей сказано в статье 10 настоящего сборника. — *Прим. перев.*

### 3. Уравнения движения

Ж.Л. Лагранж предложил универсальную форму уравнений движения для систем с идеальными связями, при этом не требуя, чтобы записанные в дифференциальной форме уравнения связей

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(t, q) \delta q_j = 0 \quad (i = k + 1, \dots, n) \quad (3.1)$$

приводились к конечным уравнениям

$$f_i(t, q) = c_i. \quad (3.2)$$

Это уравнения Лагранжа 1-го рода с множителями  $\lambda_i$  связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum \lambda_i a_{ij} \quad (3.3)$$

(обозначения общепринятые).

Если механическая система стеснена только конечными идеальными связями (3.2) ( $\text{rank} \left\| \frac{\partial f}{\partial q} \right\| = n - k$ ), то порядок уравнений (3.3) можно понизить на  $2(n - k)$  единиц [67]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T^*}{\partial q_s} = Q_s^* \quad (s = 1, \dots, k). \quad (3.4)$$

Здесь  $T^*(t, q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k)$  — сужение функции  $T(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  на касательное расслоение конфигурационного многообразия (3.2) системы, обобщенные силы

$$Q_s^* = Q_s + \sum Q_i b_{is}$$

соответствуют локально независимым обобщенным (лагранжевым) координатам  $q_1, \dots, q_s$ , а уравнения (3.1) переписываются в виде

$$\delta q_i = \sum_{s=1}^k b_{is} \delta q_s \quad (i = k + 1, \dots, n). \quad (3.5)$$

Для систем с неголономными идеальными связями уравнения движения не имеют, вообще говоря, формы (3.4) уравнений Лагранжа 2-го рода. По-видимому, первым на это ясно указал Н. Феррерс [60]. Тем не менее, спустя десятилетия после его работы, появились ошибочные



публикации применения уравнений Лагранжа (3.4) [54, 69], принципа Гамильтона [71], метода Якоби [57] при решении некоторых задач с неинтегрируемыми связями.

Следуя Феррерсу, напомним, что уравнения неголономных связей имеют вид

$$\dot{x} = \Theta \cdot \dot{\theta} + \Phi \cdot \dot{\varphi} + \Psi \cdot \dot{\psi} + \dots, \quad (3.6)$$

где  $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots)$  — «зависимые скорости» материальных точек системы  $(\theta, \varphi, \psi, \dots)$  — «обобщенные координаты, через которые выражаются живая сила  $2T$  и потенциальная энергия  $U$ ». Так как

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{\theta}} \right) = \dot{x} \frac{d\Theta}{dt} + \ddot{x}\Theta \quad \text{и т. д.},$$

то из принципа Даламбера, записанного для данной системы материальных точек,

$$\sum (m\ddot{x} - F_x)\delta x = \sum m\ddot{x}\delta x - \delta U = \sum \left[ \left( m\ddot{x}\Theta - \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \delta \theta + \dots \right] = 0$$

следуют уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \sum m\dot{x} \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad (3.7)$$

и т. д. для каждой из обобщенных координат.

Когда уравнения связей (3.6) интегрируемы, то

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \dots,$$

следовательно,

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta}, \dots,$$

и уравнения (3.7) становятся уравнениями Лагранжа 2-го рода. В частности, если для какой-либо одной из обобщенных координат, например  $\theta$ , выполняются условия

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \dots, \quad (3.8)$$

то уравнение (3.7) для  $\theta$  примет вид уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Условия (3.8), заметил Феррерс, выполняются для угла нутации  $\theta$  в задаче о качении по горизонтальной плоскости тяжелого однородного обруча (см. уравнения связей (1.1)).

Через 25 лет С. А. Чаплыгин [41] обратился к рассмотренному Феррерсом классу неголономных систем, которые сейчас называют чаплыгинскими [18]. Пусть обобщенные координаты системы разбиваются на два множества  $(q_1, \dots, q_k)$  и  $(q_{k+1}, \dots, q_n)$  так, что кинетическая энергия  $T$ , силовая функция  $U$  и уравнения связей

$$\dot{q}_i = \sum_{s=1}^k b_{is}(q) \dot{q}_s \quad (i = k+1, \dots, n) \quad (3.9)$$

системы не зависят от координат  $(q_{k+1}, \dots, q_n)$ . Чаплыгин также исходит из принципа Даламбера – Лагранжа, исключает в выражении для кинетической энергии  $T$  зависимые скорости  $\dot{q}_i$  с помощью уравнений связей (3.9). В итоге получились известные уравнения Чаплыгина

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T^*}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s} = \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \left\{ \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial b_{is}}{\partial q_r} - \frac{\partial b_{ir}}{\partial q_s} \right) \dot{q}_r \right\}, \quad (3.10)$$

которые явно отличаются от уравнений Лагранжа 2-го рода (3.4) ( $Q_s^* = \frac{\partial U}{\partial q_s}$ ) наличием дополнительных «членов неголономности».

Любопытно, что Чаплыгин фактически никогда не применял своих уравнений при исследовании конкретных неголономных систем, а опирался на общие теоремы динамики. Впрочем, так поступали и другие классики науки [74, 11, 68].

П. В. Воронец [6] вывел уравнения движения консервативных систем с линейными неголономными связями в общем случае, когда  $T$ ,  $U$  и  $b_{is}$  явно зависят от всех обобщенных координат:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s} - \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial(T^* + U)}{\partial q_i} b_{is} - \frac{\partial(T^* + U)}{\partial q_s} = \\ & = \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)^* \left\{ \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial b_{is}}{\partial q_r} + \sum_{p=k+1}^n \frac{\partial b_{is}}{\partial q_p} b_{pr} - \frac{\partial b_{ir}}{\partial q_s} - \sum_{p=k+1}^n \frac{\partial b_{ir}}{\partial q_p} b_{ps} \right) \dot{q}_r \right\} \\ & \quad (s = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

В отличие от (3.10) уравнения Воронца не отделяются от уравнений неголономных связей (3.9) и должны рассматриваться совместно. Воронец применил свои уравнения в классической задаче о качении тела по произвольной поверхности [7].

П. Аппель в первом издании своего «Трактата по рациональной механике» поместил уравнения Лагранжа 2-го рода в главу о неголономных системах. Ошибка была исправлена в последующих изданиях трактата, его автор посвятил целую серию работ системам с неинтегрируемыми связями. Итогом явились уравнения движения неголономных систем в виде [50]

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_s} = Q_s \quad (s = 1, \dots, k < n), \quad (3.11)$$

где  $S = \frac{1}{2} \sum m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)$  — энергия ускорений системы, вычисленная с учетом уравнений связи.

Уравнения (3.11) для систем с голономными удерживающими и неудерживающими связями, в том числе и при использовании квазиординат, еще раньше применял Д. Гиббс [61].

В одной из своих работ [54] Л. Больцман рассмотрел механическую систему с фрикционной передачей: ведущее и ведомое колеса неподвижно закреплены на взаимно перпендикулярных валах, в точке соприкосновения колес нет скольжения, а расстояние от этой точки до центра ведущего колеса есть регулируемая по времени функция. Таким образом, угловые скорости колес связаны неголономным соотношением

$$\omega = a(t)w.$$

Но несмотря на то, что координата  $\omega$  неголономна (квазиордината), Больцман выписал уравнения Лагранжа 2-го рода. Через 17 лет [55] он вернулся к этой системе, исправил ошибку и вывел общие уравнения движения неголономных систем в квазиординатах. Эти уравнения несколько обобщил Г. Гамель [63], и они теперь называются уравнениями Больцмана – Гамеля. Для стационарных систем эти уравнения имеют вид

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_s} - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_j} \gamma_{rs}^j \dot{\pi}_r \right) \Bigg|_{\dot{\pi}_{k+1}=\dot{\pi}_{k+2}=\dots=\dot{\pi}_n=0} = \Pi_s \quad (3.12)$$

$$(s = 1, \dots, k).$$

В этих уравнениях кинетическая энергия системы выражена через

квазискорости  $\dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_n$  (кинематические характеристики)

$$T(q, \dot{q}) = T(q, \dot{\pi}).$$

Последние связаны с обобщенными скоростями  $\dot{q}$  линейными соотношениями

$$\dot{\pi}_j = \sum_{h=1}^n a_{jh}(q) \dot{q}_h \quad (\det \|a_{jh}\| \neq 0),$$

среди которых правые части последних  $n - k$  равенств представляют уравнения

$$\sum_{i=k+1}^n a_{ih} \dot{q}_h = 0 \quad (i = k+1, \dots, n)$$

связей, наложенных на систему. Трехиндексные символы

$$\gamma_{hp}^j = \sum_{u=1}^u \sum_{v=1}^n \left( \frac{\partial a_{jv}}{\partial q_u} - \frac{\partial a_{ju}}{\partial q_v} \right) c_{uh} c_{vp}, \quad \|c_{uv}\| = \|a_{jh}\|^{-1} \\ (i, h, p = 1, \dots, n).$$

Правые части (3.12) суть обобщенные силы, соответствующие независимым вариациям квазикоординат  $\delta\pi_1, \dots, \delta\pi_k$ .

Правила вычисления трехиндексных символов, а также обобщение уравнений (3.12) на случай нестационарных систем со связями и примеры составления этих уравнений приведены в книге [17]. А. И. Лурье, следуя Гамелю, называет их уравнениями Эйлера – Лагранжа. Они представляют собой наиболее общие уравнения динамики.

Аналогичные уравнения в кинематических характеристиках получены В. Вольтеррой [77].

Отметим еще так называемые уравнения Пуанкаре – Четаева [37, 38, 39, 25, 26, 27]. Развивая оптико-механическую аналогию, У. Гамильтон установил, что процесс движения голономной консервативной системы можно рассматривать как постепенное развертывание контактного преобразования, а множество контактных преобразований обладает групповым свойством [78]. Развитие этого представления о движении продолжил А. Пуанкаре [73]. Для консервативных голономных систем с  $k$  степенями свободы он предложил новую форму уравнений движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \eta_s} = \sum_{l=1}^k \sum_{r=1}^k c_{lsr} \frac{\partial T}{\partial \eta_r} \eta_l + X_s(T + U) \quad (s = 1, \dots, k), \quad (3.13)$$

в которой кинетическая энергия  $T$  системы выражена не в обобщенных координатах и скоростях  $(q, \dot{q})$ , как в уравнениях Лагранжа, а в переменных  $(q, \eta)$ , где  $\eta_s dt$  ( $s = 1, \dots, k$ ) — параметры действительных перемещений. Переход от состояния системы  $(q_1, \dots, q_k)$  к состоянию бесконечно близкому  $(q_1 + \dot{q}_1 dt, \dots, q_k + \dot{q}_k dt)$  осуществляется бесконечно малым преобразованием группы

$$\sum_{s=1}^k \eta_s dt X_s(f),$$

так что

$$\dot{q}_r = \frac{dq_r}{dt} = \sum_{s=1}^k \eta_s X_s^r \quad (r = 1, \dots, k).$$

Здесь  $\left\{ X_l = \sum_{s=1}^k X_l^s(q) \frac{\partial}{\partial q_s} \right\}$  — замкнутая система инфинитезимальных операторов, которая, согласно обратной второй теореме С. Ли, задает непрерывную группу. Для замкнутой системы операторов коммутатор

$$X_r X_l - X_l X_r = \sum_{s=1}^k c_{rls} X_s,$$

где  $c_{rls}$  — структурные константы группы.

Уравнения (3.13) были обобщены Н. Г. Четаевым на случай описания голономных систем в избыточных обобщенных координатах  $q_1, \dots, q_k, q_{k+1}, \dots, q_n$ , которые связаны  $n - k$  конечными уравнениями. Соответствующая группа преобразований является интранзитивной. Четаев построил завершённую теорию таких уравнений, рассмотрел примеры [43, 44].

Фам Гуен распространил методику (и терминологию) составления уравнений движения механических систем в переменных  $(q, \eta)$  на неголономные системы с линейными связями. Но в общем случае движение неголономных систем не обладает групповым свойством, как в голономных системах, трехиндексные символы  $c_{\alpha\beta\gamma}$  для замкнутой системы дифференциальных операторов не являются постоянными, а величины  $\eta_s dt$  играют по существу роль квазиординат. Поэтому и уравнения в переменных Пуанкаре – Четаева оказались идентичными уравнениям Вольтерры и Больцмана – Гамеля в квазиординатах [8, 38, 13].

При выводе уравнений движения систем с линейными по скоростям идеальными связями не важно, какой фундаментальный принцип механики выбран в качестве исходного — принцип Гаусса наименьшего

принуждения или принцип Даламбера – Лагранжа. Оба этих дифференциальных принципа равносильны в случае линейных идеальных связей [70, 4]. Если на механическую систему наложены нелинейные связи

$$f_i(t, q, \dot{q}) = 0 \quad \left( \text{rank} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_i} \right\| = n - k \right) \quad (i = k + 1, \dots, n), \quad (3.14)$$

то возникает необходимость определить понятие виртуальных перемещений так, чтобы оба принципа давали одни и те же уравнения движения, и для случая линейных связей получалось бы известное определение виртуальных перемещений.

Эту задачу разрешил Н. Г. Четаев [45], а В. И. Киргетов доказал следующее утверждение.

Пусть на систему наложены идеальные связи второго порядка

$$a_{i1}\ddot{q}_1 + \dots + a_{in}\ddot{q}_n = a_i \quad (i = k + 1, \dots, n)$$

( $a_{ij}$ ,  $a_i$  — функции  $t$ ,  $q$ ,  $\dot{q}$ ). Эти соотношения получаются вычислением полных производных по времени левых частей (3.14) вдоль кинематически допустимых траекторий движения, то есть

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad a_i = -\frac{\partial f_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (i = k + 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n).$$

Предполагается, что связи функции  $a_{ij}$ ,  $a_i$  не зависят от сил, приложенных к системе. Оказывается [14], что среди всех возможных линейных определений виртуальных перемещений, при которых виртуальные перемещения не зависят от сил, действующих на систему, а принцип Даламбера – Лагранжа дает те же уравнения, что и принцип Гаусса, не найдется ни одного такого, которое не было бы эквивалентным определению Четаева:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = 0 \quad (i = k + 1, \dots, n). \quad (3.15)$$

Для систем с нелинейными по скоростям связями, реакции которых не совершают работы на любом виртуальном перемещении, задаваемом соотношениями (3.15), уравнения движения записываются в форме (3.3). Однако и для таких систем можно составить уравнения движения без множителей. Например, для нелинейных систем Чаплыгина со связями

$$\dot{q}_i = e_i(q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k) \quad (i = k + 1, \dots, n) \quad (3.16)$$

( $T, U$  не зависят от  $q_{k+1}, \dots, q_n$ ) уравнения движения имеют вид [19]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T^*}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s} = \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)^* \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial e_i}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial e_i}{\partial q_s} \right) \quad (s = 1, \dots, k) \quad (3.17)$$

(звездочкой, как обычно, обозначаем результат замены в соответствующих функциях величин  $\dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_n$  правыми частями уравнений (3.16)). Отметим, что в случае нелинейных связей (3.16) функция  $T^*$  может оказаться вырожденной относительно  $\dot{q}_i, \dots, \dot{q}_k$ .

Как видим, различные виды уравнений движения неголономных систем не имеют лагранжевой формы вследствие неинтегрируемости уравнений связей. И все же имеется несколько примеров механических систем, общее движение которых описывается в точности уравнениями Лагранжа 2-го рода или уравнениями Гамильтона с вырожденным гамильтонианом.

Во-первых, это тяжелый однородный обруч (п. 1), катающийся по плоскости при условии, что угол  $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$  во все время движения (эта дополнительная геометрическая связь легко может быть реализована). Два первых уравнения связей (1.1) переходят в уравнения

$$\dot{\xi} + \dot{\varphi} \cos \psi = 0, \quad \dot{\eta} + \dot{\varphi} \sin \psi = 0$$

и по-прежнему остаются интегрируемыми. При этом правые части уравнений Чаплыгина (3.10), записанные для обобщенных координат  $\varphi, \psi$ , тождественно обращаются в нуль.

Другой пример описан в книге Дж. Синджа [76], а факт, что уравнения движения в этом примере принимают лагранжев вид, по-видимому, впервые был отмечен в работе [46]. В примере Синджа два одинаковых однородных колеса свободно насажены на общую ось и катаются по неподвижной горизонтальной плоскости без скольжения. Уравнения движения этой неголономной системы тоже имеют вид уравнений Лагранжа 2-го рода относительно функции Лагранжа  $L^* = T^*$ .

Третий пример представляет система Аппеля (п. 2). Если записать уравнение связи (2.2) в виде

$$\dot{z} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

то система не будет чаплыгинской, однако уравнения движения системы можно представить в виде уравнений Гамильтона, правда, с вырожденным гамильтонианом [75].

В качестве четвертого примера рассмотрим задачу о качении и вращении однородного шара по горизонтальной плоскости. Эта задача иллюстрирует идею Воронца интерпретировать первые интегралы системы как неголономные связи (п. 2). Действительно, проекции мгновенной скорости точки шара, касающейся опорной плоскости, на неподвижные ортогональные оси этой плоскости равны

$$v_x = \dot{x} - qR, \quad v_y = \dot{y} + pR,$$

где  $R$  — радиус,  $(\dot{x}, \dot{y})$  — проекция скорости центра шара,  $(p, q, r)$  — компоненты угловой скорости относительно произвольных фиксированных в шаре ортогональных осей. Нетрудно увидеть, что для шара, скользящего по гладкой горизонтальной плоскости (голономная система),  $v_x = \text{const}$  и  $v_y = \text{const}$  — первые интегралы уравнений движения. Следовательно, если начальные условия движения голономной системы выбраны так, что  $v_x = v_y = 0$ , то в последующем движении шара условия

$$\dot{x} - qR = 0, \quad \dot{y} + pR = 0$$

выполняются автоматически. Отсюда следует, что уравнения движения однородного шара по горизонтальной плоскости без скольжения имеют вид уравнений Лагранжа 2-го рода с функцией  $L = T$  (не  $T^*$ !), поскольку множители связей в уравнениях (3.3) тождественно равны нулю.

Перечисленные исключения не затемняют факта, что в общем случае уравнения движения неголономных систем не имеют лагранжевой формы, и по этой причине на неголономные системы не распространяются многие теоремы аналитической механики, установленные для систем с конечными связями. Поэтому в ряде работ ставится вопрос о возможности преобразования уравнений движения неголономных систем к виду уравнений Лагранжа 2-го рода или Гамильтона.

В XIX столетии популярным было исследование аналогии между системами путем непосредственного построения преобразований, переводящих уравнения движения одной системы в уравнения другой. Такого рода работы публиковали Лиувилль, Гурса, Пенлеве, Штеккель, Бертран, Дотенвилль, Дарбу, Аппель. Например, Аппель [51] предложил использовать точечное преобразование координат с преобразованием независимой переменной

$$dt = \lambda(q_1, \dots, q_n) dt_1$$

и распорядиться выбором функции  $\lambda$  так, чтобы в новых уравнениях движения в форме Лагранжа силы, зависящие от координат и скоростей (так можно трактовать «члены неголономности» в уравнениях (3.10)),



приняли бы вид дополнительных обобщенных *позиционных* сил. Совершенно ясно эта задача по удалению правых частей в уравнениях (3.10) была поставлена Аппелем в 1901 г. [52]. Через несколько лет идею Аппеля реализовал Чаплыгин [40], построив теорию приводящего множителя для неголономных систем с двумя степенями свободы.

По Чаплыгину в неголономных системах с двумя степенями (системах Чаплыгина) всегда можно ввести новую независимую переменную

$$d\tau = N(q_1, q_2) dt$$

так, что в переменных  $q_1, q_2, \tau$  уравнения движения принимают лагранжеву и гамильтонову форму, и «прием этот любопытен с теоретической точки зрения как непосредственное распространение метода Якоби на простейшие случаи неголономной системы» [40].

При отыскании приводящего множителя  $N(q_1, q_2)$  встречаются 2 случая. В первом функция  $N$  находится квадратурой, а коэффициенты уравнений связей и кинетической энергии должны тождественно удовлетворять единственному условию совместности. Во втором случае, когда условие совместности не выполняется, задача интегрирования канонических уравнений движения системы сводится к последовательному интегрированию двух уравнений с частными производными первого порядка.

Чаплыгин проиллюстрировал свою теорию четырьмя примерами, три из которых были доведены до квадратур [40, 42]. Еще один пример нахождения приводящего множителя привела Е. И. Харламова [12]. Во всех этих примерах приводящий множитель определяется одной квадратурой<sup>3</sup>.

В примере «сани» (п. 2) Чаплыгин переписал уравнение связи (2.1) в виде

$$\dot{x} = \dot{s} \cos v, \quad \dot{y} = \dot{s} \sin \varphi,$$

введя избыточную неголономную координату  $s$  ( $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ). И хотя теория приводящего множителя построена для случая использования криволинейных координат, найденный Чаплыгиным общий закон движения саней был подтвержден М. И. Ефимовым [10], который проинтегрировал эту задачу в координатах  $(x, y, \varphi)$ . Оказалось, что в этих координатах приводящий множитель получается квадратурой, только если центр масс саней ортогонально проектируется на прямолинейный след режущего колесика. Если же центр масс смещен в сторону, то приходится решать задачу последовательным интегрированием двух уравнений (одного нелинейного) с частными производными первого порядка.

<sup>3</sup>Гамильтоновость задачи о качении шара Чаплыгина по плоскости после замены времени установлена недавно (см. статью 7 настоящего сборника)

Кажется, это единственный пока пример, в котором был реализован второй случай теории Чаплыгина.

В связи с решением Чаплыгина задачи о «санях» отметим один результат, принадлежащий И. С. Аржаных [1]. Пусть уравнения линейных связей

$$\dot{q}_i = b_{i1}\dot{q}_1 + b_{i2}\dot{q}_2 \quad (i = 3, \dots, n)$$

и коэффициенты кинетической энергии неголономной системы Чаплыгина зависят только от одной координаты, например  $q_1$ . Введем дополнительную переменную  $\eta$ :

$$\dot{q}_i = A_i\dot{\eta} + B_i\dot{q}_1, \quad \dot{q}_2 = A\dot{\eta} + B\dot{q}_1 \quad (i = 3, \dots, n), \quad (3.18)$$

где  $A_i = b_{i2}A$ ,  $B_i = b_{i1} + b_{i2}B$ . Оказывается, всегда можно подобрать функции  $A(q_1)$ ,  $B(q_1)$  так, что приводящий множитель системы со связями (3.18) определяется квадратурой (т. е. имеет место первый случай теории Чаплыгина).

Попытки распространить теорию приводящего множителя на неголономные системы с числом степеней свободы больше двух неэффективны. Например, для чаплыгинских систем с тремя степенями свободы случай, аналогичный первому в теории Чаплыгина, имеет место, если коэффициенты кинетической энергии и уравнений связей тождественно удовлетворяют шести независимым соотношениям. А в случае, аналогичном второму теории Чаплыгина, тоже необходимо интегрировать два уравнения с частными производными, однако, второго порядка [10].

В отличие от метода приводящего множителя, можно пытаться преобразовать уравнения (3.10) к форме Лагранжа, не меняя независимой переменной. Такая постановка приводит к обратной задаче вариационного исчисления. Ее частным случаем является следующая задача:

Дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} F_s(t; q_1, \dots, q_k; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k; \ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_k) &= 0, \\ \det \left\| \frac{\partial F_s}{\partial \ddot{q}_r} \right\| &\neq 0 \quad (s = 1, \dots, k). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Определить условия, которым должны удовлетворять функции  $F_i$ , необходимые и достаточные для того, чтобы система (3.19) была эквивалентна (в смысле совпадения общих решений) системе уравнений вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial \Theta}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, \dots, k), \quad (3.20)$$

$$\Theta = \Theta(t, q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k), \quad \det \left\| \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_r} \right\| \neq 0.$$

Функция  $\Theta$  называется кинетическим потенциалом.

В такой постановке задача конструктивно решена для случаев  $k = 1$  [31, 58] и  $k = 2$  [59]. Существенных приложений к неголономным системам результатов решения обратной задачи нет [23, 2, 3, 19, 20, 15, 16]. В общем случае уравнения Чаплыгина (3.10) невозможно представить в виде (3.20) [32].

#### 4. Обобщения принципа Гамильтона

Рассмотрим произвольную голономную систему с независимыми координатами  $q_1, \dots, q_n$  и функцией Лагранжа  $L(t, q, \dot{q})$ . Если произвольно задать функции  $q_j = q_j(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ ), то получим кинематически возможное (т. е. допускаемое связями) движение. Пусть  $\{q(t, \alpha)\}$  — однопараметрическое семейство всевозможных движений, переводящих систему из данного начального положения  $\{q^0\}$ , которое она занимала в момент времени  $t_0$  в данное конечное положение  $\{q^1\}$ , которое она занимает в момент времени  $t_1$ . При этом заранее фиксируются начальный и конечный моменты времени  $t_0$  и  $t_1$ , начальное и конечное положение системы. В остальном движения произвольны. Параметр изменяется в пределах  $(-\varepsilon \leq \alpha \leq \varepsilon)$ , причем движение с  $\alpha = 0$  является истинным (действительным) движением голономной системы, а движения с  $\alpha \neq 0$  — околными движениями. Итак, имеем

$$q(t_0, \alpha) = q^0, \quad q(t_1, \alpha) = q^1 \quad (-\varepsilon \leq \alpha \leq \varepsilon).$$

Принцип Гамильтона утверждает, что на действительно движении функционал действия

$$W(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L[t, q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha)] dt$$

принимает стационарное значение, т. е.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt = 0, \quad (4.1)$$

где

$$\delta q_j = \left. \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \delta \alpha \quad (j = 1, \dots, n)$$

суть изохронные вариации координат, причем [9]

$$\frac{d}{dt} \delta q_j = \delta \frac{dq_j}{dt} \quad (t_0 < t < t_1), \quad \delta q_j \Big|_{t=t_0} = \delta q_j \Big|_{t=t_1} = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.2)$$

Рассмотрим теперь произвольную неголономную систему с функцией Лагранжа  $L(t, q, \dot{q})$ , стесненную идеальными неинтегрируемыми линейными связями

$$\begin{aligned} a_{i_1}(t, q) \dot{q}_1 + \dots + a_{i_n}(t, q) \dot{q}_n + a_i(t, q) &= 0, \\ \text{rank } |a_{ij}| &= n - k \quad (i = 1, \dots, n - k). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Обобщенные координаты  $q_1, \dots, q_n$  системы независимы, поскольку не связаны никакими конечными соотношениями (п. 1), а обобщенные скорости  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  должны тождественно по  $t$  удовлетворять неинтегрируемым уравнениям (4.3).

Пусть  $\{q^0\}$  — данное начальное положение, которое занимала система в момент времени  $t_0$ . Если в случае голономной системы точка  $\{q^1\}$ , конечное положение системы в момент  $t_1$ , выбирается на конфигурационном многообразии более или менее произвольно, то для неголономной системы точку  $\{q^1\}$  можно взять только на множестве динамической достижимости из положения  $\{q^0\}$  [72]. Другими словами, заранее должно быть известно, что точки  $\{q^0, t_0\}$  и  $\{q^1, t_1\}$  лежат на каком-то действительном движении системы.

Далее. Существует бесчисленное множество кинематически допустимых линейными *неинтегрируемыми* связями окольных движений системы, которые проходят через указанные точки. Если для изохронных вариаций координат принять условия (4.2), но не связывать вариации соотношениями

$$a_{i_1}(t, q) \delta q_1 + \dots + a_{i_n}(t, q) \delta q_n = 0 \quad (i = 1, \dots, n - k), \quad (4.4)$$

которым удовлетворяют виртуальные перемещения системы, то принцип Гамильтона в форме (4.1) для неголономной системы не имеет места.

Действительно, вычислив вариацию функционала действия и используя, как обычно, перестановочные соотношения и граничные условия (4.2), получим выражение

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt,$$

которое не равно нулю (подынтегральное выражение представляет собой взятую со знаком минус работу сил реакции связей на перемещении системы, которое, вообще говоря, не удовлетворяет условиям (4.4)).

Итак, при распространении принципа (4.1) на неголономные системы следует учитывать, что

- (а) близкие к действительному окольные движения допустимы связями, т. е.

$$\delta\omega_1 = \dots = \delta\omega_{n-k} = 0$$

(через  $\omega_i$  обозначены левые части уравнений (4.3));

- (б) изохронные вариации  $\delta q_1, \dots, \delta n$  суть виртуальные перемещения (4.4) системы;

- (в) выполняются перестановочные соотношения

$$\frac{d}{dt} \delta q_j = \delta \frac{dq_j}{dt} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Однако перечисленные три группы условий *несовместны* при неинтегрируемых связях (4.3) [53, 18]. Следовательно, от некоторых условий (а), (б), (в) необходимо отказаться.

Если отказаться от условия (а), но сохранить (б) и (в), то множество окольных движений, проходящих через заданные точки  $\{q^0\}$  и  $\{q^1\}$  соответственно в моменты времени  $t_0$  и  $t_1$ , задается формулой

$$q_j(t) = \tilde{q}_j(t) + \delta q_j(t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (4.5)$$

где  $\{\tilde{q}(t)\}$  — действительная траектория, на которой лежат точки  $\tilde{q}(t_0) = q^0$  и  $\tilde{q}(t_1) = q^1$ , а  $\{\delta q\}$  — инфинитезимальные виртуальные перемещения системы, определяемые равенствами (4.4). В классе сравниваемых движений (4.5) действительная траектория доставляет стационарное значение функционалу действия, что записывается так

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt. \quad (4.6)$$

Это принцип Гамильтона для неголономных систем в форме Гёльдера [65].

Подчеркнем принципиальное различие между формами (4.1) и (4.6) принципа Гамильтона. В голономных системах задаются только две точки  $\{q^0, t_0\}$  и  $\{q^1, t_1\}$ , принадлежащие действительной траектории,

а условие стационарности приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа, из которых находят искомое движение для всех  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Напротив, смысл (4.6) определен, если описано множество окольных движений (4.5), а для этого необходимо задать весь отрезок действительной траектории  $\{\tilde{q}(t)\}$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Поэтому принцип Гамильтона (4.6) представляет больший теоретический интерес.

Можно сохранить условия (а) и (б), но не требовать выполнения перестановочных соотношений для *всех* координат. Поступим так. Разрешим уравнения связей (4.3) относительно  $n-k$  обобщенных скоростей. Не нарушая общности, запишем результат:

$$\dot{q}_i = b_{i1}(t, q)\dot{q}_1 + \dots + b_{ik}(t, q)\dot{q}_k + b_i(t, q) \quad i = (k+1, \dots, n).$$

Виртуальные перемещения

$$\delta q_i = b_{i1}\delta q_1 + \dots + b_{ik}\delta q_k \quad (i = k+1, \dots, n).$$

Примем перестановочные соотношения для первых  $k$  координат, а для последних  $n-k$  координат с учетом условий (а) и (б) находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta q_i - \delta \dot{q}_i &= \frac{d}{dt} (b_{i1}\delta q_1 + \dots + b_{ik}\delta q_k) - \delta (b_{i1}\dot{q}_1 + \dots + b_{ik}\dot{q}_k + b_i) = \\ &= \frac{db_{i1}}{dt} \delta q_1 + \dots + \frac{db_{ik}}{dt} \delta q_k - \dot{q}_1 \delta b_{i1} - \dots - \dot{q}_k \delta b_{ik} - \delta b_i = \\ &= \sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^k A_{rs}^i \dot{q}_s \delta q_r - \delta b_i \quad (i = k+1, \dots, n). \end{aligned}$$

С помощью этих формул принцип Даламбера–Лагранжа преобразовывается к виду

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \delta L + \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \left( \sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^k A_{rs}^i \dot{q}_s \delta q_r - \delta b_i \right) \right] dt = 0. \quad (4.7)$$

Это принцип Гамильтона для неголономных систем в форме Сулова [34].

Рассмотрим теперь случай, когда неголономная система подчинена нелинейным по скоростям связям (3.14). В неголономных системах с нелинейными связями множество кинематически допустимых окольных движений, проходящих через заданные две точки на действительном движении, может оказаться *пустым* [56, 66]. Такая ситуация встречается в примере Аппеля (п. 2) при движении материальной частицы по

инерции ( $g = 0$ ). Частица тогда движется по прямой. Пусть в начальный момент времени  $t = t_0$  частица находилась в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , а в момент  $t = t_1$  — в точке  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ . Обозначим ортогональные проекции этих точек на координатную плоскость  $z = 0$  соответственно через  $P(x_0, y_0)$  и  $Q(x_1, y_1)$ . Если существует какая-либо еще допускаемая уравнением связи (2.2) траектория  $r(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ , соединяющая точки  $r(t_0) = M_0$  и  $r(t_1) = M_1$ , то, интегрируя по времени уравнение (2.2) вдоль этой траектории сразу приходим к противоречию (для простоты положим  $a = 1$ )

$$\begin{aligned} z(t_1) &= z(t_0) \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \\ &= z_0 + \int_P^Q \sqrt{dx^2 + dy^2} > z_0 + \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = z_1. \end{aligned}$$

Таким образом, в системах с нелинейными неголономными связями исходные условия принципа Гамильтона могут не выполняться.

Однако при более внимательном анализе этих требований для голономных систем нетрудно заметить, что условия закрепления окольных движений на концах можно заменить более слабыми условиями

$$\delta q_j \Big|_{t=t_0} = \frac{\partial q_j}{\partial q_\alpha} \Big|_{t=t_0}^{\alpha=0} \delta \alpha = 0, \quad \delta q_j \Big|_{t=t_1} = \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \Big|_{t=t_1}^{\alpha=0} \delta \alpha = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.8)$$

В таком случае по-прежнему, выполнив варьирование (4.1), с помощью перестановочных соотношений, интегрирования по частям и условий (4.8) приходим к уравнениям движения Лагранжа.

В случае неголономной связи

$$\dot{z} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

и, например, действительной траектории

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = t \quad (0 \leq t \leq 1),$$

в качестве однопараметрического семейства окольных движений можно выбрать

$$x = t, \quad y = \alpha \sin 2\pi t, \quad z = \int_0^t \sqrt{1 + (2\pi \alpha \cos 2\pi t)^2} dt \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Действительная траектория принадлежит этому семейству, начало координат — общая точка для всех кривых, а конечные точки все различны, но вариации

$$\delta x, \delta y = \delta \alpha \cdot \sin 2\pi t, \quad \delta z = \delta \alpha \int_0^t \frac{2\pi \cos 2\pi t}{\sqrt{1 + (2\pi \alpha \cos 2\pi t)^2}} dt$$

при  $t = 1$  равны нулю.

Справедливо общее утверждение: в системах Чаплыгина с гладкими связями (3.16) для отрезка  $M_0M_1$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) действительной траектории всегда существует однопараметрическое семейство окольных движений, удовлетворяющих уравнениям связей (3.16) и условиям (4.8) на концах.

Для доказательства обозначим через  $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) отрезок действительной траектории и положим

$$h_s(t) = \varphi_s(t)(t - t_0)(t_1 - t)\alpha \quad (s = 1, \dots, k) \quad (4.9)$$

(выбором функций  $\varphi_s(t)$  распорядимся позже), а  $h_{k+1}(t), \dots, h_n(t)$  суть решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{h}_i = e_i(y_1 + h_1, \dots, y_k + h_k, \dot{y}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{y}_k + \dot{h}_k) - e_i(y_1, \dots, y_k, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_k) \\ (i = k + 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.10)$$

на отрезке  $[t_0, t_1]$  с начальным условием  $h_{k+1}(t_0) = \dots = h_n(t_0) = 0$ .

Из (4.10) дифференцированием по  $\alpha$  найдем

$$\frac{d}{dt} \delta q_i = \sum_{s=1}^k \left( \frac{\partial e_i}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial e_i}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s + \frac{d}{dt} \left( \sum_{s=1}^k \frac{\partial e_i}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right) \quad (i = k + 1, \dots, n), \quad (4.11)$$

где

$$\delta q_i = \left. \frac{\partial h_j}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \delta \alpha \quad (j = 1, \dots, n).$$

С учетом (4.9) из (4.11) получим

$$\begin{aligned} \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{s=1}^k \left( \frac{\partial e_i}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial e_i}{\partial \dot{q}_s} \right) \varphi_s \right] (t - t_0)(t_1 - t) dt \\ (i = k + 1, \dots, n). \end{aligned}$$



Выбирая функции  $\varphi_s(t)$  так, чтобы выражение в квадратных скобках тождественно по  $t$  равнялось нулю, получим

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_0) = 0 \quad (i = k + 1, \dots, n).$$

Таким образом, построив семейство кривых  $\{y_1(t) + h_1(t, \alpha), \dots, y_n(t) + h_n(t, \alpha)\}$ , ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ), которое содержит отрезок  $M_0M_1$  действительного движения. Кривые семейства удовлетворяют уравнениям связей (3.16) и условиям (4.8) на концах  $(M_0, t_0)$ ,  $(M_1, t_1)$ . В классе таких кривых корректна постановка условной вариационной задачи Лагранжа о стационарном значении гамильтонова действия для чаплыгинских систем со связями (3.16).

В общей постановке для неголономных систем со связями вида (3.14) задачу Лагранжа исследовал В. В. Румянцев [28]. Введением неопределенных множителей  $\mu_i(t)$  эта задача об условном экстремуме приводится к вариационной задаче

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( L + \sum_{i=k+1}^n \mu_i f_i \right) dt = 0.$$

Уравнения экстремалей представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка относительно  $q_j(t)$  и первого порядка относительно  $\mu_i(t)$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=k+1}^n \mu_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=k+1}^n \dot{\mu}_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.12)$$

Общее решение  $\mathfrak{M}$  системы уравнений (3.14), (4.12) зависит от  $2n$  произвольных постоянных в то время, как уравнения движения неголономной системы определяют  $2n - k$  параметрическое семейство траекторий.

Можно поставить вопрос об условиях включения некоторых из этих траекторий (частных решений) или целиком всего семейства во множестве  $\mathfrak{M}$ . В. В. Румянцев показал, что для этого необходимо и достаточно, чтобы на общих для обоих множеств решениях выполнялось условие

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=k+1}^n \mu_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j = 0, \quad (4.13)$$

где  $\delta q_1, \dots, \delta q_n$  — виртуальные перемещения неголономной системы, связанные соотношениями (3.15).

Условие (4.13) не требует интегрируемости связей, но является достаточно жестким. Например, для систем Чаплыгина со связями (3.16) соотношение (4.13) приводится к виду равенств

$$\sum_{i=k+1}^n \mu_i \left( \frac{\partial e_i}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial e_i}{\partial \dot{q}_s} \right) = 0 \quad (s = 1, \dots, k),$$

которые с учетом последних  $n - k$  уравнений (4.12) можно переписать так:

$$\sum_{i=k+1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - p_{i0} + \mu_{i0} \right) \left( \frac{\partial e_i}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial e_i}{\partial \dot{q}_s} \right) = 0 \quad (s = 1, \dots, k). \quad (4.14)$$

Здесь  $p_{i0}$  — начальные значения импульсов  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $\mu_{i0}$  — начальные значения множителей Лагранжа  $\mu_i$  ( $i = k + 1, \dots, n$ ).

Положив  $\mu_{i0} = p_{i0}$  ( $i = k + 1, \dots, n$ ), видим, что на решении уравнений (4.12) и (3.16), являющемся также решением уравнений Чаплыгина (3.17), последние имеют лагранжеву форму. Если

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_{i0} \quad (i = k + 1, \dots, n)$$

суть интегралы (общие или частные) уравнений движения голономной системы с лагранжианом  $L$ , то, положив все  $\mu_{i0} = 0$ , добьемся выполнения условий (4.14) для рассматриваемого движения или класса движений.

Обобщения принципа наименьшего действия и некоторых других вариационных принципов для систем с неголономными связями изучали Гельдер [65], В. С. Новоселов [19, 21], В. В. Румянцев [29] и др.

Переводы оригинальных работ по дифференциальным и интегральным вариационным принципам механики можно найти в сборнике [22]. Хороший обзор вариационных принципов механики приведен в книге [47].

## 5. Обобщение теоремы Гамильтона – Якоби

Поскольку уравнения движения систем с неинтегрируемыми связями не приводятся в общем случае к виду уравнений Лагранжа и Гамильтона, то известная для голономных систем теорема Гамильтона –

Якоби (и метод Якоби) не распространяется непосредственно на неголономные системы. Было предпринято несколько попыток обобщения этой теоремы. Некоторые из них оказались ошибочными, другие справедливы при ограничениях, которые обесценивают практическую значимость этих обобщений. Библиографию вопроса и анализ работ можно найти в обзоре [33].

Остановимся на обобщении теоремы Гамильтона–Якоби, предложенной Г. К. Суловым для систем с конечными связями в избыточных обобщенных координатах [34, 36] и распространенных В. В. Румянцевым на неголономные системы [28, 30].

Вводятся обобщенные импульсы по формулам

$$\pi_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=k+1}^n \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (5.1)$$

где  $\mu_i$  — множители связей (3.14). Обобщенная функция Гамильтона

$$H_1 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L + \sum_{j=1}^n \sum_{i=k+1}^n \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

выражается при помощи (5.1) и (3.14) в канонических переменных  $q_j, \pi_j$ . Обобщенное уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_1 \left( t, q, \frac{\partial V}{\partial q} \right) = 0 \quad (5.2)$$

представляет собой уравнение в частных производных первого порядка.

Для (5.2) уравнения характеристик имеют вид канонических уравнений

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \pi_j}, \quad \frac{d\pi_j}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (5.3)$$

Согласно теореме Якоби соотношения

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = \pi_j, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_j} = \beta_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

суть  $2n$  интегралов уравнений (5.3), если  $V(t, q, \alpha)$  — полный интеграл уравнения (5.2),  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  — произвольные постоянные.

В. В. Румянцев доказал, что решение уравнений (5.3) представляет движение неголономной системы со связями (3.14) тогда и только тогда,

когда оно удовлетворяет условию (4.13), т. е. когда принцип Гамильтона (4.6) имеет характер принципа стационарного действия.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Ведущие научные школы (00–15–96150) и Российской ФЦП «Интеграция».

## Литература

- [1] *И. С. Аржаных.* Об интегрируемости уравнений движения неголономных систем класса  $T(2,1)$ . Докл. АН УзССР. 1956, №3, с. 3–6.
- [2] *И. С. Аржаных.* Неголономные динамические системы, имеющие кинетический потенциал. Докл. АН СССР. 1949, т. 65, №6, с. 809–811.
- [3] *И. С. Аржаных.* Поле импульсов. Ташкент: Наука. 1965,
- [4] *Е. А. Болотов.* О принципе Гаусса. Изв. физ.-мат. об-ва при Казанском университете. Сер. 2. 1916, т. 21, №3, с. 99–152.
- [5] *П. В. Воронец.* Преобразование уравнений движения с помощью линейных интегралов движения (с приложением к задаче об  $n$  телах). Изв. Киевск. ун-та. 1907, т. 47, №1, с. IV.1–IV.82. №2, с. IV.83–IV.180.
- [6] *П. В. Воронец.* Об уравнениях движения для неголономных систем. Матем. сб. 1901, т. 22. Вып. 4,
- [7] *П. В. Воронец.* Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости. Киев: изд-во Киевск. ун-та. 1903,
- [8] *П. В. Воронец.* Об одном преобразовании уравнений динамики. Киевск. университетские изв. 1902, №7. Ч. 2, с. 1–14.
- [9] *Ф. Р. Гантмахер.* Лекции по аналитической механике. М: Наука. 1966, 300 с.
- [10] *М. И. Ефимов.* Об уравнениях Чаплыгина для неголономных систем и методе приводящего множителя. Канд. диссертация. Ин-т механики АН СССР, Москва. 1953, с. 150.
- [11] *Н. Е. Жуковский.* О гироскопическом шаре Д. К. Бобылева. Тр. Отд. физ. наук Об-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1893, т. 6. Вып. 1,
- [12] *Е. И. Забелина (Харламова).* Движение твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи. Тр. Донецк. индустр. ин-та. 1957, т. 20, №1, с. 69–75.
- [13] *С. А. Зегжда, М. П. Юшков.* Геометрическая интерпретация уравнений Пуанкаре – Четаева – Румянцева. Прикл. мат. и мех. 2001, т. 65. Вып. 5, с. 746–754.
- [14] *В. И. Киргетов.* О «возможных перемещениях» материальных систем с линейными дифференциальными связями второго порядка. Прикл. мат. и мех. 1959, т. 23. Вып. 4, с. 666–671.
- [15] *С. Н. Кирпичников.* О потенциальном методе решения задач механики. Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр. 1961, №13, с. 103–110.

- [16] *С. Н. Кирпичников*. Структура дифференциальных уравнений механики, приводимых к каноническому виду. Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр. 1973, №19, с. 92–99.
- [17] *А. И. Лурье*. Аналитическая механика. М: Физматгиз. 1961, 824 с.
- [18] *Ю. И. Неймарк, Н. А. Фужаев*. Динамика неголономных систем. М: Наука. 1967, 519 с.
- [19] *В. С. Новоселов*. Вариационные методы механики. Изв-во ЛГУ. 1966,
- [20] *В. С. Новоселов*. Сведение задачи неголономной механики к условной задаче механики голономных систем. Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1957. Вып. 31, №217, с. 28–49.
- [21] *В. С. Новоселов*. Применение нелинейных неголономных координат в аналитической механике. Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1957. Вып. 31, №217, с. 50–83.
- [22] *Л. С. Полак (ред.)*. Сборник статей «Вариационные принципы механики». М: Физматгиз, 1959.
- [23] *И. М. Рапопорт*. Обратная задача вариационного исчисления. Изв. физ.-мат. об-ва при Казанск. гос. ун-те. Сер. 3. 1938, т. 10, с. 93–135. т. 11, с. 47–69.
- [24] *П. К. Рашевский*. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией. Учен. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат. 1938, т. 3. Вып. 2, с. 83–94.
- [25] *В. В. Румянцев*. Об уравнениях Пуанкаре – Четаева. Прикл. мат. и мех. 1994, т. 58. Вып. 3, с. 3–16.
- [26] *В. В. Румянцев*. Общие уравнения аналитической механики. Прикл. мат. и мех. 1996, т. 60. Вып. 6, с. 917–928.
- [27] *В. В. Румянцев*. К уравнениям Пуанкаре и Четаева. Прикл. мат. и мех. 1998, т. 62. Вып. 4, с. 531–538.
- [28] *В. В. Румянцев*. О принципе Гамильтона для неголономных систем. Прикл. мат. и мех. 1978, т. 42. Вып. 3, с. 387–399.
- [29] *В. В. Румянцев*. О принципах Лагранжа и Якоби для неголономных систем. Прикл. мат. и мех. 1979, т. 43. Вып. 4,
- [30] *В. В. Румянцев*. О некоторых задачах аналитической динамики. Теоретична и приложна механика. 1978, т. 9, №1,
- [31] *Н. Я. Сонин*. Об определении максимальных и минимальных свойств плоских кривых. Изв. Варшав. ун-та. 1886, №1, с. 1–68.
- [32] *А. С. Сумбатов*. Неэкстремальность семейств кривых, определяемых динамическими уравнениями неголономных систем Чаплыгина. Диффер. уравн. 1984, т. 20, №5, с. 897–899.
- [33] *А. С. Сумбатов*. О распространении метода Якоби на неголономные системы. В сб. Проблемы истории мат. и мех. Вып. 1. Изд-во Моск. ун-та. 1972, с. 100–112.

- [34] Г. К. Суслов. Основы аналитической механики. Киев: тип. Н.Т.Корчак-Новицкого. 1900, т. 1, с. 557. 1902, т. 2, с. 295. Изд. 2-е: Основы аналитической механики. Киев: издание Н. Я. Оглобина. 1911–1912, т. 1, 2, Изд. 3-е: Теоретическая механика. М. — Л.: Гостехиздат. 1944, 1946,
- [35] Г. К. Суслов. Об одном видоизменении начала Даламбера. Матем. сб. 1901, т. 22. Вып. 4,
- [36] Г. К. Суслов. Об уравнениях с частными производными для несвободного движения. СПб. 1888,
- [37] Фам Гуен. Об уравнениях движения неголономных механических систем в переменных Пуанкаре – Четаева. Прикл. мат. мех. 1967, т. 31. Вып. 2, с. 253–259.
- [38] Фам Гуен. К уравнениям движения неголономных механических систем в переменных Пуанкаре – Четаева. Прикл. мат. мех. 1968, т. 32. Вып. 5, с. 804–814.
- [39] Фам Гуен. Об одной форме уравнений движения механических систем. Прикл. мат. мех. 1969, т. 33. Вып. 3, с. 397–402.
- [40] С. А. Чаплыгин. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Матем. сб. 1911, т. 28, №2, с. 303–314.
- [41] С. А. Чаплыгин. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Тр. Отд. физ. наук Моск. Об-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897, т. 9, №1, с. 10–16.
- [42] С. А. Чаплыгин. К теории движения неголономных систем; примеры применения метода приводящего множителя. Собр. соч., т. III. М. — Л.: Гостехиздат. 1950, с. 248–259.
- [43] Н. Г. Четаев. Об уравнениях Пуанкаре. Прикл. мат. и мех. 1941, т. 5. Вып. 2, с. 253–262.
- [44] Н. Г. Четаев. Об уравнениях движения подобно изменяемого тела. Уч. зап. Казан. гос. ун-та. 1954, т. 114. Кн. 8, Юбилейный сб. (1804–1954). с. 5–8.
- [45] Н. Г. Четаев. О принципе Гаусса. Изв. физ.-мат. об-ва при Казан. ун-те. 1932–33, т. 6. Сер. 3, с. 68–71.
- [46] И. З. Шаги-Султан. Метод кинематических характеристик в аналитической механике. Алма-Ата. 1966,
- [47] В. Н. Шелкачев. Проблемы педагогики высшей школы. Вариационные принципы механики. М.: изд-во «Нефть и газ». 1996, с. 153–235.
- [48] А. Appell. 6-е éd.: *Traité de mécanique rationnelle*. V. 2. Paris, Gauthier-Villars. 1953. Перевод: П. Аппель. Теоретическая механика, т. 2. М.: Физматгиз. 1960.
- [49] А. Appell. Exemple de mouvement d'un point assujéti á une liaison exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse. Rend. Circ. mat. Palermo. 1911. V. 32. P. 48–50.

- [50] *A. Appell*. Sur une forme générale des équations de la Dynamique. C. R. Acad. Sci. Paris. 1899. V. 129.
- [51] *A. Appell*. Sur des transformations de mouvements. J. reine und angew. Math. 1892. V. 110. P. 37–41.
- [52] *A. Appell*. Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la Dynamique. J. math. pure et appl. 1901. V. 7. Ser. 5. P. 5–12.
- [53] *A. Appell*. Sur les équations de Lagrange et le principe d'Hamilton. Bull. Société Math. de France. 1898. V. 26. P. 265–267.
- [54] *L. Boltzmann*. Ueber die Eigenschaften monocyclischer und anderer damit verwandter Systeme. J. reine und angew. Math. 1885. Bd. 98. H. 1. Z. 68–94.
- [55] *L. Boltzmann*. Über die Form der Lagrange'schen Gleichungen für hichtholonome, generalisierte Coordinaten. Sitzungsberichte Academie der Wissenschaften zu Wien. Math.-Natur. Classe. Abt. 2a. 1902. Bd. 111. H. 10. Z. 1603–1614.
- [56] *C. Carathéodory*. Variationsrechnung. Berlin&Leipzig. Teubner. 1935.
- [57] *E. Crescini*. Sul moto di una sfera che rotola su di un piano fisso. Atti Accad. Lincei. 1889. Ser. 4. V. 5. P. 204–209.
- [58] *G. Darboux*. Leçons sur la théorie générale der surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. P. 3. Paris, Gauthier-Villars et fils. 1894.
- [59] *J. Douglas*. Solution of the inverse problem of the calculus of variations. Trans. Amer. Math. Soc. 1941. V. 50. №1. P. 71–128.
- [60] *N. M. Ferrers*. Extension of Lagrange's equations. J. Pure and Appl. Math.. 1872. V. 12. №45. P. 1–5.
- [61] *J. W. Gibbs*. On the Fundamental Formulae of Dynamics. Amer. J. Math. Pure and Appl. 1879. V. 2. №1. P. 49–64.
- [62] *G. Hamel*. Theoretische Mechanik. Berlin. 1949.
- [63] *G. Hamel*. Die Lagrange – Eulerschen Gleichungen der Mechanik. Zeitschrift Math. und Physik. 1904. Bd. 50. H. 1/2. P. 1–57.
- [64] *H. Hertz*. Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Leipzig. 1894. Перевод: Г. Герц. Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР. 1959.
- [65] *O. Hölder*. Ueber die Prinzipien von Hamilton und Maupertius. Nachrichten Kön. Ges. Wissenschaften zu Gottingen Math.-Phys. Kl. 1896. H. 2. P. 122–157. Перевод: О. Гельдер. О принципах Лагранжа и Мопертьюи. В сб. «Вариационные принципы механики» (под ред. Л. С. Полака). М.: Физматгиз, 1959, с. 538–563.
- [66] *L. G. Jounq*. Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. Philadelphia-London-Toronto. 1969. Перевод: Л. Ч. Янг. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974, 488 с.

- [67] *J. L. Lagrange*. Mécanique Analytique. Paris. 1788. Перевод: Ж. Лагранж. Аналитическая механика. М.-Л.: Гостехиздат, 1950, т. 1, 594 с., т. 2, 440 с.
- [68] *T. Levi-Civita, U. Amaldi*. Lezioni di Meccanica Razionale. Bologna. 1922. Перевод: Т. Леви-Чивита, У. Амальди. Курс теоретической механики, т. 1. Ч. 1, 2, т. 2. Ч. 1, 2. М.: Иностранная литература, 1951–1952.
- [69] *E. Lindelöf*. Sur les mouvement d'un corps de revolution roulant sur un plan horizontal. Acta Societatis Scientiarum Fennicae. 1895. V. 20. №10. P. 3–18.
- [70] *E. Mach*. Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. Leipzig. 1883. Перевод: Э. Мах. Механика. Историко-критический очерк ее развития. СПб. 1909.
- [71] *C. Neumann*. Ueber die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontalebene unter dem Einfluss der schwere. Math. Ann. 1886. Bd. 27.
- [72] *L. A. Pars*. A Treatise on Analytical Dynamics. London, Heinemann. 1964. Перевод: Л. А. Парс. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971, 635 с.
- [73] *H. Poincaré*. Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique. C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. V. 132. P. 369–371. Перевод: А. Пуанкаре. Новая форма уравнений механики. Изв. физ.-мат. об-ва Казанского ун-та. 1902. Сер. 2, т. 10.
- [74] *E. J. Routh*. A Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. London. V. 1. 1897. V. 2. 1905. Перевод: Э. Дж. Раус. Динамика системы твердых тел. М.: Наука, 1983, т. 1, 463 с., т. 2, 544 с.
- [75] *V. V. Rumyantsev, A. S. Sumbatov*. On the problem of a generalization of the Hamilton – Jacobi method for nonholonomic systems. ZAMM. 1978. Bd. 58. P. 477–481.
- [76] *J. L. Synge*. Classical Dynamics. Handbuch der Physik. Encyclopedia of Physics. V. III/1. Berlin-Göttingen-Heidelberg. Springer-Verlag. 1960. Перевод: Дж. Л. Синг. Классическая динамика. М.: Физматгиз. 1963. 448 с.
- [77] *V. Volterra*. Sopra una classe di equazioni dinamiche. Atti Accad. Sc. Torino. 1897–98. V. 33. 451–475 с.
- [78] *E. T. Whittaker*. 3–d ed.: A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies with an Introduction to the Problem of Three Bodies. Cambridge Univ. Press. 1927. Перевод: Е. Т. Уиттекер. Аналитическая динамика. М.-Л.: Гостехиздат. 1937. 500 с.



**II**



# **ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ**



# О ТЕОРЕМАХ ДИНАМИКИ<sup>1</sup>

*В. В. Козлов, Н. Н. Колесников*

Для однопараметрических семейств преобразований конфигурационного пространства вводятся возможные перемещения, совместные с наложенными на систему связями. С использованием этих перемещений из принципа Даламбера – Лагранжа получены утверждения, обобщающие основные теоремы динамики и распространяющие теорему Нетер на систему с неголономными связями. С помощью доказанных в работе утверждений решена задача о движении острого однородного диска по горизонтальному льду.

**1. Обобщение основных теорем динамики.** Рассмотрим механическую систему  $n$  материальных точек с массами  $m_i$ , декартовы координаты которых обозначим через  $x_i, y_i, z_i$ . Предположим, что на систему наложены линейные связи, вообще говоря, неинтегрируемые. Тогда возможные перемещения системы удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^n (a_{ij}\delta x_i + b_{ij}\delta y_i + c_{ij}\delta z_i) = 0, \quad j = 1, \dots, m < 3n. \quad (1.1)$$

Коэффициенты в этих равенствах — функции координат и времени.

На точки  $m_i$  действуют активные силы  $\mathbf{F}_i$  с проекциями на оси координат  $X_i, Y_i, Z_i$ . Действительные движения определяются из принципа Даламбера – Лагранжа

$$\sum_{i=1}^n \left[ \left( m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i \right) \delta x_i + \left( m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - Y_i \right) \delta y_i + \left( m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - Z_i \right) \delta z_i \right] = 0. \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 28–33.

Рассмотрим зависящее от времени и параметра  $\alpha$  семейство обратимых преобразований  $3n$ -мерного конфигурационного пространства

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_i(x'_1, y'_1, z'_1, \dots, x'_n, y'_n, z'_n, t, \alpha), \\ \mathbf{r}_i &= \{x_i, y_i, z_i\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Скорости точек системы преобразуются по обычному правилу

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial x'_j} \frac{dx'_j}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial y'_j} \frac{dy'_j}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial z'_j} \frac{dz'_j}{dt} \right). \quad (1.4)$$

Возможными перемещениями системы, связанными с семейством преобразований (1.3), назовем

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \alpha} \delta \alpha. \quad (1.5)$$

Будем говорить, что семейство преобразований (1.3) совместно со связями (1.1), если возможные перемещения (1.5) удовлетворяют уравнениям связей (1.1).

**Лемма 1.** *Имеет место следующее соотношение ( $T$  — кинетическая энергия) :*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) &= \frac{dS}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \alpha}, \\ S &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right), \\ T &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} [(\dot{x}_i)^2 + (\dot{y}_i)^2 + (\dot{z}_i)^2]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Справедливость этого тождества вытекает из следующих очевидных перестановочных соотношений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}.$$

**Лемма 2.** *Если семейство (1.3) совместно с наложенными на систему связями, то*

$$\frac{dS}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \sum, \quad \sum = \sum_{i=1}^n \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right). \quad (1.7)$$

Для доказательства этого соотношения надо подставить возможные перемещения (1.5) в уравнения Даламбера – Лагранжа и использовать формулу (1.6).

Функция  $f(t, x_1, y_1, z_1, \dots, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots)$  инвариантна относительно преобразований (1.3), если функция  $g$ , полученная из  $f$  заменой координат и скоростей точек по формулам (1.3) и (1.4), не зависит от  $\alpha$ .

**Теорема 1.** *Если кинетическая энергия инвариантна относительно семейства преобразований (1.3), совместного со связями, то*

$$dS/dt = \Sigma. \quad (1.8)$$

Так как кинетическая энергия инвариантна относительно семейства преобразований (1.3), то  $\partial T/\partial \alpha = 0$  и соотношение (1.8) вытекает из (1.7).

Кинетическая энергия инвариантна относительно сдвигов вдоль неподвижного направления и поворотов вокруг неподвижной оси. Следовательно, в этих случаях теорема 1 совпадает с классическими теоремами об изменении количества движения и момента количества движения системы [1].

**2. Случай потенциальных сил.** Предположим, что внешние силы  $\mathbf{F}_i$ , действующие на систему, допускают силовую функцию  $V(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ .

**Теорема 2.** *Если функция  $L = T + V$  инвариантна относительно семейства преобразований (1.3) совместно со связями, то уравнения движения имеют первый интеграл*

$$S = \text{const.}$$

Это утверждение следует из формул (1.7). При этом используется соотношение

$$\Sigma = \partial V/\partial \alpha$$

и инвариантность функции  $L = T + V$ :  $\partial L/\partial \alpha = 0$ .

Для голономных связей теорема 2 совпадает с известной теоремой Нетер [2]. Подчеркнем, что семейство преобразований (1.3) не обязано быть группой.

**3. Обобщение теорем об измерении количества движения и момента количества движения.** Выясним, когда кинетическая энергия инвариантна относительно сдвигов вдоль прямой  $l$ , заданной направляющими косинусами  $a, b, c$ , которая может менять со временем направление. Формулы преобразования в этом случае, очевидно, следующие:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \alpha \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = (a, b, c).$$

Можно проверить, что

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{da}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \frac{dx_i}{dt} + \frac{db}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \frac{dy_i}{dt} + \frac{dc}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \frac{dz_i}{dt}.$$

В этом случае условие инвариантности  $T$  относительно семейства сдвигов записывается в виде  $(\mathbf{P}, d\mathbf{l}/dt) = 0$ , где  $\mathbf{P}$  — вектор количества движения системы. Если это равенство выполнено и связи допускают поступательное перемещение системы как одного твердого тела вдоль оси  $l$ , то по теореме 1

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}, \mathbf{1}) = \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \mathbf{1} \right). \quad (3.1)$$

Выясним также, когда кинетическая энергия инвариантна относительно вращений вокруг прямой  $l$ , которая в общем случае подвижна. Снова обозначим через  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ее направляющие косинусы и пусть прямая  $l$  проходит через точку с координатами  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ . Величины  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  — заданные функции времени.

Пусть  $\alpha$  — угол поворота. Можно проверить, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{dx_i}{dt} \frac{d}{dt} [b(z_i - z_0) - c(y_i - y_0)] + \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i \frac{dy_i}{dt} \frac{d}{dt} [c(x_i - x_0)a - (z_i - z_0)] + \\ &+ \sum_{i=1}^n m_i \frac{dz_i}{dt} \frac{d}{dt} [a(y_i - y_0) - b(x_i - x_0)]. \end{aligned}$$

После преобразований условие инвариантности функции относительно семейства поворотов записывается в виде

$$\left( \mathbf{P}, \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_0, \mathbf{1}] \right) + \left( \mathbf{K}, \frac{d\mathbf{l}}{dt} \right) = 0, \quad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{K}$  — вектор момента количества движения системы относительно начала координат.

Если связи допускают повороты системы как одного твердого тела вокруг оси  $l$  и выполнено равенство (3.2), то по теореме 1

$$d/dt(\mathbf{K}', \mathbf{1}) = (\mathbf{M}', \mathbf{1}), \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{K}'$  и  $\mathbf{M}'$  — соответственно момент количества движения и суммарный момент сил относительно точки  $(x_0, y_0, z_0)$ . Иными словами, если выполнено условие (3.2), то относительно подвижной оси  $l$  справедлива теорема об изменении момента количества движения.

Если, в частности, ось  $l$  не меняет направления в пространстве, т. е.  $da/dt = db/dt = dc/dt = 0$ , то это утверждение совпадает с известным обобщением теоремы площадей [3, 4].

В случае, когда ось  $l$  проходит через центр тяжести системы, условие (3.2) можно упростить

$$\left(\mathbf{K}', \frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) = 0. \quad (3.4)$$

**4. Пример из динамики неголономных систем.** В качестве примера на приложение доказанных выше утверждений рассмотрим задачу о движении круглого диска с острым краем по гладкому горизонтальному льду. На систему тем самым наложена неголономная связь: скорость точки касания диска параллельна его горизонтальному диаметру. Диск предполагается динамически симметричным, центр его тяжести совпадает с геометрическим центром.

Введем ось Кенига  $Ox_1y_1z_1$ , причем ось  $Oz_1$  вертикальна. В другой подвижной системе координат  $Oxyz$  ось  $Oz$  перпендикулярна плоскости диска, ось  $Ox$  горизонтальна, а ось  $Oy$  проходит через точку касания  $H$ . Обозначим через  $M$  некоторую точку на окружности диска. Пусть  $m$  — масса диска,  $a$  — его радиус, моменты инерции относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  обозначим соответственно через  $A$  и  $C$ .

Проекция угловой скорости диска  $\omega$  на оси  $Oxyz$  обозначим через  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , а проекции скорости центра масс на те же оси — через  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Проектируя скорость  $V_H = V_0 + [\omega, OH]$  на оси трехгранника и используя параллельность  $V_H$  оси  $Ox$ , получим

$$v = 0, \quad w - ap = 0. \quad (4.1)$$

Докажем, что  $r = \text{const}$ . За подвижную ось  $l$  примем  $Oz$ . Связи допускают поворот диска вокруг этой оси.

Покажем, что выполнено условие (3.4). Действительно, проекции  $\mathbf{K}'$  на оси  $Oxyz$  суть  $Ap$ ,  $Aq$ ,  $Cr$ , а вектора  $d\mathbf{l}/dt : q, -p, 0$ . Следовательно, они ортогональны. Так как сила тяжести не дает момента относительно оси  $Oz$ , то по формуле (3.3)  $d(Cr)/dt = 0$ , т. е.  $r = r_0 = \text{const}$ .

Связи допускают поворот диска относительно вертикальной оси  $Oz_1$ . Так как  $O$  — центр тяжести, то, согласно формуле (3.3) (теорема Кенига), проекция момента количества движения относительно точки  $O$  на

вертикаль постоянна

$$Aq \sin \theta + Cr \cos \theta = c_1 \quad \text{или} \quad q(\theta) = \frac{c_1}{A \sin \theta} - \frac{Cr_0}{A} \operatorname{ctg} \theta. \quad (4.2)$$

Диск можно поступательно перемещать вдоль подвижной оси  $Ox$ . Кинетическая энергия диска не инвариантна относительно этих сдвигов, однако можно применить лемму 2, которая дает уравнение  $mdu/dt - mwq = 0$ , или, с использованием (4.1),  $du/dt - apq = 0$ . Так как  $p = d\theta/dt$ , то, учитывая (4.2), получим

$$du = a \left( \frac{c_1}{A \sin \theta} - \frac{Cr_0}{A} \operatorname{ctg} \theta \right) d\theta. \quad (4.3)$$

Следовательно

$$u(\theta) = c_2 + \frac{ac_1}{A} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{aCr_0}{A} \ln \sin \theta.$$

Полная энергия диска сохраняется

$$\frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2} (Ap^2 + Aq^2 + Cr^2) + mga \sin \theta = h.$$

Учитывая соотношения (4.1)–(4.3), это равенство можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2} (A + ma^2) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = h - mga \sin \theta - \frac{m}{2} u^2(\theta) - \frac{A}{2} q^2(\theta) - \frac{Cr_0^2}{2}. \quad (4.4)$$

Отсюда угол  $\theta$  находится квадратурой.

Если  $c_1 \neq Cr_0$ , то правая часть равенства (4.4) стремится к  $-\infty$ , когда  $\theta \rightarrow \theta, \pi$ . Следовательно, в этом случае  $0 < \theta < \pi$  и  $\theta(t)$  — периодическая функция времени с некоторым периодом  $\tau$ . В частности, диск никогда не упадет на плоскость. Заметим, что диск может упасть при  $c_1 = Cr_0$ , но только тогда, когда он поставлен неvertикально и отпущен без начальной скорости.

Предположим опять, что  $c_1 \neq Cr_0$ . Тогда  $p, q, r, u, v, w$  — периодические функции времени с тем же периодом  $\tau$ . Чтобы дать качественную картину движения, осталось выяснить зависимость от времени угла  $\varphi$  между  $OH$  и  $OM$  и угла  $\psi$  между  $Ox$  и  $Ox_1$ , а также найти закон движения точки касания по плоскости.



Из кинематических соотношений

$$q = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta, \quad r = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos \theta$$

следует, что

$$\psi = \lambda_1 t + f_1(t), \quad \varphi = \lambda_2 t + f_2(t), \quad (4.5)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — постоянные, зависящие от начальных условий, а  $f_1, f_2$  — периодические функции времени с периодом  $\tau$ .

Пусть  $\xi, \eta$  — декартовы координаты точки касания  $H$  на плоскости, при этом оси  $\xi, \eta$  параллельны осям  $Ox_1, Oy_1$ . Можно показать, что

$$\frac{d\xi}{dt} = u \cos \psi + w \sin \theta \sin \psi + \frac{d}{dt}(a \cos \theta \sin \psi) = \left(u + a \cos \theta \frac{d\psi}{dt}\right) \cos \psi,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = u \sin \psi - w \sin \theta \cos \psi - \frac{d}{dt}(a \cos \theta \cos \psi) = \left(u + a \cos \theta \frac{d\psi}{dt}\right) \sin \psi.$$

Функция  $u + a \cos \theta d\psi/dt$  периодична по  $t$  с периодом  $\tau$ . Обозначим ее  $g(t)$ . Тогда, учитывая (4.5), получим

$$d\zeta/dt = g(t) \exp[i(\lambda_1 t + f_1(t))], \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Функция  $g(t) \exp[i f_1(t)]$  периодическая с периодом  $\tau$ . Разложим ее в сходящийся ряд Фурье

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{\tau} t\right).$$

Тогда

$$\zeta = c + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{i(2\pi n/\tau + \lambda_1)} \exp\left(i \frac{2\pi n t}{\tau}\right) \exp(i\lambda_1 t),$$

где  $c = c_1 + ic_2$  — некоторая постоянная. Если  $2\pi n/\tau + \lambda_1 \neq 0$  при целых  $n$ , то

$$G(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{i(2\pi n/\tau + \lambda_1)} \exp\left(i \frac{2\pi n}{\tau} t\right)$$

— аналитическая периодическая функция с периодом  $\tau$ . В этом случае  $\zeta = G(t) \exp(i\lambda_1 t) + c$ . Введем подвижную систему отсчета, вращающуюся с угловой скоростью  $-\lambda_1$  вокруг точки  $c$ . Тогда в подвижной системе

тока  $\zeta(t)$  будет двигаться периодически по замкнутой аналитической кривой  $\zeta = G(t)$ . В неподвижной плоскости  $(\xi, \eta)$  точка касания будет совершать сложное движение: она движется периодически по некоторой замкнутой аналитической кривой, которая вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной точки.

Авторы благодарны В. В. Румянцеву за внимание и советы.

## Литература

- [1] *Аппель П.* Теоретическая механика, т. 2. М.: Физматгиз, 1960.
- [2] *Нетер Э.* Инвариантные вариационные задачи. В сб.: Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959.
- [3] *Чаплыгин С. А.* Избранные труды по механике и математике. М.: Гостехиздат, 1954.
- [4] *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: «Наука», 1967.

# ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ЗАДАЧИ О КАЧЕНИИ ШАРА С МНОГОСВЯЗНОЙ ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ<sup>1</sup>

*А. П. Маркеев*

Исследуется задача о качении шара по неподвижной горизонтальной плоскости; предполагается, что шар имеет многосвязную полость с идеальной жидкостью, совершающей безвихревое движение. Показано, что решение задачи может быть сведено к квадратурам.

**1.** Рассмотрим движение без скольжения шара по неподвижной горизонтальной плоскости. Шар содержит многосвязную полость, целиком заполненную однородной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей безвихревое движение. Центр тяжести системы считаем совпадающим с геометрическим центром шара.

Движение можно описать при помощи следующих двенадцати дифференциальных уравнений:

$$A_{*1}\dot{\omega}_1 + (A_{*3} - A_{*2})\omega_2\omega_3 + k_3\omega_2 - k_2\omega_3 = M_1, \quad (1)$$

$$m(\dot{v}_1 + \omega_2v_3 - \omega_3v_2) = R_1, \quad (2)$$

$$v_1 + \rho(\omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3) = 0, \quad (3)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3 \quad \{1 \ 2 \ 3\}. \quad (4)$$

Невыписанные восемь уравнений получаются из уравнений (1)–(4) круговой перестановкой индексов, указанных в фигурной скобке.

<sup>1</sup>Изв. АН СССР, Мех. тв. тела, т. 21, №1, 1986, с. 64–65.

В (1)–(4)  $m$  — сумма масс твердого тела и жидкости,  $\rho$  — радиус шара,  $A_{*i}$  — момент инерции преобразованного тела для центра  $O$  шара, равный сумме момента инерции твердого тела и эквивалентного тела [1] относительно главной центральной оси инерции системы  $Ox_i$ . Через  $\omega_i$ ,  $v_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $k_i$ ,  $M_i$ , и  $R_i$  в (1)–(4) обозначены проекции на ось  $Ox_i$  следующих векторов: угловой скорости тела; скорости центра тяжести системы; единичного вектора, направленного по вертикали вверх; момента количества циклического движения жидкости; главного момента и главного вектора внешних сил, представляющих собой силу тяжести и реакцию плоскости.

Уравнения (1)–(4) имеют ту же форму, что и уравнения движения твердого тела с ротором. При специальных предположениях о геометрии масс системы, а именно для случая полого шара с ротором внутри, задача проинтегрирована в [2]. Упрощенный вариант той же задачи изучен в [3]. Для случая однородного тела вращения с ротором, ось которого направлены вдоль оси симметрии, задача сведена к квадратурам в [4]. Если начальное движение жидкости отсутствует, то в уравнениях (1)–(4)  $k_i = 0$  и с математической точки зрения рассматриваемая задача сводится к задаче о качении неоднородного шара по плоскости, проинтегрированной в [5].

Цель данной работы состоит в доказательстве интегрируемости системы (1)–(4) при любом тензоре инерции преобразованного тела и произвольных значениях величин  $k_i$ .

В связанной с телом системе координат  $Ox_1x_2x_3$  координаты  $x_i$  точки касания тела и плоскости будут равны  $-\rho\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Используя уравнения движения центра тяжести (2) и условие отсутствия скольжения (3), можно реакцию плоскости исключить из (1). В результате получим уравнения

$$\begin{aligned} A_1\omega_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 + A_3\Omega_3\omega_2 - A_2\Omega_2\omega_3 = \\ = \gamma_1(\dot{\omega}_1\gamma_1 + \dot{\omega}_2\gamma_2 + \dot{\omega}_3\gamma_3) \quad \{1 \ 2 \ 3\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$A_i = A_{*i}/(m\rho^2) + 1, \quad \Omega_i = k_i/(A_{*i} + m\rho^2) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Уравнения (4) и (5) образуют замкнутую систему, описывающую движение шара относительно центра тяжести. Если она проинтегрирована, то траектория центра шара и реакция плоскости находятся из (3) и (2) при помощи квадратур. Ниже показано, что система уравнений также сводится к квадратурам.

**2.** Уравнения (4), (5) имеют интеграл энергии

$$A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - \omega_n^2 = \text{const} \quad (\omega_n = \omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 + \omega_3\gamma_3).$$

Интегралами будет также величина вектора кинетического момента системы шар–жидкость относительно точки касания шара и плоскости

$$[A_1(\omega_1 + \Omega_1) - \omega_n \gamma_1]^2 + [A_2(\omega_2 + \Omega_2) - \omega_n \gamma_2]^2 + [A_3(\omega_3 + \Omega_3) - \omega_n \gamma_3]^2 = \text{const}$$

и проекция этого вектора на вертикаль

$$A_1(\omega_1 + \Omega_1)\gamma_1 + A_2(\omega_2 + \Omega_2)\gamma_2 + A_3(\omega_3 + \Omega_3)\gamma_3 - \omega_n = \text{const}.$$

Кроме того, существует геометрический интеграл  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ . Указанных четырех интегралов достаточно, чтобы интегрирование системы (4), (5) можно было свести к квадратурам. Как и в [5], для доказательства воспользуемся теорией множителя Якоби [6]. Согласно этой теории, для доказательства сводимости интегрирования системы (4), (5) к квадратурам достаточно найти последний множитель Якоби  $\mu$ .

Разрешив уравнения (5) относительно  $\omega_i$ , получим

$$\dot{\omega}_1 = [(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 - A_3\Omega_3\omega_2 + A_2\Omega_2\omega_3 + F\gamma_1]/A_1 \quad \{1 \ 2 \ 3\}, \quad (6)$$

$$F = \frac{1}{f} \left[ \begin{aligned} & \frac{(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 - A_3\Omega_3\omega_2 + A_2\Omega_2\omega_3}{A_1} \gamma_1 + \\ & + \frac{(A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 - A_1\Omega_1\omega_3 + A_3\Omega_3\omega_1}{A_2} \gamma_2 + \\ & + \frac{(A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 - A_2\Omega_2\omega_1 + A_1\Omega_1\omega_2}{A_3} \gamma_3 \end{aligned} \right], \quad (7)$$

$$f = 1 - \gamma_1^2/A_1 - \gamma_2^2/A_2 - \gamma_3^2/A_3. \quad (8)$$

Множитель  $\mu$  — функция переменных  $\omega_i, \gamma_i (i = 1, 2, 3)$  и удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^3 \partial(\mu \dot{\omega}_i) / \partial \omega_i + \partial(\mu \dot{\gamma}_i) / \partial \gamma_i = 0, \quad (9)$$

где  $\dot{\omega}_i$  и  $\dot{\gamma}_i$  — правые части уравнений (6) и (4) соответственно.

Учитывая (4), уравнение (9) можно преобразовать к форме

$$\dot{\mu} + \mu \left( \frac{\partial \dot{\omega}_1}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \dot{\omega}_2}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \dot{\omega}_3}{\partial \omega_3} \right) = 0. \quad (10)$$

Подставив в выражение, стоящее в круглых скобках, правые части уравнений (6), произведя необходимые дифференцирования и упростив

получающиеся выражения с использованием обозначений (7), (8), получим уравнение (10) в виде

$$f\dot{\mu} + \mu \left( \frac{\omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3}{A_1}\gamma_1 + \frac{\omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1}{A_2}\gamma_2 + \frac{\omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2}{A_3}\gamma_3 \right) = 0.$$

Учитывая теперь (4) и (8), имеем окончательно  $2/\dot{\mu} - \mu\dot{f} = 0$ . Интегрируя это уравнение, найдем  $\mu = cf^{1/2}$  ( $c$  — произвольная постоянная).

Таким образом показано, что интегрирование уравнений (4), (5) сводится к квадратурам.

## Литература

- [1] Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М: Наука, 1965. 439 с.
- [2] Бобылев Д. К. О шаре с гироскопом внутри, катящемся по горизонтальной плоскости без скольжения. Матем. сб., 1982, т. 16, вып. 3, с. 544–581.
- [3] Жуковский Н. Е. О гироскопическом шаре Д. К. Бобылева. Собр. соч. М.-Л.: Гостехиздат, 1948, т. 1, с. 275–289.
- [4] Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Собр. соч. М.-Л.: Гостехиздат, 1948, т. 1, с. 57–75.
- [5] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости. Собр. соч., М.-Л.: Гостехиздат, 1948, т. 1, с. 76–101.
- [6] Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.-Л.: Гостехиздат, 1946, 655 с.

# О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ШАРОВОМ ПОДВЕСЕ<sup>1</sup>

*Ю. Н. Федоров*

Будем рассматривать движение произвольного твердого тела, заключенного жестко в сферическую оболочку, причем геометрический центр последней совпадает с центром масс обоих тел. Оболочка поддерживается произвольным количеством массивных динамически симметричных шаров. Центры шаров неподвижны в пространстве, скольжение в точках их контакта с оболочкой отсутствует (рис. 1).

Уравнения движения всей системы тел запишем в виде

$$\Lambda \dot{\omega} + \omega \times \Lambda \omega = \sum_{i=1}^n \gamma^i \times R^i, \quad (1)$$

$$D_i \dot{\omega}^i = \lambda_i \gamma^i \times R^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $\omega$  — угловая скорость центрального тела,  $\Lambda$  его тензор инерции в главных центральных осях,  $\omega^i$ ,  $D_i$  — угловая скорость 1-го шара и его центральный момент инерции,  $\lambda_i$  — его радиус,  $\gamma^i = (\gamma_1^i, \gamma_2^i, \gamma_3^i)$  — неподвижный в пространстве единичный вектор, проведенный из центра  $O$  в точку контакта с  $i$ -м шаром,  $R^i$  — реакция в данной точке. Кроме того, выполнены неинтегрируемые соотношения

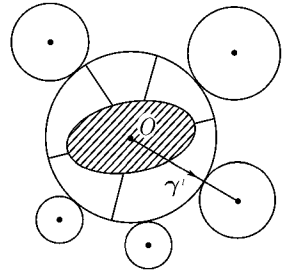


Рис. 1

$$\begin{aligned} -\lambda_i \omega^i &= \omega - (\omega \cdot \gamma^i) \gamma^i - c_i \gamma^i, \\ c_i &= \lambda_i (\omega^i \cdot \gamma^i) = \text{const}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Вестн. Моск. ун-та, сер. I, Математика, механика, 1988, №5. с. 91–93.

которые замыкают систему (1). С учетом этого первое уравнение системы (1) может быть представлено в форме

$$\Lambda \dot{\omega} + \omega \times \Lambda \omega = \Gamma \dot{\omega}, \quad \Gamma = \sum_{k=1}^n \Gamma^{(k)}, \quad (2)$$

$$\Gamma_{ij}^{(k)} = (\gamma_i^k \gamma_j^k - \delta_{ij}) D_k / \lambda_k^2, \quad k = 1, \dots, n; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Таким образом,  $\Gamma$  — симметричная матрица, причем в случае  $n = 1$  будет справедливо  $\det \Gamma \neq 0$ .

В связанных с телом осях имеют место уравнения Пуассона

$$\dot{\Gamma} = [\Gamma, \Omega], \quad \Omega_{ij} = \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ijl} \omega_l, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (3)$$

$\varepsilon_{ijl}$  — символ Леви-Чивита.

В дальнейшем нас будет интересовать только движение центрального тела. Очевидно, что ориентация последнего полностью определяется компонентами  $\Gamma$ .

Совокупность уравнений (2), (3) можно также представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} \times \omega, \quad \mathbf{K} = A\omega, \quad A = \Lambda - \Gamma, \\ \dot{\Gamma} &= [\Gamma, \Omega], \quad \mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3). \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) описывает движение по инерции некоторого «обобщенного» твердого тела, тензор инерции которого складывается из двух частей: левоинвариантной (т.е. неподвижной в теле) компоненты  $\Lambda$  и правоинвариантной (неподвижной в пространстве)  $\Gamma$ .

Основное утверждение работы состоит в том, что система (4) является интегрируемой по теореме Якоби [1].

Действительно, имеются семь независимых первых интегралов данной системы:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \Gamma &= d_1, \quad \text{Tr} \Gamma^2 = d_2, \quad \text{Tr} \Gamma^3 = d_3, \quad \text{Tr}(\widehat{K}^2 \Gamma) = d_4, \\ \text{Tr}(\widehat{K}^2 \Gamma^2) &= d_5, \quad (\mathbf{K}, \cdot \mathbf{K}) = d_6, \quad (\mathbf{K} \cdot \omega) = d_7; \\ \widehat{K}_{ij} &= \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ijl} K_l; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad d_1, d_2, \dots, d_7 = \text{const}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для доказательства отметим, что уравнения (4) позволяют записать

$$\frac{d}{dt}(\widehat{K} + \lambda \Gamma) = [\widehat{K} + \lambda \Gamma, \Omega], \quad \lambda = \text{const} \in \mathbb{C}.$$



Поэтому для любого  $m \in \mathbb{Z}$  справедливо  $\text{Tr}(\widehat{K} + \lambda\Gamma)^m = \text{const}$  и следы матриц, стоящих при различных степенях  $\lambda$ , также будут иметь постоянные значения [2]. Таким образом находятся первые шесть интегралов в (5). Их независимость, а также существование седьмого интеграла устанавливаются прямыми выкладками.

Наконец, система (4) обладает последним множителем Якоби  $\mu = \sqrt{\det A}$ . Чтобы показать это, найдем выражение для дивергенции  $\Delta$  правых частей (4). Очевидно, что

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \dot{\omega}_i}{\partial \omega_i}.$$

Вспользуемся далее матрицами вида

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \quad \mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3), \quad \text{где} \quad \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right)_{i,j} = \frac{\partial V_i}{\partial \omega_j}; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Следствием первого уравнения (4) будет соотношение

$$A \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = U, \quad U = \frac{\partial (\Lambda \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\omega}},$$

и, таким образом,

$$\Delta = \text{Tr}(A^{-1}U). \tag{6}$$

Поскольку матрица  $A^{-1}$ , как и  $A$ , симметрична, кососимметрическая часть  $U$  не дает вклада в значение  $\Delta$ . Для симметрической части  $U$  имеем

$$U^+ = \frac{1}{2}(U + U^T) = \frac{1}{2}[\Lambda, \Omega]. \tag{7}$$

Воспользовавшись теоремой Кэли–Гамильтона [3], найдем, что

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [A^2 - (\text{Tr } A)A] + \text{Tr}(A^{-1})E. \tag{8}$$

Отсюда следует

$$\text{Tr}(A^{-1}) = -\frac{1}{2 \det A} [\text{Tr}(A^2) - (\text{Tr } A)^2]. \tag{9}$$

Далее формулы (8) и (9) дадут

$$3 \det A = \text{Tr}[A^3 - A^2(\text{Tr } A) - (\text{Tr}(A^2) - (\text{Tr } A)^2)A/2].$$

В результате с учетом второго уравнения (4) получим

$$\frac{d}{dt}(\det A) = \text{Tr}[(A^2 - (\text{Tr } A)A)[\Omega, \Lambda]],$$

и в силу (6), (7), (8), а также очевидного свойства  $\text{Tr } U = 0$  будем иметь

$$\Delta = -\frac{1}{2} \frac{(\det A)'}{\det A}.$$

Поэтому  $\sqrt{\det A}$  удовлетворяет уравнению на последний множитель:

$$\dot{\mu} + \mu\Delta = 0.$$

В заключение отметим, что при наличии только одного шара ( $n = 1$ ) уравнения (4) формально совпадают с системой, описывающей качение без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости шара единичного радиуса с тензором инерции  $\Lambda^0$  [4, с. 76–101]. При этом величина  $D_1/\lambda_1^2$  в (2) приравнивается массе катящегося шара.

## Литература

- [1] *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.; Л., 1946.
- [2] *Lax P. D.* Integrals of nonlinear equation and solitary waves. *Communs Pure and Appl. Math.* 1968. **21**, №5. 467–490.
- [3] *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М., 1966.
- [4] *Чаплыгин С. А.* Собр. соч. Т. I. М.-Л., 1948.

# О ДВУХ ВИДОИЗМЕНЕННЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ<sup>1</sup>

*А. В. Борисов, Ю. Н. Федоров*

В статье рассматриваются две интегрируемые системы, представляющие собой модификацию классических интегрируемых задач Бруна (Клебша) и Чаплыгина. Модификация состоит в том, что правые части уравнений Пуассона для этих задач умножаются на  $-1$ . Затрагивается вопрос об интегрируемости других систем, получаемых из названных путем модификаций более общего вида.

**1.** Рассмотрим формальную систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \rho \boldsymbol{\gamma} \times \Lambda \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\omega} = \Lambda^{-1} \mathbf{M}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= k \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \rho = \text{const}, \quad \mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Lambda: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — постоянный невырожденный симметрический оператор. Символ  $\times$  и скобка  $(, )$  обозначают векторное и евклидово скалярное произведения в  $\mathbb{R}^3$ . Положим  $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ .

Известные интегралы данной системы имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= (\mathbf{M}, \Lambda^{-1} \mathbf{M}) + \frac{\rho}{k} (\boldsymbol{\gamma}, \Lambda \boldsymbol{\gamma}), \\ I_2 &= (\mathbf{M}, \mathbf{M}) - \frac{\rho}{k} \det \Lambda (\boldsymbol{\gamma}, \Lambda^{-1} \boldsymbol{\gamma}), \\ I_3 &= (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}). \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1</sup>Вестн. Моск. Ун-та. сер. 1, Математика. Механика. 1995. №6. с. 102–105.

Система (1) обладает также инвариантной мерой с постоянной плотностью. Тем самым согласно теореме Якоби для ее интегрируемости в квадратурах недостает одного дополнительного интеграла.

Полагая в (1)  $k = 1$ , получаем интегрируемую систему Бруна [1], описывающую движение твердого тела с тензором инерции  $\Lambda$  и угловой скоростью  $\omega$  в осесимметричном силовом поле с потенциалом  $\rho(\gamma, \Lambda\gamma)/2$ , которая эквивалентна интегрируемому случаю Клебша в задаче о движении твердого тела в идеальной жидкости. В этой задаче существует независимый с (2) интеграл площадей

$$I_4 = (M, \gamma). \quad (3)$$

Оказывается, уравнения (1) допускают и другой интегрируемый случай при  $k = -1$ . При этом дополнительный интеграл имеет вид

$$(M, A\gamma), \quad A = E - 2\Lambda/(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3).$$

Выпишем соответствующие уравнения в явной форме:

$$\dot{M} = M \times \Lambda^{-1}M + \rho\gamma \times \Lambda\gamma, \quad \dot{\gamma} = \Lambda^{-1}M \times \gamma. \quad (4)$$

Уравнения (4) все же не являются существенно новой интегрируемой системой. Действительно, замена переменных

$$W = AM, \quad W \in \mathbb{R}^3 \quad (5)$$

преобразует их к виду

$$\begin{aligned} \dot{W} &= J^{-1}W \times W - \rho\gamma \times J\gamma, \\ \dot{\gamma} &= J^{-1}W \times \gamma, \quad J = A\Lambda. \end{aligned} \quad (6)$$

Полученная система с точностью до замены  $t \rightarrow -t$  по форме совпадает с системой Бруна.

Используя метод Ковалевской, можно показать, что для мероморфности общего решения системы (1) необходимо, чтобы  $k$  было целым числом. К тому же необходимому условию приводит анализ существования у данной системы дополнительного, независимого с (2) однозначного интеграла. Оказывается, что последний может быть квадратичным только при  $k \pm 1$ .

Отметим, что для системы, получаемой из (1) при  $\rho = 0$ , аналогичные выводы были сделаны в работе [2]. Первая тройка уравнений такой системы описывает свободное движение твердого тела (случай Эйлера–Пуансо) и интегрируется в эллиптических функциях.

Возникает естественный вопрос об интегрируемости системы более общего вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= (\mathbf{M} + \boldsymbol{\gamma}) \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \Lambda^{-1} \mathbf{M}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= k\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\gamma} = (g_1, g_2, g_3)^T = \text{const}, \end{aligned} \quad (7)$$

первая тройка уравнений, в которой описывает свободное движение гиростата (задача Жуковского–Вольтерра) и также интегрируется в эллиптических функциях. Общее решение системы (7) известно лишь для классического случая  $k = 1$  и содержится в [3].

**2.** Рассмотрим теперь задачу из неголономной механики о качении динамически несимметричного уравновешенного шара по внутренней поверхности абсолютно шероховатой сферы. Уравнения движения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \sigma \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{K} &= \Lambda \boldsymbol{\omega} - D\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \sigma = \frac{R}{R-a}, \\ D &= ma^2, \quad \Lambda = \Lambda^0 + DE. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость шара;  $\mathbf{K}$  — его кинетический момент относительно точки контакта со сферой,  $\Lambda^0$  — тензор инерции шара в центральных осях;  $m, a$  — его масса и радиус;  $R$  — радиус сферы;  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор, проведенный из центра сферы в точку контакта.

Уравнения (8) имеют три независимых первых интеграла, которые с учетом соотношений

$$\Lambda \boldsymbol{\omega} = \mathbf{K} + D \frac{(\mathbf{K}, \Lambda^{-1} \boldsymbol{\gamma})}{F} \boldsymbol{\gamma}, \quad F = (\boldsymbol{\gamma}, \Lambda^0 \Lambda^{-1} \boldsymbol{\gamma})$$

могут быть представлены в форме

$$(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = n, \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (\mathbf{K}, \Lambda^{-1} \mathbf{K}) + \frac{(\mathbf{K}, \Lambda^{-1} \boldsymbol{\gamma})^2}{F} = l, \quad n, l = \text{const.}$$

Указанные уравнения обладают также последним множителем Якоби, имеющим в переменных  $\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{K}$  вид  $\mu = 1/\sqrt{F}$ .

Устремим радиус  $R$  сферы качения к бесконечности. При этом  $\sigma = 1$  и система (8) переходит в уравнения движения известной интегрируемой

задачи С. А. Чаплыгина о качении шара по плоскости [4], а дополнительный интеграл, как и соотношение (3), является интегралом площадей  $(\mathbf{K}, \gamma) = h_1$ ,  $h_1 = \text{const.}$

Вместе с тем система (8) оказывается интегрируемой и при  $\sigma = -1$ . В этом случае дополнительный интеграл имеет вид

$$(\mathbf{K}, A\gamma) = h, \quad A = E - 2\Lambda / \text{tr } \Lambda, \quad h = \text{const.}$$

Согласно определению величины  $\sigma$  радиус шара должен теперь вдвое превышать радиус сферы качения. Данный случай можно реализовать механически, заменяя шар массивной неоднородной сферой того же радиуса (или телом со сферической полостью), обкатывающей без проскальзывания неподвижную сферу. Отметим без доказательства, что условие неподвижности сферы можно заменить ее однородностью. Уравнения движения такой обобщенной системы будут по форме совпадать с (8).

Таким образом, мы получаем новую интегрируемую задачу неголомомной динамики. Может ли она быть приведена некоторой заменой переменных к описанной выше системе Чаплыгина подобно тому, как уравнения (4) заменой (5) приводятся к системе Бруна (6)? Данный вопрос представляет собой трудную самостоятельную задачу.

## Литература

- [1] *Brun F.* Rotation kring fix punkt. Ofers. Kongl. Svencka Vetensk. Acad. Forhandl. Stockholm. 1893. **7**. 455–468.
- [2] *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнении Эйлера на  $so(4)$ . Докл. АН СССР. 1983. **270**, №6. 298–300.
- [3] *Volterra V.* Sur la theorie des variations des lattitudes. Acta Math. 1899. **22**. 201–357.
- [4] *Чаплыгин С. А.* О катании шара по горизонтальной плоскости. Матем. сб. 1903. 24, №1. 139–168.

# ГАМИЛЬТОНОВОСТЬ ЗАДАЧИ ЧАПЛЫГИНА О КАЧЕНИИ ШАРА<sup>1</sup>

*А. В. Борисов, И. С. Мамаев*

**1. Уравнения движения и интегралы.** Рассмотрим задачу о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по горизонтальной шероховатой плоскости (скорость точки контакта равна нулю) в потенциальном поле сил. Движение шара в проекциях на главные оси, связанные с шаром, описывается системой

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, & \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega} + D \boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}), & D &= m a^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор угловой скорости,  $\boldsymbol{\gamma}$  — орт вертикали,  $\mathbf{I}_0 = \text{diag}(I_1^0, I_2^0, I_3^0)$  — тензор инерции шара относительно его центра,  $m$  — масса шара,  $a$  — его радиус. Вектор  $\mathbf{M}$  имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта. При  $V = 0$  как показал С. А. Чаплыгин в [1] уравнения (1) обладают интегрирующим множителем

$$\begin{aligned} \rho = \mu^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{1 - D(\boldsymbol{\gamma}, (\mathbf{I}_0 + D\mathbf{E})^{-1}\boldsymbol{\gamma})}} = \frac{1}{\sqrt{1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})}}, \\ \mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} &= (\mathbf{I}_0 + D\mathbf{E})^{-1}, \quad \mathbf{E} = \|\delta_{ij}\| \end{aligned} \quad (2)$$

и четырьмя независимыми интегралами

$$F_1 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad F_2 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad F_3 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad F_4 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad (3)$$

<sup>1</sup>Матем. заметки, т. 70, №5, 2001, с. 793–795.

что позволяет проинтегрировать систему по теореме Эйлера–Якоби. В работе [1] выполнено также интегрирование системы (1) в гиперэллиптических функциях.

В работе [2] показано, что задача остается интегрируемой при добавлении поля сил задачи Бруна  $V = \frac{k}{2}(\mathbf{I}\gamma, \gamma)$ , причем интегралы  $F_1, F_4$  несколько модифицируются

$$F_1 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + k(\mathbf{I}\gamma, \gamma), \quad F_4 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}) - (\mathbf{C}\gamma, \gamma), \quad (4)$$

где  $\mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2, c_3)$ ,  $c_i = k\varepsilon_{ijk}(I_j + D)(I_k + D)$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

**2. Аналогия с задачей Якоби.** Уравнения (1) при  $V = 0$  можно представить в угловых скоростях

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + D\gamma \frac{(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}^{-1}\gamma)}{F}, \\ \dot{\gamma} &= \gamma \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + D\mathbf{E}. \end{aligned}$$

На нулевом уровне интеграла площадей  $(\mathbf{I}_0\boldsymbol{\omega}, \gamma) = 0$  они имеют интегралы в форме

$$(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - D(\boldsymbol{\omega}, \gamma)^2 = 2h, \quad (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) - D^2(\boldsymbol{\omega}, \gamma)^2 = n, \quad (\gamma, \gamma) = 1.$$

Наше наблюдение состоит в том, что после замены

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mu\mathbf{I}_0\boldsymbol{\omega}, \quad \mu^2 = 1 - (\mathbf{I}^{-1}\gamma, \gamma) = (\gamma, \mathbf{I}\mathbf{I}_0^{-1}\gamma) \quad (1)$$

интегралы (4) перейдут интегралы задачи Якоби о геодезических на двумерном эллипсоиде, которую можно представить на алгебре  $e(3)$  — в переменных  $\widetilde{\mathbf{M}}, \gamma$  [3]. Прямым вычислением несложно показать, что с использованием переменных  $\widetilde{\mathbf{M}}, \gamma$  интегралы при условии  $(\mathbf{I}_0\boldsymbol{\omega}, \gamma) = (\widetilde{\mathbf{M}}, \gamma) = 0$  могут быть преобразованы в следующие

$$H = n - 2hD = \frac{(\mathbf{J}\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\mathbf{M}})}{(\gamma, \mathbf{J}^{-1}\gamma)}, \quad K = n = \frac{(\mathbf{J}\widetilde{\mathbf{M}} \times \gamma)^2}{(\gamma, \mathbf{J}^{-1}\gamma)}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{I}\mathbf{I}_0^{-1},$$

где  $H$  и  $K$  представляют собой соответственно гамильтониан и интеграл Иоахимсталея задачи Якоби. Таким образом, на нулевом уровне интеграла площадей задача Чаплыгина и задача Якоби имеют одни и те же инвариантные торы.



**3. Нелинейная скобка, изоморфизм с системой Бредана.** Уравнения (1) оказываются гамильтоновыми после замены времени

$$dt \rightarrow \frac{1}{\rho} dt,$$

где  $\rho$  определено соотношением (2). Действительно, путем достаточно длинных вычислений, можно проверить, что уравнения (1) в новом времени можно записать в гамильтоновом виде с *нелинейной* скобкой Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} \rho (M_k - g \gamma_k), \quad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk} \rho \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0 \quad (1)$$

и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) + \frac{1}{2}g(\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) + V(\boldsymbol{\gamma}). \quad (2)$$

При этом, как обычно  $\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}$ ,  $g = D(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{D(\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})}{1 - D(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}$ .

Отметим, что пуассонова структура (1) не связана с интегрируемостью шара Чаплыгина или его обобщений, она имеется при произвольном потенциале  $V(\boldsymbol{\gamma})$ .

Скобка (1) является вырожденной и обладает функциями Казимира  $F_1 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$ ,  $F_2 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ . После замены переменных  $\mathbf{M} \rightarrow \rho \mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}$  скобку (1), гамильтониан (2) и функции Казимира можно представить в виде

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk} \left( M_k - D \frac{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})}{\rho^2} a_k \gamma_k \right), \\ \{M_i, \gamma_j\} &= \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \\ H &= \frac{1}{2}(1 - D(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}))(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) + \frac{1}{2}D(\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})^2 + V(\boldsymbol{\gamma}), \\ F_1 &= (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}), \quad F_2 = \rho(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) \end{aligned} \quad (3)$$

Для более подробного исследования структуры нелинейной скобки (3) вычислим «монополь» [4], то есть интеграл  $\int \boldsymbol{\omega}$  по приведенной двумерной сфере, аналогичной сфере Пуассона, где  $\boldsymbol{\omega}$  — 2-форма гироскопических сил, соответствующая структуре (3)

Действительно, уровень функций Казимира

$$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad \rho(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = c \quad (4)$$

приводится при помощи преобразования

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M} - \frac{c}{\rho} \boldsymbol{\gamma} \quad (5)$$

к кокасательному расслоению двумерной сферы

$$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \quad (6)$$

Параметризуем многообразие (6) координатами, которые в классической динамике твердого тела соответствуют углам Эйлера  $\theta$ ,  $\varphi$  на сфере Пуассона и соответствующим им (для структуры  $e(3)$ ) каноническими импульсами  $p_\theta$ ,  $p_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sin \theta \sin \varphi, & \gamma_2 &= \sin \theta \cos \varphi, & \gamma_3 &= \cos \theta, \\ \sigma_1 &= -\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi p_\varphi + \cos \varphi p_\theta, & \sigma_2 &= -\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi p_\varphi - \sin \varphi p_\theta, & \sigma_3 &= p_\varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражая из (7) на уровне (4) компоненты  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $p_\varphi$ ,  $p_\theta$  через  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  и применяя коммутационные соотношения (3), получим

$$\begin{aligned} \{\theta, \varphi\} &= \{p_\varphi, \theta\} = \{p_\theta, \varphi\} = 0, \\ \{p_\theta, \theta\} &= \{p_\varphi, \varphi\} = 1, & \{p_\varphi, p_\theta\} &= \frac{c \sin \theta}{\rho^3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Интенсивность «монополя» задает интеграл

$$Q = \int_{S^2} \frac{c \sin \theta}{\rho^3} d\theta d\varphi = \frac{2\pi c}{\sqrt{(1 - Da_1)(1 - Da_2)(1 - Da_3)}}, \quad (9)$$

то есть как и в классической динамике твердого тела [4] неустранимое магнитное поле ( $Q \neq 0$ ) возникает при ненулевой постоянной площади.

При  $c = 0$  структура (3) сводится к линейной структуре, определяемой алгеброй  $e(3)$ . Дополнительный интеграл  $F_4$  уравнений (1) при потенциале Бруна  $V = \frac{\varepsilon}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$  может быть представлен в новых переменных  $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$  в виде

$$\begin{aligned} F_4 &= (\mathbf{M}, \mathbf{M})(1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})) - \frac{\varepsilon}{\det \mathbf{A}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}), \\ \mathbf{A} &= \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3), \end{aligned} \quad (10)$$

или

$$\begin{aligned} F_4 &= (\mathbf{M}, \mathbf{M})(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}^* \boldsymbol{\gamma}) + \frac{\varepsilon D^2}{(1 - a_1^*)(1 - a_2^*)(1 - a_3^*)}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}^* \boldsymbol{\gamma}), \\ \mathbf{A} &= \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{A}^* = \mathbf{E} - D\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (11)$$

На уровне  $F_4 = c_4$  система (11) эквивалентна следующей

$$H^* = (M, M) + \frac{c}{(\gamma, \mathbf{A}^* \gamma)}, \quad c = \text{const.} \quad (12)$$

Именно такой гамильтониан возник в работе Брадена [5] в связи с изучением потенциалов на двумерной сфере, допускающих разделение переменных. Более общие результаты о рациональных потенциалах на сфере, допускающих разделение переменных, содержится в [6].

Отметим, что разделяющие переменные для системы (1) при  $V = 0$ , указанные в [5], совпадают с разделяющими переменными, исследованными в работе [1], что делает преобразования в неголономной системе более естественными — сводит их к обычному методу Гамильтона–Якоби.

Вопрос о гамильтоновости уравнений (1) без дополнительной замены времени поставлен в [2] и до сих пор не является решенным<sup>1</sup>. Он связан с приводимостью динамической системы с интегральным инвариантом на торе к квазипериодическому потоку [3].

## Литература

- [1] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости. Собр. соч. т. 1, М.–Л., ОГИЗ, 1948, с. 76–101.
- [2] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, Изд-во Удм. ун-та, 1995.
- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во РХД, 1999, 464 с.
- [4] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса. Усп. мат. наук, т. 37, 1982, № 5(227), с. 3–49.
- [5] Braden H. W. A completely integrable mechanical system. Lett. in Math. Phys., 1982, V. 6, P. 449–452.
- [6] Wojciechowski S. Integrable one-particle potentials related to the Neumann system and the Jacobi problem of geodesic motion on an ellipsoid. Phys. Lett., A, V. 107, № 3, P. 106–111.

---

<sup>1</sup>Недавно в этом вопросе получены существенные продвижения, соответствующая работа публикуется в этом сборнике впервые (см. статью 16)

# ДИНАМИКА ШАРА ЧАПЛЫГИНА В АБСОЛЮТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ<sup>1</sup>

*А. А. Килин*

## 1. Введение

Динамика неголономных систем образовалась как самостоятельный раздел теоретической механики, когда было понято, что стандартный лагранжев формализм неприменим к системам с неинтегрируемыми связями. Развитие динамики неголономных систем связано с именами С. А. Чаплыгина, Г. Герца, П. Аппеля, Д. К. Бобылева, Н. Е. Жуковского и др. Значительная часть работ в данной области посвящена обобщению развитых для голономных систем аналитических методов на системы с неголономными связями. Достаточно полное изложение задач и методов неголономной механики можно найти, например, в монографии [9]. К настоящему времени динамика неголономных систем находит широкое применение в задачах современной техники, таких как движения автомобиля, самолетного шасси, железнодорожного колеса и др. Кроме того ее методы активно используются в теории электрических машин.

Существенную роль в развитии динамики неголономных систем сыграло знаменитое исследование С. А. Чаплыгина, посвященное задаче о качении тяжелого твердого тела вращения по горизонтальной плоскости [11], в которой он проанализировал ошибку Э. Линделефа, получил правильные уравнения движения и провел полное исследование задачи для ряда частных случаев формы тела. В другой своей работе [12] С. А. Чаплыгин провел полное исследование задачи о качении динамически несимметричного шара по плоскости при единственном предположении о совпадении центра масс шара с его геометрическим центром. В этой работе С. А. Чаплыгин привел интегралы движения системы, нашел интегрирующий множитель и получил решение уравнений движения в квадратурах. Несмотря приведенную им геометрическую интер-

---

<sup>1</sup>Килин А. А. *The Dynamics of Chaplygin Ball: the Qualitative and Computer Analysis*, Reg. & Chaot. Dyn., 2001, v. 6, №3, p. 291–306.

претацию, движение шара Чаплыгина в абсолютном пространстве практически не было изучено. Недавно в работе [4] на примере задачи о шаре Чаплыгина была показана связь между системами с неголономными связями и гамильтоновыми системами с нелинейной скобкой Пуассона.

Достаточно большой интерес также представляет обобщение задачи о шаре Чаплыгина, когда внутрь него помещен гироскоп. Впервые (еще до работ С. А. Чаплыгина) данную задачу в частной постановке, когда шар динамически симметричен, рассмотрел Д. К. Бобылев в работе [1]. Д. К. Бобылев показал, что несмотря на простоту геометрии тела траектории движения шара могут иметь интересную форму. Еще более частный случай данной задачи, когда ее анализ значительно упрощается, рассмотрел Н. Е. Жуковский в своей работе [5]. Позднее, в работе [8] А. П. Маркеев показал интегрируемость полной постановки задачи, когда шар динамически несимметричен, а момент гироскопа направлен произвольно. Однако несмотря на доказанную интегрируемость, проинтегрировать в квадратурах (или найти решение в каком-либо классе специальных функций) данную систему до сих пор не удалось. Не выполнен также и топологический анализ задачи. О движении в абсолютном пространстве, кроме частных постановок, также до сих пор ничего неизвестно.

В данной статье анализируется движение шара Чаплыгина с гироскопом и без него в абсолютном пространстве. В частности особенно подробно исследуются траектории точки контакта, которые можно воспроизвести в натурном эксперименте заставляя шар катиться по плоскости, посыпанной, например, порошком ликоподия. Для различных типов движений в системе связанной с телом рассмотрены соответствующие движения в абсолютном пространстве. С помощью численных методов показано существование ограниченных траекторий движения шара в случае, когда задача сводится к некоторой гамильтоновой системе.

## 2. Уравнения движения и их интегрирование

### 2.1. Уравнения движения и интегралы

Рассмотрим задачу о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по горизонтальной шероховатой плоскости [12]. Движение шара в проекциях на главные оси, связанные с шаром, описывается системой

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad D = ma^2,$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор угловой скорости,  $\boldsymbol{\gamma}$  — орт вертикали,  $\mathbf{I}$  — тензор инерции шара относительно его центра,  $m$  — масса шара,  $a$  — его радиус. Вектор  $\mathbf{M}$  имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта.

Как показал С. А. Чаплыгин в [12] уравнения (2.1) обладают интегрирующим множителем

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} + D\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \|\delta_{ij}\|$$

и четырьмя независимыми интегралами

$$h = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad C = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad n = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad (2.3)$$

что позволяет проинтегрировать систему по *теореме Эйлера–Якоби*. В этой же работе С. А. Чаплыгин выполнил также интегрирование системы (2.1) в гиперэллиптических функциях.

Для определения движения шара в абсолютном пространстве к системе (2.1) следует добавить уравнения для ортов неподвижной системы

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.4)$$

Большой интерес для понимания движения шара в абсолютном пространстве представляет траектория точки контакта на плоскости, которая очевидно совпадает с траекторией центра масс. Уравнение движения точки контакта можно получить из условия равенства нулю ее скорости:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость центра масс,  $\mathbf{r} = -a\boldsymbol{\gamma}$  — вектор, соединяющий центр масс и точку контакта. Запишем уравнение (2.5) в проекциях на неподвижные оси координат:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) = a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}), \quad \dot{\mathbf{y}} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}) = -a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (2.6)$$

Вместе с (2.4) полученные уравнения определяют траекторию точки контакта (и центра масс) на плоскости.

## 2.2. Интегрирование уравнений движения в случае нулевой константы площадей

Рассмотрим сначала сведение задачи к квадратурам в случае нулевой постоянной площадей  $C = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ .

В (2.1) произведем замену переменных приведенную в работе А. В. Борисова, И. С. Мамаева (см. работу 7 в настоящем сборнике)

$$dt \rightarrow \mu d\tau, \quad \mathbf{M} \rightarrow \frac{1}{\mu} \mathbf{M}, \quad \gamma \rightarrow \gamma \quad (2.7)$$

После этого уравнения движения можно представить в гамильтоновом виде с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(1 - D(\gamma, \mathbf{J}^{-1}\gamma))(\mathbf{M}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{M}) + \frac{1}{2}D(\gamma, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{M})^2, \quad (2.8)$$

и нелинейной скобкой

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk}(M_k - D(\mathbf{M}, \gamma)\mu^2 \mathbf{J}_{k,k}^{-1}\gamma_k), \\ \{M_i, \gamma_j\} &= \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Интегралы движения принимают вид

$$C = \frac{1}{\mu}(\mathbf{M}, \gamma), \quad n = \frac{1}{\mu^2}\mathbf{M}^2, \quad \gamma^2 = 1. \quad (2.10)$$

Как следует из (2.9) на нулевой константе интеграла площадей  $(\mathbf{M}, \gamma) = 0$  скобка Пуассона соответствует алгебре  $\mathfrak{e}(3)$ , а соответствующий симплектический лист является кокасательным расслоением к сфере.

Как уже ранее отмечалось, для системы (2.1) явное сведение к квадратурам (уравнениям Абеля – Якоби) было указано С. А. Чаплыгиным, который однако никак не связывал его с методом Гамильтона – Якоби вследствие того, что гамильтонова структура (2.9) ему не была известна. Покажем, что интегрирование системы возможно при помощи обычного разделения переменных, придав тем самым геометрический смысл виртуозным, но неочевидным преобразованиям Чаплыгина.

Перейдем к сфероконическим координатам  $q_1, q_2$ , которые задаются как корни квадратного уравнения

$$f(q) = \frac{\gamma_1^2}{a_1 - q} + \frac{\gamma_2^2}{a_2 - q} + \frac{\gamma_3^2}{a_3 - q} = 0, \quad (2.11)$$

где  $a_i = \frac{1}{I_i}$  и  $a_3 < q_2 < a_2 < q_1 < a_1$ . Выражения для  $\gamma$  в новых

координатах имеют вид

$$\begin{aligned}\gamma_1^2 &= \frac{(a_1 - q_1)(a_1 - q_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, & \gamma_2^2 &= \frac{(a_2 - q_1)(a_2 - q_2)}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)}, \\ \gamma_3^2 &= \frac{(a_3 - q_1)(a_3 - q_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Выражение для момента  $\mathbf{M}$  через новые координаты  $q_1, q_2$  и сопряженные им импульсы  $p_1, p_2$  имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \boldsymbol{\gamma} = p_1 \left( \frac{\partial q_1}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} \right) + p_2 \left( \frac{\partial q_2}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} \right),\tag{2.13}$$

где  $\frac{\partial q_1}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \frac{\partial q_2}{\partial \boldsymbol{\gamma}}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  выражаются через  $q_1$  и  $q_2$  по формулам (2.12). Окончательно получим

$$\begin{aligned}M_1 &= F(q_1, q_2) \sqrt{a_2 - a_3} \left( p_1 \sqrt{\frac{a_1 - q_1}{a_1 - q_2}} - p_2 \sqrt{\frac{a_1 - q_2}{a_1 - q_1}} \right), \\ M_2 &= F(q_1, q_2) \sqrt{a_1 - a_3} \left( p_1 \sqrt{\frac{q_1 - a_2}{a_2 - q_2}} + p_2 \sqrt{\frac{a_2 - q_2}{q_1 - a_2}} \right), \\ M_3 &= F(q_1, q_2) \sqrt{a_1 - a_2} \left( -p_1 \sqrt{\frac{q_1 - a_3}{q_2 - a_3}} + p_2 \sqrt{\frac{q_2 - a_3}{q_1 - a_3}} \right),\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$F(q_1, q_2) = \frac{2}{q_1 - q_2} \sqrt{\frac{(a_1 - q_1)(a_1 - q_2)(q_1 - a_2)(a_2 - q_2)(q_1 - a_3)(q_2 - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_1 - a_3)}}.$$

Подставив (2.12) и (2.13) в (2.8)-(2.10) выразим гамильтониан в канонических переменных

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1} \right)^{-1} (-p_1^2 f(q_1) + p_2^2 f(q_2)), \\ f(q) &= \frac{1}{q} (q - a_1)(q - a_2)(q - a_3)(1 + Dq),\end{aligned}\tag{2.15}$$

дополнительный интеграл можно представить в форме

$$n = \frac{-p_1^2 f(q_1) q_1 (1 + Dq_2) + p_2^2 f(q_2) q_2 (1 + Dq_1)}{q_1 - q_2}\tag{2.16}$$



Как видно из (2.15) в новых переменных уравнения разделяются. Решение уравнения Гамильтона–Якоби имеет вид

$$S(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \int \frac{2\alpha_1 + q_1\alpha_2}{\sqrt{R(q_1)}} dq_1 \pm \int \frac{2\alpha_1 + q_2\alpha_2}{\sqrt{R(q_2)}} dq_2, \quad (2.17)$$

$$R(q) = (2\alpha_1 + q\alpha_2)(q - a_1)(q - a_2)(q - a_3)(1 + Dq),$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  — константы разделения, связанные со значениями интегралов (2.10) следующим образом

$$\alpha_1 = H, \quad \alpha_2 = 2DH - n. \quad (2.18)$$

Используя  $S$  как производящую функцию можно перейти к новым (по Якоби — оскулирующим) переменным  $\alpha, \beta$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}. \quad (2.19)$$

В этих переменных уравнения движения имеют вид

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H}{\partial \beta_i} = 0, \quad \dot{\beta}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \delta_{1i}, \quad i = 1, 2 \quad (2.20)$$

и их решение

$$\alpha_i = \text{const}, \quad \beta_i = \delta_{1i}\tau + \beta_i^0, \quad i = 1, 2 \quad (2.21)$$

где  $\beta_i^0$  — константы, определяющие начальное положение на траектории. Таким образом решение (2.21) и система (2.19) задают траекторию (первое уравнение системы) и движение по ней (второе уравнение) в фазовом пространстве  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Соответствующие уравнения Абеля–Якоби, определяющие эволюцию  $q_1$  и  $q_2$  имеют вид

$$\frac{dq_1}{\sqrt{R(q_1)}} \pm \frac{dq_2}{\sqrt{R(q_2)}} = d\tau, \quad (2.22)$$

$$\frac{q_1 dq_1}{\sqrt{R(q_1)}} \pm \frac{q_2 dq_2}{\sqrt{R(q_2)}} = 0.$$

Явная зависимость  $\mathbf{p}(\tau), \mathbf{q}(\tau)$  может быть получена в тэта-функциях.

Полученные уравнения движения (2.22), (2.19) и (2.21) с точностью до переобозначения переменных совпадают с уравнениями С. А. Чаплыгина [12].

Наличие разделяющихся переменных и пуассоновой структуры позволяет стандартным образом ввести переменные действие-угол (для системы в новом времени (2.7)). Для переменных действие используя первое уравнение системы (2.19) получим

$$I_1 = \oint p_1 dq_1 = \int_{a_2}^{a_1} \frac{2\alpha_1 + q\alpha_2}{\sqrt{R(q)}} dq, \quad I_2 = \oint p_2 dq_2 = \int_{a_3}^{a_2} \frac{2\alpha_1 + q\alpha_2}{\sqrt{R(q)}} dq. \quad (2.23)$$

Выражение для угловых переменных можно получить используя неявную зависимость  $\alpha(\mathbf{I})$

$$\varphi_i = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \alpha(\mathbf{I}))}{\partial I_i}. \quad (2.24)$$

Выразив частные производные  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial I_j}$  из уравнений (2.23), окончательно для угловых переменных получим

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{F} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{a_3}^{a_2} \frac{qdq}{\sqrt{R(q)}} \left( \int \frac{dq_1}{\sqrt{R(q_1)}} + \int \frac{dq_2}{\sqrt{R(q_2)}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{a_3}^{a_2} \frac{dq}{\sqrt{R(q)}} \left( \int \frac{q_1 dq_1}{\sqrt{R(q_1)}} + \int \frac{q_2 dq_2}{\sqrt{R(q_2)}} \right) \right), \\ \varphi_2 &= \frac{1}{F} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{a_2}^{a_1} \frac{dq}{\sqrt{R(q)}} \left( \int \frac{q_1 dq_1}{\sqrt{R(q_1)}} + \int \frac{q_2 dq_2}{\sqrt{R(q_2)}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{a_2}^{a_1} \frac{qdq}{\sqrt{R(q)}} \left( \int \frac{dq_1}{\sqrt{R(q_1)}} + \int \frac{dq_2}{\sqrt{R(q_2)}} \right) \right), \\ F &= \frac{1}{2\pi} \int_{a_3}^{a_2} \frac{qdq}{\sqrt{R(q)}} \frac{1}{2\pi} \int_{a_2}^{a_1} \frac{dq}{\sqrt{R(q)}} - \frac{1}{2\pi} \int_{a_3}^{a_2} \frac{dq}{\sqrt{R(q)}} \frac{1}{2\pi} \int_{a_2}^{a_1} \frac{qdq}{\sqrt{R(q)}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Уравнения движения в переменных действие-угол имеют вид  $I_i = \text{const}$ ,  $\frac{d\varphi_i}{d\tau} = \omega_i(\mathbf{I})$ , где частоты определяются соотношениями

$$\omega_1(\mathbf{I}) = \frac{1}{2\pi F} \int_{a_3}^{a_2} \frac{qdq}{\sqrt{R(q)}}, \quad \omega_2(\mathbf{I}) = -\frac{1}{2\pi F} \int_{a_2}^{a_1} \frac{qdq}{\sqrt{R(q)}}. \quad (2.26)$$

Число вращения для торов, равное отношению частот, выражается формулой

$$n(I_1, I_2) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\int_{a_2}^{a_3} \frac{qdq}{\sqrt{R(q)}} dq}{\int_{a_2}^{a_1} \frac{qdq}{\sqrt{R(q)}} dq}. \quad (2.27)$$

В своей работе [7] В. В. Козлов ввел более простые угловые переменные на торах для системы с исходным временем  $t$  (2.7)

$$x = \frac{\int \frac{q_1 dq_1}{\sqrt{R(q_1)}}}{\frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{a_1} \frac{qdq}{\sqrt{R(q)}}}, \quad y = \frac{\int \frac{q_2 dq_2}{\sqrt{R(q_2)}}}{\frac{1}{\pi} \int_{a_3}^{a_2} \frac{qdq}{\sqrt{R(q)}}}. \quad (2.28)$$

Данные переменные являются линейной комбинацией переменных (2.25) с коэффициентами зависящими от констант интегралов. Хотя переменные (2.28) не являются переменными действие угол, они представляют интерес для изучения динамики на инвариантных торах.

### 2.3. Интегрирование уравнений движения в случае ненулевой константы площадей

В случае ненулевой константы площадей  $C = (M, \gamma) \neq 0$  уравнения движения интегрируются с помощью сведения к случаю  $C = 0$ . Для этого введем новые переменные

$$M_i = \mu' \gamma'_i + \mu M'_i, \quad \gamma_i = \lambda' \gamma'_i + \lambda M'_i \quad (2.29)$$

и подберем постоянные  $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$  так, чтобы с учетом интегралов движения выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} (M', M') &= n_1, \\ (\gamma', \gamma') &= 1, \\ (M', \gamma') &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Подставляя (2.29) в интегралы движения, получаем

$$\begin{aligned} \mu'^2 + \mu^2 n_1 &= n, \\ \lambda'^2 + \lambda^2 n_1 &= 1, \\ \lambda' \mu' + \lambda \mu n_1 &= C. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы интегралы энергии  $h_1$  и количества момента  $n_1$  в новых переменных имели вид интегралов на нулевом уровне константы площадей:

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}'\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}') - D'(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\gamma}')^2 &= 2h, \\ (\mathbf{J}'\boldsymbol{\omega}', \mathbf{J}'\boldsymbol{\omega}') - D'^2(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\gamma}')^2 &= n, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где  $\mathbf{J}' = \mathbf{J} = \mathbf{I} + D\mathbf{E}$  — матрица моментов инерции относительно точки контакта, инвариантная относительно замены (2.29). Используя (2.31) получаем соотношения

$$\begin{aligned} (\lambda'\mu - \mu'\lambda)^2 h_1 &= h\lambda'^2 + \frac{\mu'^2}{D}, \\ (\lambda'\mu - \mu'\lambda)^2 \frac{1}{D'} &= h\lambda^2 + \frac{\mu^2}{D}, \\ h\lambda'\lambda + \frac{\mu\mu'}{D} &= 0, \\ (\lambda'\mu - \mu'\lambda)^2 \frac{h_1}{D'} &= \frac{h}{D}. \end{aligned}$$

Константы, связывающие  $M, \gamma$  и  $M', \gamma'$ , определяются уравнениями

$$\begin{aligned} f^2 - \frac{n - hD}{C}f - hD &= 0 \\ \mu &= \lambda f \\ [n - C^2 + (C - f)^2]\lambda'^2 &= (C - f)^2 \\ \frac{\lambda'}{\mu'} &= \frac{C - f}{n - Cf} \\ \lambda\mu - \mu\lambda' &= \frac{\lambda}{\lambda'}(C - f), \end{aligned} \quad (2.32)$$

и между постоянными интегралов выполнены равенства:

$$\begin{aligned} \lambda^2 h_1 &= \frac{(f - C)h}{f(n - C^2 + (C - f)^2)} \\ \lambda^2 n_1 &= \frac{n - C^2}{n - C^2 + (C - f)^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Замечание. Отметим, что преобразование (2.29) определено с точностью до растяжений  $\mathbf{M} \rightarrow \alpha \mathbf{M}$ .

Так как интегрирование в переменных  $M', \gamma'$  (на нулевой константе площадей) может быть проведено в тэта-функциях, то становится возможным осуществить интегрирование и при  $C \neq 0$ .

Отдельно следует рассмотреть случай, когда вектор  $\mathbf{M}$  коллинеарен вектору  $\gamma$ , так как в этом случае замена (2.29) оказывается неприменимой. В данном случае,  $\mathbf{M} = C\gamma$ , и интегралы имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1, \\ C &= (\mathbf{M}, \gamma), \\ n &= (\mathbf{M}, \mathbf{M}) = C^2, \\ h &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{C}{2}(\boldsymbol{\omega}, \gamma), \end{aligned} \tag{2.34}$$

Уравнения движения при  $\mathbf{M} = C\gamma$  совпадают с уравнениями Эйлера. Действительно, из (2.1) и (2.34) получим выражение для угловой скорости  $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = (C + \frac{2Dh}{C})\gamma$  и уравнения движения в виде  $\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}$ . Таким образом, решение в данном случае выражается в эллиптических функциях.

В [12] С.А. Чаплыгин привел интересную геометрическую интерпретацию данному движению. Рассмотрим эллипсоид

$$\frac{x_1^2}{\frac{\lambda}{I_1} - a} + \frac{x_2^2}{\frac{\lambda}{I_2} - a} + \frac{x_3^2}{\frac{\lambda}{I_3} - a} = \lambda K - a, \tag{2.35}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\lambda}{l}\boldsymbol{\omega} - a\gamma, \\ K &= \frac{2h}{Cl}, \quad l = C + \frac{2Dh}{C}, \end{aligned}$$

а  $\lambda$  выбираем больше величин  $I_i a$  и  $\frac{a}{K}$ . Тогда шар своей поверхностью без скольжения катится по одной плоскости, а задаваемый формулой (2.35) эллипсоид — по другой. При этом угловая скорость пропорциональна длине отрезка оси вращения, заключенного между точками касания шара и эллипсоида с плоскостями. Однако, несмотря на подобную интерпретацию, качественный характер движения в абсолютном пространстве, и, в частности, динамика следа точки контакта на плоскости, остается неопределенной.

### 3. Бифуркационная диаграмма, периодические решения и точка контакта

#### 3.1. Случай $(M, \gamma) = 0$

Рассмотрим случай нулевой константы площадей  $(M, \gamma) = 0$ . Бифуркационные кривые при  $C = 0$  находятся из условия кратности корней полинома  $R(q)$  (2.17). В результате на плоскости  $(h, n)$  получаем три прямые

$$p_i : h = \frac{n}{I_i + D}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Область возможных движений заключена между прямыми  $p_1$  и  $p_3$  (рис. 1).

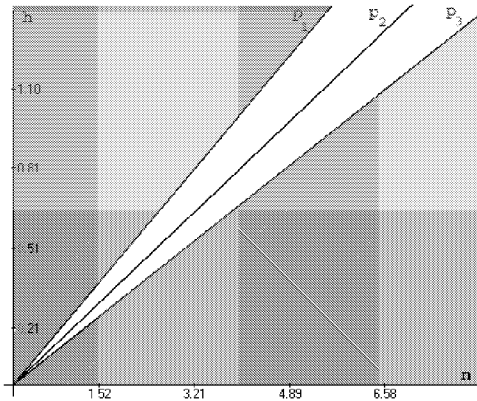


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма при  $I_1 = 1, I_2 = 1.5, I_3 = 3, D = 1, C = 0$

Бифуркационная диаграмма в данном случае совпадает с бифуркационной диаграммой задачи Эйлера–Пуансо [3], только вместо моментов инерции  $I_i$  относительно центра масс берутся моменты инерции  $I_i + D$  относительно точки контакта.

#### 3.2. Случай $(M, \gamma) \neq 0$

Сначала отметим, что для реальных движений всегда выполняется соотношение  $n \geq C^2$ , поэтому на бифуркационной диаграмме всегда будет присутствовать ограничивающая прямая  $n = C^2$ . Так как этот

случай при помощи замены (2.29) сводится к случаю нулевой константы площадей, то в преобразованных переменных бифуркационные прямые будут иметь вид (3.1), то есть

$$h_1 = \frac{n_1}{I'_i + D'}.$$

Чтобы получить бифуркационные кривые в исходных переменных, достаточно сделать обратное преобразование координат  $M'_i, \gamma'_i \rightarrow M_i, \gamma_i$ . При замене (2.29) изменяются как моменты инерции относительно центра масс  $I_i$ , так и параметр неголономности  $D$ , однако моменты инерции относительно точки контакта остаются неизменными  $J_i = I_i + D = I'_i + D' = J'_i$ .

Из (2.33) находим

$$\frac{h_1}{n_1} = \frac{(f - C)h}{f(n - C)} = \frac{1}{J_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Подставляя сюда выражение для  $f$  из (2.32), окончательно получаем бифуркационные кривые

$$p_i: \quad h = \frac{1}{J_i} \left( n + \frac{DC^2}{I_i} \right).$$

Область возможных движений снова заключена между  $p_1$  и  $p_3$ , а также ограничена слева прямой  $n = C^2$ .

На рис. 2а изображена бифуркационная диаграмма при  $C \neq 0$  и периодические решения на сечении Пуанкаре в переменных Андуайе-Депри, соответствующие точкам на ветвях бифуркационной диаграммы (см. например [2]). Эти периодические решения представляют собой вращения при которых  $\omega$  параллельна одной из главных осей. Так, точкам на ветви  $p_1$  соответствуют периодические решения

$$\omega = (\omega_1, 0, 0), \quad \gamma = (\gamma_1, \sqrt{1 - \gamma_1^2} \cos(\omega_1 t), \sqrt{1 - \gamma_1^2} \sin(\omega_1 t)), \quad (3.2)$$

где  $\gamma_1$  и  $\omega_1$  выражаются через интегралы

$$\omega_1^2 = \frac{2I_1^2 h + DC^2}{J_1 I_1^2}, \quad \gamma_1^2 = \frac{J_1 C^2}{2I_1^2 h + DC^2}. \quad (3.3)$$

В абсолютном пространстве такие движения представляют собой вращения шара вокруг одной из главных осей. При этом данная ось сохраняет

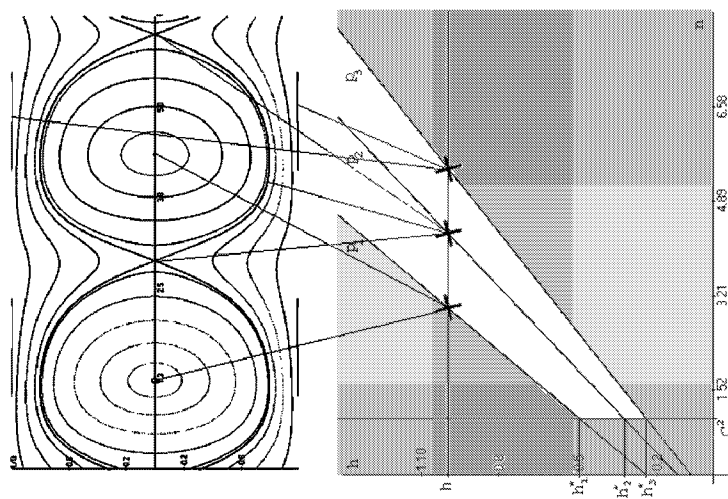


Рис. 2. а) Бифуркационная диаграмма при  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 1.5$ ,  $I_3 = 3$ ,  $D = 1$ ,  $C = 1$  и отображение Пуанкаре на уровне энергии  $h = 1$ ; б) Движение шара в абсолютном пространстве, представляющее собой суперпозицию равномерного поступательного движения и равномерного вращения в перпендикулярной плоскости, соответствует ветви  $p_1$  на бифуркационной диаграмме ( $O$  — точка контакта,  $C$  — след точки контакта на плоскости,  $C'$  — след точки контакта на шаре).



постоянное положение в пространстве, а след точки контакта на плоскости представляет собой прямую (рис. 2b).

Как видно из бифуркационной диаграммы, ветвям  $p_1$  и  $p_3$  соответствует устойчивое вращение относительно наименьшей и наибольшей осей соответственно. Ветви  $p_2$  соответствуют неустойчивым вращениям вокруг средней оси. Кроме того ей также соответствуют сепаратрисные движения, соединяющие два периодических решения с противоположными направлениями  $\omega$ .

Вернемся к случаю  $C = (\mathbf{M}, \gamma) = 0$ . Выберем орт оси  $x$   $\alpha$  параллельным вектору кинетического момента  $\mathbf{M}$ . Второе уравнение системы (2.4) при этом принимает вид

$$\dot{y} = -\left(\frac{\mathbf{M}}{\sqrt{n}}, \omega\right) = -\frac{2\hbar}{\sqrt{n}} = \text{const.}$$

Таким образом центр масс шара и точка контакта равномерно движутся вдоль направления перпендикулярного вектору кинетического момента. При этом в направлении ему параллельном движение шара в общем случае представляет собой некоторую комбинацию поступательного и периодического колебательного движений. Указанное свойство движения шара впервые привел С.А.Чаплыгин в своей работе [12].

В случае  $C = (\mathbf{M}, \gamma) \neq 0$  используя замену (2.29) можно показать, что движение шара теперь уже в обоих направлениях будет представлять собой комбинацию поступательного и периодического колебательного движений. Явное выражение для точки контакта было получено С.А.Чаплыгиным в его работе [12]. Однако ввиду сложности выражений, представляющих собой интегралы рациональных выражений от тэта-функций, аналитическое исследование движения точки контакта по плоскости провести невозможно. На рис. 3 представлены траектории точки контакта для различных точек на бифуркационной диаграмме, полученные численно. Особенный интерес представляет собой сепаратрисное движение, приведенное на рис. 3 d, при котором вектор угловой скорости  $\omega$  переворачивается и принимает положение, противоположное исходному. Ввиду сложности точного попадания на сепаратрису и ошибок счета при численном интегрировании, на рисунке видны несколько таких «переворотов». Как видно из рисунков, и как следует из вышесказанного, общей ситуацией для рассмотренных случаев является неограниченность движения точки контакта.

**Замечание.** В отличие от шара, в случае качения диска по плоскости (см. статью 9 настоящего сборника) складывается обратная ситуация. Т.е. типичным является ограниченное движение диска и точки контакта, а все случаи неограниченного движения связаны с резонансом частот вращения диска.

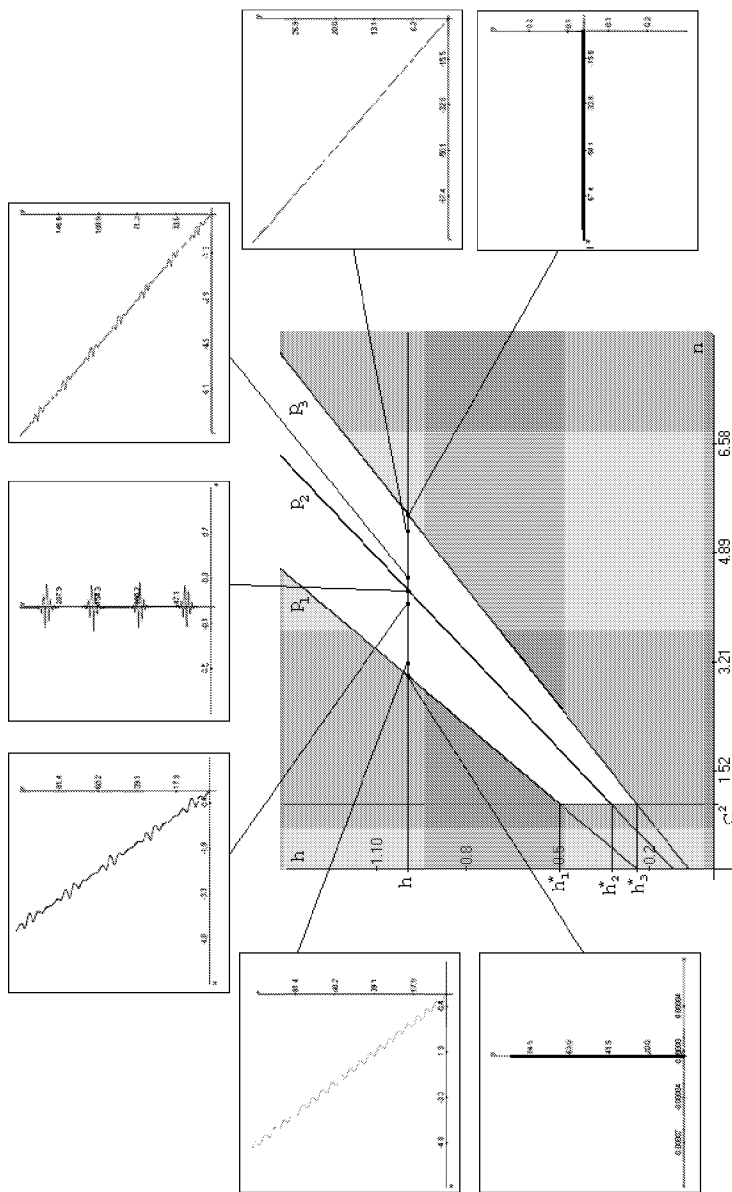


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма при  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 1.5$ ,  $I_3 = 3$ ,  $D = 1$ ,  $C = 1$  и траектории точки контакта, соответствующие различным точкам диаграммы.

### 3.3. Случай $M \parallel \gamma$

Рассмотрим теперь подробнее случай  $M \parallel \gamma$ , когда замена (2.29) не действительна, а траектории точки контакта представляют наибольший интерес.

Данному случаю на бифуркационной диаграмме соответствует отрезок вертикальной прямой  $n = C^2$ , ограниченный ветвями  $p_1$  и  $p_3$  диаграммы (рис. 2). Точкам пересечения прямой  $n = C^2$  с ветвями  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  ( $h = h_1^*$ ,  $h_2^*$ ,  $h_3^*$ ) соответствуют вращения вокруг главных осей, причем такие, что точка контакта остается на месте. Исключение составляет точка пересечения со второй ветвью, которой, кроме того, соответствует сепаратрисное движение. Рассмотрим этот случай более подробно. Точке  $(C^2, h_2^*)$  на диаграмме соответствует два периодических решения, являющихся вращениями вокруг средней оси в разные стороны. Эти два решения соединены семейством двоякопериодических траекторий (см. например [6]) во время движения по которым происходит переворот шара. Выбрав решения уравнений (2.4) из этого семейства так чтобы они удовлетворяли условию ортогональности, получим:

$$\begin{aligned} \gamma &= \left( \frac{a_{32}}{a_{31}} \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda t}, -\operatorname{th} \lambda t, \frac{a_{21}}{a_{31}} \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda t} \right), \\ \alpha &= \left( \frac{a_{32}}{a_{31}} \operatorname{th} \lambda t \cos \nu t + \frac{a_{21}}{a_{31}} \sin \nu t, \frac{\cos \nu t}{\operatorname{ch} \lambda t}, \frac{a_{21}}{a_{31}} \operatorname{th} \lambda t \cos \nu t - \frac{a_{32}}{a_{31}} \sin \nu t \right), \\ \beta &= \left( \frac{a_{32}}{a_{31}} \operatorname{th} \lambda t \sin \nu t - \frac{a_{21}}{a_{31}} \cos \nu t, \frac{\sin \nu t}{\operatorname{ch} \lambda t}, \frac{a_{21}}{a_{31}} \operatorname{th} \lambda t \sin \nu t + \frac{a_{32}}{a_{31}} \cos \nu t \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$a_{ij} = \sqrt{\frac{1}{J_i} - \frac{1}{J_j}}, \quad \nu = \frac{C}{I_2}, \quad \lambda = C \frac{J_2}{I_2} a_{32} a_{21}.$$

Подставляя (3.4) в (2.4), получим для точки контакта

$$\dot{x} = \lambda \frac{\cos \nu t}{\operatorname{ch} \lambda t}, \quad \dot{y} = \lambda \frac{\sin \nu t}{\operatorname{ch} \lambda t}. \quad (3.5)$$

Считая, что при  $t \rightarrow -\infty$  точка контакта находилась в начале координат, получим

$$x(t) = \lambda \int_{-\infty}^t \frac{\cos \nu \tau}{\operatorname{ch} \lambda \tau} d\tau, \quad y(t) = \lambda \int_{-\infty}^t \frac{\sin \nu \tau}{\operatorname{ch} \lambda \tau} d\tau. \quad (3.6)$$

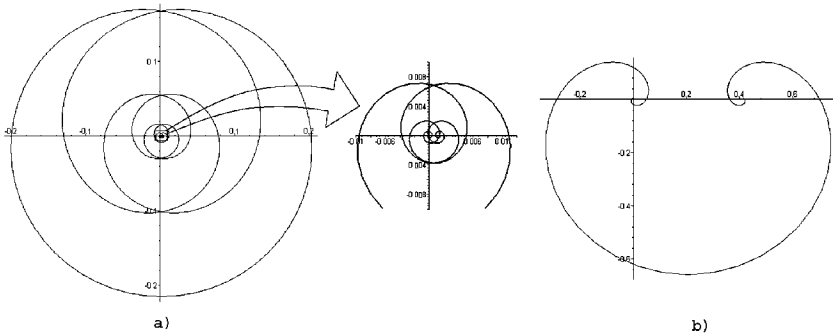


Рис. 4. Двоякоасимптотические траектории точки контакта на плоскости при  $\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\gamma}$  и  $h = h_2^*$ : а)  $I_1 = 1, I_2 = 1.5, I_3 = 2, C = 1 - \Delta = 0.002858$ ; б)  $I_1 = 1, I_2 = 3, I_3 = 5, C = 1 - \Delta = 0.411829$

След точки контакта при таком движении для разных наборов моментов инерции приведен на рис. 4. Устремляя  $t \rightarrow \infty$  в (3.6) получим

$$x(\infty) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \nu \tau}{\operatorname{ch} \lambda \tau} d\tau, \quad y(\infty) = 0.$$

Таким образом, переворот оси вращения происходит со смещением центра масс шара на величину  $\Delta = x(\infty)$  или, если  $\lambda \neq 0$

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{\nu}{\lambda} t}{\operatorname{ch} t} dt.$$

Величина сдвига зависит только от комбинации  $\frac{\nu}{\lambda} = \frac{1}{J_2 a_{21} a_{32}}$ , т.е. только от динамических характеристик тела и не зависит от рассматриваемого уровня интегралов. График зависимости  $\Delta(\frac{\nu}{\lambda})$  приведен на рисунке 5. Как мы увидим далее величина  $\Delta(\frac{\nu}{\lambda})$  имеет важное значение для понимания геометрии траектории точки контакта вблизи точки  $(h_2^*, C^2)$  на диаграмме.

ЗАМЕЧАНИЕ. При движении точки контакта по сфере угол пересечения ее траектории с меридианами постоянен вдоль всей траектории. Данное свойство

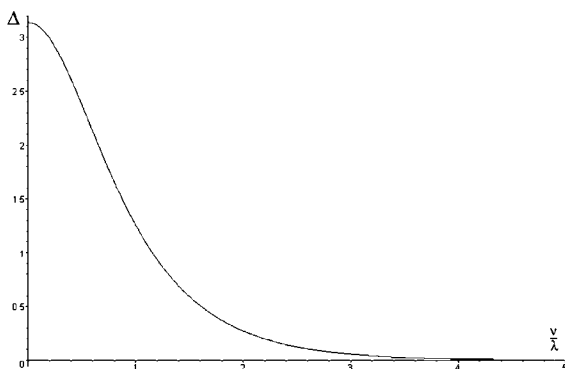


Рис. 5.

движения легко получить из уравнений движения (2.1) и приведенного гиперболического решения (3.4). Таким образом, точка контакта на сфере при  $h = h_2^*$  движется по локсодроме.

Рассмотрим теперь снова всю прямую  $n = C^2$ . Как уже было указано выше, уравнения движения в данном случае принимают форму уравнений Эйлера. Решения уравнений движения для  $M$  и  $\gamma$  при этом выражаются в эллиптических функциях. Таким образом, в системе, жестко связанной с телом, точка контакта движется по замкнутым траекториям. В абсолютном пространстве след точки контакта на плоскости уже не является замкнутым и представляет собой достаточно сложные кривые. Для различных наборов моментов инерции уровней энергии эти кривые приведены на рис. 6.

*Как видно на рисунке, практически все кривые, за исключением критических, являются ограниченными.*

Двигаясь по прямой  $M^2 = C^2$  от  $h = h_1^*$  до  $h = h_3^*$  траектория точки контакта претерпевает несколько бифуркаций. Вблизи точки  $h = h_1^*$  траектории представляют собой квазипериодические кривые, радиус огибающих которых стремится к нулю при приближении к критическому значению  $h$  (рис. 6а). Вблизи  $h = h_3^*$  траектории в зависимости от параметров, либо ведут себя аналогичным образом, либо радиус огибающих бесконечно растет при приближении к  $h = h_3^*$ . Однако при этом разница между радиусами огибающих и скорость дрейфа вдоль огибающих стремится к нулю (рис. 6б). Таким образом в пределе шар, как и в предыдущем случае, вращается на одном месте, а траектория точки контакта вырождается в точку. Наибольший интерес при движении по рассмат-

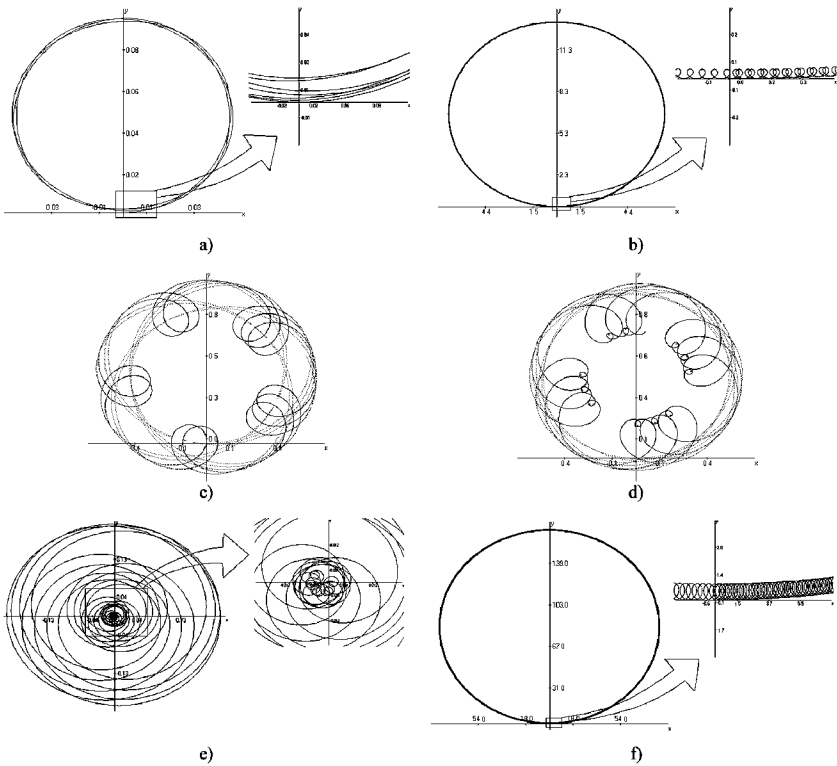


Рис. 6. Траектории точки контакта на плоскости при  $M \parallel \gamma$  и  $C = 1$  для различных значений моментов инерции и энергии.  $I_1 = 1, I_2 = 3, I_3 = 5, C = 1$ : а)  $h = 0.4993$ ; б)  $h = 0.1002$ ; в)  $h = 0.1674$ ; д)  $h = 0.16667$ ; ф)  $h = 0.180278$ .  $I_1 = 1, I_2 = 1.5, I_3 = 2, C = 1$ : е)  $h = 0.33335$ .

риваемой прямой  $n = C^2$  на бифуркационной плоскости представляет окрестность точки  $h = h_2^*$ . В самой точке, кривая представляет собой два отрезка спирали со смещенными на величину  $\Delta$  центрами (рис. 4). Вблизи указанного значения  $H$  число витков спиралей становится конечным, и весь отрезок траектории между двумя касаниями внешней огибающей начинает квазипериодически вращаться вокруг некоторого центра (рис. 6 с, d). При этом радиус по которому движется центр спи-

ралей стремится к  $\frac{\Delta}{2}$  при  $h \rightarrow h_2^*$ . Заметим, что в зависимости от величины  $\Delta$  и других параметров системы, центр огибающих может лежать как внутри спирали, так и вне нее (рис. 6 d, e). По мере удаления от критического значения  $h$  число витков спирали уменьшается и становится равным единице.

Отметим также, что при определенных параметрах системы (в частности при больших  $\Delta$ ) существует некоторое критическое значение энергии, при котором движение точки контакта становится инфинитным (рис.6 f).

#### 4. Качение шара с гироскопом

Рассмотрим задачу о качении динамически несимметричного шара с гироскопом внутри по плоскости. Уравнения (2.1) при добавлении гироскопа приводятся к виду

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad D = ma^2,$$

где  $\mathbf{K}$  — постоянный вектор момента гироскопа. Как показал А. П. Маркеев [8] данная система допускает интегралы

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad C = (\mathbf{M} + \mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma}), \\ (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) &= 1, \quad n = (\mathbf{M} + \mathbf{K}, \mathbf{M} + \mathbf{K}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Причем мера в данной задаче имеет такой же как и в случае отсутствия гироскопа вид (2.2), что позволяет свести задачу к квадратурам. Однако несмотря на это, явное интегрирование задачи до сих пор не выполнено.

Рассмотрим частный случай данной задачи [10], когда полный момент системы шар-гироскоп вертикален  $\mathbf{M} + \mathbf{K} = C\boldsymbol{\gamma}$ . При этом третье уравнение системы (4.1) принимает вид

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} = l\boldsymbol{\gamma}, \quad (4.3)$$

где  $l = C + D \frac{2h + (\mathbf{K}, \boldsymbol{\omega})}{C}$ . Продифференцируем (4.3) по времени и проинтегрируем замену

$$\boldsymbol{\omega} = l\mathbf{x}, \quad dt = \frac{1}{l}d\tau.$$

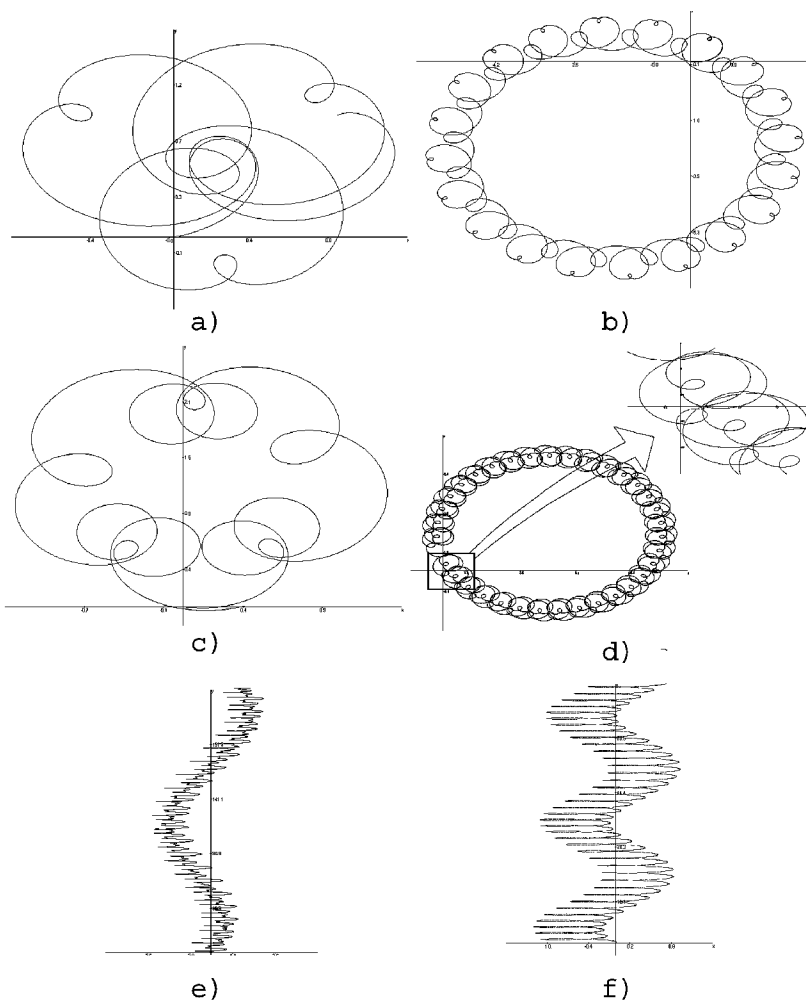


Рис. 7. Траектории точки контакта на плоскости при  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 3$ ,  $I_3 = 5$ ,  $\mathbf{K} = (0.1, 0.1, 0.2)$ ,  $C = 1$ ,  $\mathbf{M} + \mathbf{K} \parallel \gamma$ : а)  $h = 0.1366$ ; б)  $h = 0.1415$ ; в)  $h = 0.1533$ ;  $\mathbf{M} + \mathbf{K} \not\parallel \gamma$ : д)  $h = 0.25$ , траектория вблизи сепаратрисы; е)  $h = 0.3$ , траектория вблизи эллиптической неподвижной точки.



После некоторых преобразований уравнение для новых переменных запишется в виде

$$\hat{J}\dot{\mathbf{x}} = (\hat{J}\mathbf{x} + \frac{1}{\delta}\mathbf{K}) \times \mathbf{x}, \quad (4.4)$$

где

$$\hat{J}_{mn} = J_{mn} - \frac{D}{\delta C} K_m K_n, \\ \delta = C + \frac{2Dh}{C}.$$

Полученные уравнения совпадают с уравнениями Жуковского – Вольтерра, описывающими движение свободного гироскопа. Эти уравнения были проинтегрированы В. Вольтерра в работе [13]. Однако это решение не позволяет составить полную картину динамики.

Движение точки контакта в рассматриваемом случае по-прежнему описывается уравнениями (2.4), (2.6). При этом на движение шара рассмотренное выше накладывается влияние гироскопа. В результате вид траекторий еще более усложняется. Однако при этом траектории в рассматриваемом случае остаются ограниченными. Некоторые наиболее замечательные траектории при  $\mathbf{M} + \mathbf{K} \parallel \gamma$  и  $\mathbf{M} + \mathbf{K} \not\parallel \gamma$  приведены на рис. 7.

Автор благодарит А. В. Борисова и И. С. Мамаева за постановку задачи и полезные обсуждения в ходе работы над статьей.

## Литература

- [1] *Бобылев Д. К.* О шаре с гироскопом внутри, катящемся по горизонтальной плоскости без скольжения. Мат. сб., 1892, т. XVI.
- [2] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск, Изд-во РХД, 1999, 464 с.
- [3] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика твердого тела. Ижевск, Изд-во РХД, 2001, 384 с.
- [4] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара. Мат. заметки, 2001, т. 70, №5, с. 793–795.
- [5] *Жуковский Н. Е.* О гироскопическом шаре Д. Н. Бобылева. Труды отд. физ.-мат. наук Общ. люб. естествознания, 1893, т. VI, вып. 1, с. 11–17.
- [6] *Зиглин С. Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела. Труды ММО, 1980, т. 41, с. 287–303.
- [7] *Козлов В. В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики. Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–107.

- [8] *Маркеев А. П.* Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью. Изв. АН СССР, механика твердого тела, 1985, №1, с. 64–65.
- [9] *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967, 520 с.
- [10] *Федоров Ю. Н.* Явное интегрирование и изоморфизмы некоторых задач классической механики. Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, М.: МГУ, 1989.
- [11] *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелого твердого тела вращения на плоскости. Собр. соч., т. 1, М. – Л.: ГИТТЛ, 1948, с. 57–75.
- [12] *Чаплыгин С. А.* О катании шара по горизонтальной плоскости. Собр. соч., т. 1, М. – Л.: ГИТТЛ, 1948, с. 76–101.
- [13] *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes. Acta Math., 1899, v. 22, p. 201–358.

# ДИНАМИКА КАТЯЩЕГОСЯ ДИСКА<sup>1</sup>

*А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. А. Килин*

## 1. Введение

Движение тяжелого динамически симметричного круглого диска по горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости впервые исследовалось Г. Слессером (1861 г.) [28], Н. Феррерсом (1872 г.) [23], К. Нейманом (1886 г.) и А. Фиркандтом (1892 г.), благодаря которым в конце концов (после неудачных попыток Неймана и Линделефа) появилась правильная форма уравнений движения. Эта форма отличается от обычных (лагранжевых или гамильтоновых) уравнений механики, поскольку связь, состоящая в том, что скорость точки контакта диска с плоскостью равна нулю, является неголономной. Мы здесь не будем подробно останавливаться на общих формах уравнений неголономной механики (которые можно найти, например, в [15, 17]), а воспользуемся далее достаточно очевидной формой этих уравнений, полученной из общих принципов динамики — закона сохранения кинетического момента, записанного в осях, жестко связанных с диском.

Интегрируемость задачи о качении диска была впервые установлена С. А. Чаплыгиным (1897), который свел ее к анализу гипергеометрических квадратур в работе [19], где он показал также интегрируемость задачи о качении тяжелого произвольного динамически симметричного тела вращения по горизонтальной плоскости — в последнем случае задача сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка. Интегрирование уравнений движения диска в гиперэллиптических функциях обнаружили также в 1900 г. независимо друг от друга и от Чаплыгина П. Аппель [20] и Д. Кортевег [26]. Иногда, видимо, не совсем справедливо, задача о качении диска называется

---

<sup>1</sup>Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. *Dynamics of rolling disk*. Подано в Reg. & Chaot. Дуп.

задачей Аппеля–Кортевега (или просто задачей Аппеля). В 1903 г. тот же результат переоткрыл Э. Геллоп [24], используя, однако, функции Лежандра.

Несмотря на явные гипергеометрические квадратуры, вопрос о различных качественных свойствах движения диска долгое время практически не рассматривался — изучались в основном стационарные движения и их устойчивость (с соответствующей библиографией можно ознакомиться по книге [15]). Только в работах С. Н. Колесникова [11], Ю. Н. Федорова [18] были отмечены некоторые качественные свойства движения диска. В первой работе показано, что почти при всех начальных условиях диск никогда не упадет на плоскость, а во второй предложена методика исследования приведенной системы. Аналогичные результаты для динамически несимметричного диска и диска, движущегося по наклонной плоскости (задач, которые не являются интегрируемыми), получены в [1, 8]. Среди современных исследований по анализу качения диска следует отметить работы О. М. О’Рейли [27] и Р. Кашмена, Дж. Эрманса и Д. Кемпайнена [22], а также А. С. Кулешова [12] посвященные изучению бифуркаций и устойчивости стационарных движений диска.

Общие результаты качественного анализа о качении тяжелого тела вращения получены в работе Н. К. Мошука [13]. В ней выполнен частотный анализ, обсуждается применение КАМ-теории, а также получены основные качественные свойства для движения точки контакта. Оказывается, что точка контакта совершает сложное ограниченное движение: она периодически движется по некоторой замкнутой кривой, которая вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной точки. При этом при выполнении некоторого резонансного соотношения между частотами возможен уход тела вращения на бесконечность.

В этой работе мы развиваем эти качественные соображения и дополняем их компьютерным анализом. Мы также приводим различные типы траекторий, которые вычерчивает точка контакта в неподвижной и вращающейся системах координат, они имеют любопытную форму, которую сложно заранее предсказать. Подробно исследована и доказана компьютерным образом гипотеза об уходе при выполнении условий резонанса. Приведены наиболее общая трехмерная бифуркационная диаграмма в пространстве первых интегралов и полный атлас ее сечений различными плоскостями, построенные с помощью компьютерных вычислений.

В работе также мы приводим новый способ редукции задачи к одностепенной интегрируемой гамильтоновой системе и подробно обсуждаем гамильтоновость различных вариантов уравнений движения задачи.

## 2. Качение твердого тела по плоскости

### 2.1. Уравнения движения и их интегралы

Пусть твердое тело во внешнем силовом поле катится по плоскости без проскальзывания. В этом случае уравнения движения удобно записывать в системе координат, жестко связанной с телом, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела, а начало находится в центре масс. Все вектора в дальнейшем мы предполагаем спроектированными на эти оси.

Условие отсутствия проскальзывания при этом принимает вид

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  — скорость центра масс и угловая скорость тела, а  $\mathbf{r}$  — вектор направленный из центра масс в точку контакта (см. рис. 1).

Обозначим проекции неподвижных ортов на подвижные оси через  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  (причем вектор  $\boldsymbol{\gamma}$  — перпендикулярен к плоскости), а через  $(x, y)$  обозначим координаты проекции центра масс на плоскость в неподвижной системе координат. Предположим, что силовое поле является потенциальным, с потенциалом, зависящим лишь от ориентации тела  $U = U(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ . Полная система уравнений движения, описывающих данную систему может быть представлена в форме

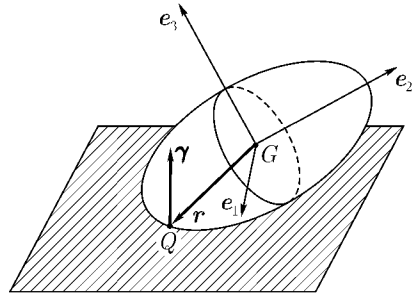


Рис. 1

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad (2.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.2) описывает эволюцию вектора кинетического момента тела относительно точки контакта  $\mathbf{M}$ , а уравнение (2.3) — эволюцию единичных неподвижных ортов в связанной с телом системе координат.

Движение центра масс может быть получено в квадратурах из решений уравнений (2.2), (2.3) следующим образом

$$\dot{x} = (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \dot{y} = (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}). \quad (2.4)$$

Вектор кинетического момента относительно точки контакта  $\mathbf{M}$  можно выразить через угловую скорость следующим образом

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  — тензор инерции тела. В свою очередь  $\mathbf{r}$  может быть однозначно выражен (для всюду выпуклого тела) через нормаль к плоскости  $\gamma$  из уравнения

$$\gamma = -\frac{\nabla F(\mathbf{r})}{|\nabla F(\mathbf{r})|}, \quad (2.6)$$

здесь  $F(\mathbf{r}) = 0$  уравнение поверхности тела.

Рассмотрим теперь движение точки контакта на плоскости. Если обозначить положение точки контакта на плоскости в неподвижной системе координат как  $(X, Y)$ , то уравнение движения для точки контакта могут быть представлены в форме

$$\dot{X} = (\dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \dot{Y} = (\dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\beta}). \quad (2.7)$$

где  $\dot{\mathbf{r}}$  определяется из уравнений (2.2)–(2.6). Фактически  $\dot{X}$  и  $\dot{Y}$  являются проекциями скорости точки контакта в подвижной системе координат на неподвижные оси.

Уравнение движения в форме близкой (2.2)–(2.3) можно найти, например, в книге [4]. Они могут быть также получены при помощи формализма Пуанкаре–Четаева [2] с неопределенными множителями Лагранжа, после исключения последних с помощью уравнений связей (2.1).

Система (2.2)–(2.3) в общем случае допускает семь независимых интегралов движения, шесть из которых — тривиальные геометрические интегралы:

$$\begin{aligned} \alpha^2 = 1, \quad \beta^2 = 1, \quad \gamma^2 = 1, \\ (\alpha, \beta) = 0, \quad (\beta, \gamma) = 0, \quad (\gamma, \alpha) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Седьмым является интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\alpha, \beta, \gamma) = h = \text{const}. \quad (2.9)$$

В общем случае других дополнительных интегралов данная система не имеет, а возможность ее интегрируемости в конкретных случаях связана с наличием дополнительных тензорных инвариантов (меры, полей симметрии, интегралов).

## 2.2. Качение тяжелого диска

Рассмотрим теперь подробно случай качения осесимметричного диска радиуса  $R$  в поле тяжести, которое, очевидно, также является осесимметричным, с потенциалом зависящим только от  $\gamma$ . Полагаем, кроме того, что диск динамически симметричен, т. е.  $I_1 = I_2$ . Потенциальная энергия в этом случае имеет вид

$$U = -mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) = mgR\sqrt{1 - \gamma_3^2}. \quad (2.10)$$

Уравнение поверхности для диска имеет вид  $F(\mathbf{r}) = r_1^2 + r_2^2 - R^2$ . Подставляя его в уравнение (2.6) и разрешая его относительно  $\mathbf{r}$ , получим

$$r_1 = -\frac{R\gamma_1}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad r_2 = -\frac{R\gamma_2}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad r_3 = 0. \quad (2.11)$$

Так как потенциальная энергия зависит только от  $\boldsymbol{\gamma}$ , то в уравнениях движения (2.2)–(2.3) отделяется система шести уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + mg\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Выражая  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{r}$  из соотношений (2.5), (2.11) получим замкнутую систему для переменных  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ , которая во многом аналогична системе Эйлера-Пуассона в случае Лагранжа, однако существенно сложнее последней.

Уравнения (2.12) сохраняют геометрический интеграл  $\boldsymbol{\gamma}^2$  и энергию (2.9), кроме того они допускают стандартную (с постоянной плотностью) инвариантную меру. Для интегрируемости этих уравнений (по Эйлера-Якоби [7]) недостает еще двух интегралов. Далее мы укажем путь получения этих интегралов.

Возможность отделения системы (2.12) от общей системы (2.2)–(2.3) связана с симметрией относительно вращений вокруг вертикальной оси определенной вектором  $\boldsymbol{\gamma}$ . Система (2.12) инвариантна относительно поля симметрий

$$\hat{\mathbf{v}}_\psi = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \beta_1} - \beta_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \beta_2} - \beta_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial \beta_3} - \beta_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3}, \quad (2.13)$$

которое коммутирует с векторным полем задачи. Можно показать, что переменные  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  являются интегралами поля (2.13), то есть  $\hat{\mathbf{v}}_\psi(M_i) = 0$ ,  $\hat{\mathbf{v}}_\psi(\gamma_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Согласно общей теории Ли [9] переменные  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  задают редуцированную систему. Для классических уравнений

Эйлера–Пуассона соответствующая редукция есть приведение по Раусу относительно циклического угла прецессии.

Помимо поля симметрий (2.13) уравнения движения (2.2)–(2.3) именно для осесимметричного тела допускают еще одно поле симметрий

$$\begin{aligned} \widehat{v}_\varphi = & M_1 \frac{\partial}{\partial M_2} - M_2 \frac{\partial}{\partial M_1} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \gamma_1} + \\ & + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial \beta_2} - \beta_2 \frac{\partial}{\partial \beta_1}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

которое соответствует вращению вокруг оси симметрии диска.

Можно показать, что интегралами поля (2.14) являются проекции момента и нормали к плоскости диска на неподвижные оси координат

$$\mathbf{N} = ((\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}), (\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta}), (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})), \quad \mathbf{n} = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3).$$

Уравнения движения для них могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}} &= m\dot{\tilde{\mathbf{r}}} \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{r}}) + mg\tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} &= \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где символами  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}$  обозначены те же векторы, но в проекциях на неподвижные оси (то есть  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}), \dots, \tilde{\mathbf{r}}_1 = (\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}), \dots$ ). В явном виде компоненты вектора  $\tilde{\mathbf{r}}$  следующие

$$\tilde{\mathbf{r}} = \left( \frac{R\alpha_3\gamma_3}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}, \frac{R\beta_3\gamma_3}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}, -R\sqrt{1-\gamma_3^2} \right), \quad (2.16)$$

а вектор  $\mathbf{N}$  выражается через  $\boldsymbol{\omega}$  по формуле

$$\mathbf{N} = I_1\tilde{\boldsymbol{\omega}} + (I_3 - I_1)(\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n})\mathbf{n} + m\tilde{\mathbf{r}} \times (\tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}). \quad (2.17)$$

Замечание 1. Такая редукция выполнима также для произвольного тела вращения.

### 2.3. Приведение к интегрируемой одностепенной гамильтоновой системе

Выполним теперь понижение порядка по обоим полям симметрий (2.13) и (2.14). Для этого необходимо в качестве переменных редуцированной системы выбрать совместные интегралы этих полей. Как показано в [21] наиболее удобной алгебраической системой таких переменных



является набор

$$\begin{aligned} \gamma_3, \quad K_1 &= M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 = N_3 - \gamma_3(\mathbf{N}, \mathbf{n}), \\ K_2 &= \sqrt{\frac{I_1}{I_3 + mR^2}} M_3 = \sqrt{\frac{I_1}{I_3 + mR^2}} (\mathbf{N}, \mathbf{n}), \\ K_3 &= \gamma_1 M_2 - \gamma_2 M_1 = N_1 n_2 - N_2 n_1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Уравнения движения в новых переменных приобретают вид

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_3 &= \frac{K_3}{I_1 + mR^2}, \\ \dot{K}_1 &= -\frac{I_3}{(I_1 + mR^2)\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}} K_3 K_2, \\ \dot{K}_2 &= -\frac{mR^2}{(I_1 + mR^2)\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}} \frac{K_3 K_1}{1 - \gamma_3^2}, \\ \dot{K}_3 &= -\frac{\gamma_3}{1 - \gamma_3^2} \left( \frac{K_1^2}{I_1} + \frac{K_2^2}{I_1 + mR^2} \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}}{I_1^2} K_1 K_2 + mgR\gamma_3 \sqrt{1 - \gamma_3^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Уравнения (2.19) сохраняют инвариантную меру с плотностью  $\rho = \frac{1}{1 - \gamma_3^2}$ . Разделив второе и третье уравнения на первое и перейдя к новой независимой переменной — углу нутации  $\theta = \arccos \gamma_3$ , получим систему линейных уравнений

$$\frac{dK_1}{d\theta} = \frac{I_3 \sin \theta}{\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}} K_2, \quad \frac{dK_2}{d\theta} = \frac{mR^2}{\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}} \frac{K_1}{\sin \theta}. \quad (2.20)$$

Общее решение этих уравнений можно представить в форме [15]

$$\begin{aligned} K_1 &= C_1 \frac{I_3 \sin^2 \theta}{2\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}} F(1 + \xi, 1 + \eta, 2, \frac{1 - \cos \theta}{2}) - \\ &- C_2 \frac{I_3 \sin^2 \theta}{2\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}} F(1 + \xi, 1 + \eta, 2, \frac{1 + \cos \theta}{2}) \\ K_2 &= C_1 F(\xi, \eta, 1, \frac{1 - \cos \theta}{2}) + C_2 F(\xi, \eta, 1, \frac{1 + \cos \theta}{2}), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — решения квадратного уравнения  $x^2 - x + \frac{I_3 m R^2}{I_1(I_3 + m R^2)} = 0$ , а  $F(\xi, \eta, n, z)$  — обобщенная гипергеометрическая функция, представляемая рядом

$$F(\xi, \eta, n, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\xi + k)\Gamma(\eta + k)\Gamma(n)}{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)\Gamma(n + k)} \frac{z^k}{k!} \quad (2.22)$$

Таким образом соотношение (2.21) задают (неявно) интегралы движения, которыми в данном случае являются «постоянные»  $C_1$  и  $C_2$ , выраженные через  $K_1, K_2, \theta$ .

Квадратура для угла нутации может быть получена из интеграла энергии, записанного в переменных  $K_1, K_2, K_3, \theta$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= 2 \sin^2 \theta (I_1 + m R^2) P(\theta), \\ P(\theta) &= h - \frac{K_1^2}{2I_1 \sin^2 \theta} - \frac{1}{2} \frac{K_2^2}{I_1} - mgR \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.23)$$

здесь переменные  $K_1, K_2$  предполагаются выраженными через постоянные интегралов и угол  $\theta$  согласно формулам (2.21). В этом случае функция  $P(\theta)$  (зависящая от констант интегралов) задает аналог гирокопической функции для волчка Лагранжа [14, 2].

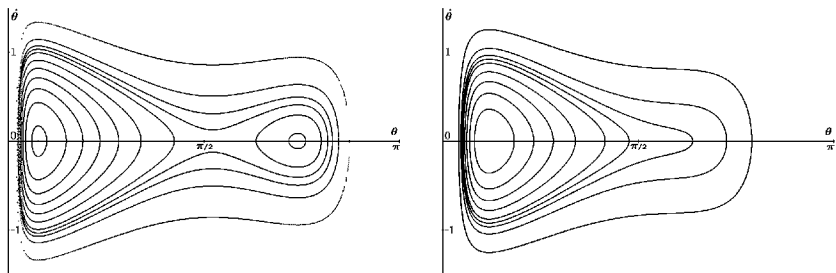


Рис. 2. Фазовые портреты системы (2.23) при различных значениях  $C_1$  и  $C_2$ . Слева: случай существования трех периодических решений ( $C_1 = 0.05, C_2 = 0.01$ ). Справа: случай существования одного периодического решения ( $C_1 = 0.08, C_2 = -0.02$ ).

Таким образом, уравнение (2.23) при фиксированных значениях  $C_1$  и  $C_2$  задает одностепенную гамильтонову систему. Фазовые портреты

этой системы на плоскости  $\theta, \dot{\theta}$  приведены на рис. 2. Все переменные  $\gamma_3, K_1, K_2, K_3$  представляют собой периодические функции от времени с периодом  $T_\theta$  и соответствующей частотой  $\omega_\theta$ .

Замечание 2. Как показано в [21] система (2.19) также гамильтонова с вырожденной скобкой Пуассона, которая обладает двумя функциями Казимира, выражающимися через гипергеометрические функции.

## 2.4. Квадратуры для углов собственного вращения и прецессии

Согласно общей теории Ли [9], если переменные редуцированной системы (2.18) являются заданными функциями времени, то все переменные исходной системы (2.12) (и соответственно (2.15)) могут быть получены с помощью одной квадратуры (при условии коммутации полей  $\tilde{v}_\psi$  (2.13) и  $\tilde{v}_\phi$  (2.14)).

Действительно, используя равенства  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$  (и соответственно  $\operatorname{tg} \psi = -\frac{n_1}{n_2}$ ) для углов  $\varphi$  и  $\psi$ , находим

$$\dot{\varphi} = -\frac{\gamma_3}{1 - \gamma_3^2} \frac{K_1}{I_1} + \frac{K_2}{\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}}, \quad \dot{\psi} = -\frac{K_1}{I_1(1 - \gamma_3^2)}. \quad (2.24)$$

Таким образом, для каждого из углов зависимость от времени задается в виде интеграла от периодической функции с частотой  $\omega_\theta$ , следовательно ее можно представить в форме (см., например, [7, 13])

$$\varphi = \omega_\varphi t + \varphi_*(t), \quad \psi = \omega_\psi t + \psi_*(t), \quad (2.25)$$

где  $\varphi_*(t), \psi_*(t)$  — периодические функции с частотой  $\omega_\theta$ . Кроме того из (2.24) и (2.25) также следует, что все частоты  $\omega_\theta, \omega_\varphi, \omega_\psi$  зависят только от констант первых интегралов.

## 2.5. Движение точки контакта

Следуя работам [10, 13] представим уравнение для скорости точки контакта в форме

$$\dot{Z} = R \left( \frac{\gamma_3}{1 - \gamma_3^2} \frac{K_1}{I_1} - \frac{K_2}{\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}} \right) e^{i\psi}, \quad (2.26)$$

где  $Z = X + iY$ , а  $X, Y$  — координаты точки контакта в неподвижной системе координат.

Таким образом координаты точки контакта определяются квадратурами от квазипериодических двухчастотных (с частотами  $\omega_\psi$ ,  $\omega_\theta$ ) функций времени.

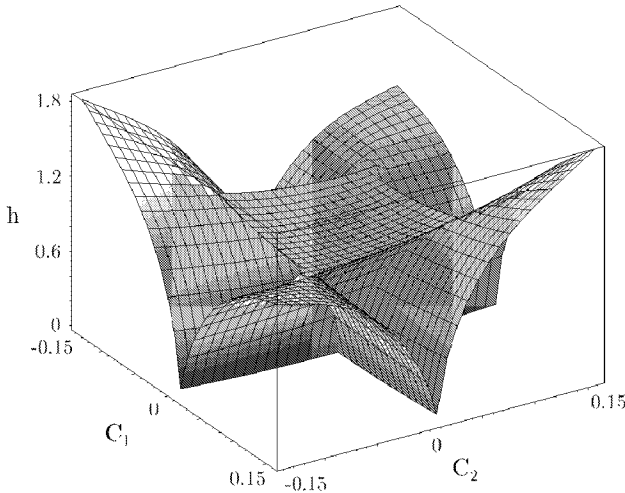


Рис. 3. Поверхность регулярных прецессий. Параметры системы  $I_1 = 0.25$ ,  $I_2 = 0.5$ ,  $R = 1$ ,  $m = 1$ ,  $g = 1$ .

### 3. Качественный анализ и результаты

Выполним качественный анализ динамики диска, который заключается в классификации возможных движений в зависимости от констант первых интегралов. В рассматриваемом случае имеются особенности, существенно усложняющие эту задачу по сравнению со случаем волчка Лагранжа в уравнениях Эйлера–Пуассона. Для единообразия мы рекомендуем ознакомиться с таким анализом случая Лагранжа по книге [2]. Сложность анализа связана с тем, что интегралы движения не выражаются в элементарных функциях (а лишь в специальных), и система не имеет естественного гамильтонова описания. Кроме того, помимо движения апексов тела (диска) необходимо классифицировать траектории точки контакта, которые получают дополнительные квадратуры квазипериодических функций.

### 3.1. Бифуркационный анализ приведенной системы

Возможные типы движения оси симметрии тела полностью определяются видом гироскопической функции  $P(\theta)$  и уровнем энергии. Критические значения интегралов движения  $C_1, C_2, h$  определяются уравнениями

$$P(\theta) = 0, \quad \frac{dP(\theta)}{d\theta} = 0. \quad (3.1)$$

В трехмерном пространстве с координатами  $C_1, C_2, h$  уравнения (3.1) задают трехмерную поверхность, так называемую *поверхность регулярных прецессий* [2] (см. рис. 3). Это название связано с тем, что при данных значениях интегралов монета совершает движение с фиксированным углом  $\theta = \text{const}$ , которое является аналогом прецессии для волчка Лагранжа [14]. Полный атлас сечений поверхности регулярных прецессий (бифуркационных диаграмм) плоскостями  $C_1 + C_2 = \text{const}$  и  $C_1 - C_2 = \text{const}$  приведен на рис. 4 и 5 соответственно. На рис. 6 и 7 для двух разных сечений показаны виды гироскопической функции  $P(\theta)$  соответствующие различным значениям интегралов  $C_1, C_2, h$ .

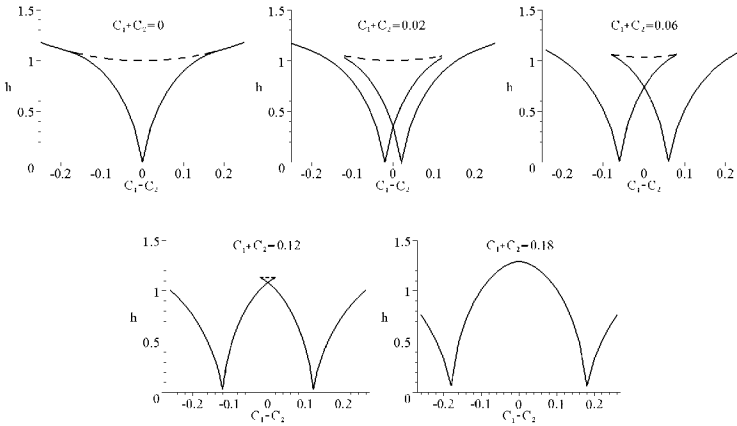


Рис. 4. Сечения поверхности регулярных прецессий изображенной на рис. 3 плоскостями  $C_1 + C_2 = \text{const}$ .

Пользуясь этими рисунками (и правилом знаков) несложно установить устойчивость соответствующих решений, расположенных на ветвях бифуркационной диаграммы (ветви соответствующие неустойчивым

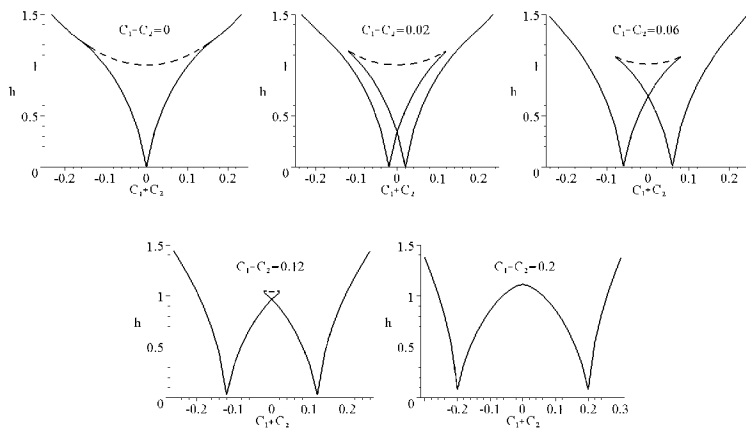


Рис. 5. Сечения поверхности регулярных прецессий изображенной на рис. 3 плоскостями  $C_1 - C_2 = \text{const}$ .

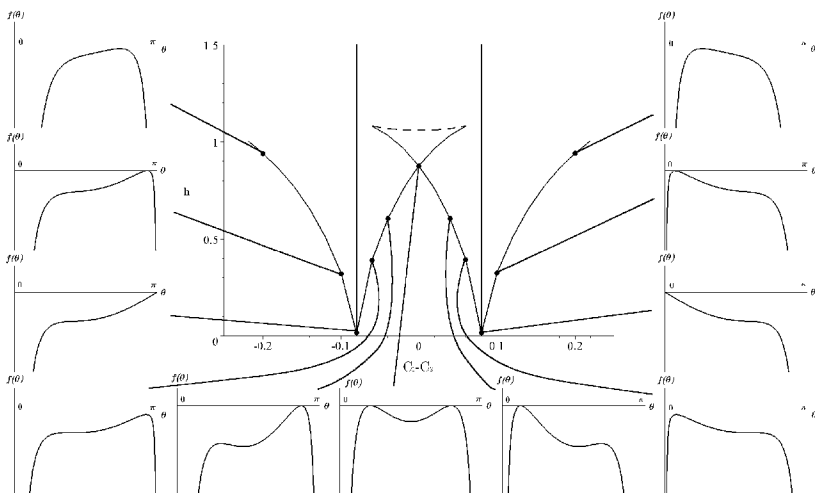


Рис. 6. Различные типы гироскопической функции для сечения поверхности регулярных прецессий плоскостью  $C_1 + C_2 = 0.08$ .

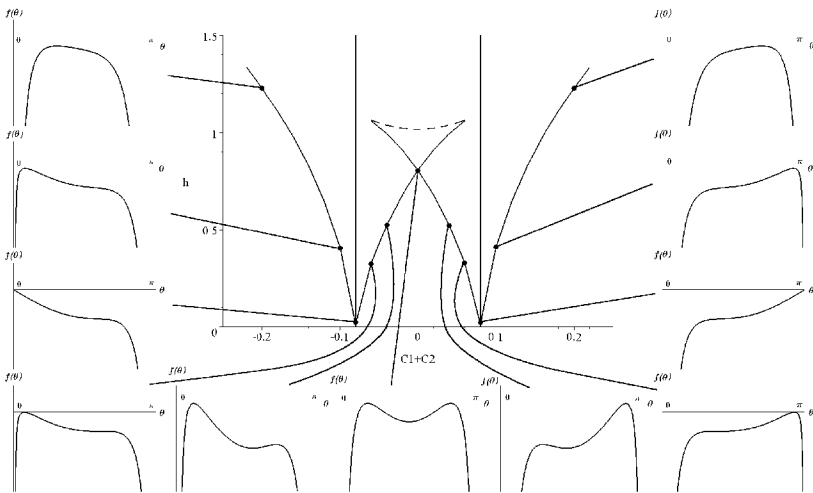


Рис. 7. Различные типы гироскопической функции для сечения поверхности регулярных прецессий плоскостью  $C_1 - C_2 = 0.08$ .

решениям изображены на диаграмме пунктиром). На рис. 6 и 7 вертикальными прямыми изображены случаи когда  $C_1 = 0$  или  $C_2 = 0$ . В этих случаях движение диска представляет собой падение, а плоскости задаваемые этими равенствами задают в пространстве интегралов  $C_1, C_2, h$  двумерное многообразие падений. Таким образом почти для всех начальных условий диск не упадет при качении по плоскости.

Другие замечательные движения соответствуют случаям  $C_1 = C_2$  — качение диска, и  $C_1 = -C_2$  — верчение диска вокруг своей оси, проходящей через диаметр, при котором наклон диска относительно вертикали остается постоянным.

Замечание 3. Отличие бифуркационной диаграммы (рис. 3, 4, 5) от приводимых в работах [27, 12] заключается в том, что вместо значения энергии было взято значение угла наклона соответствующей прецессии  $\theta_0$ , а эта функция не имеет физического смысла для остальных движений (при которых этот угол не сохраняется). Физическим смыслом обладают только точки на поверхности регулярных прецессий. В то же время каждому значению постоянных  $C_1, C_2, h$  в пространстве интегралов на рис. 3 соответствует некоторое движение, вне зависимости попадает ли эта точка на поверхность регулярных прецессий или нет, что важно для качественного анализа.

Замечание 4. Одно из сечений трехмерной диаграммы плоскостью  $h = \text{const}$  и соответствующие гироскопические функции приведены в работе [22].

### 3.2. Качественный анализ движения апексов

Поведение углов собственного вращения  $\varphi$  и прецессии  $\psi$ , совместно с  $\theta$  определяющих движение апексов, задается соотношениями (2.25) Важной особенностью является то, что поведение каждого из этих углов является *двухчастотным*, что не является обычным для интегрируемых систем. Так для волчка Ковалевской угол  $\psi(t)$  определяется тремя частотами [2]. В данном случае это связано с возможностью двух способов приведения по симметриям системы (2.12), (2.15).

С геометрической точки зрения все пространство переменных  $M, \alpha, \beta, \gamma$  расслоено на трехмерные торы, которые определяются как совместные поверхности уровня интегралов  $C_1, C_2, h$  и геометрических интегралов. Движение представляется собой обмотку трехмерного тора с частотами  $\omega_\theta, \omega_\varphi, \omega_\psi$  [13]. (Для приведенных систем (2.12) и (2.15) соответствующие торы являются двумерными.)

Вследствие того, что частоты зависят лишь от констант первых интегралов, все движения на торе совершаются с одинаковой частотой, что для неголономных систем неочевидно даже для интегрируемых неголономных систем на двумерных торах имеется неравномерное прямолинейное движение и, вообще говоря, возможно перемешивание (см. статью 14).

*Практически тем самым доказана гамильтоновость данной системы в аналитическом смысле (хотя функция Гамильтона может быть отличной от энергии (2.9) [13]. Более того с чисто аналитической точки зрения вблизи неособого тора система является гамильтоновой бесконечным числом способов [6].*

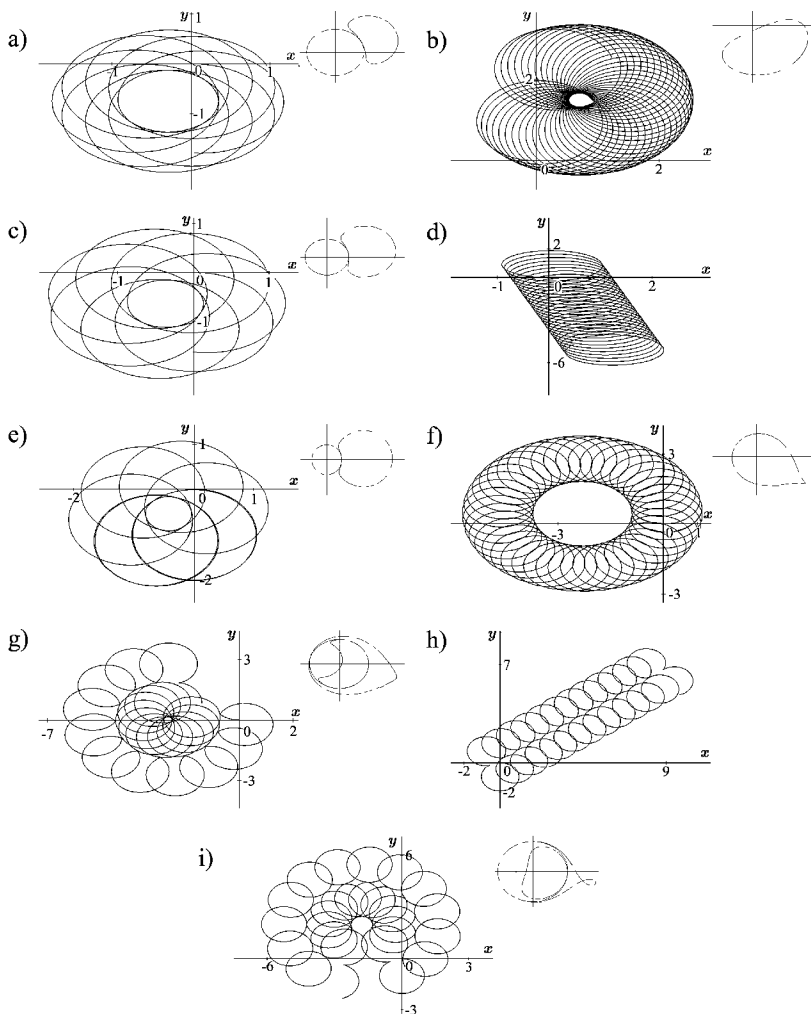
Замечание 5. Родственное наблюдение было сделано Н. К. Мошукон в [16], который изучал неголономные системы Чаплыгина, обладающие некоторым числом линейных по скоростям первых интегралов.

В тоже время существование естественной (алгебраической) пуассоновой структуры с гамильтонианом, определяемым энергией (2.9) оста-

---

Рис. 8. Траектории точки контакта диска в абсолютном пространстве при различных значениях интеграла энергии. Параметры системы соответствуют рисунку а). Замкнутые траектории во вращающейся с угловой скоростью  $\omega_\psi$  системе координат (см. объяснения в тексте) приведены в правом верхнем углу каждого рисунка (за исключением инфинитных движений). На рисунках а) и б) приведены различные типы движения диска при энергии  $h = 0.86$ . Рисунки в) и д) соответствуют энергии  $h = 0.92217$ , при которой одно из движений становится резонансным ( $\omega_\theta = \omega_\psi^{(2)}$ ) и наблюдается вековой уход (рис. д). При увеличении энергии — рисунки е) и ф) при  $h = 0.961$  — оба типа движения снова становятся ограниченными. На рисунке г) приведено движение диска при  $h = 1.1$ , после того как две ОВД, соответствующие различным типам движения сливаются. Инфинитное движение на рисунке в) соответствует резонансу  $\omega_\psi = 2\omega_\theta$  при энергии  $h = 1.18169$ . На рисунке и) приведено движение точки контакта диска при дальнейшем увеличении энергии до  $h = 1.4$ .





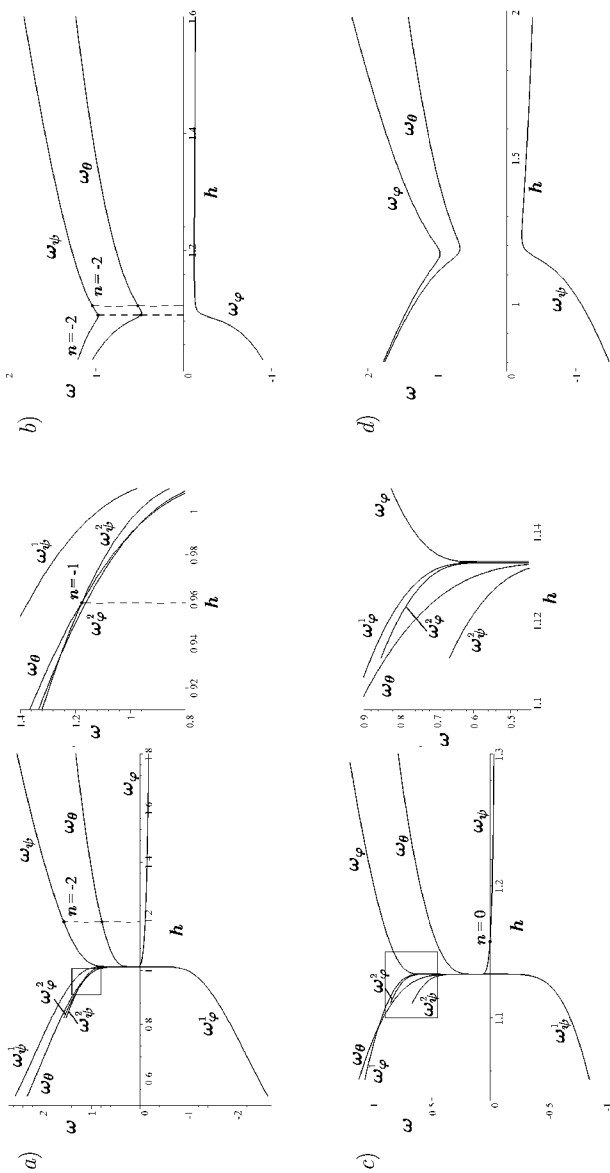


Рис. 9. Зависимости частот  $\omega_\theta$ ,  $\omega_\psi$  и  $\omega_\phi$  от энергии при  $I_1 = \frac{1}{4}$ ,  $I_3 = \frac{1}{2}$ ,  $R = 1$ ,  $m = 1$ ,  $g = 1$ , и различных значениях интегралов  $C_1$ ,  $C_2$ . На рисунках а) и с) выделенные прямоугольником области приведены в увеличенном масштабе отдельно. В области энергий, где возможны два различных типа движений в абсолютном пространстве частоты обозначены как  $\omega_\theta^1$ ,  $\omega_\psi^1$  и  $\omega_\phi^1$  и  $\omega_\theta^2$ ,  $\omega_\psi^2$ ,  $\omega_\phi^2$ . Энергии при которых происходит резонанс отмечены на графиках точками. Порядок резонанса указан рядом с точками. Значения интегралов для приведенных зависимостей равны: а)  $C_1 = 0.04$ ,  $C_2 = -0.02$ ; б)  $C_1 = 0.09$ ,  $C_2 = 0.065$ ; в)  $C_1 = -0.07$ ; д)  $C_1 = 0.09$ ,  $C_2 = 0.03$ .

ется открытым вопросом. Как показано А. В. Борисовым и И. С. Маматовым, приведенная система (2.19) является гамильтоновой с некоторой алгебраической нелинейной скобкой (см. статью 7), однако возможность ее поднятия на системы (2.12) и (2.15) также до сих пор не выяснена.

### 3.3. Анализ движения точки контакта

Для анализа движения точки контакта разложим скорость (2.26) в ряд Фурье по времени, тогда из (2.25) следует

$$\dot{Z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n e^{i(\omega_\psi + n\omega_\theta)t}.$$

Интегрируя по времени находим

$$Z(t) = Z_0 + e^{i\omega_\psi t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{v_n}{i(\omega_\psi + n\omega_\theta)} e^{in\omega_\theta t}.$$

Таким образом, при  $\omega_\psi + n\omega_\theta \neq 0$ , если перейти в систему координат, вращающуюся вокруг точки  $Z_0$  с угловой скоростью  $\omega_\psi$ , то точка контакта будет описывать некоторую замкнутую кривую см. [10, 13]. Различные типы таких замкнутых кривых и соответствующие им траектории в неподвижном пространстве приведены на рисунке 8.

При резонансе  $\omega_\psi + n\omega_\theta = 0$  наблюдается вековой уход точки контакта. Графики частот  $\omega_\psi(h)$ ,  $\omega_\theta(h)$ ,  $\omega_\varphi(h)$  при фиксированных значениях интегралов  $C_1$ ,  $C_2$  приведены на рис. 9. Из них видно, что соотношение  $\omega_\psi + n\omega_\theta = 0$  может выполняться как в случае существования одной, так и трех регулярных прецессий. Причем при одной и той же энергии одни начальные условия могут приводить к вековому уходу, а другие нет (см. рис. 8). Так как все частоты зависят только от значений первых интегралов, то соотношение  $\omega_\psi + n\omega_\theta = 0$  задает в трехмерном пространстве интегралов некоторое двумерное многообразие соответствующее инфинитным траекториям диска.

*Таким образом, для почти всех начальных условий (за исключением указанного многообразия) траектории диска являются ограниченными.*

Этот результат можно противопоставить исследованию динамики точки контакта шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости (см. [25] или статью 8), где большинство траекторий, наоборот, оказались неограниченными.

## Литература

- [1] *Афонин А. А., Козлов В. В.* Задача о падении диска, движущегося по горизонтальной плоскости. Изв. РАН, Мех. тв. тела, 1997, № 1, с. 7–13.

- [2] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика твердого тела. Ижевск: Изд-во РХД, 2001, 384 с.
- [3] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск, Изд-во РХД, 1999, 464 с.
- [4] *Карапетян А. В.* Устойчивость стационарных движений. М., «Эдиториал УРРС», 1998, 168 с.
- [5] *Козлов В. В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики. Успехи механики. 1985. т. 8. № 3. с. 85–101.
- [6] *Козлов В. В.* Лиувилевость инвариантных мер вполне интегрируемых систем и уравнение Монжа—Ампера. Мат. заметки, 1993, т. 53, № 4, с. 45–52.
- [7] *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск, Изд-во РХД, 2000, 256 с.
- [8] *Козлов В. В.* О движении диска по наклонной плоскости. Изв. АН, Механика тв. тела, 1996, № 5, с. 29–35.
- [9] *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, Изд-во Удм. ун-та, 1995.
- [10] *Козлов В. В., Колесников Н. Н.* О теоремах динамики. ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 28–33.
- [11] *Колесников С. Н.* О качении диска по горизонтальной плоскости. Вестник МГУ. Мат. мех., 1985, №2, с. 55–60.
- [12] *Кулешов А. С.* О стационарных качениях диска по шероховатой плоскости. ПММ, 2001, т. 65, вып. 1, с. 173–175.
- [13] *Мошук Н. К.* Качественный анализ движения тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости. ПММ, 1988, т. 52, вып. 2, с. 203–210.
- [14] *Магнус К.* Гироскоп: теория и применение. М.: Мир, 1974, 526 с.
- [15] *Маркеев А. П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992, 336 с.
- [16] *Мошук Н. К.* О приведении уравнений движения некоторых неголономных систем Чаплыгина к форме уравнений Лагранжа и Гамильтона. ПММ, 1987, т. 51, вып. 2, с. 223–229.
- [17] *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967, 519 с.
- [18] *Федоров Ю. Н.* О качении диска по абсолютно шероховатой плоскости. Изв. АН СССР. Мех. твердого тела, 1987, №4, с. 67–75.
- [19] *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии, 1897, т. 9, вып. 1, с. 10–16.

- [20] *Appel P.* Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau. *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, 1900, v. 14, p. 1-6.
- [21] *Borisov A. V., Mamaev I. S.* The rolling of rigid body on a plane and sphere. Hierarchy of dynamic. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2002, v. 7, № 1, p. 177–200.
- [22] *Cushman R., Hermans J., Kemppainen D.* The rolling disk. University of Calgary, Preprint, 1995, 51 p.
- [23] *Ferrers N. M.* Extension of Lagrange's equations. *Quart. J. of pure and applied Mathematics*, 1872, v. 12, № 45, p. 1–5.
- [24] *Gellop E. G.* On the rise of a Spinning Top. *Proc. Cambr. Philos. Soc.*, 1904, v. 19, pt. 3, p. 356–373.
- [25] *Kilin A. A.* The Dynamics of Chaplygin Ball: the Qualitative and Computer Analysis *Regular and Chaotic Dynamics*, 2001, v. 6, № 3, p. 291–306.
- [26] *Korteweg D.* Extrait d'une lettre à M. Appel. *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, 1900, v. 14, p. 7-8.
- [27] *O'Reilly O. M.* The dynamics of rolling disks and sliding disks. *Nonlinear Dynamics*, 1996, v. 10, p. 287–305.
- [28] *Slessor G. M.* Notes on rigid dynamics. *Quart. J. of mathematics*, 1861, v. 4, p. 65–77.

# ШАР ЧАПЛЫГИНА, ЗАДАЧА СУСЛОВА И ЗАДАЧА ВЕСЕЛОВОЙ. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И РЕАЛИЗАЦИЯ СВЯЗЕЙ

*А. В. Борисов, И. С. Мамаев*

Эта небольшая работа, имеющая в основном методический характер, написана нами специально для этого сборника, чтобы привести более полный перечень интегрируемых задач неголономной механики. Здесь мы рассмотрим также новые способы реализации связей в этих задачах, позволяющий рассмотреть различные их комбинации, которые приводят к новым неголономным системам, вообще говоря, еще не исследованным.

## 1. Задача Суслова. Уравнения движения и квадратуры

Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки, подчиненное неинтегрируемой связи  $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) = 0$ , где  $\mathbf{a}$  — вектор, постоянный в подвижном пространстве. Пусть, кроме того, имеется осесимметричное силовое поле с потенциалом  $V(\boldsymbol{\gamma})$ . Используя метод множителей Лагранжа, уравнения движения можно записать в виде (см. статью 14)

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \lambda \mathbf{a}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1.1)$$

где

$$\lambda = \frac{\left( \mathbf{a}, \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{I}^{-1}\left(\boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\right) \right)}{(\mathbf{a}, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{a})}.$$

Уравнения (1.1) всегда имеют три независимых интеграла

$$F_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + V(\boldsymbol{\gamma}), \quad F_2 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad F_3 = (\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}). \quad (1.2)$$

Оказывается, что если вектор  $\mathbf{a}$  является собственным вектором оператора  $\mathbf{I}$ , т.е.  $\mathbf{I}\mathbf{a} = \mu\mathbf{a}$ , то фазовый поток (1.1) сохраняет стандартную инвариантную меру в  $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$ .

Г. К. Суслов установил интегрируемость (1.1) при отсутствии силового поля  $V(\boldsymbol{\gamma}) = 0$ . В этом случае отделяется система, замкнутая относительно  $\boldsymbol{\omega}$ , которая интегрируется в квадратурах. Действительно, запишем уравнения движения в неглавных осях, таких, что связь представляется уравнением  $\omega_3 = 0$ ,  $I_{12} = 0$ , — этого всегда можно добиться, выбрав ось  $Ox_3$  вдоль вектора  $\mathbf{a}$  и подобрав соответствующим образом оси  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  в перпендикулярной плоскости. Имеем

$$\begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 - I_{23}\dot{\omega}_2 - I_{31}\omega_2^2 = 0, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 + I_{23}\omega_1\omega_2 + I_{31}\omega_1^2 = 0, \\ -I_{23}\dot{\omega}_2 - I_{31}\dot{\omega}_1 + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2 = \lambda, \end{cases}$$

здесь  $\lambda$  — неопределенный множитель связи. Интеграл энергии имеет вид

$$I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 = 2h.$$

Положим

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2h}{I_{11}}} \sin \alpha, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2h}{I_{22}}} \cos \alpha,$$

следовательно

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2h}{I_{11}I_{22}}} \left( \frac{I_{23}}{\sqrt{I_{22}}} \cos \alpha + \frac{I_{31}}{\sqrt{I_{11}}} \sin \alpha \right).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \alpha_0}{2} = e^{kt+t_0},$$

где

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{I_{31}}{I_{23}} \sqrt{\frac{I_{11}}{I_{22}}}, \quad k^2 = \frac{2h}{I_{11}^2 I_{22}^2} (I_{23}^2 I_{11} + I_{31}^2 I_{22}).$$

Таким образом, движение твердого тела асимптотически приближается к равномерному вращению вокруг некоторой прямой. В общем случае квадратура для  $\gamma(t)$  невозможна. Нахождение ориентации  $\gamma(t)$  и анализ разложений в ряды на комплексной плоскости времени содержится в [6]. Вагнер [1] получил решение для направляющих косинусов в гипергеометрических функциях времени.

**Обобщения задачи Сулова.** В общем случае уравнения (1.1) не имеют инвариантной меры и движения имеют асимптотический характер (см. статью 14 в этой книге). Однако если  $\mathbf{Ia} = \mu\mathbf{a}$ , то имеется стандартная инвариантная мера и для интегрируемости по Эйлеру–Якоби не хватает еще одного интеграла  $F_4 = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$ , что и делает возможным проинтегрировать систему по теореме Эйлера–Якоби. В предположении

$$\mathbf{Ia} = \mu\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = (0, 0, 1), \quad \omega_3 = 0$$

установлены следующие случаи интегрируемости.

**1.** Потенциал линейный  $V = (\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma})$  и  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  (Е. И. Харламова [10]). Дополнительный интеграл

$$F_4 = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{b}).$$

**2.** Линейный потенциал  $V = \varepsilon(\mathbf{a}, \boldsymbol{\gamma})$ ,  $\varepsilon \neq 0$  (В. В. Козлов [5]). Оказывается, что в этом случае система (1.1) является гамильтоновой [5] (в отличие от общих неголомомных систем) и сводится к системе (без ограничения общности можно положить  $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ )

$$\ddot{M}_i = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial M_i} \quad (i = 1, 2), \quad \tilde{V} = \frac{1}{2} \left( h - \frac{I_1^{-1} M_1^2 + I_2^{-1} M_2^2}{2} \right)^2, \quad M_i = I_i \omega_i, \quad (1.1)$$

где  $h$  — константа интеграла энергии  $F_1 = h$ . Несложно проверить, что пуассонов тензор, определяющий скобку Пуассона для системы (1.1) в фазовом пространстве переменных  $(M_1, M_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  имеет вид

$$\|J^{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{I_1} & 0 & 0 & -\omega_2 \\ -\frac{\varepsilon}{I_1} & 0 & 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & 0 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Этот структурный тензор может быть обобщен и для других силовых полей.

Уравнения (1.1), описывающие движение твердого тела в потенциальном поле, интегрируются при  $I_1 = I_2$  (центральное поле). Это аналог случая Лагранжа. При  $I_1 \neq I_2$  система (1.1), а значит и (1.1) в общем случае не является интегрируемой.

**3.** Предположим, что в (1.1) имеется потенциал Бруна  $V = \frac{\varepsilon}{2}(\mathbf{I}\gamma, \gamma)$ . Как показал В. В. Козлов [5] при этих условиях имеется интеграл

$$F_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\omega, \mathbf{I}\omega) - \frac{1}{2}(\mathbf{A}\gamma, \gamma), \quad \mathbf{A} = \varepsilon \mathbf{I}^{-1} \det \mathbf{I}.$$

Для потенциалов вида

$$V(\gamma) = \frac{1}{2}(c_{11}\gamma_1^2 + c_{22}\gamma_2^2 + c_{33}\gamma_3^2 + 2c_{11}\gamma_1\gamma_2)$$

уравнения (1.1) также являются интегрируемыми. В этом случае при помощи замены времени  $d\tau = \gamma_3 dt$  уравнения движения приводятся к линейной системе

$$I_2\gamma_1'' = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \gamma_1}, \quad I_1\gamma_2'' = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \gamma_2}, \quad \tilde{V} = V|_{\gamma_3^2=1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}.$$

**4.** В работе [7] Г. Г. Окунева показала интегрируемость задачи Суслова с потенциалом  $V = -P(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2) - \frac{\varepsilon}{2}(\mathbf{I}\gamma, \gamma)$ , где  $P, r_1, r_2, \varepsilon = \text{const}$ . При этом дополнительный интеграл можно представить в форме

$$F_4 = I_1\omega_1^2 + \varepsilon(I_2 - I_3)\gamma_2^2 + 2Pr_2\gamma_2,$$

или

$$\tilde{F}_4 = I_2\omega_2^2 + \varepsilon(I_3 - I_1)\gamma_1^2 + 2Pr_1\gamma_1,$$

причем  $F_4 + \tilde{F}_4 = F_1$ . При этом имеется стандартная инвариантная мера и после замены времени  $d\tau = \gamma_3 dt$  система преобразуется к уравнениям бигармонического осциллятора с частотами

$$\varkappa_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon(I_1 - I_3)}{I_2}}, \quad \varkappa_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon(I_2 - I_3)}{I_1}}.$$

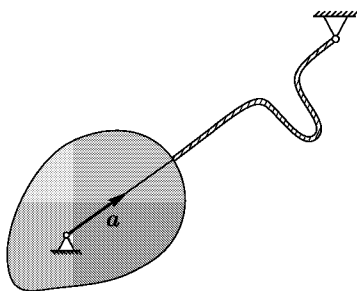


Рис. 1

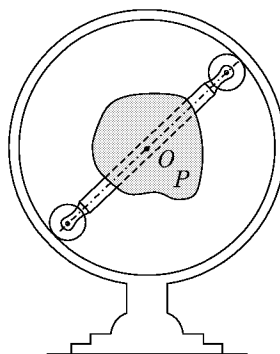


Рис. 2

**Реализация связи задачи Суллова.** Одна из возможных реализаций связи типа  $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) = 0$  была предложена Суловым [8]. При этом используется гибкая, нескручиваемая нить, один конец которой присоединен к телу, а другой закреплен неподвижно. Однако, как несложно видеть из рис. 1, такая реализация не является корректной. Более сложную, но реальную модель предложил В. Вагнер при помощи прикрепленных к телу колесиков (дисков), которые катятся без скольжения по внутренней поверхности неподвижной сферы (рис. 2). В своем учебнике Г. К. Сулов [8] рассматривает также более сложную задачу о движении двух тел, соединенных нескручиваемой нитью. Однако вследствие тех же причин эта постановка задачи также некорректна. Ниже мы приведем возможную комбинацию связи Суллова с задачей о качении шара Чаплыгина.

## 2. Задача Веселовой

**Явное интегрирование.** В работе Л. Е. Веселовой [4] была предложена новая интегрируемая задача неголономной механики, в некотором смысле противоположная задаче Суллова (см. также [2, 3]). Если в задаче Суллова неинтегрируемая связь задается соотношением  $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) = 0$  (в частном случае —  $\omega_3 = 0$ , см. выше), то в задаче Веселовой связь имеет вид  $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ , где  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  — проекции угловой скорости и неподвижного в пространстве орта на связанную с телом систему координат. То есть одна из проекций угловой скорости на оси неподвижного пространства равна нулю. Задача остается интегрируемой при добавлении поля Бруна.

Составляя уравнения неголономной механики с неопределенными множителями, получим [4]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}\mathbf{M} + \lambda\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{A}\mathbf{M}, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\lambda = \frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\mathbf{M} \times \mathbf{M}) + (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma})}{(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})},$$

где  $\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$  — вектор кинетического момента в проекциях на главные оси,  $\mathbf{I}$  — тензор инерции,  $\mathbf{A} = \mathbf{I}^{-1}$ . Уравнения (2.1) обладают очевидными интегралами:

$$F_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + V = h \text{ — интеграл энергии,}$$

$$F_2 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1 \text{ — геометрический,}$$

$F_3 = (\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$  — условие связи. Л. Е. Веселова заметила, что уравнение (2.1) обладает интегрирующим множителем

$$N = \sqrt{(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})} \quad (2.2)$$

и нетривиальным интегралом в случае  $V = \frac{1}{2} \alpha (\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$  (поле Бруна)

$$F_4 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}) - (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})^2 - \alpha \det \mathbf{I} (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (2.3)$$

что позволяет свести задачу к квадратурам с помощью теоремы Эйлера — Якоби.

Как показано в [4], система (2.1) может быть проинтегрирована в гиперэллиптических функциях. Оказывается, что при помощи замены времени и координат вида

$$dt = \Phi(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) d\tau, \quad \mathbf{q} = \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{p} = \Phi(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) \mathbf{A}\mathbf{M},$$

$$\Phi(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = \sqrt{\frac{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})}{\det \mathbf{A}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M})}} \quad (2.4)$$

при условии  $\alpha = 0$  (отсутствие поля Бруна) система (2.1) приводится к интегрируемой задаче Неймана

$$\ddot{q}_i = I_i q_i + \lambda q_i \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\sum_{i=1}^3 q_i^2 = 1, \quad U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} (\mathbf{I}\mathbf{q}, \mathbf{q}), \quad \lambda = -(\mathbf{I}\mathbf{q}, \mathbf{q}) - \dot{\mathbf{q}}^2. \quad (2.5)$$

Явное интегрирование системы (2.1, 2.2, 2.3) осуществляется в сфероконических координатах  $u, v$ , которые вводятся на сфере  $\gamma^2 = 1$  как корни квадратного уравнения

$$\frac{\gamma_1^2}{\lambda - I_1} + \frac{\gamma_2^2}{\lambda - I_2} + \frac{\gamma_3^2}{\lambda - I_3} = 0.$$

В этих координатах уравнения движения после указанной замены времени  $dt = \frac{\sqrt{uv}}{2} d\tau$  приводятся к уравнениям Абеля – Якоби

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\sqrt{R(u)}}{u - v}, \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{\sqrt{R(v)}}{v - u},$$

где  $R(z)$  является некоторым полиномом шестой степени.

Ю. Н. Федоровым в работе [9] рассмотрена более общая связь  $(\omega, \gamma) = d$ ,  $d = \text{const} \neq 0$ , показана интегрируемость и приведен метод сведения к квадратурам в этом случае. Кроме того, показано, что фазовые траектории задачи Веселовой и задачи о шаре Чаплыгина являются различными обмотками одних и тех же инвариантных торов, задаваемых интегралами  $F_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). Приведение к квадратурам в случае  $d \neq 0$  в [9] использует линейное преобразование, аналогичное примененному Чаплыгиным в задаче о качении шара [12].

**Обобщения задачи Веселовой. 1.** Введение поля Бруна отвечает добавлению к квадратичному потенциалу  $U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} (\mathbf{I}\mathbf{q}, \mathbf{q})$  задачи Неймана члена четвертой степени  $V(\mathbf{q}) = \beta [(\mathbf{I}\mathbf{q}, \mathbf{q})^2 - \det \mathbf{I} (\mathbf{I}^{-1}\mathbf{q}, \mathbf{q})]$ , что порождает интересную интегрируемую систему на сфере. Однако в этом случае  $\beta$  зависит не только от  $\alpha$ , но и от константы интеграла энергии, что делает связь обеих задач не очень естественной.

**2.** Присоединение симметричного гироскопа (гиростата), при отсутствии поля Бруна, также приводит к интегрируемой системе

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \nu \boldsymbol{\gamma}, & (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases}$$

где  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}(\mathbf{M} - \mathbf{K})$ ,  $\mathbf{K} = \text{const}$  — постоянный вектор гиростатического момента. Кроме меры (2.2), здесь имеются интегралы  $F_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{M} - \mathbf{K}, \boldsymbol{\omega})$ ,  $F_2 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$ ,  $F_3 = \mathbf{M}^2 - (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})^2$ . При этом решения в общем случае в  $\theta$ -функциях, по-видимому, не выражаются.

**3.** В случае симметричного волчка  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , описываемого уравнениями (2.1) при  $V = \beta\gamma_3$ ,  $\beta = \text{const}$  (потенциал поля тяжести) система имеет четвертый интеграл  $F_4 = A_1 M_3^2 + (A_3 - A_1) M_3^2 \gamma_3^2$ , что и приводит к интегрируемости. Его наличие не следует непосредственно из симметрии, т. к. связь препятствует последней. В этом случае система интегрируется в эллиптических функциях.

### 3. Некоторые замечания. Многомерные обобщения

Отметим одну форму уравнений (2.1), указанную в [3] и исследуемую в [9]. При наличии связи  $(\omega, \gamma) = d$  при помощи вектора

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M} - (\mathbf{M} - \omega, \gamma)\gamma \quad (3.6)$$

уравнения (2.1) можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \times \omega + \gamma \times \frac{\partial V}{\partial \gamma}, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \omega \end{cases} \quad (3.7)$$

с интегралами  $F_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}, \omega) + V$ ,  $F_2 = (\gamma, \gamma)$  и связью  $(\mathbf{Q}, \gamma) = d$ .

Уравнения (3.7) отличаются от (2.1) «правильным» вхождением потенциала, а связь  $(\mathbf{Q}, \gamma) = d$  может рассматриваться как интеграл площадей. Однако, они не являются замкнутыми: выражение  $\omega$  через  $\mathbf{Q}$  из (3.6) не получается однозначным (оно определено с точностью до вектора  $\gamma$ ), то есть уравнения (3.7) описывают эволюцию проекции вектора  $\mathbf{M}$  на плоскость, ортогональную вектору  $\gamma$ .

Вопрос о гамильтоновости уравнений (2.1), возможно после преобразования времени, аналогичному исследованному в шаре Чаплыгина (см. статью 7), не является решенным. Несмотря на некоторую аналогию на уровне инвариантных торов, указанную в [9], возможно, что эти две задачи все же являются существенно различными, даже при нулевой постоянной площадей. Действительно, если приведенный в статье 7 изоморфизм задачи Чаплыгина с задачей о движении точки на сфере имеет естественное гамильтоново происхождение, то в случае задачи Веселовой ее сведение к задаче Неймана носит несколько искусственный и негамильтонов характер (оно использует интеграл энергии).

**Замечание 1.** В работе [2] развит общий формализм для описания неголономных систем с правоинвариантными и левоинвариантными связями, а также соответствующими формами кинетической энергии. Для некоторых неголономных аналогов уравнений Эйлера – Пуанкаре указаны условия существования инвариантной меры. При этом алгебра Ли (соответствующая уравнениям Эйлера – Пуанкаре) должна быть унитарной [2].

В работе [13] рассмотрены обобщения некоторых задач неголономной механики (задача Чаплыгина, Суслова, Веселовой) на  $n$ -мерный случай. Однако, для полной интегрируемости этих систем, которые, как правило, обладают инвариантной мерой, найденного набора «естественных» интегралов недостаточно. Необходимой для интегрируемости наборов интегралов для многомерной задачи Суслова при дополнительных специальных предположениях приведен в [13]. Интегрируемость многомерной задачи Чаплыгина о качении шара до сих пор остается невыясненной.

Недавно Ю. Н. Федоров информировал авторов о доказанной им интегрируемости многомерной задачи Веселовой. При этом необходимы некоторые ограничения на компоненты тензора инерции многомерного твердого тела, а сама интегрируемость показывается при помощи явного указания преобразования многомерной задачи Веселовой к многомерной задаче Неймана.

Рассмотрим еще одну задачу, в некотором смысле, являющуюся комбинацией задачи Веселовой и задачи о шаре Чаплыгина.

#### 4. Качение шара Чаплыгина по прямой (А. П. Веселов, Л. Е. Веселова [2])

Предположим, что в задаче Чаплыгина имеется дополнительная связь, вынуждающая шар катиться по прямой (например, поставлены вертикальные абсолютно гладкие стенки, рис. 3). В этом случае уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \mathbf{AM} + \lambda_1 \mathbf{N}_1 + \lambda_2 \mathbf{N}_2, & \dot{p} &= \lambda_2, \\ \dot{\mathbf{N}}_1 &= \mathbf{N}_1 \times \mathbf{AM}, & \dot{\mathbf{N}}_2 &= \mathbf{N}_2 \times \mathbf{AM}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где орты  $\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{N}_2$  показаны на рис. 3,  $p = mv$  — величина импульса,  $\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}$  — центральный тензор инерции. Величины  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  находятся из условий связи

$$(\mathbf{AM}, \mathbf{N}_1) = 0, \quad (\mathbf{AM}, \mathbf{N}_2) + \frac{1}{m} p = 0,$$

наряду с которыми система обладает следующими интегралами:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{AM}, \mathbf{M}) \text{ — энергии,} \\ F_2 &= \mathbf{N}_1^2 = 1, F_3 = \mathbf{N}_2^2 = 1, F_4 = (\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) \text{ — геометрические,} \\ F_5 &= (\mathbf{M}, \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2) \text{ — типа площадей,} \\ F_6 &= \mathbf{M}^2 + p^2 - 2p(\mathbf{M}, \mathbf{N}_2) - (\mathbf{M}, \mathbf{N}_1)^2. \end{aligned}$$

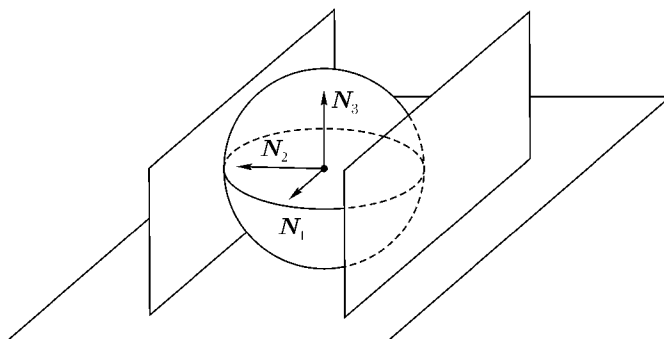


Рис. 3. Качение шара по прямой (А. П. Веселов, Л. Е. Веселова).

Наличие интегрирующего множителя вида

$$N = \sqrt{(AN_1, N_1)(AN_2, N_2) - (AN_1, N_2)^2 + \frac{1}{m}(AN_1, N_1)}$$

позволяет проинтегрировать задачу по теореме Эйлера – Якоби.

### 5. Универсальная реализация связей задачи Чаплыгина, Суслова и Веселовой и их комбинаций

В предыдущем разделе мы привели одну из возможных реализаций комбинации связей задачи Чаплыгина и задачи Веселовой. В разделе 3 мы привели реализацию связи задачи Суслова, в которой подвижные колесики на теле катятся по поверхности сферы. Несложно сообразить, что аналогичным образом можно реализовать связь Веселовой, только в этом случае ось колесика должна быть неподвижной в пространстве, а поверхность тела, закрепленного в неподвижной точке и имеющего шаровую форму (и произвольный эллипсоид инерции), катится по нему без проскальзывания (рис. 4).

Аналогичная реализация связи, по существу представляющая еще один вариант качения несимметричного уравновешенного шара (шара Чаплыгина) может быть распространена непосредственно и на саму задачу Чаплыгина о качении шара по горизонтальной плоскости. Как заметил Ю. Н. Федоров (см. статью 5 настоящего сборника), система Чаплыгина эквивалентна задаче о движении динамически несимметричного шара в шаровом подвесе всего лишь с одним дополнительным симметричным шаром, центр которого также неподвижен (рис. 5).

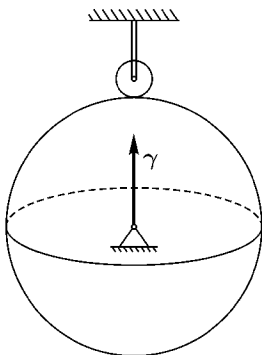


Рис. 4. Реализация связи Весселовой (сфера предполагается динамически несимметричной).

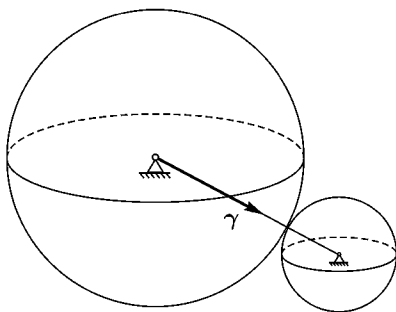


Рис. 5. Задача Чаплыгина о качении шара в реализации Ю. Н. Федорова.

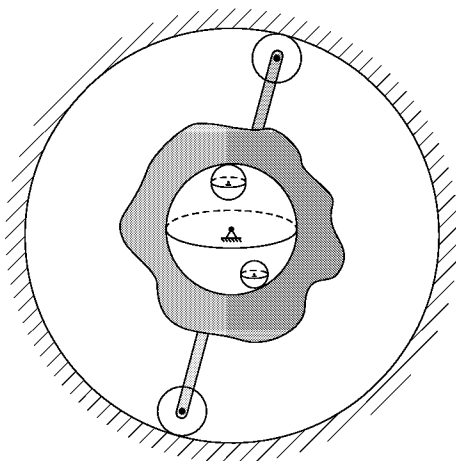


Рис. 6

Теперь уже несложно рассмотреть более общую задачу, включающую в себя *три группы* различных связей, которые можно представить себе реализованными указанными способами (Чаплыгина, Сулова, Весселовой) (рис. 6). В частности, симметричных шаров, центры которых неподвижны и соприкасаются с основным шаром, может быть несколько.



Таким образом, можно реализовать, например, сложную связь, рассмотренную в статье 7 настоящего сборника.

Мы не будем здесь обсуждать необходимые условия содержательности различных вариантов задач (многие из них являются тривиальными и приводят, например к равномерному вращению). Одной из интересных, но не исследованных задач является например совместная связь шарового подвеса со связью Суслова или Веселовой (т.е. наложение соответствующей связи на катящийся шар Чаплыгина). Они, видимо, в общем случае не являются интегрируемыми.

Кстати говоря, сам С. А. Чаплыгин, рассматривал в неопубликованной работе [11] (подготовленной к печати Л. Н. Сретенским для полного собрания сочинений после смерти Чаплыгина) комбинацию качения динамически несимметричного шара по горизонтальной плоскости и связи Суслова, которую он, не заметив некорректности такой реализации, предполагал осуществленной при помощи нескручиваемой нити. К сожалению, по его аналитическим выкладкам сложно сказать, насколько далеко он продвинулся в ее решении. Видимо, оставшись неудовлетворенным своим анализом, он воздержался от его публикации.

## Литература

- [1] *Вагнер В.* Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1941, вып. 5, с. 301–327.
- [2] *Веселов А. П., Веселова Л. Е.* Интегрируемые неголономные системы на группах Ли. Мат. зам., 1988, т. 44, № 5, с. 604–619.
- [3] *Веселов А. П., Веселова Л. Е.* Потoki на группах Ли с неголономной связью и интегрируемые неголономные системы. Функциональный анализ и его приложения, 1986, т. 20, вып. 4, с. 65–66.
- [4] *Веселова Л. Е.* Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи. Сб. Геометрия, диф. уравнения и механика, МГУ, 1986, с. 64–68.
- [5] *Козлов В. В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики. Успехи механики. 1985. т. 8. № 3. с. 85–101.
- [6] *Козлова З. П.* К задаче Суслова. Изв. АН СССР. Мех. тв. тела, 1989, № 1, с. 13–16.
- [7] *Окунева Г. Г.* Движение твердого тела с неподвижной точкой под действием неголономной связи в ньютоновском поле. Мех. тв. тела, Киев. 1986, № 18, с. 40–43.
- [8] *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М., Гостехиздат, М – Л, 1946, 655 с.

- [9] *Федоров Ю. Н.* О двух интегрируемых неголономных системах в классической механике. Вест. МГУ, сер. мат. мех., 1989, № 4, с. 38–41.
- [10] *Харламова – Забелина Е. И.* Быстрое вращение твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи. Вестник МГУ, сер. мат. мех., 1957, № 6, с. 25–34.
- [11] *Чаплыгин С. А.* К теории движения неголономных систем. Примеры применения метода приводящего множителя. Полн. собр. соч., М.-Л.: 1948, т. 3, с. 248–259.
- [12] *Чаплыгин С. А.* О катании шара по горизонтальной плоскости. Собр. соч. т. 1, М.-Л., ОГИЗ, 1948, с. 76–101.
- [13] *Fedorov Yu. N., Kozlov V. V.* Various Aspects of  $n$ -dimensional Rigid Body Dynamics. Amer. Math. Soc. Transl. 1995, V. 168, № 2, P. 141–171.

# ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КАЧЕНИЯ ШАРА ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ЦИЛИНДРУ<sup>1</sup>

*А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. А. Килин*

В работе рассмотрена задача о качении без проскальзывания полностью динамически симметричного шара по произвольной цилиндрической поверхности в поле тяжести. Э. Раус в своем знаменитом трактате показал, что в случае кругового цилиндра даже при наличии осесимметричных потенциальных полей задача является интегрируемой, кроме того при движении отсутствует вертикальный уход вдоль цилиндра. В работе показано, что для случая качения по произвольному цилиндру также отсутствует вертикальный уход, а задача является интегрируемой.

## 1. Уравнения движения шара по поверхности и их интегралы

Рассмотрим уравнения качения без проскальзывания (и без отрыва) динамически симметричного шара, центральный тензор инерции  $\mathbf{I}$  которого является шаровым  $\mathbf{I} = \mu \mathbf{E}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{E} = \|\delta_i^j\|$ , по произвольной поверхности. При изучении движения шара удобнее записывать уравнения движения в неподвижной системе координат. В этой системе уравнения для импульса и момента импульса относительно центра масс шара с учетом реакции и внешних сил имеют вид (см., например, [1])

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} + \mathbf{F}, \quad (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})' = \mathbf{a} \times \mathbf{N} + \mathbf{M}_F, \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>Подано в ПММ (2002 г.).

а условие отсутствия проскальзывания (скорость точки контакта шара с поверхностью равна нулю) —

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = 0. \quad (1.2)$$

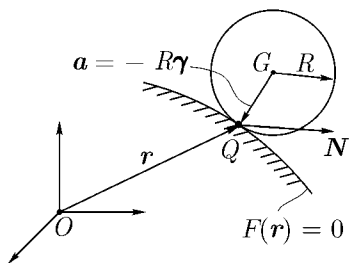


Рис. 1. Качение шара по поверхности ( $G$  — центр масс,  $Q$  — точка контакта с поверхностью)

тот же вектор относительно точки контакта соответственно. Исключая из этих уравнений реакцию  $\mathbf{N}$  и добавляя кинематическое уравнение равенства скоростей точки контакта

Здесь  $m$  — масса шара,  $\mathbf{v}$  — скорость его центра масс,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость,  $\mathbf{I} = \mu \mathbf{E}$  (шаровой) центральный тензор инерции,  $\mathbf{a}$  — вектор из центра масс в точку контакта,  $R$  — радиус шара,  $\mathbf{N}$  — реакция в точке контакта (см. рис. 1),  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{M}_F$  — внешняя сила и момент сил относительно точки контакта соответственно.

Исключая из этих уравнений реакцию  $\mathbf{N}$  и добавляя кинематическое уравнение равенства скоростей точки контакта к системе шести уравнений, описывающую динамику вектора кинетического момента относительно точки контакта  $\mathbf{M}$  и вектора нормали к поверхности  $\boldsymbol{\gamma} = -R^{-1} \mathbf{a}$  (рис. 1):

$$\dot{\mathbf{M}} = D\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{M}_F, \quad \dot{\mathbf{r}} + R\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{\gamma}, \quad (1.3)$$

где  $D = mR^2$ . Векторы  $\mathbf{r}$  (радиус-вектор точки контакта) и  $\boldsymbol{\gamma}$  выражаются через уравнение поверхности  $F(\mathbf{r}) = 0$  следующим образом

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\nabla F(\mathbf{r})}{|\nabla F(\mathbf{r})|},$$

а векторы  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  связаны соотношением

$$\mathbf{M} = \mu \boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}).$$

Уравнения (1.3) в случае потенциального поля с потенциалом  $U(\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma})$  обладают интегралами энергии и геометрическим интегралом

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma}), \quad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \quad (1.4)$$

Кроме этих двух интегралов в случае произвольной поверхности  $F(\mathbf{r}) = 0$  и потенциала  $U(\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma})$  система (1.3) не обладает ни мерой, ни двумя дополнительными интегралами, необходимыми для интегрируемости

по теории последнего множителя (теории Эйлера–Якоби). Ее поведение является хаотическим. Авторами было показано, что для поверхности трехосного эллипсоида существует еще один интеграл, квадратичный по моментам  $M$  [2]. Как заметил Раус, для поверхности вращения имеется два дополнительных интеграла, система интегрируема, а ее поведение является регулярным.

## 2. Движение по цилиндру

Рассмотрим задачу о качении шара при условии, что его центр масс движется по произвольной цилиндрической поверхности. Оказывается, что эта система в случае отсутствия внешнего поля интегрируется в квадратурах, а в случае, когда внешняя сила направлена вдоль образующей цилиндра, уравнения приводятся к гамильтоновой системе с полутора степенями свободы.

В случае кругового цилиндра, как установил Раус [3], центр шара почти для всех движений (кроме движение вниз по прямой) совершает в поле тяжести периодические колебания вдоль оси цилиндра по гармоническому закону и поэтому в среднем не смещается вниз. Оказывается, что для произвольного цилиндра система также является интегрируемой, центр масс шара также в среднем не испытывает ухода вниз, но при этом уже совершает не периодические, а квазипериодические колебания с двумя независимыми частотами.

Выберем неподвижную систему координат, одна из осей которой  $(Oz)$  направлена вдоль образующей цилиндра (см. рис. 2), при этом для вектора нормали имеем

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, 0), \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1. \quad (2.1)$$

Обозначим проекции нормали и радиуса-вектора центра масс шара на нормальное сечение через  $\tilde{r} = (r_1 + R\gamma_1, r_2 + R\gamma_2)$ ,  $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ , для них выполняются очевидные геометрические соотношения

$$(\dot{\tilde{r}}, \tilde{\gamma}) = (\dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{\gamma}) = 0.$$

Отсюда заключаем, что  $\dot{\tilde{\gamma}}$  параллельна  $\tilde{r}$

$$\dot{\tilde{\gamma}} = \lambda(\gamma)\tilde{r},$$

причем функция  $\lambda(\gamma)$  задается геометрией сечения цилиндра и не зависит от угловой скорости.

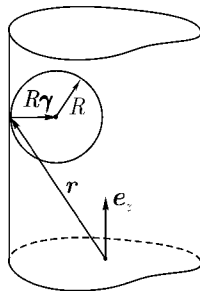


Рис. 2

Используя уравнения (1.3), получим уравнения движения шара по поверхности цилиндра в предположении, что вдоль образующей цилиндра действует сила с потенциалом  $U(z)$ , где  $z = \frac{r_3}{R}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \frac{M_3}{\mu + D} \lambda(\gamma) \frac{D}{\mu + D} (\mathbf{M} \times \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}_z) \boldsymbol{\gamma} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \frac{M_3}{\mu + D} \lambda(\gamma) \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{z} = \frac{1}{\mu + D} (\mathbf{M} \times \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}_z). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) всегда допускают помимо интеграла энергии линейный интеграл, равный проекции момента на ось цилиндра:

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(z), \quad (2.3)$$

$$F_2 = M_3 = (\mu + D) \omega_3 = \text{const.}$$

Кроме того, система (2.3) обладает инвариантной мерой с плотностью

$$\rho(\boldsymbol{\gamma}) = \lambda^{-1}(\boldsymbol{\gamma}). \quad (2.4)$$

Как следует из (2.2), уравнения для вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  отделяются. Воспользуемся параметризацией

$$\gamma_1 = \cos \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \varphi,$$

для угла  $\varphi(t)$  получим уравнение

$$\dot{\varphi} = \frac{M_3}{\mu + D} \lambda(\cos \varphi, \sin \varphi) = Q^{-1}(\varphi), \quad (2.5)$$

где  $Q(\varphi)$  в общем случае  $2\pi$ -периодическая функция от  $\varphi$ , определяемая формой поперечного сечения цилиндра.

В оставшихся уравнениях системы (2.2) выполним замену переменных

$$K_1 = M_1 \gamma_1 + M_2 \gamma_1, \quad K_2 = M_1 \gamma_2 - M_2 \gamma_1,$$

а вместо времени в качестве независимой переменной будем использовать угол  $\varphi$ . В результате получим неавтономную систему с  $2\pi$ -периодическими коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{d\varphi} &= -\frac{\mu}{\mu + D} K_2, \quad \frac{dK_2}{d\varphi} = K_1 - Q(\varphi) U'(z), \\ \frac{dz}{d\varphi} &= \frac{Q(\varphi)}{\mu + D} K_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

с интегралом энергии

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{K_1^2}{\mu} + \frac{K_2^2}{\mu + D} \right) + U(z). \quad (2.7)$$

В случае поля тяжести  $U(z) = mgz$  и уравнения (2.6) интегрируются в квадратурах:

$$K_1(\varphi) = -\nu mg \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \nu(\tau - \varphi) Q(\tau) d\tau + \nu A \cos \nu\varphi + \nu B \sin \nu\varphi, \quad (2.8)$$

$$K_2(\varphi) = -mg \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \nu(\tau - \varphi) Q(\tau) d\tau + A \sin \nu\varphi - B \cos \nu\varphi,$$

где  $A, B$  — константы интегрирования,  $\nu^2 = \frac{\mu}{\mu + D}$ .

Покажем, что интегралы в (2.8) являются ограниченными функциями. Разложим функцию  $Q(\tau)$  в ряд Фурье

$$Q(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Q_n e^{in\tau}. \quad (2.9)$$

Интегралы входящие в выражения для  $K_1(\varphi)$  и  $K_2(\varphi)$  в (2.8) можно рассматривать как действительную и мнимую части интеграла

$$\int e^{i\nu\tau} Q(\tau) d\tau = \int \sum_n Q_n e^{i(n+\nu)\tau} d\tau. \quad (2.10)$$

Пользуясь известными теоремами Фурье-анализа и тем, что  $n + \nu \neq 0$  (так как  $0 < \nu < 1$ ) внесем интеграл под знак суммы и проинтегрируем ряд почленно:

$$\int \sum_n Q_n e^{i(n+\nu)\tau} d\tau = \sum_n \frac{Q_n}{i(n+\nu)} e^{i(n+\nu)\tau}. \quad (2.11)$$

Полученный ряд сходится к некоторой квазипериодической функции, следовательно  $K_1(\varphi)$  и  $K_2(\varphi)$  являются ограниченными. Из доказанной ограниченности  $K_1(\varphi)$  и  $K_2(\varphi)$ , а также из сохранения энергии приведенной системы (2.7) следует ограниченность  $z(\varphi)$ .

*Таким образом, при качении шара по абсолютно шероховатой цилиндрической поверхности с произвольным поперечным сечением в поле тяжести не наблюдается вертикального векового ухода.*

### 3. Эллиптический цилиндр. Компьютерные иллюстрации

Рассмотрим подробнее частный случай, при котором центр масс шара движется по эллиптическому цилиндру, так что поперечное сечение задается уравнением

$$\frac{x^2}{b_1} + \frac{y^2}{b_2} = 1. \quad (3.1)$$

При этом

$$r_1 + R\gamma_1 = \frac{b_1\gamma_1}{\sqrt{b_1\gamma_1^2 + b_2\gamma_2^2}}, \quad r_2 + R\gamma_2 = \frac{b_2\gamma_2}{\sqrt{b_1\gamma_1^2 + b_2\gamma_2^2}}, \quad r_3 = Rz$$

и, соответственно,

$$\lambda(\gamma) = \frac{R(\gamma, \mathbf{B}\gamma)^{3/2}}{b_1 b_2}, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, 0),$$

$$Q^{-1}(\varphi) = \frac{M_3 R}{(\mu + D)b_1 b_2} (b_1 \cos^2 \varphi + b_2 \sin^2 \varphi)^{3/2}.$$

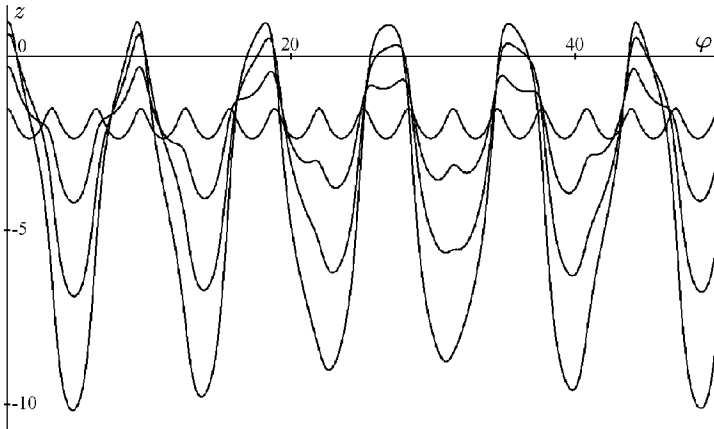


Рис. 3. Вертикальная координата точки контакта  $z$  в зависимости от угла  $\varphi$  для различных начальных значений  $K_1, K_2, z$ . Рисунок соответствует следующим параметрам:  $E = 1, \mu = 1, D = 1(\nu = 2^{-1/2}), b_1 = 1, b_2 = 2, R = 1$ .

Отметим важное отличие эллиптического цилиндра от кругового: в этом случае вместо одночастотных функций зависимость динамических



переменных  $K_1, K_2, z$  определяется двумя частотами  $\omega_1 = 1, \omega_2 = \nu$ . Таким образом, интегралы в (2.8) берутся от квазипериодических функций и имеют довольно сложный характер, их аналитические свойства подробно обсуждаются в [4]. На рис. 3 изображены примеры зависимостей  $z(\varphi)$  для различных начальных значений  $K_1$  и  $K_2$ . Они согласуются с аналитическими исследованиями, то есть для всех соотношений частот переменные  $K_1$  и  $K_2$ , а с ними и смещение  $z$ , испытывают ограниченные квазипериодические колебания.

Авторы благодарят В. В. Козлова за полезные замечания и обсуждения.

## Литература

- [1] *Borisov A. V., Mamaev I. S.* The rolling of rigid body on a plane and sphere. Hierarchy of dynamic. Regular and Chaotic Dynamics, 2002, v. 7, № 1, p. 177-200.
- [2] *Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А.* Новый интеграл в задаче о качении шара по произвольному эллипсоиду. ДАН, 2002, т. 385, № 3, с. 1-4.
- [3] *Раус Э.* Динамика системы твердых тел. т. II, М., 1983, 544 стр. Перевод с англ. *Routh E.* Dynamics of a System of Rigid Bodies. Dover Publications, New York.
- [4] *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: НИЦ «РХД», 2000.

# ПРЕПЯТСТВИЕ К ГАМИЛЬТОНОВОСТИ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

*А. В. Борисов, И. С. Мамаев*

В работе, используя численные исследования, подтверждена возможность перемешивания на инвариантных торах интегрируемых неголомомных систем. Разобрана классическая задача Чаплыгина о качении без проскальзывания динамически несимметричного шара по плоскости. Рассматриваемое поведение системы является препятствием к их гамильтоновости, хотя подобные системы обладают интегралом энергии и инвариантной мерой.

**1. Уравнения с интегральным инвариантом на торе.** Известно, что система дифференциальных уравнений на двумерном торе  $\mathbb{T}^2$ , обладающая инвариантной мерой с гладкой положительной плотностью, в некоторых координатах  $x \bmod 2\pi$ ,  $y \bmod 2\pi$  приводится к виду

$$\dot{x} = \frac{\lambda}{\Phi(x, y)}, \quad \dot{y} = \frac{\mu}{\Phi(x, y)}, \quad (1)$$

где  $\lambda, \mu = \text{const}$ ,  $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ , а  $\Phi(x, y)$  — гладкая функция,  $2\pi$ -периодическая по  $x, y$ .

Уравнения (1) имеют инвариантную меру  $\iint \Phi(x, y) dx dy$ , усредняя правые части по которой, получим дифференциальные уравнения

$$\dot{u} = \frac{\lambda}{\nu}, \quad \dot{v} = \frac{\mu}{\nu}, \quad \nu = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x, y) dx dy. \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Подано в Доклады РАН (2002 г.).

Из результатов Колмогорова [1] следует, что если  $\Phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая (аналитическая) функция, то почти для всех чисел вращения  $\omega = \frac{\lambda}{\mu}$ , удовлетворяющих условию сильной несоизмеримости, система (1) при помощи гладкой (аналитической) замены переменных  $x, y \rightarrow u, v$  приводится к виду (2). Напомним условие сильной несоизмеримости: существуют такие  $a > 0, h > 0$ , что при любых целых  $m > 0$  и  $n > 0$  справедливо неравенство  $|m - n\omega| \geq ah^n$ .

При резонансном (т. е. рациональном)  $\omega = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$ , тор  $\mathbb{T}^2$  расслоен на семейство замкнутых периодических орбит, и условие приводимости (от (1) к (2)) эквивалентно равенству периодов обращения по различным замкнутым траекториям. В случае различных периодов для разных траекторий на резонансном торе система (1) обладает свойством перемешивания [6]. Применим приведенные соображения к исследованию одной неголономной задачи.

**2. Неголономные системы Чаплыгина.** Методика интегрирования неголономных механических систем, как правило, основана на теореме Эйлера–Якоби, по которой с помощью известных первых интегралов, система приводится к системе на торе вида [2]. Рассмотрим, например, уравнения качения неголономного шара Чаплыгина, имеющие вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad D = ma^2, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\mathbf{I}$  — тензор инерции шара относительно его центра,  $m$  — масса шара,  $a$  — его радиус. Уравнения (1) записаны в компонентах  $\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}$ , соответственно, кинетического момента относительно точки контакта, угловой скорости и единичного вектора вертикали. Уравнения (1) имеют инвариантную меру с плотностью

$$\rho = (1 - D(\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}))^{-\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{I} + D\mathbf{E})^{-1}, \quad \mathbf{E} = \|\delta_i^j\| \tag{2}$$

и четыре первых интеграла

$$F_1 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad F_2 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad F_3 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad F_4 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \tag{3}$$

которые обеспечивают интегрируемость системы (1) по теореме Эйлера–Якоби и приводимость к виду (1). Явное приведение для системы (1) было выполнено В. В. Козловым [2] (см. также статью 8 настоящего сборника). Для этого можно воспользоваться сфероконическими координатами на сфере Пуассона

$$\gamma_i^2 = \frac{(a_i - \xi)(a_i - \eta)}{(a_i - a_j)(a_i - a_k)}, \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

и на общем уровне интегралов (при условии  $(\mathbf{M}, \gamma) = 0$ ) уравнения приобретают вид (1) с функцией  $\Phi(x, y)$  вида

$$\Phi = [\xi^{-1}(x) - \eta^{-1}(y)] \sqrt{(\alpha - \xi(x))(\alpha - \eta(y))}, \quad (4)$$

где  $\xi(x)$ ,  $\eta(y)$  —  $2\pi$ -периодические функции переменных  $x$ ,  $y$ , получающиеся из обращения абелевых интегралов. Указанное в [2] приведение можно также выполнить, используя результат работы [3], согласно которому система (1) является гамильтоновой на уровне  $(\mathbf{M}, \gamma) = 0$  после замены времени  $d\tau = \mu dt$ , где  $\mu$  определяется выражением (2). Действительно, после замены времени на неособых инвариантных двумерных торах гамильтоновой системы возможно ввести переменные «действие-угол», и угловые переменные как раз и совпадают с требуемыми  $x$ ,  $y$  из (1) [7].

**3. Препятствие к гамильтоновости.** Как следует из предыдущих рассуждений и работы [3], четырехмерное фазовое пространство, получающееся из (1) фиксированием констант интегралов  $F_2 = (\mathbf{M}, \gamma)$ ,  $F_3 = (\gamma, \gamma) = 1$ , расслоено на двумерные инвариантные торы, на каждом из которых движение приводится к виду (1), (4). Как следует из теоремы Лиувилля, гамильтонова интегрируемая система вблизи неособого тора всегда приводится к виду (2), поэтому если для торов (1), (4), возникающих в задаче Чаплыгина будет обнаружено отсутствие приводимости, это будет означать невозможность записи уравнений (1) в гамильтоновом виде (на уровне  $(\mathbf{M}, \gamma) = 0$ ,  $(\gamma, \gamma) = 1$ ).

С помощью особо точных компьютерных исследований мы вычисляли периоды обращений траекторий на различных резонансных инвариантных торах. Они оказались различными вдоль одного и того же тора, кроме того особенно явно эффект неприводимости наблюдался вблизи сепаратрис, разделяющих зоны с различным динамическим поведением.

**Замечание.** В [2] указано необходимое условие приводимости согласно которому, если  $\Phi(x, y)$  представимо на торе в разложении Фурье  $\Phi(x, y) = \sum \varphi_{m,n} \exp[i(mx + ny)]$ ,  $\varphi_{m,n} = \bar{\varphi}_{-m,-n}$ , то из приводимости следует, что ряд  $\sum_{|m|+|n| \neq 0} \left| \frac{\varphi_{m,n}}{m\lambda + n\mu} \right|^2$  сходится.

На рис. 1 приведены результаты численного анализа периодов движения в системе Чаплыгина на резонансных торах, для сравнения приведены результаты при  $D \neq 0$  и  $D = 0$ , последнее условие соответствует гамильтоновой ситуации. В данном случае инвариантный тор параметризуется константами интегралов (3), которые (численно) подбираются таким образом, чтобы тор был резонансный, т. е. все траектории на нем становятся замкнутыми. Выберем сечение тора некоторой плоскостью,

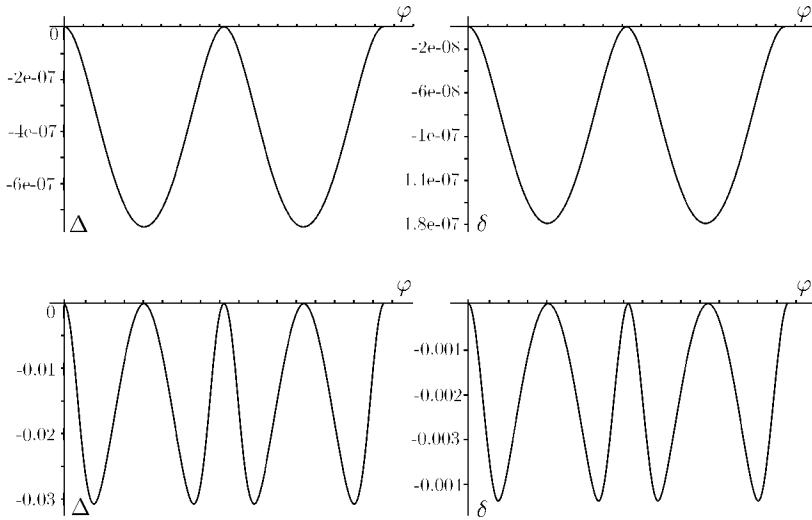


Рис. 1. Абсолютное  $\Delta$  и относительное  $\delta$  отклонение периодов на резонансных торах. На рисунках хорошо видно, что при  $D \neq 0$  имеется различие периодов на торе. Параметры системы:  $\mathbf{I}_1 = 1$ ,  $\mathbf{I}_2 = 1.5$ ,  $\mathbf{I}_3 = 3$ ,  $D = mR^2 = 1$ ,  $g_0 = 0$ ,  $\mathbf{E} = 10.0$ ,  $(\mathbf{M}, \gamma) = 3.0$ .

трансверсальной к покрывающим его обмоткам, точки на получившейся в сечении замкнутой кривой параметризуем некоторой угловой координатой  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Для каждого значения  $\varphi$  построим траекторию из заданной начальной точки на выбранном сечении и вычислим период движения по ней  $T(\varphi)$ . От траектории к траектории период движения колеблется, зависимость  $\Delta(\varphi) = T(\varphi) - T(0)$  и  $\delta(\varphi) = \frac{T(\varphi) - T(0)}{T(0)}$  приведена на рис. 1. Точность вычислений и выбора начальных условий такова, что позволяет вычислять период с точностью до  $\Delta T = 10^{-8}$ . (Для  $G$  мы приводим только 6 знаков, хотя вычисления проводились до  $10^{-10}$ .) Можно утверждать, что в неголономной системе ( $D \neq 0$ ) периоды движения на торе отличаются, в то время как в голономной ситуации ( $D = 0$ ) отклонение отсутствует (точнее имеет порядок ошибки вычислений).

**4.** Вопрос о гамильтоновости уравнений (1) был поставлен В. В. Козловым в [4]. В книге [5] он связан с вопросом «слабого» перемешивания («слабого» хаоса) на инвариантных торах. Спектр динамиче-

ской системы на таких торах может быть непрерывным, хотя все характеристики хаоса (показатель Ляпунова, энтропия) равны нулю. В этой работе мы численно показали неприводимость на нерезонансных торах. Вопрос о приводимости на нерезонансных торах, не удовлетворяющих колмогоровскому условию сильной несоизмеримости, пока остается открытым. Со статистическими вопросами поведения системы (1) можно ознакомиться в работе [6].

В заключение отметим, что гамильтоновость динамической системы (которая может быть скрытой [5]) и обнаружение препятствий к ней является вопросом существенно более сложным по сравнению с первыми интегралами, инвариантной мерой, он продолжает оставаться почти совсем не изученным [4]. Как мы видим, эти препятствия для интегрируемых систем тем не менее поддаются численному исследованию.

Более «грубое» препятствие к гамильтоновости, типичное для неинтегрируемых систем, связано с отсутствием у неголономных уравнений инвариантной меры с аналитической плотностью. Оно было указано в [2], где также установлено несуществование инвариантной меры у кельтских камней, обладающих довольно «экзотическим» динамическим поведением и обладающих сложными притягивающими многообразиями в фазовом пространстве. С динамикой кельтских камней можно ознакомиться в третьей части настоящего сборника.

Авторы благодарны В. В. Козлову за полезные обсуждения и замечания, а также А. А. Килину за создание программного обеспечения для численных экспериментов.

## Литература

- [1] Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе. ДАН СССР, т. 93, 1953, №5, с. 763–766.
- [2] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики. Успехи механики, 1985, т. 8, №3, с. 85–101.
- [3] А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара. Мат. заметки, 2001, т. 70, №5, с. 793–795.
- [4] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, Изд-во Удм. ун-та, 1995.
- [5] А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике, Изд-во «РХД», 1999.
- [6] В. Козлов. Диффузия в системах с интегральным инвариантом на торе. Доклады РАН, 2001, т. 381, №64, с. 390–393.
- [7] Kilin A. A. The Dynamics of Chaplygin Ball: the Qualitative and Computer Analysis, Reg. & Chaot. Dyn., 2001, V. 6, №3, p. 291–306.

## СПИСОК ИЗВЕСТНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЗАДАЧ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКИ

Приведем здесь наиболее полный список известных интегрируемых задач неголономной механики, имеющих явную механическую реализацию или интересную математическую структуру. Все другие интегрируемые неголономные системы представляют собой либо комбинации приведенных, либо имеют элементарную постановку. Частично с ними можно познакомиться по книге [2]. Мы приведем также ссылки на статьи в этой книге и другую литературу, где эти задачи рассматриваются.

**1. Задача Чаплыгина о качении без проскальзывания тяжелого тела вращения по плоскости** обсуждается в статьях 9, 15, 18. Заметим, что в этой задаче всегда можно интегрируемым образом добавить постоянный гироскопический момент, направленный вдоль оси вращения.

**2. Задача Аппеля – Кортевега**, или задача о качении тяжелого круглого диска по горизонтальной плоскости — частный случай предыдущей задачи Чаплыгина. Она обсуждается в статьях 9, 18 этого сборника.

**3. Задача Воронца** о качении тела вращения по поверхности сферы (в частности — круглого диска), обсуждается в работе [1].

**4. Задача Рауса** о качении полностью динамически симметричного шара по произвольной поверхности вращения обсуждается в статье 16. Задача остается интегрируемой, если поверхность вращается вокруг оси вращения с некоторой постоянной угловой скоростью.

**5. Качение полностью динамически симметричного шара по поверхности произвольного цилиндра**, рассмотрен в статьях 11, 16. Частный случай кругового цилиндра был рассмотрен Раусом. Общий интегрируемый случай, несмотря на свою простоту, видимо, впервые указан А. В. Борисовым, И. С. Мамаевым, А. А. Килиным.

**6. Сани Чаплыгина** — движение твердого тела по горизонтальной плоскости, опирающегося на нее тремя точками, две из которых свободно скользят по плоскости, а третья есть точка опоры лезвия, жестко связанного с телом. Эта задача кратко затронута в статье 2, и обсуждается в книге [2]. С. А. Чаплыгин свел эту задачу к квадратурам при помощи метода приводящего множителя в работе [4]. Независимо от Чаплыгина частный случай уравновешенных саней (конька) рассматривал Каратеодори [6].

**7. Задача Сулова** — «компактная» версия задачи о санях Чаплыгина и описывающая твердое тело с неинтегрируемой связью типа  $\omega_3 = 0$ . ( $\omega_3$  — проекция угловой скорости на одну из осей в теле.) Эта задача и ее обобщения на случай добавления потенциальных полей рассмотрена в статьях 2, 10, 14.

**8. Задача Веселовой** — в некотором смысле система, взаимная задаче Сулова, в которой угловая скорость  $\Omega_3 = 0$ , уже на ось не в теле, а в пространстве. Эта задача и ее обобщения рассмотрены в статье 10.

**9. Задача Чаплыгина** о качении динамически несимметричного уравновешенного шара по горизонтальной плоскости, одна из самых известных и классических задач, она рассмотрена в статьях 7, 8, 10, 12, 15. Обобщение этой задачи на случай введения постоянного гироскопического момента в теле получено А. П. Маркеевым (см. статью 4), а на случай добавления поля Бруна — В. В. Козловым (см. статью 14). Качение шара по наклонной плоскости рассматривалось Е. И. Харламовой [3].

**10. Движение тела в шаровом подвесе** предложено Ю. Н. Федоровым и является интересным обобщением задачи Чаплыгина о движении шара. Она обсуждается в работе 5.

**11. Движение твердого тела в сферическом подвесе.** Эта задача, дополняющая предыдущую, была предложена А. В. Борисовым, который указал также ее интегрируемое обобщение на поле Бруна. Она обсуждается в статье 6. Ю. Н. Федоров показал, что при помощи линейного преобразования эта задача сводится к задаче Чаплыгина о качении шара.

**12. Задача о качении динамически несимметричного шара (шара Чаплыгина) по прямой** рассматривалась А. П. Веселовой и Л. Е. Веселовой, она обсуждается в статье 10, где имеется более подробная литература.

**13. Задача о качении тяжелого симметричного круглого диска по гладкому льду.** Была поставлена В. В. Козловым, Н. Н. Колесниковым в работе 3. При этом на диск накладывается неинтегрируемая связь,



состоящая в том, что вектор скорости точки контакта диска и льда параллелен горизонтальному диаметру окружности диска.

**14.** Аналогичная предыдущей задаче, только без поля тяжести, была рассмотрена А. Г. Холмской [7, 8], в случае когда «ледяная» поверхность является сферой. Задача также оказалась интегрируемой. Заметим, что этот результат не является вполне тривиальным. Например, при наличии полного скольжения (в этом случае система является гамильтоновой), в отличие от случая плоскости при движении круглого диска пропадает интеграл центра масс и система становится неинтегрируемой.

**15. Неголономный осциллятор.** Эта система описывает движение точки в трехмерном пространстве [5], с координатами  $x, y, z$ , на которую наложена связь  $\dot{z} = y\dot{x}$  в потенциальном поле с потенциалом  $U(x, y, z)$ . Несложно показать, что уравнения движения точки имеют вид

$$\begin{aligned} m(1 + y^2)\dot{v}_x &= -myv_xv_y - \frac{\partial U}{\partial x} - y\frac{\partial U}{\partial z}, \\ m\dot{v}_y &= -\frac{\partial U}{\partial y}, \\ \dot{x} &= v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{z} = yv_x. \end{aligned}$$

Эти уравнения допускают интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}m((1 + y^2)v_x^2 + v_y^2) + U(x, y, z)$$

и инвариантную меру с плотностью  $\rho = (1 + y^2)^{1/2}$ .

Для интегрируемости системы не хватает еще трех интегралов, которых для произвольного поля  $U(x, y, z)$  не существует. В случае  $U = \frac{k}{2}y^2$ ,  $k = \text{const}$  (при котором, собственно, и получается система, называемая неголономным осциллятором), система интегрируется в элементарных функциях. Действительно, легко показать, что

$$y = A\sqrt{m} \sin(\omega_0 t + t_0), \quad v_y = A\sqrt{k} \cos(\omega t + t_0), \quad \omega_0 = \frac{k}{m},$$

а для других переменных имеются более сложные, но элементарные тригонометрические квадратуры.

**16.** Еще одна интегрируемая задача была рассмотрена С. А. Чаплыгиным в работе [4], где он развивал теорию интегрирующего множителя. Речь идет о качении по горизонтальной плоскости уравновешенного

эллипсоида вращения, плоскость, перпендикулярная оси вращения которого (т. е. экваториальная плоскость), пересекает горизонтальную плоскость по семейству параллельных прямых. К сожалению, неясно, как реализовать такую связь.

В заключении укажем также на задачу Больцмана – Гамеля, на которой обычно иллюстрируют возможность реализации нелинейных неголономных связей. Как показано в статье 14, она легко сводится к обычной гамильтоновой системе.

## Литература

- [1] *Бычков Ю. П.* О движении тела вращения, ограниченного сферой, на сферическом основании. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5, с. 934–935.
- [2] *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967, 519 с.
- [3] *Харламова Е. И.* Качение шара по наклонной плоскости. ПММ, 1958, т. XXII, с. 504–509.
- [4] *Чаплыгин С. А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Матем. сб., 1911, т. 28, вып. 2.
- [5] *Bates L., Cushman R.* What is a completely integrable nonholonomic dynamical system? Rep. on Math. Phys., 1999, v. 44, №1/2, p. 29–35.
- [6] *Caratheodory C.* Der Schlitten. ZAMM, 1933, B. 13, S. 71–76.
- [7] *Kholmskaya A. G.* Motion of a disk within a sphere. Regular and Chaotic Dynamics, 1998, V. 3, №2, P. 74–81.
- [8] *Kholmskaya A. G.* On a disk rolling within a sphere. Regular and Chaotic Dynamics, 1998, V. 3, №1, P. 1–7.

III

---

**ИЕРАРХИЯ ДИНАМИКИ  
НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ**



# К ТЕОРИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКИ<sup>1</sup>

*В. В. Козлов*

## 1. Введение

Теория интегрирования уравнений движения механических систем с неголономными связями разработана не столь полно, как в случае голономных связей. Это обстоятельство имеет несколько причин. Во-первых, уравнения неголономной механики имеют более сложную структуру, чем уравнения Лагранжа, описывающие динамику систем с интегрируемыми связями. В частности, неголономную систему нельзя охарактеризовать одной единственной функцией от ее состояния и времени (ср. с [1], гл. XXIV). Во-вторых, уравнения неголономной механики в общем случае не имеют инвариантной меры (простой пример указан в разд. 5). Дело в том, что неголономные связи можно реализовать с помощью действия дополнительных сил вязкого анизотропного трения с большим коэффициентом вязкости [3]. Отсутствие инвариантной меры — характерное свойство систем с трением. Анизотропное трение в пределе совместимо с сохранением полной энергии. Однако на многообразиях уровней энергии могут возникать асимптотически устойчивые положения равновесия или предельные циклы (ср. [4]), что препятствует существованию дополнительных «регулярных» интегралов движения.

Наиболее распространенный способ интегрирования уравнений неголономной динамики основан на использовании имеющихся первых интегралов — «законов сохранения»: если группа Ли, действующая на

---

<sup>1</sup>Успехи механики, т. 8, №3, 1985, с. 85–107.

пространстве положений, сохраняет лагранжиан и порождающие ее векторы поля являются полями возможных скоростей, то уравнения движения имеют первый «векторный» интеграл — обобщенный интеграл кинетического момента [5],[6]. Этим способом решен ряд задач неголономной динамики, среди которых особо выделим задачу С. А. Чаплыгина о качении несимметричного шара по горизонтальной плоскости [5].

Попытки распространения метода Гамильтона–Якоби на системы с неголономными связями оказались неэффективными, как и попытки представить уравнения неголономной динамики в форме канонических уравнений Гамильтона. Оказалось, что с помощью обобщенного метода Гамильтона–Якоби можно найти в лучшем случае лишь частные решения уравнений движения. Эта работа содержит обстоятельный анализ этих вопросов.

Еще один общий подход к интегрированию неголономных уравнений основан на теории приводящего множителя С. А. Чаплыгина [5]: ищется замена времени (разная вдоль разных траекторий), с помощью которой уравнения движения приводятся к уравнениям Лагранжа или Гамильтона. Хотя такая замена может существовать лишь в исключительных случаях, с ее помощью решен ряд новых задач неголономной динамики (см. [5]). Отметим, что к гамильтонову виду уравнения движения иногда можно свести с помощью иных соображений (см. разд. 5).

Список точно решенных задач неголономной механики невелик: практически полная информация содержится в книгах [1],[5],[8]. В настоящей работе указаны некоторые новые интегрируемые задачи, рассмотрены особенности поведения траекторий неголономных систем в фазовом пространстве, а также предложены некоторые общие теоретические соображения, касающиеся методов интегрирования уравнений неголономной динамики.

## 2. Дифференциальные уравнения с инвариантной мерой

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

и пусть  $g^t$  — его фазовый поток. Предположим, что уравнение (2.1) имеет интегральный инвариант с некоторой гладкой плотностью  $M(x)$ : т.е. для любой измеримой области  $D \subset \mathbb{R}^n$  и для всех  $t$  выполнено равенство

$$\int_{g^t(D)} M(x) dx = \int_D M(x) dx. \quad (2.2)$$

Вспомним хорошо известное утверждение Лиувилля: гладкая функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является плотностью инварианта

$$\int M(x) dx$$

тогда и только тогда, когда  $\operatorname{div}(Mf) \equiv 0$ . Если  $M(x) > 0$  для всех  $x$ , то формула (2.2) определяет меру в  $\mathbb{R}^n$ , инвариантную относительно действия  $f$ . Наличие инвариантной меры облегчает интегрирование дифференциального уравнения; например, при  $n = 2$  оно всегда интегрируется в квадратурах. По Эйлеру  $M$  называется еще интегрирующим множителем.

**Теорема 1.** *Предположим, что система уравнений (2.1) с инвариантной мерой (2.2) имеет  $n-2$  первых интеграла  $F_1, \dots, F_{n-2}$ . Пусть на инвариантном множестве  $E_c = \{x \in \mathbb{R}^n: F_s(x) = c_s, 1 \leq s \leq n-2\}$  функции  $F_1, \dots, F_{n-2}$  независимы. Тогда*

1) *решения уравнения (2.1), лежащие на  $E_c$ , находятся в квадратурах. Если  $L_c$  — связная компактная компонента множества уровня  $E_c$  и  $f \neq 0$  на  $L_c$ , то*

2)  *$L_c$  — гладкая поверхность, диффеоморфная двумерному тору,*

3) *на  $L_c$  можно подобрать угловые координаты  $x, y \pmod{2\pi}$  так, чтобы в этих переменных уравнение (2.1) на  $L_c$  приняло следующий вид:*

$$\dot{x} = \frac{\lambda}{\Phi(x, y)}, \quad \dot{y} = \frac{\mu}{\Phi(x, y)}, \tag{2.3}$$

где  $\lambda, \mu = \text{const}$ ,  $|\lambda| + |\mu| \neq 0$ , а  $\Phi$  — гладкая положительная функция,  $2\pi$ -периодическая по  $x$  и  $y$ .

Укажем основные моменты доказательства. Поскольку векторное поле  $f$  касается  $E_c$ , то дифференциальное уравнение (2.1) можно ограничить на  $E_c$ . Это уравнение на  $E_c$  будет иметь интегральный инвариант

$$\int \frac{M d\sigma}{V_{n-2}},$$

где  $d\sigma$  — элемент площади  $E_c$  как поверхности, вложенный в  $\mathbb{R}^n$ ,  $V_{n-2}$  —  $(n-2)$ -мерный объем параллелепипеда в  $\mathbb{R}^n$ , построенного на градиентах функций  $F_1, \dots, F_{n-2}$  как на сторонах. Интегрируемость в квадратурах на  $E_c$  выкает теперь из замечания Эйлера. Заключение 1 теоремы 1 (отмеченное впервые Якоби) тем самым доказано. Заключение 2 составляет известный топологический факт, что всякое связанное, компактное,

ориентируемое двумерное многообразие, допускающее касательное поле без особых точек, диффеоморфно двумерному тору. Заключение 3 фактически является теоремой А. Н. Колмогорова о приведении дифференциальных уравнений на торе с гладкой инвариантной мерой [9].

Уравнения (2.3) имеют инвариантную меру

$$\iint |\Phi(x, y)| dx \wedge dy.$$

Усредняя правые части системы (2.3) по этой мере, получим дифференциальные уравнения

$$\dot{u} = \frac{\lambda}{\nu}, \quad \dot{v} = \frac{\mu}{\nu}; \quad \nu = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi dx dy. \quad (2.4)$$

**Предложение 1.** *Если  $\Phi: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая (аналитическая) функция, то для почти всех пар  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  существует гладкая (аналитическая) замена угловых переменных  $x, y \rightarrow u, v$ , приводящая систему (2.3) к системе (2.4).*

Доказательство можно найти в [9],[10]. Отметим, что если система (2.3) не приводится к системе (2.4) для пары  $(\lambda, \mu)$ , тогда то же самое имеет место и для всех пар  $(\kappa\lambda, \kappa\mu)$ ,  $\kappa \neq 0$ . Таким образом, свойство приводимости зависит от арифметических свойств отношения  $\frac{\lambda}{\mu}$ , которое называется числом вращения касательного векторного поля на  $T^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$ .

**Предложение 2.** *Пусть  $\Phi(x, y) = \sum \varphi_{m,n} \exp i(mx + ny)$ ,  $\varphi_{m,n} = \overline{\varphi_{-m,-n}}$ . Если дифференцируемой заменой угловых переменных  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  систему (2.3) можно привести к виду (2.4), то*

$$\sum_{|m|+|n| \neq 0} \left| \frac{\varphi_{m,n}}{m\lambda + n\mu} \right|^2 < \infty. \quad (2.5)$$

При рациональном отношении  $\frac{\lambda}{\mu}$  тор  $T^2$  расслоен на семейство замкнутых траекторий. В этом случае условие приводимости эквивалентно равенству периодов обращения по различным замкнутым траекториям.

В общем случае (когда разложение Фурье функции  $\Phi$  содержит гармоники) точки  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  с рационально независимыми  $(\lambda, \mu)$ , для



которых ряд (2.5) расходится, всюду плотны в  $\mathbb{R}^2$ . Обсуждение вопросов приводимости уравнений (2.3) можно найти в работе [9]. Относительно общих свойств решений системы (2.3) см. [10].

### 3. Задача С. А. Чаплыгина

В качестве примера рассмотрим задачу о качении уравновешенного, динамически несимметричного, шара по горизонтальной шероховатой плоскости (см. [5]). Движение шара описывается следующей системой уравнений в  $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3\{\omega\} \times \mathbb{R}^3\{\gamma\}$ :

$$\begin{aligned} \dot{k} + \omega \times k &= 0, & \dot{\gamma} + \omega \times \gamma &= 0; \\ k &= I\omega + ma^2\gamma \times (\omega \times \gamma). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Пусть  $\omega$  — вектор угловой скорости вращения шара,  $\gamma$  — единичный вектор вертикали,  $I$  — тензор инерции шара относительно его центра,  $m$  — масса шара,  $a$  — его радиус. Эти уравнения имеют инвариантную меру с плотностью

$$M = \frac{1}{\sqrt{(ma^2)^{-1} - \langle \gamma, (I + ma^2 E)^{-1} \gamma \rangle}}, \quad E = \|\delta_{ij}\|. \tag{3.2}$$

Учитывая наличие четырех независимых интегралов  $F_1 = \langle k, \omega \rangle$ ,  $F_2 = \langle k, \gamma \rangle$ ,  $F_3 = \langle \gamma, \gamma \rangle$ ,  $F_4 = \langle k, k \rangle$ , мы видим, что уравнения (3.1) интегрируются в квадратурах. Отметим, что система уравнений (3.1) не имеет положений равновесия на некритических множествах уровня  $E_c$ . Действительно, если  $\dot{\gamma} = 0$ , то векторы  $\omega$  и  $\gamma$  линейно зависимы. Это, в свою очередь, влечет линейную зависимость дифференциалов  $dF_1$  и  $dF_2$ . Наиболее просто уравнения (3.1) интегрируются в случае, когда постоянная интеграла «площадей»  $F_2$  равна нулю. В эллиптических координатах  $\xi, \eta$  на сфере Пуассона  $\langle \gamma, \gamma \rangle = 1$  уравнения движения на уровне  $E_c$  можно свести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\sqrt{P_5(\xi)}}{\xi(\xi^{-1} - \eta^{-1}) \Phi(\xi, \eta)}; & \dot{\eta} &= \frac{\sqrt{P_5(\eta)}}{\eta(\xi^{-1} - \eta^{-1}) \Phi(\xi, \eta)}; \\ \Phi &= \sqrt{(a - \xi)(a - \eta)}. \end{aligned}$$

Коэффициенты многочлена 5-й степени  $P_5$  и постоянная  $a$  зависят от параметров задачи и констант первых интегралов (детали можно

найти в [5]). Переменные  $\xi, \eta$  изменяются в различных замкнутых интервалах  $a_1 \leq \xi \leq a_2, b_1 \leq \eta \leq b_2$ , где полином  $P_5$  принимает неотрицательные значения. Униформизирующая замена переменных

$$\begin{aligned} x &= \lambda \int_{a_1}^{\xi} \frac{z dz}{\sqrt{P_5(z)}}, & \lambda^{-1} &= \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{z dz}{\sqrt{P_5(z)}}, \\ y &= \mu \int_{b_1}^{\eta} \frac{z dz}{\sqrt{P_5(z)}}, & \mu^{-1} &= \frac{1}{\pi} \int_{b_1}^{b_2} \frac{z dz}{\sqrt{P_5(z)}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

вводит угловые координаты  $x, y \pmod{2\pi}$  на  $E_c$ , в которых уравнения движения (2.3) приобретают вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\lambda}{\Phi(x, y)}, & \dot{y} &= \frac{\mu}{\Phi(x, y)}, \\ \Phi &= (\xi^{-1}(x) - \eta^{-1}(y)) \sqrt{(a - \xi(x))(a - \eta(y))}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь  $\xi(x)$  и  $\eta(y)$  —  $2\pi$ -периодические функции от  $x$  и  $y$ , получающиеся из обращения абелевых интегралов (3.3).

Из этих уравнений вытекает

**Предложение 3.** *Число вращения касательного векторного поля на двумерных инвариантных торах задачи Чаплыгина равно отношению вещественных периодов абелева интеграла*

$$\int \frac{z dz}{\sqrt{P_5(z)}}.$$

**Замечание.** Это утверждение справедливо и для интегрируемых задач динамики тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, описываемой системой уравнений Эйлера–Пуассона (см. [10]). Поскольку уравнения Эйлера–Пуассона имеют гамильтонову природу, то по теореме Лиувилля в интегрируемых случаях на двумерных инвариантных торах они все приводятся к виду (2.4). По-видимому, уравнения (3.4) этим свойством не обладают: неравенство (2.5) имеет место не на всех инвариантных нерезонансных торах.

Сделаем замену времени  $t \rightarrow \tau$  по формуле

$$dt = \sqrt{(a - \xi)(a - \eta)} d\tau. \quad (3.5)$$

Уравнения (3.4) сохраняют свой вид, только у функции  $\Phi$  переменные  $x, y$  разделяются:

$$\Phi = \xi^{-1}(x) - \eta^{-1}(y).$$

**Предложение 4.** *Предположим, что в системе уравнений (2.3) числа  $\lambda$  и  $\mu$  отличны от нуля и*

$$\Phi = \Phi'(x) + \Phi''(y).$$

*Тогда обратимой заменой угловых координат на  $T^2$  уравнения (2.3) приводятся к виду (2.4).*

Доказательство можно найти в [10]. Отметим, что если  $\Phi = \Phi'(x) + \Phi''(y)$ , то ряд (2.5)

$$\sum_{n \neq 0} \left| \frac{\varphi'_n}{n\lambda} \right|^2 + \left| \frac{\varphi''_n}{n\mu} \right|^2$$

сходится при всех  $\lambda, \mu \neq 0$ .

Итак, с учетом замены времени (3.5) уравнения (3.4) можно привести к виду

$$\frac{du}{d\tau} = U, \quad \frac{dv}{d\tau} = V, \tag{3.6}$$

где  $U$  и  $V$  зависят лишь от постоянных первых интегралов, причем  $U, V \neq 0$ . В связи с этим результатом возникает соблазн воспользоваться теоремой приводящего множителя С. А. Чаплыгина: если с помощью замены времени (3.5) уравнения (3.1) приводятся к уравнениям Эйлера – Лагранжа некоторой вариационной задачи (записанным, как и классические уравнения Эйлера – Пуассона, в избыточных координатах), то по теореме Лиувилля уравнения движения на двумерных инвариантных торах в некоторых угловых переменных  $u, v \pmod{2\pi}$  имеют как раз вид (3.6). Можно показать, однако, что этот подход не приводит к цели. Отметим в заключение, что сам С. А. Чаплыгин не связывал задачу о качении шара с теорией приводящего множителя.

#### 4. Обобщение задачи С. А. Чаплыгина

Укажем, что задача о качении уравновешенного, динамически несимметричного шара по шероховатой плоскости останется интегрируемой (в смысле разд. 1), если частицы шара будут притягиваться этой

плоскостью пропорционально расстоянию. Поскольку центр масс шара совпадает с его геометрическим центром, то потенциал можно вычислить по формуле

$$V(\gamma) = \frac{\varepsilon}{2} \int \langle \mathbf{r}, \gamma \rangle^2 dm = \frac{\varepsilon}{2} \langle \mathbf{I}\gamma, \gamma \rangle, \quad (4.1)$$

где  $\gamma$  — единичный вектор вертикали,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор частиц шара,  $\mathbf{I}$  — тензор инерции шара относительно его центра. Силы притяжения создают вращательный момент

$$- \int \mathbf{r} \times (\varepsilon \langle \mathbf{r}, \gamma \rangle \gamma) dm = -\varepsilon \int \langle \mathbf{r}, \gamma \rangle (\mathbf{r} \times \gamma) dm = \gamma \times V'_\gamma = \varepsilon \gamma \times \mathbf{I}\gamma.$$

Для того чтобы получить момент сил относительно точки касания, надо добавить момент суммарной силы

$$\varepsilon \int \langle \mathbf{r}, \gamma \rangle \gamma dm = \varepsilon \left\langle \int \mathbf{r} dm, \gamma \right\rangle \gamma,$$

равный нулю из-за совпадения центра масс шара с его геометрическим центром.

С помощью теоремы об изменении кинетического момента относительно точки контакта (см. [5],[6]) уравнения качения шара можно представить в следующем виде:

$$\dot{k} + \omega \times k = \varepsilon \gamma \times \mathbf{I}\gamma, \quad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0. \quad (4.2)$$

**Теорема 2.** *Дифференциальные уравнения (4.2) интегрируемы в квадратурах.*

Действительно, они имеют четыре независимых интеграла

$$F_1 = \langle k, \omega \rangle + \varepsilon \langle \mathbf{I}\gamma, \gamma \rangle, \quad F_2 = \langle k, \gamma \rangle, \quad F_3 = \langle \gamma, \gamma \rangle = 1, \\ F_4 = \langle k, k \rangle - \langle A\gamma, \gamma \rangle,$$

где элементы  $A_i$  диагональной матрицы  $A$  выражаются через главные моменты инерции  $I_i$  с помощью формул

$$A_1 = \varepsilon(I_2 + ma^2)(I_3 + ma^2), \dots$$

Поскольку уравнения (4.2) имеют инвариантную меру с плотностью (3.2), то, по теореме 1, они интегрируемы. Было бы интересно осуществить это

интегрирование явно и проверить, справедливо ли для уравнений (4.2) предложение 3.

Отметим, что задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в осесимметричном силовом поле с потенциалом (4.1) тоже интегрируема [1]. Кроме тех классических интегралов  $F_1, F_2, F_3$  она обладает интегралом  $F_4$ , в котором надо положить  $\mathbf{a} = 0$ . Этот интеграл найден независимо Клебшем в задаче о движении твердого тела в идеальной жидкости и Тиссераном при исследовании вращательного движения небесных тел.

## 5. Задача Г. К. Суслова и ее обобщения

Следуя Г. К. Суслову ([11], гл. 53), рассмотрим задачу о вращении вокруг неподвижной точки твердого тела с неинтегрируемой связью  $\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\omega} \rangle = 0$ , где  $\mathbf{a}$  — вектор, постоянный в подвижном пространстве. Пусть тело вращается в осесимметричном силовом поле с потенциалом  $V(\gamma)$ . Следуя методу множителей Лагранжа, запишем уравнения движения ([11], гл. 46)

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\gamma} \times V'_{\gamma} + \lambda \mathbf{a}, \quad \dot{\gamma} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\omega} \rangle = 0. \quad (5.1)$$

Используя уравнение связи  $\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\omega} \rangle = 0$ , множитель Лагранжа можно найти как функцию от  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$

$$\lambda = -\langle \mathbf{a}, I^{-1}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) + I^{-1}(\boldsymbol{\gamma} \times V''_{\gamma}) \rangle / \langle \mathbf{a}, I^{-1}\mathbf{a} \rangle.$$

Уравнения (5.1) всегда имеют три независимых интеграла:

$$F_1 = \langle \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle / 2 + V(\gamma), \quad F_2 = \langle \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma} \rangle, \quad F_3 = \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\omega} \rangle.$$

Для реальных движений  $F_2 = 1, F_3 = 0$ . Таким образом, задача интегрирования уравнений (5.1) сводится к нахождению инвариантной меры (ее существование вовсе не очевидно) и четвертого независимого интеграла.

**Предложение 5.** *Если вектор  $\mathbf{a}$  является собственным вектором оператора  $\mathbf{I}$ , то фазовый поток системы (5.1) сохраняет «стандартную» меру в  $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3\{\boldsymbol{\omega}\} \times \mathbb{R}^3\{\boldsymbol{\gamma}\}$ .*

Доказательство состоит в непосредственной проверке следующего факта: дивергенция правой части системы (5.1) равна нулю, когда  $\mathbf{I}\mathbf{a} = \mu\mathbf{a}$ .

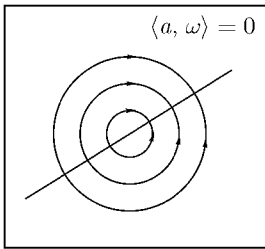


Рис. 1

Г. К. Сулов рассмотрел частный случай задачи, когда на твердое тело не действуют внешние силы:  $V \equiv 0$ . В этом случае первое уравнение системы (5.1) является замкнутым относительно  $\omega$ . Можно показать, что оно интегрируется в квадратурах (см. [11], гл. 53). Анализ этих квадратур показывает, что если вектор  $\mathbf{a}$  не является собственным вектором оператора инерции, то все траектории  $\omega(t)$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  асимптотически приближаются к некоторой прямой на плоскости  $\langle \mathbf{a}, \omega \rangle = 0$  (см. рис. 1). Следовательно, уравнение для  $\omega$  и полная система

не имеют инвариантной меры с непрерывной плотностью. В этом случае теорема 1 не применима и в связи с этим остается открытым вопрос о возможности отыскания вектора  $\gamma(t)$  с помощью квадратур. Если же  $\mathbf{I}\mathbf{a} = \mu\mathbf{a}$ , то уравнения (5.1) имеют дополнительный интеграл

$$F_4 = \langle \mathbf{I}\omega, \mathbf{I}\omega \rangle :$$

сохраняется величина кинетического момента. По теореме 1 уравнения (5.1) интегрируемы. Впрочем, эту возможность легко реализовать непосредственно. По-видимому, и в самом общем случае наличие инвариантной меры связано с условием предложения 5:  $\mathbf{I}\mathbf{a} = \mu\mathbf{a}$ . Это условие в дальнейшем предполагается выполненным.

Предположим теперь, что тело вращается в однородном силовом поле:  $V = \langle \mathbf{b}, \gamma \rangle$ . Если  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ , то уравнения (5.1) допускают интеграл

$$F_4 = \langle \mathbf{I}\omega, \mathbf{b} \rangle$$

и, следовательно, интегрируются в квадратурах. Этот случай отмечен Е. И. Харламовой в работе [12]. Мы рассмотрим «противоположный» случай, когда  $\mathbf{b} = \varepsilon\mathbf{a}$ ,  $\varepsilon \neq 0$ . Без ущерба общности можно считать, что вектор  $\mathbf{a}$  имеет компоненты  $(0, 0, 1)$ . Два первых уравнения (5.1) с учетом уравнения  $\omega_3 = 0$  будут иметь следующий вид:

$$I_1\dot{\omega}_1 = \varepsilon\gamma_2, \quad I_2\dot{\omega}_2 = -\varepsilon\gamma_1; \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Откуда  $I_1\ddot{\omega}_1 = \varepsilon\dot{\gamma}_2$ ,  $I_2\ddot{\omega}_2 = -\varepsilon\dot{\gamma}_1$ . С помощью уравнений Пуассона  $\dot{\gamma}_1 = -\omega_2\gamma_3$ ,  $\dot{\gamma}_3 = \omega_1\gamma_3$  получим, что

$$I_1\ddot{\omega}_1 = \varepsilon\gamma_3\omega_1, \quad I_2\ddot{\omega}_2 = \varepsilon\gamma_2\omega_2. \quad (5.2)$$

Интеграл энергии

$$(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2)/2 + \varepsilon\gamma_3 = h$$

позволяет выразить  $\gamma_3$  через  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . После этого уравнения (5.2) можно переписать в виде уравнений Лагранжа

$$I_i^2 \ddot{\omega}_i = \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}_i} = \frac{\partial L}{\partial \omega_i} \quad (i = 1, 2),$$

$$L = T - V, \quad T = \frac{I_1^2 \dot{\omega}_1^2 + I_2^2 \dot{\omega}_2^2}{2}, \quad V = \frac{1}{2} \left( h - \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{2} \right)^2.$$

Эти уравнения имеют интеграл энергии  $T + V$ , постоянная которого для реальных движений равна  $\varepsilon^2/2$ . Подчеркнем, что, в отличие от теории приводящего множителя, наше приведение уравнений (5.1) к уравнениям Лагранжа (или Гамильтона) не использует замену времени (ср. с [11]).

Замена  $I_i \omega_i = k_i$ , соответствующая переходу от угловой скорости к кинетическому моменту, сводит рассматриваемую задачу о вращении твердого тела к задаче о движении материальной точки в потенциальном силовом поле

$$\ddot{k}_i = -\frac{\partial V}{\partial k_i} \quad (i = 1, 2), \quad V = \frac{1}{2} \left( h - \frac{k_1^2 I_1^{-1} + k_2^2 I_2^{-1}}{2} \right)^2. \quad (5.3)$$

При  $I_1 = I_2$  будем иметь движение точки в центральном поле. Ему отвечает известный интегрируемый «случай Лагранжа» обобщенной задачи Г. К. Суслова. Так же, как и в классической задаче Лагранжа о тяжелом симметричном волчке, в этом случае уравнения движения интегрируемы в эллиптических функциях времени. Если  $I_1 \neq I_2$ , то, по-видимому, уравнения не имеют дополнительного аналитического интеграла, независимого от интеграла энергии. В пользу этого предположения свидетельствует следующее наблюдение. Положим формально  $I_1 = -I_2 = 1$ . Тогда при  $h = 0$  уравнения (5.3) будут фактически совпадать с уравнениями однородной двухкомпонентной модели Янга – Миллса, неинтегрируемость которых установлена в [14].

При фиксированном значении  $h$  точка движется в области, определяемой неравенством  $V \leq \varepsilon^2/2$ . Эти области при разных значениях  $h$  изображены на рис. 2. Особо выделены траектории либрационных движений, когда одна из компонент  $k_1$  или  $k_2$  обращается в нуль. Эти движения выражены через эллиптические функции времени.

Еще один случай интегрируемости уравнений (5.1) дает

**Теорема 3.** Пусть  $\mathbf{Ia} = \mu \mathbf{a}$  и потенциал  $V(\gamma)$  задан формулой (4.1). Тогда уравнения (5.1) интегрируются в квадратурах.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что уравнения (5.1) имеют интеграл

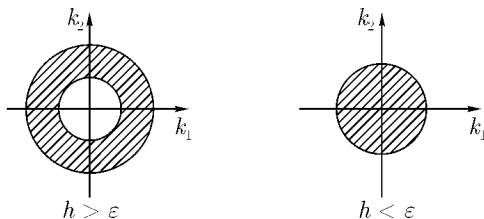


Рис. 2

Клебша-Тиссерана

$$F_4 = \frac{1}{2} \langle \mathbf{I}\omega, \mathbf{I}\omega \rangle - \frac{1}{2} \langle A\gamma, \gamma \rangle, \quad A = \varepsilon \mathbf{I}^{-1} \det \mathbf{I}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} F_4 &= \langle \mathbf{I}\omega, \gamma \times \varepsilon \mathbf{I}\gamma \rangle + \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{I}\omega \rangle + \langle A\gamma, \omega \times \gamma \rangle = \\ &= \langle \omega, \mathbf{I}(\gamma \times \varepsilon \mathbf{I}\gamma) \rangle + \lambda \mu \langle \mathbf{a}, \omega \rangle + \langle \omega, \gamma \times A\gamma \rangle = \\ &= \langle \omega, \mathbf{I}(\gamma \times \varepsilon \mathbf{I}\gamma) + \gamma \times A\gamma \rangle = 0, \end{aligned}$$

поскольку  $\mathbf{I}(\gamma \times \mathbf{I}\gamma) = -(\gamma \times \mathbf{I}^{-1}\gamma) \det \mathbf{I}$ . Для завершения доказательства осталось учесть заключение предложения 5 и воспользоваться теоремой 1. ■

Покажем, как можно проинтегрировать уравнения (5.1) в явном виде. Пусть, для определенности,  $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$  и  $\varepsilon > 0$ ,  $I_3 \geq I_1$ ,  $I_3 \geq I_2$ . Тогда уравнения (5.1) можно представить в виде следующей замкнутой системы из четырех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= \varepsilon(I_1 - I_2)\gamma_2\gamma_3, & I_2 \dot{\omega}_2 &= \varepsilon(I_3 - I_1)\gamma_1\gamma_3, \\ \dot{\gamma}_1 &= -\omega_2\gamma_3, & \dot{\gamma}_2 &= \omega_1\gamma_3, & \gamma_3^2 &= 1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2. \end{aligned}$$

Введем новое время  $\tau$  по формуле  $d\tau = \gamma_3 dt$  и обозначим штрихом дифференцирование по  $\tau$ . Тогда уравнения движения примут вид линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} I_1 \omega'_1 &= \varepsilon(I_2 - I_3)\gamma_2, & \gamma'_2 &= \omega_1, \\ I_2 \omega'_2 &= \varepsilon(I_3 - I_1)\gamma_1, & \gamma'_1 &= -\omega_2. \end{aligned}$$



Их можно представить в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \gamma_1'' + \lambda_1^2 \gamma_1 &= 0, & \gamma_2'' + \lambda_2^2 \gamma_2 &= 0, \\ \lambda_1^2 &= \varepsilon(I_3 - I_1)/I_2, & \lambda_2^2 &= (I_3 - I_2)/I_1. \end{aligned}$$

Положим

$$\varphi_1 = -\operatorname{arctg} \frac{\lambda_1 \gamma_1}{\omega_2}, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2 \gamma_2}{\omega_1}.$$

Эти переменные являются угловыми координатами на двумерных инвариантных торах, причем

$$\varphi_1' = \lambda_1, \quad \varphi_2' = \lambda_2.$$

Следовательно,

$$\dot{\varphi}_1 = \lambda_1/\Phi, \quad \dot{\varphi}_2 = \lambda_2/\Phi; \quad \Phi = (1 - c_1^2 \sin^2 \varphi_1 - c_2^2 \sin^2 \varphi_2)^{-1/2}.$$

Постоянные  $c_1$  и  $c_2$  ( $c_1^2 + c_2^2 \leq 1$ ) можно выразить как функции от постоянных интегралов энергии и Клебша – Тиссерана. Удивительная особенность этой задачи заключается в том, что отношение частот  $\lambda_1/\lambda_2$  не зависит от начальных данных, а зависит лишь от постоянных параметров задачи. Следовательно, если число

$$\sqrt{\frac{(I_3 - I_1)I_1}{(I_3 - I_2)I_2}}$$

рационально, то все решения периодичны; в противном случае практически все траектории незамкнуты (кроме вырожденных движений, когда  $\gamma_1 \equiv 0$  или  $\gamma_2 \equiv 0$ ). Пусть  $\varphi_s(0) = a_s$ . Тогда

$$t = \int_0^\tau \frac{dx}{\sqrt{1 - c_1^2 \sin^2(\lambda_1 x + a_1) - c_2^2 \sin^2(\lambda_2 x + a_2)}}.$$

Если  $c_1 = 0$  (или  $c_2 = 0$ ), то  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (следовательно,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\gamma_3$ ) являются эллиптическими функциями времени. Этот же вывод справедлив и в случае  $\lambda_1 = \lambda_2$  (т. е. когда  $I_1 = I_2$  или  $I_3 = I_1 + I_2$ ) при всех  $c_1, c_2$ . В самом общем случае аналитическая природа решений существенно сложнее. Отметим в заключение, что в этой задаче ряд (2.5) расходится, если иррациональное отношение  $\lambda_1/\lambda_2$  аномально быстро приближается рациональными числами.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения (5.1) интегрируемы и для потенциалов более общего вида

$$V(\gamma) = \frac{1}{2}(c_{11}\gamma_1^2 + c_{22}\gamma_2^2 + c_{33}\gamma_3^2 + 2c_{12}\gamma_1\gamma_2).$$

Заменой времени  $d\tau = \gamma_3 dt$  уравнения движения приводятся к линейной системе

$$I_2\gamma''_1 = -\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\gamma_1}, \quad I_1\gamma''_2 = -\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\gamma_2}; \quad \tilde{V} = V|_{\gamma_3=1-\gamma_1-\gamma_2}.$$

В общем случае потенциалу  $V$  трудно дать простую физическую интерпретацию.

## 6. Использование первых интегралов в качестве связей

Пусть  $L(\dot{x}, x, t)$  — лагранжиан неголономной системы, удовлетворяющий следующему условию «регулярности»: квадратичная форма

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}} \xi, \xi \right\rangle$$

положительно определена. В частности,  $\det \|L''_{\dot{x}\dot{x}}\| \neq 0$ . Связи (не обязательно линейные) задаются уравнениями

$$f_1(\dot{x}, x, t) = \dots = f_m(\dot{x}, x, t) = 0 \quad (6.1)$$

с независимыми ковекторами

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial \dot{x}}.$$

Уравнения движения можно представить в виде уравнений Лагранжа со множителями

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \sum_{s=1}^m \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial \dot{x}}, \quad f_1 = \dots = f_m = 0. \quad (6.2)$$

**Предложение 6.** Если функции  $L, f_1, \dots, f_m$  удовлетворяют сформулированным выше условиям, то каждому начальному состоянию системы, допустимому связями (6.1), отвечает единственное решение уравнений (6.2).

Действительно, в этих предположениях по теореме о неявных функциях множители  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  являются гладкими функциями от  $\dot{x}, x$  и  $t$ .

Предположим теперь, что уравнения (6.2) имеют первый интеграл  $F(\dot{x}, x, t)$ . Имеет место следующее:

**Предложение 7.** Если ковекторы  $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial \dot{x}}$  независимы, то функция  $x(t)$  является решением уравнений (6.2) с постоянным интегралом  $F = c$  тогда и только тогда, когда эта функция является движением механической системы с лагранжианом  $L$  и со связями  $f_1 = \dots = f_m = f_{m+1} = c$ , где  $f_{m+1} = F - c$ .

В одну сторону утверждение очевидно: функция  $x(t)$  удовлетворяет уравнениям вида (6.2), в которых надо положить  $\lambda_{m+1} = 0$ . Обратное, пусть  $x(t)$  — решение системы вида (6.2), в которой индекс  $s$  пробегает значения от 1 до  $m + 1$ . Пусть  $y(t)$  — единственное движение исходной системы (6.2) с начальными данными  $y(0) = x(0)$ ,  $\dot{y}(0) = \dot{x}(0)$ . Очевидно, что  $F|_{y(t)} = c$ . Функция  $y(t)$ , как и функция  $x(t)$ , удовлетворяет уравнениями движения «расширенной» системы, причем  $\lambda_{m+1} = 0$ . Для завершения доказательства осталось воспользоваться заключением предложения 6.

Укажем одно из возможных применений предложения 7. Предположим, что функции  $f_i$  линейны по скоростям, а связи (6.1) неинтегрируемы. Если уравнения движения имеют линейный интеграл  $F$ , то уравнения

$$f_1 = \dots = f_m = f_{m+1} = 0 \quad (f_{m+1} = F - c)$$

могут оказаться вполне интегрируемыми. В этом случае изучение движений, лежащих на множестве уровня  $F = c$ , сводится к исследованию некоторой голономной системы. При этом совсем не обязательно интегрировать уравнения связи, поскольку координаты можно считать избыточными и уравнения движения можно записать в виде уравнений Гамильтона в избыточных координатах (см. [11, 15]).

В качестве примера рассмотрим задачу Суслова в однородном силовом поле в интегрируемом случае Е. И. Харламовой. Уравнения  $\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\omega} \rangle = 0$  и  $\langle \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{b} \rangle = 0$  образуют на многообразии положений твердого тела (на группе  $SO(3)$ ) интегрируемое поле направлений. Таким образом, в этом случае задача Г. К. Суслова сводится к системе с одной степенью свободы. Правда, одномерное многообразие положений такой системы в общем случае незамкнуто в  $SO(3)$ .

Если связи нелинейны по скоростям, то в качестве первого интеграла естественно использовать интеграл энергии<sup>1</sup>

$$H(\dot{x}, x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L.$$

---

<sup>1</sup>Уравнения движения имеют интеграл энергии, если связи однородны по скоростям и лагранжиан не зависит явно от времени.

Рассмотрим, например, систему Аппеля – Гамеля с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + gz, \quad g = \text{const}$$

и нелинейной связью

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = k^2 \dot{z}^2, \quad k = \text{const} \neq 0 \quad (6.3)$$

(см. [16] и [17]). Из интеграла энергии

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - gz = h$$

и уравнения (6.3) получаем уравнение «интегрируемой» связи

$$\frac{\dot{z}(1 + k^2)}{2} - gz = h. \quad (6.4)$$

Следовательно, координата  $z$  изменяется с постоянным ускорением  $g/(1+k^2)$ . Исключая нелинейную интегрируемую связь (6.4) (то есть считая  $z$  известной функцией времени), мы приходим к более простой системе с двумя степенями свободы с лагранжианом

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

и связью  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = f(t)$ , где  $f = k^2 \dot{z}^2$  — известная квадратичная функция времени. Дальнейшее интегрирование проводится без труда.

## 7. Симметрии неголономных связей

Будем считать, что векторное поле  $\mathbf{v}(x) \neq 0$  является полем симметрии неголономной системы с лагранжианом  $L(\dot{x}, x)$  и связями

$$f_1(\dot{x}, x) = \dots = f_m(\dot{x}, x) = 0,$$

если фазовый поток  $g_v^s$  дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{v}(x)$$

сохраняет функции  $L$  и  $f_1, \dots, f_m$ .

**Предложение 8.** *Фазовый поток поля симметрий переводит решения неголономной системы в решения той же системы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о выпрямлении, в некоторых локальных координатах  $x_1, \dots, x_n$  фазовый поток  $g_v^s$  является следующей однопараметрической группой:

$$x_1 \rightarrow x_1 + s; \quad x_2 \rightarrow x_2, \dots, x_n \rightarrow x_n.$$

В этих переменных функции  $L$  и  $f_i$  не зависят от  $x_i$ , следовательно, уравнения движения тоже не содержат этой переменной. Отсюда вытекает заключение предложения 8. ■

В случае интегрируемых связей полю симметрий отвечает линейный по скоростям первый интеграл уравнений движения. Для неголономных систем это не так.

**Предложение 9.** *Если  $g_v^s$  сохраняет лагранжиан и поле  $v$  является полем возможных скоростей, то есть*

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} v = \dots = \frac{\partial f_m}{\partial \dot{x}} v = 0,$$

то уравнения движения имеют первый интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} v = \text{const.}$$

Это утверждение («теорема Нетер») обсуждается, например, в работе [6].

**Теорема 4.** *Предположим, что уравнения движения (6.2) имеют  $n - m$  первых интегралов  $f_{m+1}, \dots, f_n$ . Если*

1) *в точках множества  $E_c = \{f_1 = \dots = f_m = 0, f_{m+1} = \dots = c_{m+1}, \dots, f_n = c_n\}$  отличен от нуля якобиан*

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n},$$

2) *существуют поля  $v_1, \dots, v_{n-1}$ , линейно независимые во всех точках  $E_c$  порождающие разрешимую алгебру Ли относительно операции коммутирования, фазовые потоки которых  $g_{v_i}^s$  сохраняют функции  $L$  и  $f_1, \dots, f_n$ ,*

3) среди решений системы уравнений

$$f_1 = \dots = f_m = 0, \quad f_{m+1} = c_{m+1}, \dots, \quad f_n = c_n, \quad (7.1)$$

нет векторов  $\dot{x} = \sum \lambda_s v_s(x)$ ,  $\lambda_s \in \mathbb{R}$ , тогда решения уравнений (6.2) лежащие на  $E_c$ , находятся с помощью квадратур.

ЗАМЕЧАНИЕ. В некоторых случаях наличие первых интегралов неголономных систем можно установить с помощью следующего наблюдения. Пусть  $F(\dot{x}, x)$  — первый интеграл «свободной» голономной системы с лагранжианом  $L$ . Эта функция является интегралом неголономной системы с тем же лагранжианом  $L$  и со связями  $f_1 = \dots = f_m = 0$  в том случае, если

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\right)^{-1} \frac{\partial f_s}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0, \quad 1 \leq s \leq m,$$

когда  $f_1 = \dots = f_m = 0$ . Это инвариантное условие выполнено для интеграла Клебша – Тиссерана в задаче Сулова (теорема 3). Кроме того, оно выполнено для интеграла энергии в случае однородных связей и для интеграла Нетер  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot v$ , если поле  $v$  является полем возможных скоростей (предложение 9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. По теореме о неявных функциях из системы (7.1) найдем, что

$$\dot{x} = v_c(x). \quad (7.2)$$

Согласно условиям 2 и 3, во всех точках  $x$  векторы  $v_c, v_1, \dots, v_{n-1}$  линейно независимые. Фазовые потоки  $g_{v_i}^s$  переводят решения уравнения (7.2) в решения того же уравнения (предложение 8). Для завершения доказательства осталось применить известную теорему Ли об интегрируемости в квадратурах систем дифференциальных уравнений (см., например, [18]). ■

В качестве иллюстративного примера рассмотрим задачу о скольжении уравновешенного конька по горизонтальному льду. Единицы длины, времени и массы можно подобрать так, чтобы лагранжиан принял следующий вид:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (7.3)$$

Здесь  $x, y$  — координаты точки контакта,  $z$  — угол поворота конька. Уравнение связи

$$f = \dot{x} \sin z - \dot{y} \cos z = 0. \quad (7.4)$$

Уравнения движения имеют два первых интеграла

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = h, \quad \dot{z} = c. \quad (7.5)$$

Второй выводится из предложения 9 с помощью векторного поля  $v_3 = (0, 0, 1)$ . Из (7.4) и (7.5) найдем поле  $v_{h,c} = (\sqrt{h-c^2} \cos z, \sqrt{h-c^2} \sin z, c)$ . Поля  $v_1 = (1, 0, 0)$  и  $v_2 = (0, 1, 0)$  являются коммутирующими полями симметрии. Если  $c \neq 0$ , то векторы  $v_{h,c}$ ,  $v_1$  и  $v_2$  линейно независимы. Следовательно, в этом случае все условия теоремы 4 выполнены. Подчеркнем, что поля  $v_1$  и  $v_2$  не порождают законов сохранения.

Теорема 4 налагает жесткие ограничения на неголономную систему. Эти ограничения можно ослабить, заменив условие 2) на условие

2) для фиксированного  $c = (c_{m+1}, \dots, c_h)$  существуют  $n-1$  линейно независимых полей  $v_i(x, c)$ , порождающих разрешимую алгебру Ли и коммутирующих с полем  $v_c(x)$ .

Добавим к лагранжиану (7.3) слагаемое  $-x/2$ . Это означает, что мы поместили конек на наклонную плоскость. Уравнения (7.4)–(7.5) останутся справедливыми, если заменить  $h$  на  $h+x$ . Тогда поле  $v_{h,c}$  станет равным

$$(\sqrt{h-c^2+x} \cos z, \sqrt{h-c^2+x} \sin z, c).$$

При фиксированных значениях  $h$  и  $c \neq 0$  поля

$$v_1 = (2\sqrt{h-c^2+x}, -(\cos z)/c, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0)$$

независимы с полем  $v_{h,c}$  и все их коммутаторы обращаются в нуль. Точно так же можно решить задачу о качении однородного диска по шероховатой плоскости, задачу о качении шара в вертикальной трубе и ряд других задач неголономной механики.

## 8. Существование инвариантной меры

Наличие интегрального инварианта с положительной плотностью представляет интерес не только для целей интегрирования дифференциальных уравнений. Оно интересно и само по себе, например, с точки зрения возможных применений эргодической теории. Мы рассмотрим вопросы существования инвариантной меры систем дифференциальных уравнений, имея в виду приложения к неголономной механике.

Согласно теореме о выпрямлении траекторий, в достаточно малой окрестности неособой точки всегда существует инвариантная мера с гладкой стационарной плотностью. Поэтому задача об инвариантной мере представляет интерес вблизи положений равновесия, а также в достаточно больших областях фазового пространства, где траектории обладает свойством возвращаемости. Сначала рассмотрим первую возможность. Пусть точка  $x = 0$  является равновесием аналитической системы

дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \Lambda x + \dots \quad (8.1)$$

Будем говорить, что набор (комплексных) собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $\Lambda$  является резонансным, если  $\sum m_i \lambda_i = 0$  при некоторых натуральных значениях  $m_i$ . Отметим, что при исследовании системы (8.1) (например, в теории нормальных форм) обычно используется более слабое условие резонансности:  $\sum m_i \lambda_i = 0$  при некоторых целых  $m_i \geq 0$  и  $\sum |m_i| \neq 0$ .

**Предложение 10.** *Если набор  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  нерезонансный, то в малой окрестности точки  $x = 0$  уравнение (8.1) не имеет интегрально-го инварианта с аналитической плотностью.*

Условие нерезонансности выполнено, например, в случае, когда  $\operatorname{Re} \lambda_i \geq 0$  ( $\leq 0$ ) и  $\sum \operatorname{Re} \lambda_i > 0$  ( $< 0$ ).

**Доказательство.** Разложим плотность  $M(x)$  в сходящийся ряд по однородным формам:

$$M = M_s + M_{s+1} + \dots, \quad s \geq 0.$$

Ясно, что функция  $M_s$  является плотностью интегрального инварианта для линейной системы  $\dot{x} = \Lambda x$ . Можно сразу считать, что  $\Lambda$  приведена к канонической жордановой форме. Расположим мономы формы  $M_s$  в некотором лексикографическом порядке:

$$M_s = \sum_{\substack{m_i \geq 0 \\ m_1 + \dots + m_n = s}} a_{m_1 \dots m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}.$$

Очевидно, что  $\operatorname{div} M_s(\Lambda x)$  является некоторой формой той же степени. Приравнивая нулю ее коэффициенты, получим линейную однородную систему уравнений относительно  $a_{m_1 \dots m_n}$ . Определитель этой системы равен произведению

$$\prod_{\substack{m_i \geq 0 \\ m_1 + \dots + m_n = s}} [(m_1 + 1)\lambda_1 + \dots + (m_n + 1)\lambda_n].$$

Согласно предположению, это произведение отлично от нуля. Следовательно, все  $a_{m_1 \dots m_n} = 0$ . Что и требовалось. ■

**Замечание.** При более сильном условии отсутствия резонансных соотношений в традиционном смысле уравнения (8.1) не имеют первых интегралов, аналитических в окрестности точки  $x = 0$ .



В качестве примера рассмотрим задачу о постоянных вращениях выпуклого твердого тела с аналитической выпуклой границей на горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости (см. [4]). Движение такого тела описывается системой шести дифференциальных уравнений, имеющих интеграл энергии и геометрический интеграл. В частном случае, когда одна из главных центральных осей инерции тела ортогональна его поверхности, мы имеем однопараметрическое семейство стационарных вращений вокруг вертикально расположенной оси инерции. Стационарным движением отвечают особые точки уравнений движения. Характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda^2(a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0) = 0.$$

Коэффициенты  $a_s$  довольно сложно выражаются через многочисленные параметры задачи; фактически, они могут принимать произвольные значения. Наличие двойного нулевого корня связано с существованием двух независимых интегралов: в точках, отвечающих перманентным вращениям, дифференциалы интеграла энергии и геометрического интеграла в общем случае независимы. Фиксируя уровни первых интегралов, мы будем иметь дифференциальные уравнения на четырехмерных многообразиях, не имеющие в общем случае инвариантной меры с аналитической плотностью. Следовательно, в окрестности стационарных движений исходные уравнения также не имеют инвариантной меры.

Рассмотрим теперь задачу об инвариантной мере для систем дифференциальных уравнений, близких к интегрируемым системам, удовлетворяющим условиям теоремы 1. В окрестности инвариантных торов невозмущенной интегрируемой системы в качестве независимых переменных естественно принять постоянные первых интегралов  $I_1, \dots, I_{n-2}$  и угловые координаты  $x, y \pmod{2\pi}$  на самих инвариантных торах. В этих переменных возмущенная система будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{I}_s &= \varepsilon f_s(I, x, y) + \dots, \quad s = 1, \dots, n - 2, \\ \dot{x} &= \frac{\lambda(I)}{\Phi(I, x, y)} + \varepsilon X(I, x, y) + \dots, \quad \dot{y} = \frac{\mu(I)}{\Phi(I, x, y)} + \varepsilon Y(I, x, y) + \dots \end{aligned} \tag{8.2}$$

Пусть функции, входящие в правые части этих дифференциальных уравнений, являются аналитическими в прямом произведении  $D \times T^2$ , где  $D$  — некоторая область в  $\mathbb{R}^{n-2} = \{I_1, \dots, I_{n-2}\}$ ,  $T^2 = \{x, y \pmod{2\pi}\}$ ;  $\varepsilon$  — малый параметр. Естественно поставить задачу о существовании у системы (8.2) инвариантной меры, плотность которой аналитична по переменным  $I, x, y$ ,  $2\pi$ -периодична по  $x, y$  и аналитически зависит от параметра  $\varepsilon$ :

$$M = M_0 + \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 M_2 + \dots \tag{8.3}$$

Невозмущенная задача имеет инвариантную меру с плотностью  $M_0$ . В соответствии с известным принципом усреднения, усредним правые части системы (8.2) по мере  $dm = \Phi dx \wedge dy$ . В результате получим замкнутую систему уравнений для изменения медленных переменных  $I$  в области

$$\begin{aligned} \dot{I}_s &= \varepsilon F_s(I), \quad 1 \leq s \leq n-2, \\ F_s &= \frac{1}{\Lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_s \Phi dx dy, \quad \Lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi dx dy. \end{aligned} \quad (8.4)$$

**Предложение 11.** *Предположим, что  $m\lambda(I) + n\mu(i) \neq 0$  в области  $D$  при всех целых  $m, n$  не равных одновременно нулю. Если усредненная система (8.4) не имеет инвариантной меры с аналитической плотностью, то исходная система (8.2) также не имеет инвариантной меры с плотностью (8.4).*

Система (8.4) проще системы (8.2); достаточное условие отсутствия инвариантной меры у (8.4) дает предложение 10.

Доказательство предложения 11. Коэффициенты  $M_0$  и  $M_1$  разложения (8.4) удовлетворяют уравнениям

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{M_0}{\Phi} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{M_0}{\Phi} = 0, \quad (8.5)$$

$$\sum_s \frac{\partial}{\partial I_s} (M_0 f_s) + \frac{\partial}{\partial x} M_0 X + \frac{\partial}{\partial y} M_0 Y = - \left( \lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{M_1}{\Phi} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{M_1}{\Phi} \right). \quad (8.6)$$

Поскольку  $\lambda/\mu$  иррационально почти при всех  $I \in D$ , то из уравнения (8.5) вытекает, что  $M_0 = \Gamma(I)\Phi$ . Подставляя это соотношение в уравнение (8.6) и усредняя затем по переменным  $x, y$ , получим следующее уравнение

$$\sum_s \frac{\partial}{\partial I_s} \Gamma F_s = 0. \quad (8.7)$$

Следовательно, функция  $\Gamma$  — плотность интегрального инварианта для системы (8.4). Осталось показать, что  $\Gamma \neq 0$ . Если это не так, то  $M_0 = 0$ . Но тогда функция  $M_1 + \varepsilon M_2 + \dots$  является плотностью инвариантной меры для системы (8.2). Если  $M_1 \equiv 0$ , то эту операцию можно повторить еще раз. Предложение доказано. ■

**Замечание.** Можно показать, что (в условиях предложения 11), если усредненная система (8.4) не имеет аналитического первого интеграла в области  $D$ , то исходная система (8.2) не имеет интеграла в виде ряда  $g_0 + \varepsilon g_1 + \dots$  с аналитическими в  $D \times T^2$  коэффициентами  $g_s$ .

Рассмотрим более подробно частный случай, когда  $n = 3$ . Индекс  $s$  можно опустить. Пусть  $F(I) \neq 0$ . Если в некоторой точке интервала  $D$  функция  $F(I) = 0$ , то уравнение (8.4) не имеет, очевидно, инвариантной меры. Так мы будем считать, что  $F(I) \neq 0$  в  $D$ . Рассмотрим следующие разложения Фурье:

$$\begin{aligned} \frac{X\Phi}{F} &= \sum X_{mn}(I) \exp i(mx + ny), \\ \frac{Y\Phi}{F} &= \sum Y_{mn}(I) \exp i(mx + ny), \\ \frac{f\Phi}{F} &= \sum f_{mn}(I) \exp i(mx + ny). \end{aligned}$$

Резонансным множеством  $\Delta$  назовем множество точек  $I \in D$ , для которых

$$\sum_{|m|+|n| \neq 0} \left| \frac{a_{mn}}{m\lambda + n\mu} \right|^2 = \infty, \quad a_{mn} = \frac{df_{mn}}{dI} + i(mX_{mn} + nY_{mn}).$$

**Предложение 12.**

- 1) Предположим, что  $\lambda(I)/\mu(I) \neq \text{const}$ ;
- 2) пересечение  $\Delta \cap D$  не пусто.

Тогда уравнения (8.2) не имеют интегрального инварианта с плотностью (8.3).

Действительно, из соотношения (8.7) получим, что  $\Gamma = c/F$ , где  $c = \text{const}$ . Пусть

$$\frac{M_1}{\Phi} = \sum b_{mn}(I) \exp i(mx + ny).$$

Уравнение (8.6) даст нам серию соотношений

$$-(m\lambda + n\mu)b_{mn} = ca_{mn}.$$

Пусть  $I \in \Delta$ . Тогда из условия

$$\sum |b_{mn}|^2 < \infty$$

получим, что  $c = 0$ . Что и требовалось.

Автор благодарен В. Ф. Журавлеву, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд замечаний.

## Литература

- [1] *Аппель П.* Теоретическая механика, т. 2, Физматгиз, Москва 1960.
- [2] *Caratheodory C.* Der Schlitten, ZAMM, 13, 71–76, 1933.
- [3] *Карапетян А. В.* О реализации неголономных связей и об устойчивости кельтских камней, ПММ, 45, 1, 42–51, 1981.
- [4] *Карапетян А. В.* О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, ПММ, 45, 5, 808–814, 1981.
- [5] *Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике неголономных систем, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1949.
- [6] *Козлов В. В., Колесников Н. Н.* О теоремах динамики, ПММ, 42, 1, 28–33, 1978.
- [7] *Rumyantsev V. V., Sumbatov A. V.* On the problem of generalization of the Hamilton-Jacoby method for non-holonomic systems, ZAMM, 58, 477–481, 1978.
- [8] *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем, «Наука», Москва 1967.
- [9] *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе, ДАН СССР, 93, 5, 763–766, 1953.
- [10] *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела, Изд-во МГУ, Москва 1980.
- [11] *Суслов Г. К.* Теоретическая механика, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1946.
- [12] *Харламова-Забелина Е. И.* Быстрое вращение твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи, Вестн. МГУ, Сер. I, Математика, механика, 25–34, 1957.
- [13] *Харламов П. В.* Гироскоп с неголономной связью, В сб. Механика твердого тела, «Наукова думка», 3, 120–130, Киев 1971.
- [14] *Зиглин С. Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике, II, Функциональный анализ и его приложения, 17, 1, 8–23, 1983.
- [15] *Козлов В. В.* Уравнения Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах, Teorijska i primenjena mehanika, 8, 59, 1982.
- [16] *Appell P.* Exemple de mouvement d'un assujetti, a une exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse, Rend. Circolo Mat. Palermo, 48–50, 1911.
- [17] *Hamel G.* Theoretische Mechanik, Berlin 1949.
- [18] *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1940.

# КАЧЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ПЛОСКОСТИ И СФЕРЕ. ИЕРАРХИЯ ДИНАМИКИ<sup>1</sup>

*А. В. Борисов, И. С. Мамаев*

В работе рассматриваются случаи существования инвариантной меры, дополнительных первых интегралов и пуассоновой структуры в задаче о качении твердого тела без проскальзывания по плоскости и сфере. Исследования задачи о движении твердого тела по плоскости восходят к С. А. Чаплыгину, П. Аппелю, Д. Кортвегу, которые показали сводимость уравнений движения к линейному дифференциальному уравнению второго порядка случая, когда поверхность динамически симметричного тела является поверхностью вращения. Эти результаты частично обобщил П. Воронец, исследуя движение тела вращения и круглого диска с острым краем по поверхности сферы. В обоих случаях системы являются интегрируемыми по Эйлеру – Якоби, и обладают дополнительными первыми интегралами и инвариантной мерой. Оказывается, что приведенная система после некоторой замены времени, определяемой приводящим множителем, является гамильтоновой. Здесь мы рассматриваем также различные случаи, когда интегралы и инвариантную меру удастся записать в виде конечного алгебраического выражения.

Рассмотрена также обобщенная задача о качении динамически несимметричного шара Чаплыгина. Результаты исследования собраны в виде таблиц, позволяющих более наглядно представить иерархию существования в рассматриваемых задачах различных тензорных инвариантов — инвариантной меры, интегралов и пуассоновой структуры.

---

<sup>1</sup>Borisov A. V., Mamaev I. S. *Rolling of a rigid body on plane and sphere. hierarchy of dynamics*. Reg. & Chaot. Dyn., 2002, v. 7, №2, p. 177–200.

## 1. Уравнения движения твердого тела по плоскости и сфере без проскальзывания (неголономное качение)

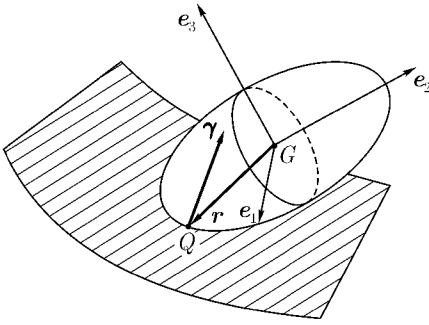


Рис. 1

Мы рассматриваем в работе уравнения качения твердого тела по плоскости и сфере, вследствие того, что в этих двух случаях, в отличие от качения по произвольной поверхности, уравнения движения имеют вид, близкий к уравнениям Эйлера – Пуассона. Для обоих случаев имеется шесть уравнений первого порядка от шести переменных, обладающих в потенциальном поле двумя интегралами движения — энергии и геометрическим (в случае уравнений Эйлера – Пуассона

всегда существует также интеграл площадей, аналог которого при качении имеется лишь при дополнительных динамических и геометрических ограничениях).

Пусть твердое тело катится без проскальзывания (т. е. скорость точки контакта  $Q$  равна нулю) по неподвижной поверхности, представляющей собой плоскость или сферу. Уравнения движения состоят из векторного динамического уравнения изменения кинетического момента  $M$  относительно точки контакта  $Q$  (рис. 1), которое для произвольной формы тела и поверхности можно представить в форме

$$\dot{M} = M \times \omega + m\dot{r} \times (\omega \times r) + M_Q, \quad (1.1)$$

где  $M$ ,  $\omega$ ,  $r = GQ$ ,  $M_Q$  предполагаются спроецированными на главные центральные оси инерции в теле, здесь  $\omega$  — угловая скорость,  $M_Q$  — момент внешних сил относительно точки контакта,  $G$  — центр масс. Его необходимо дополнить векторным кинематическим уравнением типа Пуассона, которое для случая плоскости **a)** и сферы **б)** имеет несколько различных вид:

$$\text{a)} \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad (1.2)$$

где  $\gamma$  — единичный вектор нормали к плоскости,

$$\text{б)} \quad R_0(\dot{\gamma} + \omega \times \gamma) = \dot{r}, \quad (1.3)$$

где  $\gamma$  — единичный вектор нормали к сфере радиуса  $R_0$  (см. рис. 8).

В уравнениях (1.1), (1.2), (1.3) предполагается, что радиус-вектор  $\mathbf{r}$  выражен через нормаль  $\gamma$  из уравнения

$$\gamma = -\frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}, \quad (1.4)$$

задающего гауссово отображение, где  $f(\mathbf{r}) = 0$  представляет собой уравнение поверхности тела в главной центральной системе координат, связанной с телом. Предполагается, что тело является всюду выпуклым (чтобы избежать ударов при движении), а уравнение (1.4) однозначно разрешимо  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\gamma)$ . Такое разрешение в дальнейшем мы считаем заведомо выполненным.

Используя (1.4), кинематическое уравнение (1.3), описывающее динамику вектора  $\gamma$  для сферы можно представить в форме

$$\dot{\gamma} = (1 + k(\mathbf{B} - k)^{-1}) \gamma \times \omega, \quad k = R_0^{-1}, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{B} = \|b_{ij}\|$  — вырожденная матрица с компонентами  $b_{ij} = -\frac{\partial}{\partial r_i} \left( \frac{1}{|\nabla f|} \frac{\partial f}{\partial r_j} \right)$ .

Связь между  $\mathbf{M}$  и  $\omega$  задается уравнением

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\omega + m\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}), \quad \omega = \frac{\mathbf{A}\mathbf{M} - m\mathbf{r} \times (\mathbf{A}\mathbf{r} \times \mathbf{A}\mathbf{M})}{1 - m(\mathbf{r}, \mathbf{A}\mathbf{r})}, \quad (1.6)$$

где  $m$  — масса тела,  $\mathbf{I}$  — центральный тензор инерции,  $\mathbf{A} = (\mathbf{I} + m\mathbf{r}^2)^{-1}$ .

Момент внешних сил в случае существования потенциала  $U = U(\gamma)$ , зависящего только от компонент вектора  $\gamma$ , можно представить в виде:

**а)** для плоскости  $\mathbf{M}_Q = \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}$ ;

**б)** для сферы  $\mathbf{M}_Q = \gamma \times (1 + k(\mathbf{B}^T - k)^{-1}) \frac{\partial U}{\partial \gamma}$ , где  $\mathbf{B}$  — матрица (1.5).

Уравнения (1.1) и (1.2), (1.3) всегда обладают интегралом энергии и геометрическим интегралом

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \omega) + U(\gamma), \quad F_1 = \gamma^2 = 1. \quad (1.7)$$

Замечание. Для доказательства необходимо воспользоваться формулой

$$\frac{1}{2}(\mathbf{M}, \omega)^{\cdot} = (\mathbf{M}_Q, \omega),$$

которая является следствием только уравнения (1.1) и не зависит от вида обкатываемой поверхности.

Для интегрирования этих уравнений по теореме Эйлера – Якоби (теория последнего множителя) необходимо указать еще два дополнительных независимых первых интеграла и инвариантную меру [15]. Напомним, что плотность инвариантной меры  $\rho$  общей системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

удовлетворяет уравнению Лиувилля  $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ . В общем случае ни один из этих объектов не существует и вследствие этого система проявляет некоторые любопытные асимптотические и хаотические свойства, присущие колебаниям кельтских камней, которые нетипичны для консервативных систем [13, 15]. Рассмотрим все известные на данный момент случаи существования дополнительных первых интегралов (одного или сразу двух), а также инвариантной меры.

Динамические и геометрические ограничения, приводящие к наличию первых интегралов и инвариантной меры, являются в некотором смысле независимыми. Могут встречаться комбинации параметров, при которых существует только мера или только дополнительный интеграл. В крайнем случае система может обладать двумя дополнительными интегралами и мерой и поэтому являться полностью интегрируемой.

Результаты исследования, приведенные нами отдельно для случая качения тела по плоскости и сфере, собраны в таблицах 1, 2. Следующие пункты, по-существу, представляют собой комментарии к этим таблицам.

## 2. Тело на плоскости

**1. Качение тела вращения по плоскости (С. А. Чаплыгин [26], П. Аппель [1, 31]).** При условии, что как поверхность тела, так и центральный эллипсоид инерции являются соосными поверхностями вращения, уравнения (1.1), (1.2) обладают двумя дополнительными интегралами и инвариантной мерой. Потенциал  $U$  при этом предполагается произвольной функцией от  $\gamma_3 = \cos\theta$ , т. е. зависящей только от наклона оси вращения тела к вертикали. В частности, для поля тяжести центр масс необходимо должен находиться на оси вращения.

Для произвольного тела вращения интегрируемость была показана С. А. Чаплыгиным в 1897 г. [26], который также указал на возможность добавления — без потери интегрируемости — уравновешенного равномерно вращающегося ротора вдоль оси вращения (гиростата). Более частные случаи этой задачи изучались



а. Раусом (1884 г.) — качение неуравновешенного динамически симметричного шара по плоскости.

б. Нейманом, Карвалло (Carvalho, 1898 г.), Аппелем (1899 г.) и Кортевегом (1900 г.) — качение круглого диска.

Результаты Неймана и Карвалло относятся в основном к выводу уравнений движения и нахождению стационарных решений. При этом отметим, что Нейман, как и Линделеф, сначала допустил ошибку при выводе уравнений, воспользовавшись лагранжевым формализмом без соответствующих «неголономных» модификаций. В дальнейшем он поправил ее, но не смог свести задачу к квадратурам. Ошибку Линделефа подробно проанализировал С. А. Чаплыгин (1897 г.), что привело его к новой форме уравнений неголономной механики, а также к рассматриваемой задаче о качении тела вращения, которую он свел к двум линейным уравнениям первого порядка. Для случая качения круглого диска С. А. Чаплыгина указал возможность получения из двух линейных уравнений одного линейного уравнения (второго порядка), решаемого в гипергеометрических функциях. Отметим также, что ранее Чаплыгина уравнения движения тяжелого тела вращения получил Г. Слессер в 1861 г. [37], который, однако, не установил их интегрируемость.

Несколько позже (1898 г.) аналогичную подстановку (в уравнениях, полученных Карвалло в работе на премию Фурнерона (Fourneuron)) использовал Аппель и в несколько иной форме — Кортевег. Они оба не были знакомы с работой С. А. Чаплыгина, которая была опубликована в малодоступном журнале только на русском языке. Вследствие этого во многих современных учебниках и работах (O. Reily [36]) задачу о качении круглого диска связывают с именами Аппеля и Кортевега, хотя как видно из предыдущего, это не является вполне справедливым.

Мы здесь приведем результаты С. А. Чаплыгина в более современной алгебраической форме, которая позволяет указать в явном виде инвариантную меру, а также наиболее простые формы первых интегралов, которые, как оказывается, можно обобщить на динамически несимметричную ситуацию.

Уравнение поверхности (1.6) в случае тела вращения можно разрешить в явном виде

$$r_1 = f_1(\gamma_3)\gamma_1, \quad r_2 = f_1(\gamma_3)\gamma_2, \quad r_3 = f_2(\gamma_3), \quad (2.1)$$

где  $f_i(\gamma_3)$ ,  $i = 1, 2$  — функции, которые подчинены одному дифференци-

альному уравнению, определяющему меридианальное сечение

$$\frac{df_2}{d\gamma_3} = f_1 - \frac{1 - \gamma_3^2}{\gamma_3} \frac{df_1}{d\gamma_3}. \quad (2.2)$$

Обозначив через  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_1, I_3)$ , ( $I_1 = I_2$ ) — главный центральный тензор инерции, с помощью явных вычислений можно найти выражение для плотности инвариантной меры уравнений (1.1), (1.2), которая существует для произвольных функций  $f_1(\gamma_3)$ ,  $f_2(\gamma_3)$ , задающих поверхность

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_3 + m(\mathbf{r}, \mathbf{I} \mathbf{r})}} = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_3 + I_1 m f_1^2 (1 - \gamma_3^2) + I_3 m f_2^2}}. \quad (2.3)$$

Замечание. Для уравнений движения в переменных  $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}$  плотность инвариантной меры отличается от (2.3) на множитель  $\det \mathbf{I}_Q$ , где  $\mathbf{I}_Q = \mathbf{I} + m(\mathbf{r}^2 \mathbf{E} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})$  — тензор инерции относительно точки контакта. Для случая  $I_1 = I_2$   $\det \mathbf{I}_Q = (I_1 + m\mathbf{r}^2)(I_1 I_3 + m(\mathbf{r}, \mathbf{I} \mathbf{r}))$ , при этом любопытно, что мера (2.3) содержит один из этих множителей.

Как несложно проверить, при перечисленных условиях уравнения движения обладают также *полем симметрий*  $\hat{\mathbf{v}}$ , определяемым дифференциальным оператором

$$\hat{\mathbf{v}} = M_1 \frac{\partial}{\partial M_2} - M_2 \frac{\partial}{\partial M_1} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \gamma_1}. \quad (2.4)$$

Оно соответствует инвариантности системы относительно вращений вокруг оси динамической симметрии. С помощью этого поля можно понизить порядок системы, для чего необходимо выбрать приведенные (редуцированные) переменные, которые являются интегралами векторного поля (2.4), в которых уравнения имеют наиболее простой вид. После ряда попыток в качестве таких переменных мы выбрали

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{(\mathbf{M}, \mathbf{r})}{f_1} = M_1 \gamma_1 + M_2 \gamma_2 + \frac{f_2}{f_1} M_3 \\ K_2 &= \frac{\omega_3}{\rho} = \rho \left( m f_1 f_2 (M_1 \gamma_1 + M_2 \gamma_2) + (I_1 + m f_2^2) M_3 \right) \\ K_3 &= \frac{M_2 \gamma_1 - M_1 \gamma_2}{\sqrt{(1 - \gamma_3^2)(I_1 + m \mathbf{r}^2)}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Уравнения движения в этих переменных, определяющие приведенную систему, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_3 &= kK_3 \\ \dot{K}_1 &= -kK_3\rho I_3 \left(1 - \left(\frac{f_2}{f_1}\right)'\right) K_2, \\ \dot{K}_2 &= -kK_3\rho m f_1 (f_1 - f_2') K_1, \\ \dot{K}_3 &= -\frac{k}{I_1^2 f_1^2 (1 - \gamma_3^2)^2} \left( f_2 (f_1 (1 - \gamma_3^2) + \gamma_3 f_2) (m f_1^2 K_1^2 + I_3 K_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_3 f_1^2 I_1 K_1^2 + f_1 (f_1 (1 - \gamma_3^2) + 2\gamma_3 f_2) \frac{K_1 K_2}{\rho} + \right. \\ &\quad \left. + m f_1^2 \rho f_2 (1 - \gamma_3^2) (\gamma_3 f_1 I_1 - f_2 I_3) K_1 K_2 \right) - \frac{\partial U(\gamma_3)}{\partial \gamma_3}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $k = \sqrt{\frac{1 - \gamma_3^2}{I_1 + m r^2}}$ .

Несложно показать, что эти уравнения обладают инвариантной мерой с плотностью  $\rho = k^{-1}$  и интегралом энергии

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\gamma_3) = \\ &= \frac{1}{2I_1(1 - \gamma_3^2)} \left( K_1^2 - \frac{I_3}{m f_1^2} K_2^2 + \frac{m f_2^2}{I_1} \left( K_1 - \frac{K_2}{\rho m f_1 f_2} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} K_3^2 + U(\gamma_3). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Кроме того, для системы (2.6) справедлива следующая

**Теорема.** После замены времени  $k dt = d\tau$  векторное поле (2.6) становится гамильтоновым

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \{x_i, H\}, \quad \mathbf{x} = (\gamma_3, K_1, K_2, K_3)$$

с гамильтонианом (2.7) и вырожденной скобкой Пуассона вида:

$$\begin{aligned} \{\gamma_3, K_3\} &= 1, \quad \{K_1, K_3\} = -I_3 \rho \left(1 - \left(\frac{f_2}{f_1}\right)'\right) K_2, \\ \{K_2, K_3\} &= -m \rho f_1 (f_1 - f_2') K_1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

(все остальные скобки равны нулю).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО — прямая проверка уравнений и тождества Якоби.

Оказывается, что уравнения (2.6) допускают кососимметричную запись (иногда говорят — косоградиентную) почти гамильтонового вида

$$\frac{dx_i}{d\tau} = J_{\lambda ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \mathbf{J}_\lambda = -\mathbf{J}_\lambda^\top, \quad (2.9)$$

где

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & -I_3 \rho \left(1 - \left(\frac{f_2}{f_1}\right)'\right) K_2 - \lambda u \\ 0 & -\lambda & 0 & -m \rho f_1 (f_1 - f_2') K_1 - \lambda v \\ -1 & I_3 \rho \left(1 - \left(\frac{f_2}{f_1}\right)'\right) K_2 + \lambda u & m \rho f_1 (f_1 - f_2') K_1 + \lambda v & 0 \end{pmatrix}$$

$$u = \frac{1}{f_1^2 I_1^2 (1 - \gamma_3^2) K_3} \left( \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{I} \mathbf{r})}{m} K_2 - \frac{f_1 f_2}{\rho} K_1 \right),$$

$$v = \frac{1}{I_1^2 (1 - \gamma_3^2) K_3} \left( \frac{f_2}{f_1 \rho} K_2 - (I_1 + m f_2^2) K_1 \right), \quad (2.10)$$

причем  $\lambda$  является произвольной функцией от  $(K_1, K_2, K_3, \gamma_3)$ . При  $\lambda = 0$  получаем вырожденный тензор  $\mathbf{J}_0$ , соответствующий скобке (2.8), тем не менее при  $\lambda \neq 0$  тензор (2.10) невырожден, но не удовлетворяет тождеству Якоби, т. е. не определяет скобку Пуассона.

В случае, когда  $\lambda$  выбирается в форме

$$\lambda = \alpha(\gamma_3) K_3, \quad (2.11)$$

тензор  $\tilde{\mathbf{J}} = (\lambda^{-1} \mathbf{J}_\lambda)$  удовлетворяет тождеству Якоби, а соответствующее векторное поле

$$\mathbf{v} = (\lambda^{-1} \mathbf{J}_\lambda) \nabla H \quad (2.12)$$

является гамильтоновым, в то же время дивергенция поля (2.12) отлична от нуля. Таким образом, рассматриваемая неголономная система порождает пример гамильтонового векторного поля с нетривиальной мерой  $\rho = \alpha(\gamma_3) K_3$ . Отметим также, что функция  $\rho = \alpha(\gamma_3) K_3$  является, по терминологии Чаплыгина, приводящим множителем, в данном случае отличается от инвариантной меры (2.3). Близкий пример пуассоновой структуры для качения шара по телу вращения был указан Эрмансом [32].

Скобка (2.8) обладает двумя функциями Казимира [5], которые являются интегралами движения и, следовательно, система (2.6) интегрируема. Интегрируемость и существование линейных интегралов можно установить иным — классическим способом: разделим второе и третье уравнения системы (2.6) на  $\dot{\gamma}_3$  и получим систему двух линейных неавтономных уравнения первого порядка

$$\frac{dK_1}{d\gamma_3} = -\rho I_3 \left(1 - \left(\frac{f_2}{f_1}\right)'\right) K_2, \quad \frac{dK_2}{d\gamma_3} = -m\rho f_1(f_1 - f_2') K_1. \quad (2.13)$$

Уравнения (2.13) в несколько иных переменных, связанных с полуподвижными осями, были получены С. А. Чаплыгиным. Уравнения (2.13) не содержат потенциала, который входит лишь в выражение интеграла энергии (2.7). Из этого уравнения после решения линейной системы (2.13) определяется зависимость угла нутации от времени, которая в общем случае имеет периодический колебательный характер.

Вследствие того, что относительно  $\gamma_3$  уравнения (2.13) представляют собой линейную систему, общее решение может быть получено в виде линейной суперпозиции

$$K_i = c_1 g_i^{(1)} + c_2 g_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \quad (2.14)$$

где  $g_i^{(1)}(\gamma_3)$ ,  $g_i^{(2)}(\gamma_3)$  — фундаментальные решения (2.13). При обращении выражений (2.14) относительно  $c_i$  получим выражения для недостающих первых интегралов, которые в общем случае выражаются через вещественно-аналитические, но не алгебраические (например, гипергеометрические), функции. Тем не менее они всегда являются линейными по  $M_i$  (т. е. по обобщенным скоростям).

Эти интегралы в некотором смысле обобщают интеграл площадей (соответствующему циклическому углу прецессии) и циклический интеграл Лагранжа (соответствующий циклическому углу собственного вращения) [5], имеющиеся в классической задаче о движении тяжелого симметричного волчка вокруг неподвижной точки (случай Лагранжа). Наличие таких интегралов обуславливает большое сходство при качественном исследовании этих задач.

Рассмотрим все известные ситуации, когда интегралы являются алгебраическими или выражаются через некоторые известные классы специальных функций.

**2. Круглый диск (С. А. Чаплыгин, П. Аппель, Д. Кортевег),** вообще говоря, со смещенным вдоль оси динамической симметрии центром масс (рис. 2). В этом случае для функций (2.1) имеем явные выра-

жения

$$f_1 = \frac{R}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad f_2 = a, \quad (2.1)$$

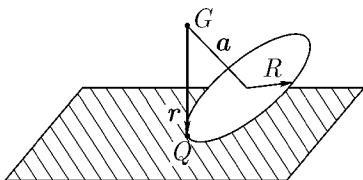


Рис. 2

где  $R$  — радиус монеты,  $a$  — смещение центра масс по оси динамической симметрии (рис. 2).

Любопытным фактом для этого случая является независимость меры (2.3) от фазовых переменных  $\rho = \text{const}$ . Для переменных (2.5) получаются уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{d\theta} &= \frac{\rho m R^2}{\sin \theta} K_2, \\ \frac{dK_2}{d\theta} &= I_3 \rho (R \sin \theta + \frac{a}{R} \cos \theta) K_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\rho = (I_1 I_3 + I_1 m R^2 + I_3 m a^2)^{-1/2}$ . Эти два линейных уравнения сводятся к одному линейному уравнению второго порядка для  $\omega_3$

$$\frac{d^2 \omega_3}{d\theta^2} - \text{ctg} \theta \frac{d\omega_3}{d\theta} + \rho^2 m R (R + a \text{ctg} \theta) I_3 \omega_3 = 0. \quad (2.3)$$

При  $a = 0$  с помощью замены  $\cos \theta = 1 - 2x$  уравнение ((2.3)) преобразуется к гипергеометрическому типу [1]

$$x(1-x) \frac{d^2 \omega_3}{dx^2} + (1-2x) \frac{d\omega_3}{dx} - \rho^2 I_3 m R^2 \omega_3 = 0.$$

В работах [17, 24] показано, что диск при почти всех начальных условиях не упадет на плоскость, в [2] аналогичный результат получен для неинтегрируемой задачи о качении тяжелого диска по наклонной плоскости.

Относительно устойчивости стационарных движений, а также качественного анализа движения следует указать работы [19, 24], а также книгу [22].

**3. Динамически симметричный шар со смещенным центром масс (Э. Раус, С. А. Чаплыгин).** В этом случае

$$f_1 = R, \quad f_2 = R\gamma_3 + a, \quad (2.1)$$

где  $R$  — радиус шара,  $a$  — расстояние центра масс до геометрического центра. Мера  $\rho$  уже не является постоянной

$$\rho = (I_1 I_3 + I_1 m R^2 (1 - \gamma_3^2) + I_3 m (R \gamma_3 + a)^2)^{-1/2}, \quad (2.2)$$

а уравнения для  $K_1, K_2$  превращаются в тривиальные:  $\dot{K}_1 = 0, \dot{K}_2 = 0$ , т. е. величины

$$\begin{aligned} K_1 &= \omega_3 \rho^{-1} = \\ &= \rho^{-1} (m R^2 \gamma_3 (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) + I_1 M_3 + m a R ((\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) + M_3 \gamma_3) + m a^2 M_3) = \text{const}, \\ K_2 &= \frac{1}{R} (\mathbf{M}, \mathbf{r}) = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{a}{R} M_3 = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

являются интегралами движения.

Интеграл  $K_2$  представляет собой *интеграл Желле*, который имеет также при произвольном законе трения в точке контакта [22]. Интеграл  $K_1$  был найден Э. Раусом в 1884 году [23] и выглядит несколько таинственно. Он также был указан С. А. Чаплыгиным в работе [26]. Еще раз отметим, что оба интеграла линейны по скоростям, являются непосредственными обобщениями циклических интегралов, соответствующих прецессии  $\psi$  и собственному вращению  $\varphi$ , но, тем не менее, не имеют настолько же естественного динамического происхождения. Интеграл  $K_2$  иногда называют *интегралом Чаплыгина*.

**4. Трехмерные точечные отображения в неголономной механике.** Прежде чем рассмотреть следующие случаи движения тела, приведем некоторую общую конструкцию, позволяющую сопоставить уравнениям (1.1), (1.2), (1.3) некоторое точечное взаимно однозначное отображение в трехмерном пространстве. Компьютерный анализ этого отображения, в котором используется численное интегрирование указанной системы при фиксированном значении энергии, позволяет обнаружить и дать наглядную интерпретацию различным возможностям существования меры и интегралов — в их различных комбинациях.

Для построения трехмерного отображения мы используем переменные Андуайе — Депри  $(L, G, H, l, g, h)$ , которые систематически использовались в нашей книге [5] для компьютерного (и аналитического исследования) гамильтоновых уравнений Эйлера — Пуассона, Кирхгофа и пр. В отличие от неголономной ситуации в классическом случае эти переменные канонические, и в силу того, что для уравнений типа Эйлера — Пуассона всегда имеется интеграл площадей, здесь можно ограничиться двумерными отображениями. Для описанных выше постановок задач

уже не хватает двух интегралов движения, поэтому необходимо использовать трехмерные отображения, к тому же не обязательно обладающие инвариантной мерой (в отличие от гамильтоновой механики). Переход от переменных  $(\mathbf{M}, \gamma)$  к переменным Андуайе – Депри происходит по известным формулам

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, & M_2 &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, & M_3 &= L, \\ \gamma_1 &= \left( \frac{H}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \cos g \right) \sin l + \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= \left( \frac{H}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \cos g \right) \cos l - \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= \left(\frac{H}{G}\right) \left(\frac{L}{G}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \cos g, \end{aligned} \quad (2.1)$$

в которых можно выразить энергию  $E = E(L, G, H, l, g)$ .

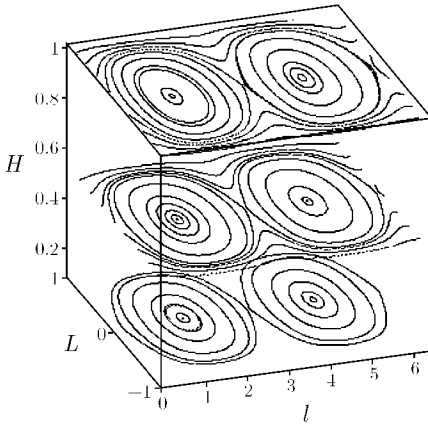


Рис. 3. Трехмерное отображение, описанное в п. 4 для случая шара Чаплыгина. На рисунке хорошо видно, что все траектории ложатся на совместные поверхности уровня двух интегралов  $H = \text{const}$  и  $\mathbf{M}^2 = \text{const}$  ( $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 2$ ,  $I_3 = 3$ )

В уравнениях Эйлера – Пуассона величина  $H = (\mathbf{M}, \gamma)$  является постоянной, для уравнений (1.1), (1.2), (1.3) это уже не так. Фиксируя уровень энергии  $E = E_0$  и выбирая секущую плоскость, например, в виде  $g = g_0 = \text{const}$ , получаем трехмерное отображение, индуцируемое последовательными пересечениями фазовой траектории с выбранной секущей плоскостью. Мы выводим отображение в переменных  $(L/G, H/G, l)$  из соотношений его компактности в силу того, что  $\left| \frac{L}{G} \right| \leq 1$ ,  $\left| \frac{H}{G} \right| \leq 1$ . Типичные примеры трехмерных отображений приведены на рис. 3, 5, 6, 7. Очевидно, что наличие одного дополнительного интеграла приводит к тому, что траектории ложатся на двумерные инвариантные многообразия точечного отображения, а двух дополнительных



интегралов — к тому, что трехмерное пространство расслоено на инвариантные кривые 3. В общем случае, когда отсутствуют как интегралы, так и мера, возможно сложное поведение траекторий, при котором хаотические движения чередуются с асимптотическими притягивающими свойствами, типичными для диссипативных систем. Отметим также, что переменные  $L, G, H, l, g, h$  в отличие от  $(M, \gamma)$  являются более удобными для анализа трехмерного отображения вследствие того, что в них разделены линейная и угловые компоненты, а также вследствие прозрачного геометрического смысла (см. [5]).

Одним из примеров трехмерного отображения, не сохраняющего меру, но заданного аналитическими формулами, является хорошо известное отображение Смейла – Вильямса, другие могут быть получены при изучении общих (неконсервативных) возмущений двухстепенных гамильтоновых систем.

**5. Качение уравновешенного динамически несимметричного шара (шар Чаплыгина [25]).** Уравнения движения динамически несимметричного шара с центром масс, совпадающим с геометрическим центром, можно записать в форме

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \times \omega + \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}, & \dot{\gamma} &= \gamma \times \omega, \\ M &= I\omega + D\gamma \times (\omega \times \gamma), & D &= ma^2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  — центральный тензор инерции,  $U = U(\gamma)$  — потенциальная энергия. Уравнения (2.1) всегда имеют меру с плотностью  $\rho$  и первые интегралы вида

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\sqrt{1 - D(\gamma, A\gamma)}}, & A &= (I + DE)^{-1}, & E &= \|\delta_{ij}\|, \\ H &= \frac{1}{2}(M, \omega) + U(\gamma), & F_1 &= \gamma^2 = 1 & F_2 &= (M, \gamma). \end{aligned} \tag{2.2}$$

При  $U = 0$  появляется еще интеграл  $F_3 = M^2$  и задача становится интегрируемой (С. А. Чаплыгин, 1903 г. [25]), соответствующее трехмерное отображение приведено на рис. 3.

Как показано в [15], эта задача остается интегрируемой при добавлении потенциала Бруна

$$U = \frac{1}{2}k(I\gamma, \gamma).$$

Интеграл  $F_3$  при этом несколько видоизменяется

$$F_3 = M^2 - \frac{k}{\det \mathbf{A}}(\gamma, \mathbf{A}\gamma)$$

Как было указано авторами в [6], уравнения (2.1) после замены времени  $d\tau = \rho dt$  для любых потенциалов  $U$  становятся гамильтоновыми со скобкой Пуассона, которая нелинейна по фазовым переменным  $(M, \gamma)$  и имеет вид

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk} \rho^{-1} (M_k - g\gamma_k), \quad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk} \rho^{-1} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \\ g &= D(\omega, \gamma) = \frac{D(\gamma, \mathbf{A}M)}{1 - D(\gamma, \mathbf{A}\gamma)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Скобка (2.3) является вырожденной, ее функциями Казимира являются интегралы  $F_1, F_2$  (2.2). Гамильтониан, соответствующий скобке (2.3) получается из энергии (2.2), выраженной через моменты по формуле

$$H = \frac{1}{2}(M, \mathbf{A}M) + \frac{1}{2}g(\mathbf{A}M, \gamma) + U(\gamma). \quad (2.4)$$

После замены переменных  $K = \rho M$  скобка Пуассона и гамильтониан представляются в форме

$$\begin{aligned} \{K_i, K_j\} &= \varepsilon_{ijk} (K_k - D\rho^2(K, \gamma)a_k\gamma_k), \quad \{K_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \\ H &= \frac{1}{2}\rho^{-2}(K, \mathbf{A}K) + \frac{1}{2}D(\mathbf{A}K, \gamma)^2 + U(\gamma). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таким образом, на нулевом уровне  $(K, \gamma) = 0$  скобка (2.5) переходит в скобку, описываемой алгеброй  $e(3)$ , на которой записываются уравнения Эйлера – Пуассона и Кирхгофа [5].

Отметим, что для рассматриваемой задачи плотность меры  $\rho$  является приводящим множителем (по Чаплыгину [27]), с помощью которого неголономные уравнения сводятся к гамильтоновой системе. Сам Чаплыгин при интегрировании уравнений движения несимметричного шара использовал такое сведение, предварительно введя неголономный аналог сфероконических координат. Можно поступить и обратным образом [25] и сначала сделать замену времени  $d\tau = \rho dt$ , получить гамильтонову систему, а затем ввести обычные сфероконические координаты и воспользоваться методом Гамильтона – Якоби.

В отличие от пуассоновой структуры (2.8), которая относится к системе, приведенной по полю симметрии, соответствующего собственному вращению, структура (2.12) относится к полной системе (1.1), (1.2).

К сожалению, нам не удалось распространить (поднять) приведенную структуру (2.8) на такую полную систему. Возможно, что это либо слишком сложно, либо этому препятствуют некоторые динамические эффекты. К сожалению, динамические эффекты, препятствующие гамильтоновости, почти совсем не изучены<sup>1</sup> [4].

**6. Качение динамически несимметричного неуравновешенного шара по плоскости.** В этом случае уравнения (1.1), (1.2) удобно записать в форме

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \\ \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{a}$  — вектор, соединяющий центр масс с геометрическим центром,  $\mathbf{r} = R\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{a}$  (см. рис. 4). Оказывается, что в случае  $\mathbf{a} \neq 0$  интеграл  $F_3 = \mathbf{M}^2$  системы (2.1) допускает непосредственное обобщение, которое может быть записано в виде

$$F = \mathbf{M}^2 - m r^2 (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}^2 - 2m r^2 H, \quad (2.2)$$

где  $H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega})$  — интеграл энергии. Этот интеграл, хотя и является достаточно простым, видимо, ранее не был известен. Заметим только, что при дополнительном требовании динамической симметрии были найдены интеграл Желле и интегралы Чаплыгина (см. п. 3). Интеграл (2.2) может рассматриваться как их обобщение на динамически несимметричную ситуацию.

Нам не удалось получить обобщения этого интеграла на случай добавления гиростата и поля Бруна. Отметим также, что при  $\mathbf{a} \neq 0$ , видимо, отсутствует мера, что иллюстрируется рис. 5, 6, на котором показаны асимптотические траектории точечного отображения, лежащие на двумерной поверхности интеграла (2.2).

**7. Произвольное тело с шаровым центральным эллипсоидом инерции.**  $I_1 = I_2 = I_3 = \mu$ ,  $\mu = \text{const}$ .

У этой задачи в общем случае отсутствуют оба дополнительных интеграла, тем не менее для нее всегда существует инвариантная мера, что

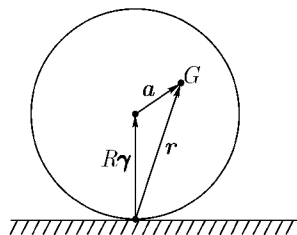


Рис. 4

<sup>1</sup>На стр. 138 этого сборника приведена наша работа, в которой используются препятствия к гамильтоновости в интегрируемых неголономных системах.

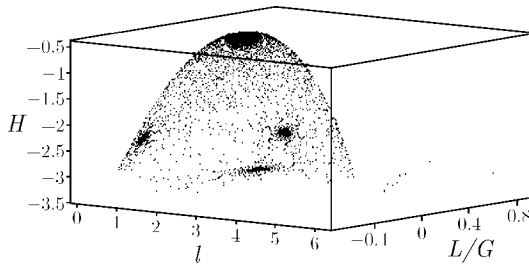


Рис. 5. Одна из траекторий в задаче о качении неуровновешенного шара по плоскости. Из рисунка видно, что все точки ложатся на некоторую поверхность, сгущения точек соответствуют асимптотическому приближению траектории к периодическим решениям. Траектория выходит из вершины и приближается к трем точкам снизу поверхности.

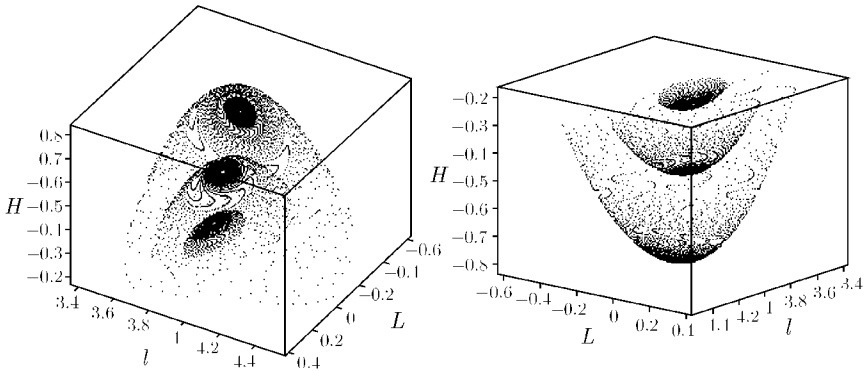


Рис. 6. Три траектории в задаче о качении неуровновешенного шара по плоскости. Хорошо видно, что точки ложатся на двумерные поверхности (соответствующие уровню интеграла (2.2)). Сгущение точек соответствует асимптотическому приближению к некоторому периодическому решению.

впервые было отмечено В. А. Ярошук [28]. Здесь удобнее рассматривать уравнения в переменных  $\omega, \gamma$ . Они имеют вид

$$(\mu + mr^2)\dot{\omega} = m(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) - m\omega(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}, \quad (2.1)$$

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \boldsymbol{\omega}.$$

Уравнения (2.1) обладают инвариантным соотношением  $(\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}) = 0$ , которое используется для упрощения некоторых выкладок.

Плотность инвариантной меры для этих уравнений, указанная в [28], может быть представлена в форме

$$\rho = (\mu + \mathbf{r}^2)^{3/2}. \quad (2.2)$$

Указанные также в работе [28] обобщения этой меры на случай качения тела по сфере мы не смогли воспроизвести. Возможно, этого обобщения не существует. Также неизвестно, к каким нетривиальным интегрируемым случаям может приводить существование меры (2.2) и имеет ли система какое-нибудь гамильтоново происхождение, — возможно, после соответствующей замены времени.

**8. Гиостатические обобщения.** Следуя в основном С. А. Чаплыгину [26], приведем обобщения указанных задач на случай добавления равномерно вращающегося уравновешенного ротора. Соответствующая система может интерпретироваться как неголономный гиостат. Эффект гиостата может быть также достигнут при добавлении в тело многосвязных полостей, полностью заполненных идеальной несжимаемой жидкостью, обладающей ненулевой циркуляцией [5]. В описываемом случае уравнение для момента (1.1) может быть представлено в виде

$$\dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M} + \mathbf{S}) \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{M}_Q,$$

где  $\mathbf{S}$  — постоянный трехмерный вектор гиостатического момента. Легко видеть, что добавление ротора не влияет на существование инвариантной меры с плотностью, зависящей от позиционных переменных  $\gamma$ .

**а) Тело вращения.** Для ротора с гиостатическим моментом  $\mathbf{S} = (0, 0, s)$ , направленным вдоль оси вращения, уравнения типа (2.13) в переменных (2.5) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{d\gamma_3} &= -I_3\rho\left(1 - \left(\frac{f_2}{f_1}\right)'\right)K_2 - s, \\ \frac{dK_2}{d\gamma_3} &= -m\rho f_1((f_1 - f_2')K_1 + f_2s). \end{aligned} \quad (2.1)$$

В менее удобной форме уравнения (2.1) были получены С. А. Чаплыгиным [26]. Плотность инвариантной меры также задается уравнением (2.3).

Разберем последовательно обобщения случаев диска, эллипсоида и шара со смещенным центром, указанных ранее.

**б) Круглый диск.** Уравнение (2.3) переходит в следующее

$$\frac{d^2\omega_3}{d\theta^2} - \operatorname{ctg}\theta \frac{d\omega_3}{d\theta} + mRI_3(R + a \operatorname{ctg}\theta)\rho^2\omega_3 = smR\rho^2(R + a \operatorname{ctg}\theta), \quad (2.2)$$

$$\rho = (I_1I_3 + I_1mR^2 + I_3ma^2)^{-1/2},$$

которое при  $a = 0$  сводится к, вообще говоря, неоднородному (при  $s \neq 0$ ) гипергеометрическому уравнению.

**в) Шар со смещенным центром масс.** Здесь система (2.1) принимает вид

$$\frac{dK_1}{d\gamma_3} = -s, \quad \frac{dK_2}{d\gamma_3} = -m\rho R(R\gamma_3 + a)s, \quad (2.3)$$

где  $\rho$  задается соотношением (2.2). Сразу можно указать один интеграл, обобщающий интеграл Желле

$$F = K_1 + s\gamma_3 = \operatorname{const}. \quad (2.4)$$

Второй интеграл, обобщающий интеграл Рауса (Чаплыгина), имеет более сложный неалгебраический вид

$$(I_1 - I_3)\rho^{-1}\omega_3 - s \left\{ \rho^{-1} - I_1 \sqrt{\frac{ma^2}{I_1 - I_3}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{m}{I_1 - I_3}} \rho(R\gamma_3(I_1 - I_3) - aI_3) \right) \right\} = \operatorname{const}. \quad (2.5)$$

В интеграле (2.5) предполагается  $I_1 > I_3$ . При  $I_1 < I_3$  в интеграле появляются гиперболические функции. Интеграл (2.5) явно был указан А. С. Кулешовым [18]. Он существенно упрощается при  $I_1 = I_3 = \mu$  и имеет вид

$$\rho^{-1} \left( 3\mu\omega_3 - s \frac{\mu + mR^2 - 2ma^2 - maR\gamma_3}{ma^2} \right) = \operatorname{const}. \quad (2.6)$$

Еще более простая форма получается для уравновешенного однородного шара ( $a = 0$ ):

$$\omega_3 + \frac{1}{2} \frac{mR^2\gamma_3^2}{\sqrt{\mu(\mu + mR^2)}} = \operatorname{const}.$$

Это простое интегрируемое обобщение было указано Д. К. Бобылевым [3] (некоторые дополнительные упрощения при явном интегрировании также заметил Н. Е. Жуковский [12]).

**д)** *Динамически несимметричный шар.* Наиболее общее гиростатическое обобщение для случая шара Чаплыгина было предложено А. П. Маркеевым [20]. Уравнения движения и интегралы можно представить в форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= (\mathbf{M} + \mathbf{S}) \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ H &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$F_2 = (\mathbf{M} + \mathbf{S}, \mathbf{M} + \mathbf{S}), \quad F_3 = (\mathbf{M} + \mathbf{S}, \boldsymbol{\gamma}),$$

где  $\mathbf{S}$  — постоянный трехмерный вектор гиростатического момента. Отметим, что на систему (2.7) при  $\mathbf{S} \neq 0$  нам не удалось обобщить пуассонову структуру (2.3).

**9. Качение эллипсоида по плоскости.** Оказывается, что при качении уравновешенного эллипсоида, оси которого являются главными осями инерции, имеются случаи существования специфической инвариантной меры, определяемые ограничениями на отношения моментов инерции и полуосей эллипсоида поверхности. Эту меру нашла В. А. Ярошук в [29].

Для качения эллипсоида в п. 5 и 7 уже указаны два случая существования инвариантной меры. Здесь имеется в виду соответственно мера динамически несимметричного уравновешенного шара (2.2) и произвольного тела с шаровым центральным эллипсоидом инерции (2.2). Интересно, что пока не найдено препятствий (в отличие от кельтского камня [15]) к существованию аналитической инвариантной меры общей задачи о качении уравновешенного эллипсоида, главные оси которого являются главными осями инерции. Возможно, что эта мера существует (по крайней мере, в этой ситуации отсутствует асимптотическое поведение, типичное для кельтских камней), но является сложной и неалгебраической.

Для поверхности эллипсоида  $(\mathbf{r}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}) = 1$ , где  $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$ ,  $b_i$  — квадраты больших полуосей, имеем явное выражение

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{(\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}}. \quad (2.1)$$

Если центральный тензор инерции имеет вид

$$\mathbf{I} = \mu\mathbf{E} + \lambda m\mathbf{B}, \quad (2.2)$$

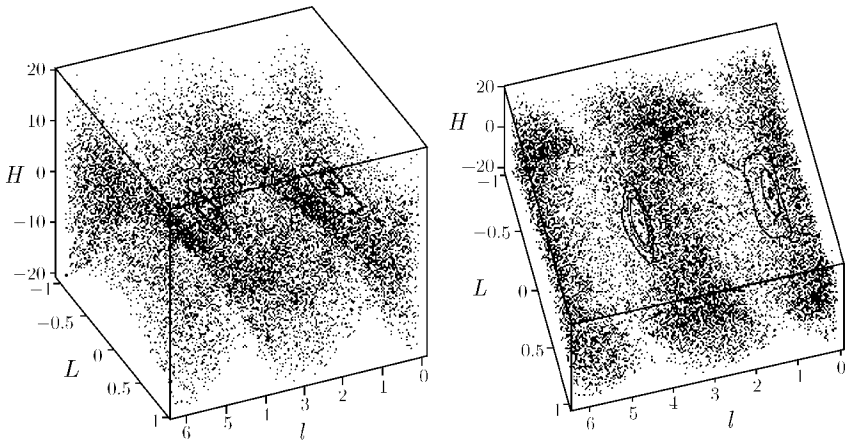


Рис. 7. Несколько траекторий в задаче о качении эллипсоида с шаровым тензором инерции по плоскости. Хорошо видны регулярные траектории, окружающие устойчивые периодические решения (перманентные вращения), которые, как сказано выше, в данном случае вырождены — заполняют некоторые кривые. Хаотический слой (который получен из одной траектории) в данном случае не ложится ни на какую поверхность.

то уравнения (1.1), (1.2) имеют меру только в случае  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$  с плотностью (в переменных  $\mathbf{M}, \gamma$ )

$$\rho = (\mu + m\mathbf{r}^2)^{-1/2} = ((\mu + m\mathbf{B})\mathbf{r}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r})^{-1/2}. \quad (2.3)$$

Замечание. Для случая  $\lambda = 0$  мера (2.3) уже была указана в п. 7. Она определяется формулой (2.2) и имеется для любой поверхности тела. Различия в степенях выражений (2.3) и (2.2) связано с различными системами переменных  $(\mathbf{M}, \gamma)$  и  $(\boldsymbol{\omega}, \gamma)$  и соответствующими преобразованиями плотности инвариантной меры.

Отметим, что при выполнении равенства (2.2) уравнения движения обладают двухпараметрическим семейством вертикальных перманентных вращений при произвольном вещественном  $\lambda$  (в остальных случаях это семейство является однопараметрическим). Как показал А. В. Карапетян [14], условия существования последних даже несколько шире и имеют вид

$$\sum_{ijk} I_i(b_i - b_k) = 0, \quad (2.4)$$



где  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ . Кроме тензора (2.2) условиям (2.4) удовлетворяет случай неголономного шара Чаплыгина ( $b_1 = b_2 = b_3 = R^2$ ), для которого существует как мера, так и интеграл (2.2), а также осесимметричная ситуация  $I_1 = I_2, b_1 = b_2$ . Неожиданно, что равенство (2.2) является также необходимым (но, вообще говоря, недостаточным) условием интегрируемости уравнений движения эллипсоида на идеально гладкой плоскости [8]. Интересно отметить, что при  $\lambda \neq 0$  и  $\lambda \neq 1$  мера не найдена, как не найдено и препятствий к ее существованию. Трехмерное сечение в случае  $\lambda = 0$  приведено на рис. 7.

Все описанные выше результаты, связанные с качением тела по плоскости представлены в таблице 1.

### 3. Тело на сфере

Рассмотрим теперь систематическим образом аналогичные случаю плоскости ситуации, возникающие при качении тела по сфере. Прежде всего заметим, что кинематическое уравнение (1.3) можно переписать в виде

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \omega \mp k\dot{r}, \quad k = 1/R_0, \quad (3.1)$$

где знак «минус» берется для внутреннего обката (рис. 8 а), а «плюс» — для внешнего (рис. 8 б).

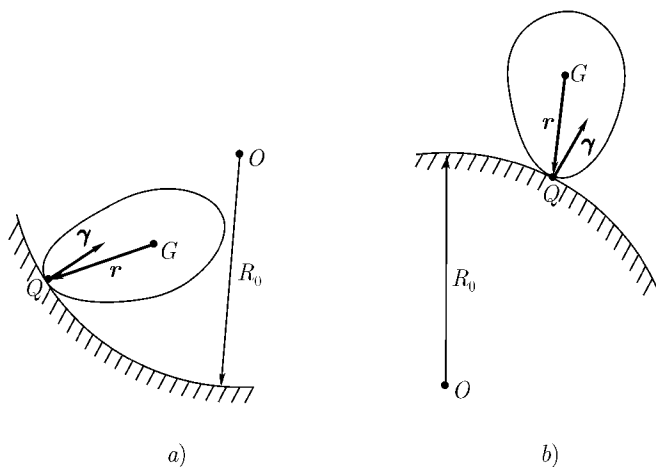


Рис. 8

**1. Качение тела вращения.** Аналогично задавая тело вращения формулами (2.1) можно установить явный вид плотности инвариантной меры

$$\begin{aligned} \rho(\gamma_3) &= \rho_0(1 - kf_1)^3(1 - kf'_2), \\ \rho_0 &= (I_1 I_3 + m(\mathbf{r}, \mathbf{I}\mathbf{r}))^{-1/2} = (I_1 I_3 + mI_1 f_1^2(1 - \gamma_3^2) + mI_3 f_2^2 \gamma_3^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

и наличие поля симметрий  $\mathbf{v}$  с оператором (2.4).

Приведенная система (2.13) в переменных типа (2.5)

$$K_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{r})(1 - kf_1)f_1^{-1}, \quad K_2 = \omega_3 \rho_0^{-1}, \quad (3.2)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \frac{dK_1}{d\gamma_3} &= - \left[ I_3 \left( 1 - \left( \frac{f_2}{f_1} \right)' \right) + kf_1(I_1 - I_3)(1 - kf'_2) \right] K_2, \\ \frac{1 - kf_1}{\rho_0} \frac{dK_2}{d\gamma_3} &= -mf_1(f_1 - f'_2 - kf_1 f'_2) K_1 + \\ &+ mk\rho_0 I_1 f_1^2 \left( \gamma_3 f'_2 + \sqrt{1 - \gamma_3^2} \left( f_1 \sqrt{1 - \gamma_3^2} \right)' \right) K_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Уравнения (3.3) в несколько иных переменных, связанных с полуподвижными осями были получены П. В. Воронцом [11], который переносил рассуждения Чаплыгина на случай сферы.

После интегрирования уравнений системы (3.3) зависимость от времени угла нутации  $\theta = \arccos(\gamma_3)$  определяется из квадратуры для интеграла энергии

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{I_1 + m\mathbf{r}^2}{1 - \gamma_3^2} \dot{\gamma}_3^2 + \\ &+ \frac{1}{2I_1(1 - \gamma_3^2)} \left( \frac{K_1^2}{(1 - kf_1)^2} - \frac{I_3}{mf_1^2} K_2^2 + \frac{mf_2^2}{I_1} \left( \frac{K_1}{1 - kf_1} - \frac{K_2}{m\rho f_1 f_2} \right)^2 \right) + U(\gamma_3). \end{aligned}$$

Для задачи о качении тела вращения на сфере можно, по аналогии со случаем плоскости, указать приведенную систему в переменных (2.5) и соответствующую пуассонову структуру. Мы не приводим соответствующие выкладки из-за их громоздкости.

Аналогично качению по плоскости, рассмотрим несколько частных случаев.

**2. Круглый диск** с, вообще говоря, смещенным вдоль оси симметрии центром масс, уже не приводит к гипергеометрическому уравнению, но система все же упрощается, мера при этом уже не является постоянной. Как и выше,  $f_1, f_2$  задаются соотношениями (2.1), а плотность инвариантной меры имеет вид

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{kR}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}} \right)^3, \quad \rho_0 = \left( I_1 I_3 + m(I_1 R^2 + I_3 a^2) \right)^{-1/2} = \text{const},$$

где  $R$  — радиус диска,  $a$  — смещение центра масс.

Уравнение второго порядка имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \omega_3}{d\theta^2} + \text{ctg } \theta \left( 1 + \frac{kR}{\sin \theta - kR} \right) \omega_3 - \\ & - \frac{\rho_0^2 m R I_3}{1 - \frac{kR}{\sin \theta}} \left( R + a \text{ctg } \theta + \frac{kR^2(I_1 - I_3)}{I_3 \sin \theta} \right) \omega_3 = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\gamma_3 = \cos \theta$ .

Это уравнение в частном случае  $I_3 = 2I_1$ ,  $a = 0$  (однородный уравновешенный диск) было получено П. Воронцом [40], для  $a = 0$  оно было исследовано в [33] методами качественного анализа. В частности, была исследована устойчивость стационарных движений и вероятность падения диска на сферу, которая оказалась равной нулю. В работе [34] также показано, что в отличие от неголономной задачи, казалось бы более простая гамильтонова система, описывающая движение диска по сфере с полным (идеальным) проскальзыванием уже не является интегрируемой, а ее поведение обладает хаотическими свойствами. Этот результат связан с увеличением числа степеней свободы системы по сравнению со случаем плоскости, где указанная система интегрируема вследствие сохранения горизонтальной составляющей импульса.

**3. Шар со смещенным центром.** Функции  $f_1, f_2$  также задаются соотношениями (2.1), для меры  $\rho$  имеем такую же форму, как на плоскости:

$$\rho = \left( I_1 I_3 + I_1 m R^2 (1 - \gamma_3^2) + I_3 m (R \gamma_3 + a)^2 \right)^{-1/2}.$$

В переменных (3.2) уравнения (3.3) имеют вид

$$\frac{1}{\rho} K'_1 = -kR(I_1 - I_3)(1 - kR)K_2, \quad \frac{1}{\rho} K'_2 = \frac{kmR^3}{1 - kR} K_1. \quad (3.1)$$

С их помощью находим два линейных по  $K_1, K_2$  неалгебраических интеграла вида

$$F_2 = \left( \sqrt{m(I_3 - I_1)} K_2 + \frac{mR}{1 - kR} K_1 \right) e^{\lambda\tau}, \quad (3.2)$$

$$F_3 = \left( \sqrt{m(I_3 - I_1)} K_2 - \frac{mR}{1 - kR} K_1 \right) e^{-\lambda\tau},$$

где  $\lambda^2 = mk^2 R^4 (I_3 - I_1)$ ,  $\tau = \int \rho_0(\gamma_3) d\gamma_3$ , а также квадратичный алгебраический интеграл (зависимый с  $F_2, F_3$ )

$$F = F_2 F_3 = \frac{mR^2}{(1 - kR)^2} K_1^2 + (I_1 - I_3) K_2^2. \quad (3.3)$$

Интегралы  $F_2, F_3$  являются новыми и обобщают интегралы Рауса и Желле (2.3). Интеграл (3.3) был найден А. С. Кулешовым [18]. Для шарового тензора инерции  $I_3 = I_1$  имеем

$$K_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{r}) = M_1 \gamma_1 + M_2 \gamma_2 + M_3 \left( \gamma_3 + \frac{a}{R} \right) = \text{const}, \quad (3.4)$$

$$(1 - kR) K_2 - kmR^3 K_1 \int \rho(\gamma_3) d\gamma_3 = \text{const},$$

т. е.  $K_1$  совпадает с классическим интегралом Желле.

**4. Динамически несимметричный уравновешенный шар на сфере.** Кратко укажем на один интегрируемый случай, связанный с качением динамически несимметричного уравновешенного шара по сфере — аналог движения шара Чаплыгина на плоскости, (см. (2.1), (2.2)). Такая система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = k\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{M} &= (\mathbf{I} + D)\boldsymbol{\omega} - D\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $k = \frac{R}{R - a}$ ,  $a$  — радиус шара,  $m$  — его масса,  $D = ma^2$ ,  $R$  — радиус неподвижной сферы (см. рис. 9). (Для плоскости  $R \rightarrow \infty$  и  $k = 1$ .) Уравнения (3.1) всегда обладают интегралами

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad F_2 = \mathbf{M}^2.$$

и инвариантной мерой с плотностью  $\rho$  (2.2). Для полной интегрируемости не хватает еще одного интеграла (типа интеграла площадей при  $k = 1$ ). Он существует лишь при дополнительном условии  $a = 2R$ , найденным А. В. Борисовым в [7], которое соответствует внутреннему обкату неподвижного шара динамически несимметричной уравновешенной сферой (см. рис. 9). Этот интеграл имеет вид

$$F = (M, \bar{A}\gamma), \quad (3.2)$$

$$\bar{A} = E - 2(\text{tr}(I + D))^{-1}(I + D)$$

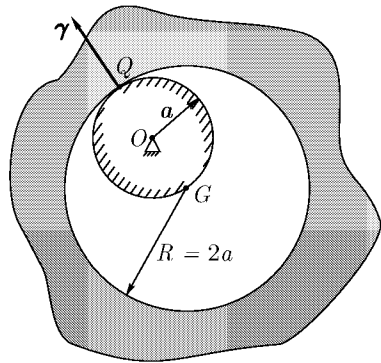


Рис. 9

и может быть обобщен на случай до-  
 бавления в (3.1) потенциала Бруна  $U = \frac{1}{2}(I\gamma, \gamma)$  [7]. С помощью пре-  
 образования  $\tilde{M} = \bar{A}M$ ,  $\tilde{\gamma} = \gamma$  при условии  $a = 2R$  уравнения (3.1)  
 переводятся в уравнения, описывающие движение шара Чаплыгина по горизон-  
 тальной плоскости. При произвольном параметре  $k$  и потенциале  $U$  до сих пор  
 не известна пуассонова структура уравнений (3.1), аналогичная указанной на-  
 ми при  $k = 1$  в п. 25 (формула (2.3)).

**5. Динамически несимметричный неуровновешенный шар на сфере.**  
 Здесь также существует один (и все-  
 го один) квадратичный интеграл, обоб-  
 щающий соответствующий результат на  
 плоскости. Для уравнений

$$\begin{cases} \dot{M} = M \times \omega + m\dot{r} \times (\omega \times r), \\ \dot{r} = \frac{1}{1 - kR}(r - a) \times \omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $r = R\gamma + a$ ,  $M = I\omega + mr \times (\omega \times r)$ .  
 Он имеет в точности такой же вид

$$F = M^2 - mr^2(M, \omega). \quad (3.2)$$

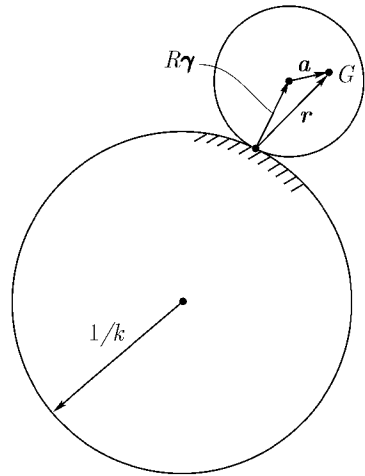


Рис. 10

Также отметим, что при  $a \neq 0$ , видимо, не существует инвариантной меры, а также неизвестны обобщения на случай добавления гиростата и поля задачи Бруна. При наличии осевой симметрии  $I_1 = I_2$  интеграл (3.2) был указан А. С. Кулешовым и именно знакомство с этим результатом побудило авторов к анализу динамически несимметричной ситуации.

**6. Гиростатические обобщения.** Кратко остановимся на интегрируемых гиростатических обобщениях. Так, для тела вращения для сохранения интегрируемости уравновешенный ротор с моментом  $\mathbf{S}$  должен быть направлен вдоль оси динамической симметрии. В переменных (3.2) аналог системы (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} K'_1 = & - \left[ I_3 \left( 1 - \left( \frac{f_2}{f_1} \right)' \right) + k f_1 (I_1 - I_3) (1 - k f'_2) \right] K_2 + \\ & + s \rho_0^{-1} (1 - k f'_2) (1 - k f_1), \\ \frac{1 - k f_1}{\rho_0} K'_2 = & k m \rho_0 I_1 f_1^2 \left[ \gamma_3 f'_2 + \sqrt{1 - \gamma_3^2} \left( f_1 \sqrt{1 - \gamma_3^2} \right)' \right] K_2 - \\ & - m f_1 (f_1 - f'_2 - k f_1 f'_2) K_1 - s m f_1 f_2 (1 - k f'_2) (1 - k f_1), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\rho_0$  задается соотношением (3.1), таким образом, линейная система является неоднородной.

Для случаев круглого диска интегралы и уравнения (3.1) не поддаются существенному упрощению. Для шара со смещенным центром  $f_1, f_2$  заданы соотношениями (2.2), уравнения (3.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} K'_1 = & -kR(I_1 - I_3)(1 - kR)K_2 - \frac{1}{\rho_0} R(1 - kR)^2 s, \\ \frac{1}{\rho_0} K'_2 = & \frac{mR^3 k}{1 - kR} K_1 - mR(1 - kR)(R\gamma_3 + a)s. \end{aligned} \quad (3.2)$$

При этом первые интегралы не удается выписать с помощью элементарных функций.

В случае полной динамической симметрии  $I_1 = I_3$  с помощью уравнений (3.2) находим явный интеграл типа Желле

$$F_2 = K_1 + (1 - kR)^2 \left( \gamma_3 + \frac{a}{R} \right) = (MR^{-1} + \mathbf{S}(1 - kR), \mathbf{r})(1 - kR) = \text{const.}$$

Выражая из этого интеграла  $K_1$  и подставляя в первое из уравнений (3.2), получим явную квадратуру для  $K_1(\gamma_3)$ . Гиростатические обобщения интеграла (3.2) для несимметричного шара неизвестны.

**7. Качение тела с плоским участком по сфере.** Рассмотрим еще одну задачу, связанную с качением тела по сфере, которая не имеет своего аналога для случая плоскости. Речь идет об «обкате» внешней поверхности сферы телом, имеющим плоское основание (рис. 11). Эту задачу впервые рассматривал П. Воронец, который указал также интегрируемость при наличии осевой симметрии. Запишем уравнения движения в связанной с телом системе координат и в отсутствии силового поля

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \\ \mathbf{M} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{I}$  — центральный тензор инерции,  $m$  — масса тела.

Для плоского участка поверхности имеем  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, z)$ ,  $z = \text{const}$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)$ , где  $r_1, r_2$  — координаты центра масс на плоском основании (см. рис. 11), для которых вследствие того, что  $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = 0$ , из уравнения (1.3) находим

$$\dot{r}_1 = k^{-1}\omega_2, \quad \dot{r}_2 = -k^{-1}\omega_1, \quad k = R^{-1}. \quad (3.2)$$

Можно выделить два случая, когда уравнения (3.1), (3.2) обладают инвариантной мерой.

**а)**  $z = 0$  — центр масс лежит в плоскости контакта, а тензор инерции  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  произволен. Для переменных  $\mathbf{M}, \mathbf{r}$  плотность инвариантной меры имеет вид

$$\rho(\mathbf{M}, r_1, r_2) = (I_3 + m\mathbf{r}^2)^{-1/2}. \quad (3.3)$$

Ее также можно записать для уравнений в переменных  $\boldsymbol{\omega}, r_1, r_2$ :

$$\rho(\boldsymbol{\omega}, r_1, r_2) = (I_1 I_2 + m(\mathbf{r}, \mathbf{I}\mathbf{r}))(I_3 + m\mathbf{r}^2)^{1/2}. \quad (3.4)$$

*Замечание.* В таком виде при дополнительном и несущественном ограничении  $I_3 = I_1 + I_2$  (т. е. для случая плоской пластинки) инвариантная мера была указана В. А. Ярошук [28].

В рассматриваемом случае, кроме меры уравнения (3.1), (3.2) обладают также одним (и только одним при  $I_1 \neq I_2$ ) первым интегралом

$$F = \mathbf{M}^2 - 2m\mathbf{r}^2 H, \quad H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad (3.5)$$

не зависимым от интеграла энергии. Ранее он не был известен.

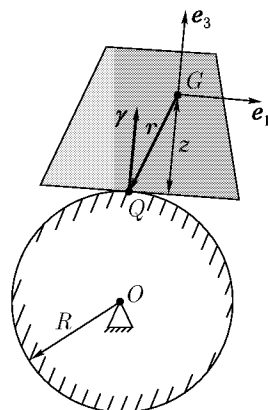


Рис. 11

Кроме того, оказывается, что интеграл (3.5) *без изменений переносится на случай  $z \neq 0$ , для которого мера не известна* (и, видимо, не существует). Отметим, что аналогичная ситуация уже встречалась нам при качении динамически несимметричного *неуравновешенного* шара (см. п. 5). Отсутствие меры при  $z \neq 0$  заведомо препятствует гамильтоновости. При  $z \neq 0$ , хотя мера и существует, система также, видимо, не является гамильтоновой — даже после соответствующей замены времени.

**б)**  $I_1 = I_2$ ,  $z \neq 0$ , *т. е. центр масс лежит на оси динамической симметрии*. В переменных  $(\mathbf{M}, \mathbf{r})$  плотность инвариантной меры имеет вид

$$\rho = (I_1 I_3 + m(\mathbf{r}, \mathbf{I}\mathbf{r}))^{-1/2}. \quad (3.6)$$

Эта система уже является интегрируемой. Действительно, в переменных

$$\begin{aligned} K_1 &= (\mathbf{M}, \mathbf{r}) = M_1 r_1 + M_2 r_2 + M_3 r_3, \\ K_2 &= \frac{\omega_3}{\rho} = \frac{mz(M_1 r_1 + M_2 r_2) + (I_1 + mz^2)M_3}{\sqrt{I_1 I_3 + m(\mathbf{r}, \mathbf{I}\mathbf{r})}} \end{aligned}$$

уравнения движения системы имеют линейную форму

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{du} &= \frac{I_1 - I_3}{2R\sqrt{I_3(I_1 + mz^2)} + I_1 m u} K_2, \\ \frac{dK_2}{du} &= \frac{m}{2R\sqrt{I_3(I_1 + mz^2)} + I_1 m u} K_1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Как заметил П. Воронец в работе [38], их явное решение может быть получено в элементарных функциях. Это решение определяет два линейных по  $\mathbf{M}$  дополнительных первых интеграла.

Имеются два различных варианта для решения (3.7).

1)  $I_1 < I_3$ .

$$\begin{aligned} K_1 &= \sqrt{I_1 - I_3}(-c_1 \cos \varphi(u) + c_2 \sin \varphi(u)), \\ K_2 &= \sqrt{m}(c_1 \sin \varphi(u) + c_2 \cos \varphi(u)), \\ \varphi^2 &= \frac{(I_1 - I_3)(I_1 I_3 + I_3 m z^2 + I_1 m u)}{I_1^2 m R^2}, \quad c_1, c_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

2)  $I_1 > I_3$ , Здесь необходимо заменить тригонометрические функции на гиперболические.



В этом случае имеется также простой, но зависимый квадратичный интеграл

$$F = mK_1^2 + (I_1 - I_3)K_2^2, \quad (3.9)$$

который, очевидно, является частным случаем (3.5). Интеграл энергии можно представить в форме

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\mathbf{r}) = \frac{1}{8} \frac{I_1 + mz^2 + mu}{R^2 u} \dot{u}^2 + \\ + \frac{1}{2I_1^2 u} \left( (I_1 + mz^2)K_1^2 + (I_1 u + I_3 z^2)K_2^2 - \right. \\ \left. - \frac{z}{I_1^2 u} \sqrt{I_1 I_3 + I_3 m z^2 + I_1 m u} K_1 K_2 \right) + U(u), \end{aligned} \quad (3.10)$$

из которой после интегрирования системы (3.7) получается явная квадратура для  $\dot{u}$ .

Для осесимметричного случая можно добавить ротор вдоль оси динамической симметрии с моментом  $\mathbf{S} = (0, 0, s)$ , при этом мера (3.6) сохраняется, уравнения (3.7) принимают вид

$$\begin{aligned} 2R \frac{dK_1}{du} &= \frac{I_1 - I_3}{\sqrt{I_3(I_1 + mz^2) + I_1 mu}} K_2 - s, \\ 2R \frac{dK_2}{du} &= -\frac{m(K_1 + zs)}{\sqrt{I_3(I_1 + mz^2) + I_1 mu}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Общее решение системы (3.11) представляется в виде суперпозиции решения однородного уравнения при  $s = 0$  (3.8) и частного решения неоднородного уравнения (3.11), которое имеет вид

$$K_1^{(part)} = \frac{sz(I_3 + I_1(1 + R/z))}{I_1 - I_3}, \quad K_2^{(part)} = \frac{s\sqrt{I_3(I_1 + mz^2) + I_1 mu}}{I_1 - I_3}.$$

Соответственно, квадратичный интеграл (3.9) в этом случае представляется в виде

$$F = m(K_1 - K_1^{(part)})^2 + (I_1 - I_3)(K_2 - K_2^{(part)})^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы отметили в работе два нетривиальных случая несуществования одного квадратичного интеграла. Аналогичный интеграл имеется при

движении однородного шара по трехосному эллипсоиду. Происхождение таких интегралов связано с наличием аналогичных интегралов в осесимметричной ситуации, когда система полностью интегрируема и имеется два линейных интеграла. Однако в общем случае зависимость от позиционных переменных в этих интегралах является сложной и дается спецфункциями. В трех найденных нами случаях линейные интегралы выражаются в элементарных функциях и из них легко образуется квадратичный интеграл, который представляет собой рациональную функцию. Этот интеграл и допускает обобщения на несимметричную ситуацию.

#### 4. Заключение

В работе собраны все известные на данный момент случаи существования инвариантной меры, интегралов, пуассоновой структуры для уравнений неголономного качения твердого тела по плоскости и сфере. Из всего мыслимого набора ситуаций мы не обнаружили случая, при котором *существуют два интеграла, но отсутствует мера*. Возможно, что это связано со спецификой уравнений неголономной механики.

В зависимости от наличия того или иного набора инвариантов имеются качественные различия в поведении системы, которая может проявить как типично гамильтоновы свойства, так и свойства консервативных систем, реализующиеся на примере кельтских камней. Для анализа указанных ситуаций мы предложили использовать метод *трехмерных отображений Пуанкаре*, который, собственно, и позволил нам первоначально численно обнаружить существование интегралов (2.2), (3.2), (3.5) а затем и найти их в явной форме. Несомненно, что исследование трехмерных точечных отображений для случая наличия и отсутствия меры, как с аналитической, так и с вычислительной точки зрения, позволяет обнаружить многие замечательные эффекты в неголономных системах.

Особенно интересна здесь задача о глобальной динамике кельтского камня [14, 21], которая на уровне трехмерных отображений (не сохраняющих площадь!) означает исследование инвариантных и асимптотических многообразий, которые реализуются при различных ограничениях на параметры системы.

Авторы благодарят А. В. Карапетяна за полезные замечания и А. А. Килина за помощь при проведении численных экспериментов.

#### Литература

- [1] *Аппель П.* Теоретическая механика. В 2-х т., М., Физматгиз, 1960. Пер. с франц.: Appell P. *Traité de mécanique rationnelle*. Paris, Gauthier-Villars.

- [2] *Афонин А. А., Козлов В. В.* Задача о падении диска, движущегося по горизонтальной плоскости. Изв. РАН, Мех. тв. тела, 1997, №1, с. 7–13.
- [3] *Бобылев Д. К.* О шаре с гироскопом внутри, катящемся по горизонтальной плоскости без скольжения. Мат. сборник, 1882, т. 16, вып. 3, с. 544–581.
- [4] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд.-во РХД, 1999, 464 с.
- [5] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика твердого тела. Ижевск: Изд.-во РХД, 2001, 384 с.
- [6] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара, Мат. заметки, 2001, т. 70, №5, с. 793–795.
- [7] *Борисов А. В., Федоров Ю. Н.* О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики. Вестник МГУ, сер. мат. мех., 1995, №6, с. 102–105.
- [8] *Бузов А. А., Карапетян А. В.* О несуществовании дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого твердого эллипсоида по гладкой плоскости. Прикл. Мат. Мех., 1985, т. 49, №3, с. 501–503.
- [9] *Бычков Ю. П.* О катании твердого тела по неподвижной поверхности. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 573–583.
- [10] *Бычков Ю. П.* О движении тела вращения, ограниченного сферой, на сферическом основании. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5, с. 934–935.
- [11] *Воронец П. В.* К задаче о движении твердого тела, катящегося без скольжения по данной поверхности под действием данных сил. Универ. Извест. Университ. св. Владимира, 1909, с. 1–11.
- [12] *Жуковский Н. Е.* О гироскопическом шаре Д. Н. Бобылева. Труды отд. физич. наук Общ. люб. естествознания, 1893, т. VI, 1893, вып. 1, с. 11–17.
- [13] *Карапетян А. В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивость кельтских камней. ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 42–51.
- [14] *Карапетян А. В.* Семейства перманентных вращений трехосного эллипсоида на шероховатой горизонтальной плоскости и их ветвления, в сб. *Актуальные проблемы классической и небесной механики*, под ред. С. Д. Фурты, 1998, с. 46–51.
- [15] *Козлов В. В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики. Успехи механики. 1985. т. 8. №3. с. 85–101.
- [16] *Колесников С. Н.* Некоторые задачи механики о качении твердых тел. Дисс. на соискание уч. ст. к.ф.-м.н. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 1988, 88 стр.
- [17] *Колесников С. Н.* О качении диска по горизонтальной плоскости. Вестник МГУ. Мат. мех., 1985, №2, с. 55–60.
- [18] *Кулешов А. С.* Об обобщенном интеграле Чаплыгина. Вестн. молодых ученых, СПб, Прикл. мат. и мех., 2000, №4, с. 26–30.

- [19] *Кулешов А. С.* О стационарных качениях диска по шероховатой плоскости. ПММ, 2001, т. 65, вып. 1, с. 173–175.
- [20] *Маркеев А. П.* Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью. Изв. АН СССР, механика твердого тела, 1985, №1, с. 64–65.
- [21] *Маркеев А. П.* Качественный анализ движения тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости. ПММ, 1988, т. 52, вып. 2, с. 203–210.
- [22] *Маркеев А. П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992, 336 с.
- [23] *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел, т. II. М.: Наука, 1983. Пер. с англ.: Routh E. J. *Dynamics of a System of Rigid Bodies*. Dover Publications, New York.
- [24] *Федоров Ю. Н.* О качении диска по абсолютно шероховатой плоскости. Изв. АН СССР. Мех. твердого тела, 1987, №4, с. 67–75.
- [25] *Чаплыгин С. А.* О катании шара по горизонтальной плоскости. Собр. соч., т. 1, М.-Л.: ОГИЗ, 1948, с. 76–101.
- [26] *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелого твердого тела вращения на горизонтальной плоскости. Собр. соч., т. 1, М.-Л.: ОГИЗ, 1948, с. 57–75.
- [27] *Чаплыгин С. А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Собр. соч., т. 1, М.-Л.: ОГИЗ, 1948, с. 15–25.
- [28] *Ярощук В. А.* Новые случаи существования интегрального инварианта в задаче о качении твердого тела без проскальзывания по неподвижной поверхности. Вестник МГУ, сер. мат. мех., 1992, №6, с. 26–30.
- [29] *Ярощук В. А.* Интегральный инвариант в задаче о качении без скольжения эллипсоида со специальным распределением масс по неподвижной плоскости. Изв. РАН, Мех. тв. тела, 1995, №2, с. 54–57.
- [30] *Appell P.* Les mouvements de roulement en dynamique, Paris, Gauthier-Villars, 1899, 70 p..
- [31] *Appell P.* Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1900, T. 14, P. 1–6.
- [32] *Hermans J.* A symmetric sphere rolling on a surface. Nonlinearity, 1995, v. 8(4), p. 493–515.
- [33] *Kholmetskaya A. G.* On a disk rolling within a sphere. Reg. & Chaot. Dyn., 1998, V. 3, №1, P. 86–92.
- [34] *Kholmetskaya A. G.* Motion of a disk within a sphere. Reg. & Chaot. Dyn., 1998, V. 3, №2, P. 74–81.

- [35] *Korteweg D.* Ueber eine ziemlich verbietete unrichtige Behandlungswiese eines Problemes der relleden Bewegung und insbesondere über kleine rollende Schwingungen um eine Gleichgewichtslage. *Nieuw Archiefvoor Wiskunde*, 1899, Bd. 4, S. 130–155.
- [36] *O'Reilly O.M.* The Dynamics of rolling disks and sliding disks. *Nonlinear Dynamics*, 1996, v. 10, p. 287–305.
- [37] *Slessor G.M.* Notes on rigid dynamics. *Quart. J. of Math.*, 1861, v. 4, p. 65–77.
- [38] *Woronetz P.* Über die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt. *Mathematische Annalen*, 1911, Bd. 70, S. 410–453.
- [39] *Woronetz P.* Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers. *Math. Annalen*, 1912, Bd. 71, S. 392–403.
- [40] *Woronetz P.* Über die rollende Bewegung einer Kreisscheibe auf einer beliebigen Fläche unter der Wirkung von gegebenen Kräften. *Mat. Annalen*, 1909, Bd. 67, S. 268–280.

# КАЧЕНИЕ ШАРА ПО ПОВЕРХНОСТИ. НОВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИЕРАРХИЯ ДИНАМИКИ<sup>1</sup>

*А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. А. Килин*

В работе рассматривается задача о качении шара без проскальзывания по произвольной поверхности. Указаны новые случаи разрешения задачи в квадратурах, а также особый случай существования одного дополнительного интеграла и инвариантной меры. Последний случай приводит к неголономному обобщению задачи Якоби о движении по инерции точки по эллипсоиду. Показано также, что при качении шара по произвольному цилиндру в поле тяжести его движение является ограниченным, и он в среднем не смещается вниз. Все результаты приведенные в работе существенно расширяют исследования Э. Рауса, проведенные еще в XIX веке.

## 1. Введение

В этой работе мы рассмотрим задачу о качении полностью динамически симметричного шара (центральный тензор инерции является шаровым  $\mathbf{I} = \mu \mathbf{E}$ ) по произвольной поверхности без проскальзывания. Как показал Э. Раус в своем знаменитом трактате [10], в случае поверхности вращения даже при наличии осесимметричных потенциальных полей задача является интегрируемой. Здесь мы приводим более полный анализ

---

<sup>1</sup>Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. *Rolling of a ball on a surface. New integrals and hierarchy of dynamics*. Reg. & Chaot. Dyn., v. 7, №2, p. 201–220.

как решения Рауса для тела вращения, так и указываем новые интегралы для качения шара по несимметричным поверхностям второго порядка.

## 2. Уравнения движения шара по поверхности

В отличие от традиционного в динамике твердого тела подхода, при котором используется жестко связанная с телом система координат, при изучении движения однородного шара удобнее записывать уравнения движения в неподвижной системе координат. В этой системе уравнения изменения импульса и момента импульса относительно центра масс шара с учетом реакции и внешних сил имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} + \mathbf{F}, \quad (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})\dot{\phantom{\omega}} = \mathbf{a} \times \mathbf{N} + \mathbf{M}_F, \quad (2.1)$$

а условие отсутствия проскальзывания (скорость точки контакта равна нулю) —

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = 0. \quad (2.2)$$

Здесь  $m$  — масса шара,  $\mathbf{v}$  — скорость его центра масс,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость,  $\mathbf{I} = \mu\mathbf{E}$  (шаровой) центральный тензор инерции,  $\mathbf{a}$  — вектор из центра масс в точку контакта,  $R$  — радиус шара,  $\mathbf{N}$  — реакция в точке контакта (см. рис. 1),  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{M}_F$  — внешняя сила и момент сил относительно точки контакта соответственно.

Исключая из этих уравнений реакцию  $\mathbf{N}$  и добавляя кинематическое уравнение равенства скоростей точки контакта на поверхности и на шаре, получаем систему шести уравнений, описывающую динамику вектора кинетического момента относительно точки контакта  $\mathbf{M}$  и вектора нормали к поверхности  $\boldsymbol{\gamma} = -R^{-1}\mathbf{a}$  (рис. 1):

$$\dot{\mathbf{M}} = D\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{M}_F, \quad \dot{\mathbf{r}} + R\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{\gamma}, \quad (2.3)$$

где  $D = mR^2$ . Здесь векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{r}$  (радиус-вектор точки контакта) необходимо выразить из соотношений

$$\mathbf{M} = \mu\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{\nabla F(\mathbf{r})}{|\nabla F(\mathbf{r})|}, \quad (2.4)$$

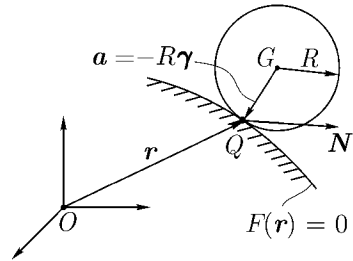


Рис. 1. Качение шара по поверхности ( $G$  — центр масс,  $Q$  — точка контакта с поверхностью)

$F(\mathbf{r}) = 0$  — уравнение, задающее неподвижную поверхность, по которой катится шар (последнее уравнение в (2.4) задает гауссовское отображение). В дальнейшем мы, следуя Раусу, будем задавать в явном виде уравнение поверхности по которой движется *центр масс шара*, определяемой радиус-вектором  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma}$ . Данная поверхность является эквидистантной к поверхности, по которой движется точка контакта.

В случае потенциальных сил момент  $\mathbf{M}_F$  выражается через потенциал  $U(\mathbf{r}') = U(\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma})$ , зависящий от положения центра масс шара, по формуле  $\mathbf{M}_F = R\boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'}$ .

Замечание 1. В трактате Рауса [10] уравнения движения шара получены в полуподвижных осях и отмечены случаи их явного разрешения. Фактически большинство последующих авторов учебников [1, 9] лишь излагали результаты Рауса, по существу ничего к ним не добавляя. Отметим, что Раус также особенно интересовался устойчивостью частных решений (например, шара, закрученного на вершине поверхности вращения). Мы здесь не приводим первоначальной формы уравнений Рауса, т. к. уравнения в форме (2.3) во многом аналогичны уравнениям, описывающим движение произвольного тела по плоскости и сфере [5], что позволяет рассмотреть многие вопросы (например, интегрируемости) с единой точки зрения.

**1. Интегралы движения.** Уравнения (2.3) в случае потенциального поля с потенциалом  $U(\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma})$  обладают интегралами энергии и геометрическим интегралом

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma}), \quad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \quad (2.1)$$

Кроме этих двух интегралов в случае произвольной поверхности  $F(\mathbf{r}) = 0$  система (2.3) не обладает ни мерой, ни двумя дополнительными интегралами, необходимыми для интегрируемости по теории последнего множителя (теории Эйлера–Якоби). Ее поведение является хаотическим. Как показано далее, в некоторых случаях может существовать мера и лишь один дополнительный интеграл. При этом хаос является «более слабым». Как заметил Раус, для поверхности вращения имеется два дополнительных интеграла, система интегрируема, а ее поведение является регулярным. При этом приведенная система является гамильтоновой после соответствующей замены времени.

**2. Качение по поверхности второго порядка.** Укажем частный случай уравнений (2.3), когда центр масс шара движется по поверхности второго порядка, задаваемой уравнением

$$(\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma})) = 1, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3) \quad (2.1)$$



(в случае эллипсоида  $b_i > 0$  и задают квадраты главных полуосей). Выражая из (2.1) радиус-вектор  $\mathbf{r}$  через нормаль к поверхности  $\gamma$  по формуле

$$\mathbf{r} + R\gamma = \frac{\mathbf{B}\gamma}{\sqrt{(\gamma, \mathbf{B}\gamma)}}, \quad (2.2)$$

получаем уравнения движения в переменных  $\mathbf{M}, \gamma$ :

$$\dot{\mathbf{M}} = -\frac{D}{\mu + D}(\mathbf{M}, \dot{\gamma})\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{R\sqrt{(\gamma, \mathbf{B}\gamma)}}{\mu + D}\gamma \times (\gamma \times \mathbf{B}^{-1}(\gamma \times \mathbf{M})) \quad (2.3)$$

**3. Шар на вращающейся поверхности.** Рассмотрим также движение шара по поверхности, вращающейся в пространстве с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , частный случай этой задачи (плоскость, сфера) также были разобраны Раусом [10]. В этом случае вывод дословно повторяет предыдущий с заменой неголономного кинематического соотношения (2.2) следующим

$$\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{a} = \Omega \times \mathbf{r}, \quad (2.1)$$

что приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= m(\dot{\mathbf{a}} \times (\omega \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\Omega \times \dot{\mathbf{r}})) + \mathbf{M}_F \\ \dot{\mathbf{r}} + R\dot{\gamma} &= \omega \times R\dot{\gamma} + \Omega \times \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{a} = -R\gamma$ .

Заметим, что в случае произвольной поверхности система шести уравнений (2.2) не замкнута, т.к. радиус-вектор точки на поверхности  $\mathbf{r}$  не выражается лишь через  $\gamma$ , необходимо добавить также уравнение для угла поворота поверхности вокруг неподвижной оси. Тем не менее в случае, когда поверхность является осесимметричной, а ось симметрии совпадает с осью вращения, уравнения (2.2) становятся замкнутыми, что мы и используем в дальнейшем.

Уравнения (2.2), (2.2) во многом аналогичны уравнениям, описывающих качение твердого тела по плоскости или сфере, подробно разобранным нами в работе [5]. Мы будем пользоваться этим обстоятельством при переносе соответствующих результатов на системы (2.2), (2.2).

### 3. Движение шара по поверхности вращения

Рассмотрим прежде всего случаи интегрируемости уравнений (2.3), (2.2), связанные с вращательной симметрией поверхности, по которой

катится шар. При этом мы будем использовать методику исследования, предложенную в [5] и связанную с анализом некоторой приведенной системы в новых переменных  $K_1, K_2, K_3, \gamma_3$ . Будем также предполагать, что поверхность вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\Omega = (0, 0, \Omega)$ ,  $\Omega \neq 0$ . Частный случай  $\Omega = 0$  обсуждался Раусом, который и получил большинство приводимых далее результатов (хотя и пропустил случаи, представляющие не меньший интерес).

Уравнение поверхности вращения в абсолютной системе координат может быть задано в форме

$$\begin{aligned} r_1 &= (f(\gamma_3) - R)\gamma_1, & r_2 &= (f(\gamma_3) - R)\gamma_2, \\ r_3 &= \int \left( f(\gamma_3) - \frac{1 - \gamma_3^2}{\gamma_3} f'(\gamma_3) \right) d\gamma_3 - R\gamma_3, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $f(\gamma_3)$  — некоторая функция, задающая параметризацию поверхности. Выбор параметризации (3.1) связано с наиболее простым видом приведенной системы.

В рассматриваемом случае уравнения (2.3), (2.2) допускают инвариантную меру с плотностью

$$\rho = (f(\gamma_3))^3 g(\gamma_3), \quad \text{где} \quad g(\gamma_3) = f(\gamma_3) - \frac{1 - \gamma_3^2}{\gamma_3} f'(\gamma_3). \quad (3.2)$$

Кроме инвариантной меры уравнения допускают также простое поле симметрий вида

$$\hat{\mathbf{v}} = M_1 \frac{\partial}{\partial M_2} - M_2 \frac{\partial}{\partial M_1} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \gamma_1}, \quad (3.3)$$

соответствующее вращательной симметрии.

В своей книге [3] мы неоднократно используем тот факт, что при наличии симметрии для получения наиболее простой формы приведенной системы необходимо выбрать наиболее приемлемые *интегралы поля симметрий*, которые в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} K_1 &= (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) f(\gamma_3), & K_2 &= \mu \omega_3 = \frac{\mu M_3 + D(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) \gamma_3}{\mu + D}, \\ K_3 &= \frac{M_1 \gamma_2 - M_2 \gamma_1}{\sqrt{1 - \gamma_3}}, & & \gamma_3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Приведенная система в выбранных переменных записывается в форме

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_3 &= kK_3, \\ \dot{K}_1 &= kK_3 \left( \frac{f'}{\gamma_3} K_2 + \left( 1 - \frac{f}{R} \right) g \mu \Omega \right), \\ \dot{K}_2 &= kK_3 \frac{D}{\mu + D} \left( \frac{1}{f} K_1 - \gamma_3 \left( 1 - \frac{g}{R} \right) \mu \Omega \right), \\ \dot{K}_3 &= -k \frac{(\mu + D)g}{\mu^2(1 - \gamma_3^2)f^2} \left( \frac{\gamma_3 K_1 - fK_2}{f(1 - \gamma_3^2)} ((\mu + D)\gamma_3^2 K_1 - \gamma_3 f(\mu + D)K_2) + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \frac{g}{R} \right) ((\mu + 2D\gamma_3^2)K_1 - \gamma_3 f(\mu + 2D)K_2) \right) \mu \Omega,\end{aligned}\tag{3.5}$$

где  $k = \frac{R\sqrt{1 - \gamma_3^2}}{(\mu + D)g(\gamma_3)}$ . Несложно показать, что система (3.5) обладает инвариантной мерой с плотностью  $\rho = k^{-1}$ . Явное интегрирование системы (3.5) может быть выполнено следующим образом.

Разделим второе и третье уравнения системы (3.5) на  $\dot{\gamma}_3$  и получим неавтономную систему двух линейных уравнений с независимой переменной  $\gamma_3$

$$\frac{dK_1}{d\gamma_3} = \frac{f'}{\gamma_3} K_2 + \left( 1 - \frac{f}{R} \right) g \mu \Omega, \quad \frac{dK_2}{d\gamma_3} = \frac{D}{\mu + D} \left( \frac{1}{f} K_1 - \gamma_3 \left( 1 - \frac{g}{R} \right) \mu \Omega \right).\tag{3.6}$$

Система линейных уравнений (3.6) всегда обладает двумя линейными по  $K_1, K_2$  интегралами, коэффициенты которых функции от  $\gamma_3$ , в общем случае не могут быть получены в явном (алгебраическом) виде. Разделив последнее уравнение системы (3.5) на  $\dot{\gamma}_3$  и подставив в него известное решение системы (3.6), находим явную квадратуру для  $K_3(\gamma_3)$ . С помощью первого уравнения из (3.5) теперь можно получить выражение для  $\gamma_3(t)$ .

В случае  $\Omega = 0$  система (3.5) допускает интеграл энергии

$$H = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \left( \frac{K_1^2}{\Lambda f^2} + \frac{(\mu + D)(\gamma_3 K_1 - fK_2)^2}{\mu^2 f^2 (1 - \gamma_3^2)} + \frac{K_3^2}{\mu + D} \right)\tag{3.7}$$

и квадратура для  $\gamma_3(t)$  может быть получена непосредственно подстановкой в (3.7)  $K_3 = k^{-1}\dot{\gamma}_3$ .

Для приведенной системы (3.5) справедлива следующая

**Теорема 1.** После замены времени  $k dt = d\tau$  система (3.5) при  $\Omega = 0$  представляется в гамильтоновой форме

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \{x_i, H\}, \quad \mathbf{x} = (\gamma_3, K_1, K_2, K_3) \quad (3.8)$$

с вырожденной скобкой, задаваемой соотношениями

$$\{\gamma_3, K_3\} = \mu + D, \quad \{K_1, K_3\} = (\mu + D) \frac{f'}{\gamma_3} K_2, \quad \{K_2, K_3\} = \frac{D}{f} K_1 \quad (3.9)$$

(скобки между остальными переменными равны нулю).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО — простая проверка соответствия уравнений (3.8) и (3.5) (при  $\Omega = 0$ ) и проверка тождества Якоби скобки (3.9). ■

Можно утверждать, что уравнения для (линейных) первых интегралов системы (3.6) в точности совпадают с уравнениями для функций Казимира скобки (3.9).

Отметим также, что система (3.5) при  $\Omega = 0$  допускает «кососимметрическую запись», аналогичную гамильтоновой форме (3.8), (3.9)

$$\frac{dx_i}{d\tau} = J_{\lambda ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x_j}; \quad J_{ij} = -J_{ji} \quad (3.10)$$

с матрицей  $\mathbf{J}_\lambda$  несколько более общего вида, чем соответствующая скобка (3.9)

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu + D \\ 0 & 0 & \lambda & (\mu + D) \frac{f'}{\gamma_3} K_2 + \lambda u \\ 0 & -\lambda & 0 & \frac{D}{f} K_1 + \lambda v \\ -(\mu + D) & -(\mu + D) \frac{f'}{\gamma_3} K_2 - \lambda u & \frac{D}{f} K_1 + \lambda v & 0 \end{pmatrix},$$

$$u = \frac{(\mu + D)^2 (\gamma_3 K_1 - f K_2)}{\mu^2 f (1 - \gamma_3^2) K_3}, \quad v = \frac{(\mu + D) ((\mu + D) \gamma_3^2 K_1 - f \gamma_3 (\mu + D) K_2)}{\mu^2 f^2 (1 - \gamma_3^2) K_3}, \quad (3.11)$$

где  $\lambda$  может быть произвольной функцией от  $\gamma_3, K_i$ . При  $\lambda = 0$  получается скобка (3.9) и тензор  $\mathbf{J}_\lambda$  удовлетворяет тождеству Якоби, в общем случае  $\mathbf{J}_\lambda$  не удовлетворяет тождеству Якоби (не пуассонов). Тем не менее, если положить

$$\lambda = w(\gamma_3) K_3, \quad (3.12)$$

то тензор  $\lambda^{-1}\mathbf{J}_\lambda$  является пуассоновым. Величина  $\lambda$  при этом является приводящим множителем (по Чаплыгину).

Таким образом, мы получаем гамильтоново векторное поле вида

$$\mathbf{v}_\lambda = (\lambda^{-1}\mathbf{J}_\lambda)\nabla H,$$

для которого  $\operatorname{div} \mathbf{v}_\lambda \neq 0$  ( $\operatorname{div} \lambda \mathbf{v}_\lambda = 0$ ). Примеры гамильтоновых полей с ненулевой дивергенцией ранее фактически не отмечались. Частный случай пуассонова тензора  $\lambda^{-1}\mathbf{J}_\lambda$  был указан И. Эрмансом в [12], который использовал свою систему приведенных переменных, несколько отличную от нашей.

В качестве частных примеров, проясняющих поведение шара на поверхности вращения разберем последовательно случаи, когда она является параболоидом, сферой, конусом и цилиндром. Эти задачи были разобраны Раусом в [10] при  $\Omega = 0$ . Мы здесь приведем их соответствующие обобщения при  $\Omega \neq 0$ .

**1. Параболоид вращения.** В данном случае центр масс шара движется по параболоиду вращения  $z = c(x^2 + y^2)$ , при этом в уравнении (3.1) необходимо положить

$$f(\gamma_3) = -\frac{1}{2c\gamma_3}. \quad (3.1)$$

Плотность инвариантной меры (3.2) с точностью до несущественного множителя представляется в форме

$$\rho = \frac{1}{\gamma_3^6}. \quad (3.2)$$

Двумерная система (3.6) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{d\gamma_3} &= \frac{1}{2c\gamma_3^3} \left( K_2 - \frac{1 + 2cR\gamma_3}{2cR\gamma_3} \mu\Omega \right), \\ \frac{dK_2}{d\gamma_3} &= -\frac{D}{\mu + D} \left( 2c\gamma_3 K_1 + \frac{(1 + 2cR\gamma_3^3)}{2cR\gamma_3^2} \mu\Omega \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для переменной  $K_2$  получается *однородное* линейное уравнение второго порядка с правой частью (при  $\Omega \neq 0$ )

$$K_2'' - \frac{1}{\gamma_3} K_2' + \frac{D}{\mu + D} \frac{1}{\gamma_3^2} K_2 = \frac{D(2 + cR\gamma_3)}{(\mu + D)cR\gamma_3^3} \mu\Omega.$$

Его общее решение может быть представлено в степенном виде  $\gamma_3^\alpha$ ,  $\alpha = \text{const}$

$$K_2 = c_1 \gamma_3^{1-\nu} - c_2 \gamma_3^{1+\nu} + \mu \Omega \left( 1 + \frac{2D}{cR(\mu + 4D)} \frac{1}{\gamma_3} \right), \quad \nu^2 = \frac{\mu}{\mu + D}. \quad (3.4)$$

Для  $K_1$  из (3.3) аналогично получаем

$$K_1 = \frac{\mu + D}{2cD} \left( -(1 - \nu) \gamma_3^{-1-\nu} c_1 + (1 + \nu) \gamma_3^{-1+\nu} c_2 \right) - \frac{\mu \Omega}{2c} \left( 1 - \frac{\mu}{2cR(3\mu + 4D)} \frac{1}{\gamma_3^3} \right). \quad (3.5)$$

Выражая из (3.4), (3.5) постоянные  $c_1$ ,  $c_2$ , находим линейные по  $K_1$ ,  $K_2$  интегралы системы (3.6) в форме

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{D}{2\sqrt{\mu(\mu + D)}} \gamma_3^\nu \left( 2c\gamma_3 K_1 + \frac{\mu + D}{D\gamma_3} K_2 + \right. \\ &\quad \left. + \mu \Omega \left( \gamma_3 - \frac{(\mu + D)(1 + \nu)}{D\gamma_3} - \frac{2 + \nu}{2cR(2 - \nu)\gamma_3^2} \right) \right) \\ F_3 &= \frac{D}{2\sqrt{\mu(\mu + D)}} \gamma_3^{-\nu} \left( 2c\gamma_3 K_1 + \frac{\mu + D}{D\gamma_3} K_2 + \right. \\ &\quad \left. + \mu \Omega \left( \gamma_3 - \frac{(\mu + D)(1 - \nu)}{D\gamma_3} - \frac{2 - \nu}{2cR(2 + \nu)\gamma_3^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Произведение  $F_2 F_3$  задает алгебраический квадратичный интеграл.

При  $\Omega = 0$  уравнения допускают также интеграл энергии, который представляется в форме

$$H = \frac{2c^2 \gamma_3^2}{\mu} K_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu + D}{\mu^2 (1 - \gamma_3^2)} (2c\gamma_3^2 K_1 + K_2)^2 + \frac{1}{2} \frac{K_3^2}{\mu + D}. \quad (3.7)$$

**Замечание 2.** Частные виды поверхностей, по которым катится шар рассмотрены в работе [6] (см. подробнее далее), где показано, что если шар катится по параболоиду вращения, то система (2.3) сводится к специальному классу фуксовых уравнений. Самим Раусом был рассмотрен случай, когда по параболоиду движется не точка контакта, а центр масс. Еще раз отметим, что при этом получаются алгебраические интегралы движения уравнений (2.3). Движение однородного шара по поверхности вращения изучал также Ф. Нётер [11].

**2. Осесимметричный эллипсоид.** Рассмотрим движение динамически симметричного шара, при котором его центр масс движется по неподвижному эллипсоиду при  $\Omega = 0$ . В этом случае

$$f(\gamma_3) = \frac{b_1}{\sqrt{b_1(1 - \gamma_3^2) + b_3\gamma_3^2}}, \quad (3.1)$$

где  $b_1, b_2$  — квадраты главных полуосей эллипсоида. Плотность инвариантной меры (3.2) в этом случае с точностью до постоянного множителя равна

$$\rho = (b_1(1 - \gamma_3^2) + b_3\gamma_3^2)^{-3}. \quad (3.2)$$

Вместо переменных (3.4) в данном случае удобнее воспользоваться для приведения переменными  $N_1, N_2, K_3$ , где

$$N_1 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad N_2 = \frac{\mu}{\mu + D} f(\gamma_3)(\gamma_3(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) - M_3), \quad (3.3)$$

которые удовлетворяют системе, аналогичной (3.5) (при  $\Omega = 0$ )

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= -kK_3 \frac{f'}{\gamma_3 f^2} N_2, & \dot{N}_2 &= kK_3 \frac{\mu}{\mu + D} f N_1, \\ \dot{K}_3 &= -k \frac{(\mu + D)g}{\mu^2 \gamma_3 (1 - \gamma_3^2)^2 f^3} N_2 (\mu f (1 - \gamma_3^2) N_1 + (\mu + D) \gamma_3 N_2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $k = \frac{R\sqrt{1 - \gamma_3^2}}{(\mu + D)g}$ .

Используя (3.1), мы получим два линейных уравнения с независимой переменной  $\gamma_3$

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{d\gamma_3} &= - \frac{(b_1 - b_3)}{b_1 \sqrt{b_1(1 - \gamma_3^2) + b_3\gamma_3^2}} N_2, \\ \frac{dN_2}{d\gamma_3} &= \frac{\mu b_1}{(\mu + D) \sqrt{b_1(1 - \gamma_3^2) + b_3\gamma_3^2}} N_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Несложно показать, что система (3.5) допускает квадратичный интеграл с постоянными коэффициентами

$$F_2 = b_1^2 \frac{\mu}{\mu + D} N_1^2 + (b_1 - b_3) N_2^2, \quad (3.6)$$

который, как будет показано ниже, допускает обобщение на случай трехосного эллипсоида.

Система (3.5) разрешима в элементарных функциях. Решение в зависимости от знака разности  $b_1 - b_3$  имеет следующий вид:

$$1. \quad b_1 > b_3, \quad a^2 = \frac{b_1}{b_1 - b_3} > 1.$$

$$N_1 = c_1 \sin \varphi(\gamma_3) + c_2 \cos \varphi(\gamma_3),$$

$$N_2 = a \sqrt{\frac{\mu b_1}{\mu + D}} (-c_1 \cos \varphi(\gamma_3) + c_2 \sin \varphi(\gamma_3)), \quad (3.7)$$

$$\varphi(\gamma_3) = \nu \operatorname{arctg} \frac{\gamma_3}{\sqrt{a^2 - \gamma_3^2}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{\mu}{\mu + D}}.$$

$$2. \quad b_1 < b_3, \quad a^2 = \frac{b_1}{b_3 - b_1} > 0.$$

$$N_1 = c_1 \tau^{-\nu} + c_2 \tau^\nu, \quad N_2 = a \sqrt{\frac{\mu b_1}{\mu + D}} (-c_1 \tau^{-\nu} + c_2 \tau^\nu), \quad (3.8)$$

$$\tau(\gamma_3) = \gamma_3 + \sqrt{a^2 + \gamma_3^2}, \quad \nu = \sqrt{\frac{\mu}{\mu + D}}.$$

где  $c_1, c_2 = \text{const}$ , выражая которые, мы можем получить линейные интегралы движения.

**3. Исторический комментарий.** Интересно, что ни Раус, ни его последователи так и не смогли получить наиболее простые приведенные уравнения (типа (3.5)) и разрешить в элементарных функциях задачу о качении шара по эллипсоиду вращения. Успех явного интегрирования здесь обусловлен удачным выбором приведенных переменных (3.3).

**4. Круговой конус.** В этом случае вследствие вырожденности гауссова отображения  $\gamma = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F|}$  в качестве позиционных переменных в уравнениях (2.2) необходимо использовать вектор  $\mathbf{r}$  (в данном это



радиус-вектор центра шара). Для конуса с углом раствора  $\theta$  (рис. 2) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_3 = \cos \theta = \text{const}, \quad \gamma_1 = \frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}} \frac{r_1}{r_3}, \quad \gamma_2 = \frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}} \frac{r_2}{r_3}, \\ r_3 = k\sqrt{r_1^2 + r_2^2}, \quad k = \text{tg } \theta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Явное выражение для меры уравнений (2.3), (2.2), в которых  $\gamma$  выражено через  $r$  по формулам (3.1) имеет вид:

$$\rho = \frac{\left(\frac{k^2}{1-k^2}R_0 + r_3\right)^3}{r_3^2}, \quad (3.2)$$

Для приведенной системы выберем переменные

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \omega_3 + \frac{D\Omega}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{\mu+D}} \frac{r_3}{R}, \\ \sigma_2 = \left(r_3 + \frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}R\right) \left(\left(M - \frac{k^2\mu^2}{\mu+D}\Omega\right), \gamma\right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

В них получаются уравнения

$$\frac{d\sigma_1}{dr_3} = 0, \quad \frac{d\sigma_2}{dr_3} = \sqrt{1+k^2}\sigma_1 + \frac{\mu\Omega}{\mu+D} \left(\frac{r_3}{R} - k^2\right),$$

которые позволяет получить первые интегралы в явном виде:

$$F_2 = \sigma_1, \quad F_3 = \sqrt{1+k^2}r_3\sigma_1 - \sigma_2 + \frac{\mu\Omega}{\mu+D} \left(\frac{r_3^2}{2R} - k^2r_3\right). \quad (3.4)$$

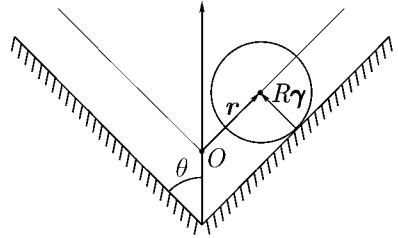


Рис. 2

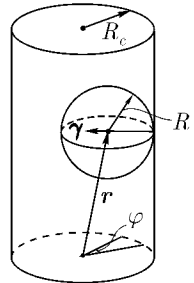


Рис. 3

**5. Круговой цилиндр.** Движение шара в цилиндре является наиболее известной задачей, на которой обычно иллюстрируют нереалистичность некоторых выводов, полученных с помощью неголономной механики. Оказывается, что движущийся внутри вертикального цилиндра однородный

шар под действием силы тяжести в среднем не смещается вниз. Тем не менее, этот физический факт можно наблюдать при игре в баскетбол, когда мяч почти что попадает в корзину, а затем быстро выскакивает из нее, внезапно поднимаясь вверх. Влияние вязкого трения на неголономную постановку, приводящую к направленному вертикальному дрейфу, проанализировано в [8], где получено также явное решение.

Для цилиндра  $\gamma = \left(-\frac{r_1}{R_c}, -\frac{r_2}{R_c}, 0\right)$ , где  $R_c$  — радиус цилиндра (рис. 3) в переменных  $(\mathbf{M}, \mathbf{r})$  или  $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})$  плотность инвариантной меры является постоянной. Выпишем выражение для кинетической энергии

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) &= \frac{1}{2(\mu + D)} \left\{ (M_1^2 + M_2^2) + \frac{D}{\mu}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})^2 + M_3^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2}(\mu(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})^2 + (\mu + D)(\omega_3^2 + (\omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1)^2)). \end{aligned}$$

Приведенная система в переменных  $\sigma_1 = \omega_3$ ,  $\sigma_2 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$  имеет вид

$$\sigma'_1 = \omega'_3 = 0, \quad \sigma'_2 = \frac{R\omega_3 - R_c\Omega}{(R_c - R)R}. \quad (3.1)$$

Таким образом, имеются два интеграла

$$\omega_3 = \text{const}, \quad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) - \frac{R\omega_3 - R_c\Omega}{R_c - R} \frac{r_3}{R} = \text{const}. \quad (3.2)$$

Второй интеграл с помощью вектора  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = (\omega_1, \omega_2, \frac{R\omega_3 - R_c\Omega}{R_c - R})$  можно записать в виде

$$(\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}) = \text{const},$$

а кинетическую энергию

$$2H = \mu \left( (\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\gamma}) + \tilde{\omega}_3 \frac{r_3}{R} \right)^2 + (\mu + mR^2)\tilde{\omega}_3^2 + (\mu + mR^2) \frac{r_3^2}{R^2}.$$

Отсюда легко получить решение для переменной  $r_3$ , отвечающей за вертикальное смещение шара

$$r_3 = -\frac{(\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\gamma})}{\tilde{\omega}_3} \pm \sqrt{\frac{2H - (\mu + mR^2)\tilde{\omega}_3^2}{\mu\tilde{\omega}_3^2}} \sin\left(\tilde{\omega}_3 \sqrt{\frac{\mu}{\mu + mR^2}}(t - t_0)\right),$$

где  $t_0$  — константа, зависящая от начальных условий. Видно, что среднее смещение шара равно нулю даже при наличии поля тяжести (см. далее формулу (5.6)).

Рассмотрим теперь два различных варианта задачи о качении шара по поверхности сферы, также проинтегрированных и изученных Раусом [10].

**6. Шар на вращающейся сфере.**

Пусть сфера вращается вокруг некоторой оси с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , причем  $R_s$  — радиус сферы,  $R$  — радиус шара,  $a = -R\gamma$ ,  $r = R_s\gamma$  (рис. 4). Уравнения движения в потенциальном поле с потенциалом  $V(\gamma)$  могут быть представлены в виде

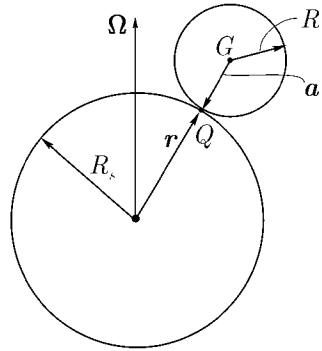


Рис. 4

$$D_1\dot{\omega} = \frac{DR}{R_s + R}(\omega, \gamma)\omega \times \gamma + \frac{R_s R}{R_s + R}(\Omega, \gamma)(R\omega + R_s\Omega) \times \gamma + \gamma \times \frac{\partial V}{\partial \gamma},$$

$$\dot{\gamma} = \frac{(R\omega + R_s\Omega) \times \gamma}{R_s + R} \tag{3.1}$$

где  $D = mR^2$ ,  $D_1 = \mu + D$ ,  $\mu$  — момент инерции шара. Внешнее и внутреннее обкатывание задается знаком  $R$ . Первое уравнение (3.1) с помощью вектора кинетического момента  $\dot{M} = D_1\dot{\omega} - D\dot{\gamma}(\omega, \gamma)$  можно записать в виде

$$\dot{M} = \frac{R_s R}{R_s + R} \left( R((\omega \times \gamma)(\Omega, \gamma) + \gamma(\Omega, \omega \times \gamma)) - R_s(\Omega, \gamma)(\gamma \times \Omega) \right) + \gamma \times \frac{\partial V}{\partial \gamma}. \tag{3.2}$$

После преобразования  $\tilde{\omega} = \omega + \frac{R_s}{R}\Omega$  уравнения (3.1) переходят в следующие

$$\begin{cases} D_1\dot{\tilde{\omega}} = \frac{DR}{R_s + R}(\tilde{\omega}, \gamma)(\tilde{\omega} \times \gamma) + \gamma \times \frac{\partial V}{\partial \gamma} \\ \dot{\gamma} = \frac{R}{R_s + R}\tilde{\omega} \times \gamma, \end{cases} \tag{3.3}$$

что соответствует первоначальной системе (3.1) при  $\Omega = 0$ . Поэтому достаточно рассмотреть последний случай. В переменных  $(M, \gamma)$  урав-

нения (3.1) при  $\Omega = 0$  имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \gamma \times \frac{\partial V}{\partial \gamma} \\ \dot{\gamma} = \frac{R}{R_s + R} \omega \times \gamma. \end{cases} \quad (3.4)$$

Они обладают интегралами

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \omega) + V(\gamma), \quad F_1 = (\mathbf{M}, \gamma) = c, \quad F_2 = \gamma^2 = 1. \quad (3.5)$$

После замены времени  $t \rightarrow -\frac{R}{R_s + R}\tau$  второе уравнение (3.4) преобразуется в обычное уравнение Пуассона  $\dot{\gamma} = \gamma \times \omega$ , а в потенциале появляется некоторый несущественный множитель. Это замечание позволяет перенести на систему (3.1) известные интегрируемые случаи. Например при  $V = \frac{1}{2}(\gamma, \mathbf{C}\gamma)$ ,  $\mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2, c_3)$  получается известная задача Неймана о движении точки по сфере в квадратичном потенциале (уравнения (3.1) реализуют даже более общую ситуацию  $(\mathbf{M}, \gamma) = c \neq 0$ , соответствующую случаю Клебша [4]).

Форма (3.3), (3.4) уравнений движения шара по сфере также делает прозрачной аналогию, обсуждаемую в [9, 10] задач о качении однородного шара по сфере в поле тяжести и случае Лагранжа в уравнениях Эйлера–Пуассона (движение тяжелого динамически симметричного волчка). Действительно, для потенциалов типа  $V = V(\gamma_3)$  системы (3.3), (3.4) допускают «лагранжевы» интегралы  $M_3 = \text{const}$  или  $\omega_3 = \text{const}$ , соответствующие осевой симметрии.

**7. Качение шара по свободной сфере.** Рассмотрим для полноты качение шара по сфере, которая не является неподвижной, а свободно вращается вокруг своего центра. Записывая уравнения динамики, получим:

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{N}, & \mu\dot{\omega} &= \mathbf{a} \times \mathbf{N}, & \mu_s\dot{\Omega} &= -\mathbf{r} \times \mathbf{N}, \\ & & \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{a} &= \Omega \times \mathbf{r}, \end{aligned}$$

где  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $\mu$ ,  $\mu_s$  — угловые скорости и моменты инерции шара и сферы соответственно. Принимая во внимание соотношения  $\mathbf{r} = R_s\gamma$ ,  $\mathbf{a} = -R\gamma$

для величин  $\tilde{\omega} = \frac{R\omega + R_s\Omega}{R + R_s}$ ,  $\gamma$ , находим

$$(1 + D)\dot{\tilde{\omega}} = D\gamma \times (\dot{\gamma} \times \tilde{\omega}), \quad \dot{\gamma} = \tilde{\omega} \times \gamma, \quad (3.1)$$

$$D = \frac{mR^2}{\mu} + \frac{mR_s^2}{\mu_s},$$

Система (3.1) заменой времени  $dt \rightarrow \alpha dt$ ,  $\alpha = \text{const}$  сводится к уравнениям (3.3) и вследствие этого интегрируема.

#### 4. Качение шара по поверхностям второго порядка — неголономная задача Якоби

Рассмотрим подробнее динамику шара при условии, что его центр масс движется по поверхности второго порядка

$$(\mathbf{r} + R\gamma, \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{r} + R\gamma)) = 1, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3). \quad (4.1)$$

В этом случае уравнения движения представляются в форме (2.3).

Оказывается, что эти уравнения при произвольной (невырожденной) матрице  $\mathbf{B}$  обладают инвариантной мерой с плотностью  $\rho$  и квадратичным интегралом  $F_2$ , которые представляются в форме

$$\rho = (\gamma, \mathbf{B}\gamma)^{-2},$$

$$F_2 = \frac{(\gamma \times \mathbf{M}, \mathbf{B}^{-1}(\gamma \times \mathbf{M}))}{(\gamma, \mathbf{B}\gamma)}. \quad (4.2)$$

**Комментарий I.** Плотность инвариантной меры была найдена авторами без особого труда, когда были получены уравнения (2.3) для качения однородного шара по эллипсоиду, описывающие *неголономную задачу Якоби*. Такое название естественно связано с тем, что при стремлении радиуса шара к нулю кажется, что получается обычная голономная классическая задача о геодезических на эллипсоиде, разрешенная К. Якоби в эллиптических функциях. Видимо, следует убедиться в корректности такого предельного перехода, что, однако, не мешает воспользоваться приведенной терминологией. Можно представить себе интеграл (4.2), как обобщение квадратичного интеграла Иоахимстала, имеющегося в задаче Якоби. Этот интеграл был первоначально найден авторами численно при использовании трехмерного отображения Пуанкаре в переменных Андуайе – Дебри  $(L, G, H, l, g, h)$ . Эти переменные для использования в неголономной механике мы ввели в [5] (см. также более раннюю работу [2]), где и имеются также соответствующие формулы пересчета.

На рис. 5 показаны трехмерные сечения фазового потока в переменных  $(l, L/G, H, g)$  на уровне энергии  $E = \text{const}$ . Секущей плоскостью является  $g = \pi/2$ . Как видно, уровни интеграла  $F_2 = \text{const}$  «расслаивают» трехмерный хаос на двумерные хаотические поверхности. Последнее обстоятельство, т. е. наличие хаотических движений на двумерных поверхностях  $F_2 = \text{const}$  показывает также, что еще одного дополнительного независимого интеграла, обеспечивающего уже полную интегрируемость в рассматриваемом случае заведомо не существует.

Рассмотрим различные частные и вырожденные случаи поверхностей второго порядка, допускающие интеграл типа (4.2).

**1. Эллиптический (гиперболический) параболоид.** Пусть центр масс шара движется по поверхности эллиптического параболоида, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{b_1} + \frac{y^2}{b_2} = 2z. \quad (4.1)$$

Хотя все результаты в этом случае могут быть получены из предыдущих путем предельного перехода, приведем их здесь в явном виде.

Гауссово отображение (2.2) в этом случае имеет вид:

$$r_1 + R\gamma_1 = -b_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_3}, \quad r_2 + R\gamma_2 = -b_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \quad r_3 + R\gamma_3 = \frac{b_1 \gamma_1^2 + b_2 \gamma_2^2}{2\gamma_3^2}, \quad (4.2)$$

а уравнения движения (2.3) представляются в форме

$$\dot{\mathbf{M}} = -\frac{D}{\mu + D}(\mathbf{M}, \dot{\gamma})\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\gamma} = \frac{R\gamma_3}{\mu + D}\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{V}^i(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{M})),$$

где  $\mathbf{V}^i = \text{diag}(b_1^{-1}, b_2^{-1}, 0)$  — вырожденная матрица.

Плотность инвариантной меры зависит только от  $\gamma_3$

$$\rho = \frac{1}{\gamma_3^4}, \quad (4.3)$$

а квадратичный интеграл (4.2) записывается в форме

$$F_2 = \frac{(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{M}, \mathbf{V}^i(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{M}))}{\gamma_3^2}. \quad (4.4)$$

**Комментарий II.** Интегралы (4.2), (4.4), хотя и квадратичны по скоростям ( $\mathbf{M}$  или  $\boldsymbol{\omega}$ ), зависят от позиционных переменных весьма сложным образом. Видимо, вследствие этого они не были отмечены классиками (в частности, Раусом и Ф.Нётером, которые получили только частные результаты). Как уже отмечалось, первоначально наличие интегралов (4.2), (4.4) было обнаружено при

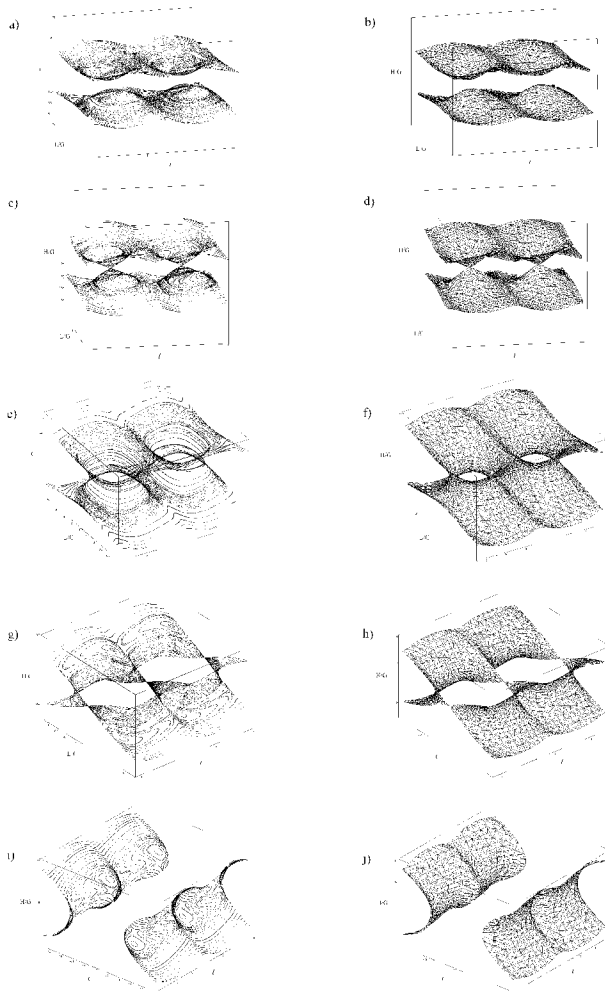


Рис. 5. Примеры трехмерных отображений (слева) и соответствующие поверхности уровня интеграла  $F_2$  (справа). Все отображения построены на уровне энергии  $E = 1$  при  $\mathbf{B} = \text{diag}(1, 4, 9)$ . Сверху вниз рисункам соответствуют значения интеграла  $F_2 = 1.7, 2, 4, 8, 10$ .

помощи численных экспериментов. Аналитически их вид был получен с использованием следующих соображений.

Как было показано выше, задача о качении шара по параболоиду вращения ( $b_1 = b_2$ ) является интегрируемой и имеет два дополнительных линейных интеграла, которые (в отсутствие вращения  $\Omega = 0$ ) могут быть записаны следующим образом

$$\begin{aligned} I_1 &= \gamma_3^{\sqrt{1-k}-1} (\sigma_1 - \sigma_2 \gamma_3 + \sigma_2 \gamma_3 \sqrt{1-k}), \\ I_2 &= \gamma_3^{-\sqrt{1-k}-1} (\sigma_1 - \sigma_2 \gamma_3 - \sigma_2 \gamma_3 \sqrt{1-k}), \quad k = \frac{D}{\mu + D}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $\sigma_1 = \omega_3$ ,  $\sigma_2 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$ . Произведение этих интегралов — квадратичный по  $\sigma_i$  интеграл, являющийся рациональной функцией  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\gamma_3$

$$J = \frac{(\sigma_2 \gamma_3 - \sigma_1)^2}{\gamma_3^2} - \sigma_2^2 (1-k) = \frac{\sigma_1^2}{\gamma_3^2} - 2\sigma_2 \frac{\sigma_1}{\gamma_3} + k\sigma_2^2. \quad (4.6)$$

Исключим из интеграла (4.6) слагаемое  $k\sigma_2^2$ , используя выражение для энергии (3.7) и рассмотрим интеграл вида

$$F_2 = J + 2E = \frac{\omega_3^2}{\gamma_3^2} - 2\sigma_2 \frac{\omega_3}{\gamma_3} + \boldsymbol{\omega}^2. \quad (4.7)$$

Подставив выражения для  $\sigma_2$  в (4.7) и выделив полные квадраты, получим

$$F_2 = \frac{(\gamma_2 \omega_3 - \gamma_3 \omega_2)^2 + (\gamma_3 \omega_1 - \gamma_1 \omega_3)^2}{\gamma_3^2}. \quad (4.8)$$

Записанный в такой форме  $F_2$  легко обобщается на случай произвольного параболоида ( $b_1 \neq b_2$ )

$$F_2 = \frac{\frac{1}{b_1} (\gamma_2 \omega_3 - \gamma_3 \omega_2)^2 + \frac{1}{b_2} (\gamma_3 \omega_1 - \gamma_1 \omega_3)^2}{\gamma_3^2} = \frac{(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{B}^i (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}))}{\gamma_3^2}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B}^i = \text{diag}(b_1^{-1}, b_2^{-1}, 0)$$

и вообще поверхности второго порядка (4.2). Использование интегралов (4.2), (4.4) возможно при изучении устойчивости стационарных движений шара вблизи точек пересечений поверхности с главными осями. В симметричном случае эту задачу рассматривал Э. Раус [10].

**2. Движение шара по эллиптическому конусу.** Рассмотрим задачу о качении шара, когда его центр масс движется по поверхности эллиптического конуса, заданного уравнением

$$(\mathbf{r}_c, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{r}_c) = 0, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, -1), \quad (4.1)$$



где  $\mathbf{r}_c = \mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma}$  — координаты центра масс, а  $b_1, b_2$  — положительные величины корни которых определяют наклон образующих прямых в направлениях осей координат. Зависимость нормали к поверхности  $\boldsymbol{\gamma}$  от координат центра масс на конусе имеет вид

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c}{\sqrt{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c)}}. \quad (4.2)$$

В рассматриваемом случае уже нельзя однозначно выразить  $\mathbf{r}$  (или  $\mathbf{r}_c$ ) в зависимости от  $\boldsymbol{\gamma}$  (так как одному и тому же значению  $\boldsymbol{\gamma}$  соответствует целая направляющая конуса). Поэтому в качестве фазовых переменных мы будем использовать не  $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ , как ранее, а  $(\mathbf{M}, \mathbf{r}_c)$ . Подставив (4.2) в уравнения движения (2.3), получим уравнения движения системы в переменных  $\mathbf{M}, \mathbf{r}_c$ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_c = \frac{R}{(\mu + D)\sqrt{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c)}}(\mathbf{M} \times \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c), \\ \dot{\mathbf{M}} = \frac{DR}{(\mu + D)^2(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c)^{5/2}}g, \\ g = (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{M} \times \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c), \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c \times (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c \times \mathbf{M}))\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c. \end{cases} \quad (4.3)$$

Уравнения (4.3) обладают интегралом энергии

$$H = \frac{1}{2(\mu + D)} \left( \mathbf{M}^2 + \frac{D(\mathbf{M}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c)^2}{\mu(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c)} \right)$$

и инвариантной мерой

$$\rho = \sqrt{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c)}.$$

Произведем теперь следующую замену переменных и времени

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c, \quad d\tau = \frac{R}{(\mu + D)\sqrt{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c)}} dt.$$

После такой замены получается следующая система

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{M} \times \mathbf{y}), \\ \mathbf{M}' = \frac{D}{(\mu + D)(\mathbf{y}, \mathbf{y})^2}(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{M} \times \mathbf{y}), \mathbf{y} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{M}))\mathbf{y} \end{cases} \quad (4.4)$$

которая обладает двумя естественными интегралами: интегралом энергии, имеющим теперь вид

$$H = \frac{1}{2(\mu + D)} \left( \mathbf{M}^2 + \frac{D}{\mu} \frac{(\mathbf{M}, \mathbf{y})^2}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \right),$$

и геометрическим интегралом

$$(\mathbf{y}, B\mathbf{y}) = 0,$$

задающим поверхность по которой движется центр масс шара в новых переменных. Кроме того уравнения (4.4) обладают инвариантной мерой с постоянной плотностью. Обобщение нетривиального интеграла (4.2) на уравнения (4.4) имеет вид

$$F_2 = ((\mathbf{M} \times \mathbf{y}), \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{M} \times \mathbf{y})), \quad (4.5)$$

или в исходных физических переменных

$$F_2 = ((\mathbf{M} \times \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c), \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{M} \times \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_c)).$$

Вопрос о существовании еще одного дополнительного интеграла для уравнений (4.4) остается открытым. По-видимому, в общем случае  $b_1 \neq b_2$  он не существует.

## 5. Движение шара по цилиндрической поверхности

Рассмотрим задачу о качении шара при условии, что его центр масс движется по цилиндрической поверхности. Оказывается, что эта система в случае отсутствия внешнего поля интегрируется в квадратурах, а в случае, когда внешняя сила направлена вдоль образующей цилиндра, уравнения приводятся к гамильтоновой системе с полутора степенями свободы.

Выберем неподвижную систему координат, одна из осей которой ( $Oz$ ) направлена вдоль образующей цилиндра (см. рис. 6), при этом для вектора нормали имеем

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, 0), \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1. \quad (5.1)$$

Обозначим проекции нормали и радиуса-вектора центра масс шара на нормальное сечение как  $\tilde{\mathbf{r}} = (r_1 + R\gamma_1, r_2 + R\gamma_2)$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = (\gamma_1, \gamma_2)$ , для них выполняются очевидные геометрические соотношения

$$(\dot{\tilde{\mathbf{r}}}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) = (\dot{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) = 0.$$

Отсюда заключаем, что  $\dot{\tilde{\gamma}}$  параллельна  $\dot{\tilde{r}}$

$$\dot{\tilde{\gamma}} = \lambda(\gamma)\dot{\tilde{r}},$$

причем коэффициент  $\lambda(\gamma)$  полностью определяется геометрией сечения цилиндра и не зависит от угловой скорости.

Используя уравнения (2.3), получим уравнения движения шара по поверхности цилиндра в предположении, что вдоль образующей цилиндра действует сила с потенциалом  $U(z)$ , где  $z = \frac{r_3}{R}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \frac{M_3}{\mu + D} \lambda(\gamma) \frac{D}{\mu + D} (\mathbf{M} \times \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}_z) \boldsymbol{\gamma} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \frac{M_3}{\mu + D} \lambda(\gamma) \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{z} = \frac{1}{\mu + D} (\mathbf{M} \times \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}_z). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Уравнения (5.2) всегда допускают помимо интеграла энергии проекцию момента (угловой скорости) на ось цилиндра:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(z), \\ F_2 &= M_3 = (\mu + D) \omega_3 = \text{const.} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Кроме того, система (5.3) обладает инвариантной мерой с плотностью

$$\rho(\boldsymbol{\gamma}) = \lambda^{-1}(\boldsymbol{\gamma}). \tag{5.4}$$

Как следует из (5.2), уравнения для вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  отделяются. Воспользуемся параметризацией

$$\gamma_1 = \cos \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \varphi.$$

Для угла  $\varphi(t)$  получим уравнение

$$\dot{\varphi} = \frac{M_3}{\mu + D} \lambda(\cos \varphi, \sin \varphi) = Q^{-1}(\varphi), \tag{5.5}$$

где  $Q(\varphi)$  в общем случае  $2\pi$ -периодическая функция от  $\varphi$ , определяемая видом поперечного сечения цилиндра.

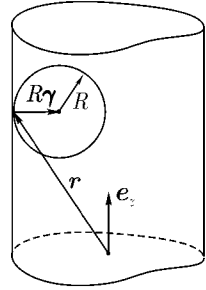


Рис. 6

В оставшихся уравнениях системы (5.2) выполним замену переменных

$$K_1 = M_1\gamma_1 + M_2\gamma_1, \quad K_2 = M_1\gamma_2 - M_2\gamma_1,$$

а вместо времени в качестве независимой переменной будем использовать угол  $\varphi$ , получим неавтономную систему с  $2\pi$ -периодическими коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{d\varphi} &= -\frac{\mu}{\mu + D}K_2, & \frac{dK_2}{d\varphi} &= K_1 - Q(\varphi)U'(z), \\ \frac{dz}{d\varphi} &= \frac{Q(\varphi)}{\mu + D}K_2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

с интегралом энергии

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{K_1^2}{\mu} + \frac{K_2^2}{\mu + D} \right) + U(z). \quad (5.7)$$

В случае поля тяжести  $U(z) = mgz$  и уравнения (5.6) интегрируются в квадратурах:

$$\begin{aligned} K_1(\varphi) &= -\nu mg \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \nu(\tau - \varphi) Q(\tau) d\tau + \nu A \cos \nu\varphi + \nu B \sin \nu\varphi, \\ K_2(\varphi) &= -mg \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \nu(\tau - \varphi) Q(\tau) d\tau + A \sin \nu\varphi - B \cos \nu\varphi, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где  $A, B$  — константы интегрирования,  $\nu^2 = \frac{\mu}{\mu + D}$ .

Покажем, что интегралы в (5.8) являются ограниченными функциями. Разложим функцию  $Q(\tau)$  в ряд Фурье

$$Q(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Q_n e^{in\tau}. \quad (5.9)$$

Интегралы входящие в выражения для  $K_1(\varphi)$  и  $K_2(\varphi)$  в (5.8) можно рассматривать как действительную и мнимую части интеграла

$$\int e^{i\nu\tau} Q(\tau) d\tau = \int \sum_n Q_n e^{i(n+\nu)\tau} d\tau. \quad (5.10)$$

Пользуясь известными теоремами Фурье-анализа и тем, что  $n + \nu \neq 0$  (так как  $0 < \nu < 1$ ) внесем интеграл под знак суммы и проинтегрируем ряд почленно:

$$\int \sum_n Q_n e^{i(n+\nu)\tau} d\tau = \sum_n \frac{Q_n}{i(n+\nu)} e^{i(n+\nu)\tau}. \quad (5.11)$$

Полученный ряд сходится к некоторой квазипериодической функции, следовательно,  $K_1(\varphi)$  и  $K_2(\varphi)$  являются ограниченными. Из доказанной ограниченности  $K_1(\varphi)$  и  $K_2(\varphi)$ , а также из сохранения энергии приведенной системы (5.7) следует ограниченность  $z(\varphi)$ .

*Таким образом, при качении шара по абсолютно шероховатой цилиндрической поверхности с произвольным поперечным сечением в поле тяжести не наблюдается вертикального векового ухода.*

Зависимость угла от времени (и, следовательно, всех остальных функций) дается квадратурой (5.5).

**Эллиптический (гиперболический цилиндр).** Рассмотрим подробнее частный случай, при котором центр масс шара движется по эллиптическому цилиндру, так что поперечное сечение задается уравнением

$$\frac{x^2}{b_1} + \frac{y^2}{b_2} = 1. \quad (5.12)$$

При этом

$$r_1 + R\gamma_1 = \frac{b_1\gamma_1}{\sqrt{b_1\gamma_1^2 + b_2\gamma_2^2}}, \quad r_2 + R\gamma_2 = \frac{b_2\gamma_2}{\sqrt{b_1\gamma_1^2 + b_2\gamma_2^2}}, \quad r_3 = Rz$$

и, соответственно,

$$\lambda(\gamma) = \frac{R(\gamma, \mathbf{B}\gamma)^{3/2}}{b_1 b_2}, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, 0),$$

$$Q^{-1}(\varphi) = \frac{M_3 R}{(\mu + D)b_1 b_2} (b_1 \cos^2 \varphi + b_2 \sin^2 \varphi)^{3/2}.$$

Отметим важное отличие эллиптического цилиндра от кругового (см. выше): в этом случае вместо одночастотных функций зависимость динамических переменных  $K_1, K_2, z$  определяется двумя частотами  $\omega_1 = 1, \omega_2 = \nu$ . Таким образом, интегралы в (5.8) берутся от квазипериодических функций и имеют очень сложный характер, их аналитические

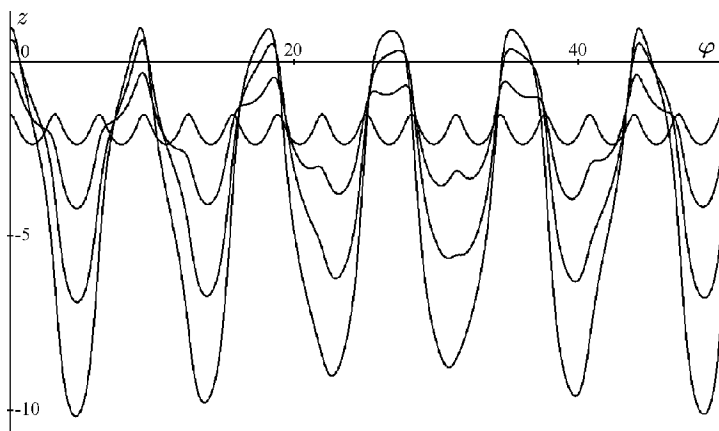


Рис. 7. Вертикальная координата точки контакта  $z$  в зависимости от угла  $\varphi$  для различных начальных значений  $K_1, K_2, z$ . Рисунок соответствует следующим параметрам:  $E = 1, \mu = 1, D = 1(\nu = 2^{-1/2}), b_1 = 1, b_2 = 2, R = 1$ .

свойства подробно обсуждаются в [7]. На рис. 7 изображены примеры зависимостей  $z(\varphi)$  для различных начальных значений  $K_1$  и  $K_2$ . Основной результат заключается в том, что для всех соотношений частот переменные  $K_1$  и  $K_2$ , а с ними и смещение  $z$ , испытывают ограниченные квазипериодические колебания.

Авторы благодарят В. В. Козлова за полезные замечания и обсуждения.

## Литература

- [1] *Аппель П.* Теоретическая механика. В 2-х т., М. Физматгиз, 1960. Пер. с англ. Appell P. *Traité de mécanique rationnelle*. Paris, Gauthier – Villars.
- [2] *Борисов А. В., Емельянов К. В.* Неинтегрируемость и стохастичность в динамике твердого тела. Ижевск, Изд-во Удм. ун-та, 1995.
- [3] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд.-во РХД, 1999, 464 с.
- [4] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика твердого тела. Ижевск: Изд-во РХД, 2001, 384 с.
- [5] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Качение твердого тела по плоскости и сфере. Иерархия динамики. (См. ст. 15 настоящего сборника.)

- [6] *Бычков Ю. П.* О катании твердого тела по неподвижной поверхности. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 573–583.
- [7] *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: НИЦ «РХД», 2000.
- [8] *Колесников С. Н.* Некоторые задачи механики о качении твердых тел. Дисс. на соискание уч. ст. к. ф.-м.н. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 1988. 88 с.
- [9] *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967, 519 с.
- [10] *Раус Э.* Динамика системы твердых тел. т. II, М., 1983. Перевод с англ. *Routh E.* Dynamics of a System of Rigid Bodies. Dover Publications, New York.
- [11] *Nöether F.* Über rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsfläche. Leipzig, Teubner, 1909, 56 S.
- [12] *Hermans J.* A symmetric sphere rolling on a surface. Nonlinearity, 1995, v. 8(4), p. 493–515.





**IV**

---

**ДИНАМИКА КЕЛЬТСКИХ  
КАМНЕЙ**



# О ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ<sup>1</sup>

*А. П. Маркеев*

Делается попытка найти теоретическое обоснование некоторых динамических эффектов, которые обнаружены экспериментально в одной из задач динамики твердого тела на плоскости — задаче о движении «кельтского камня» [1]–[4]. Основное внимание уделяется колебаниям твердого тела вблизи положения равновесия или стационарного вращения. Предполагается, что движение происходит без скольжения, опорная горизонтальная плоскость неподвижна. Кратко рассматриваются малые колебания тела в окрестности его стационарного вращения вокруг вертикали, получена приближенная система уравнений, описывающая нелинейные колебания тела вблизи его равновесного положения на плоскости и дан ее полный анализ. Результаты исследования находятся в соответствии с наблюдаемыми в экспериментах [1], [3] изменениями направления вращения кельтского камня вокруг вертикали без активного внешнего воздействия и возникновением вращения в том или ином направлении за счет колебаний вокруг горизонтальной оси.

Динамика кельтского камня впервые были исследована в [2]. Показано существование зависимости устойчивости вращения тела вокруг вертикали от направления вращения, а также сделан вывод о возможности возникновения вращения тела вокруг вертикали из-за его колебаний вокруг горизонтальной оси. Строгое решение задачи об устойчивости стационарного вращения тела вокруг вертикали при отсутствии скольжения содержится в [5]–[7]. В [8] многие экспериментальные выводы о

<sup>1</sup>Прикл. матем. и мех., т. 47, вып. 4, 1983, с. 575–582.

движении кельтского камня подтверждены при помощи численного интегрирования уравнений движения. В [4] предложена абстрактная математическая модель кельтского камня без анализа ее соответствия движению реальных твердых тел на плоскости.

1. Пусть тяжелое твердое тело под действием начального толчка совершает такое движение, при котором оно опирается одной точкой выделенной в ней выпуклой поверхности на абсолютно шероховатую неподвижную горизонтальную плоскость. Пусть  $Oxyz$  — неподвижная система координат с началом в точке  $O$  опорной плоскости  $z = 0$ . Ось  $Oz$  направлена вертикально вверх. С телом свяжем систему координат  $G\xi\eta\zeta$ , оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции тела. За обобщенные координаты примем три угла Эйлера и две координаты  $x, y$  центра тяжести тела в системе  $Oxyz$ . Третья координата  $z$  центра тяжести представляет собой взятое со знаком расстояние центра тяжести до опорной плоскости. Величина  $z$  положительна или отрицательна в зависимости от того, лежит центр тяжести тела выше (как на рис. 1 в случае типичного кельтского камня) или ниже опорной плоскости. Тяжелое твердое тело на неподвижной горизонтальной плоскости представляет собой неголономную систему Чаплыгина [10]. Дифференциальные уравнения движения в форме Чаплыгина будут описывать движение твердого тела относительно центра тяжести и могут рассматриваться независимо от уравнений неинтегрируемых связей, выражающий отсутствие скольжения.

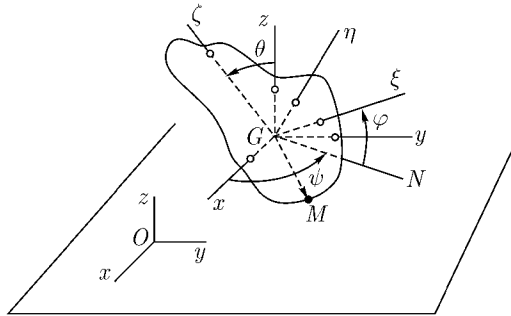


Рис. 1

Можно показать [7], что угол прецессии  $\psi$  не входит в уравнения движения и они имеют частное решение

$$\theta = \pi/2, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\psi} = \omega = \text{const} \quad (1)$$

отвечающее вращению тела с произвольной постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $G\eta$ , занимающей вертикальное положение. Пусть  $x_1, x_2, x_3$  — возмущения величин  $\theta, \varphi, \psi$ . Уравнения возмущенного движения будут такими:

$$\begin{aligned} (A + mh^2)\ddot{x}_1 &= mlh\omega\dot{x}_1 - [(A + C - B) + 2mh^2 - \\ &- ml_1h]\omega\dot{x}_2 + [(C - B)\omega^2 + m(h - l_2)(g + \omega^2h)]x_1 - \\ &- ml(g + \omega^2h)x_2 + X_1, \\ (C + mh^2)\ddot{x}_2 &= [(A + C - B) + 2mh^2 - ml_2h]\omega\dot{x}_1 - \\ &- mlh\omega\dot{x}_2 - ml(g + \omega^2h)x_1 + [(A - B)\omega^2 + \\ &+ m(h - l_1)(g + \omega^2h)]x_2 + X_2, \\ B\dot{x}_3 &= X_3, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \{mlh\dot{x}_1 - [(A + C - B) + 2mh^2 - ml_1h]\dot{x}_2 + \\ &+ 2\omega[(C - B) + mh(h - l_2)]x_1 - 2mlh\omega x_2\}x_3 + F_1 \\ X_2 &= \{[(A + C - B) + 2mh^2 - ml_2h]\dot{x}_1 - mlh\dot{x}_2 - \\ &- 2mlh\omega x_1 + 2\omega[(A - B) + mh(h - l_1)]x_2\}x_3 + F_2, \\ X_3 &= \{mlhx_1 - [(A - B) + mh(h - l_1)]x_2\}\ddot{x}_1 + \{[C + \\ &+ mh(h - l_2)]x_1 - mlhx_2\}\ddot{x}_2 + (B + C - A)\dot{x}_1\dot{x}_2 + m(3h - \\ &- r_1 - r_2)l\omega((\dot{x}_1x_2 + \\ &+ x_1\dot{x}_2) - \omega[2(C - B) + m(2h^2 - 3l_2h + r_1^2 \cos^2 \alpha + \\ &+ r_2^2 \sin^2 \alpha)]x_1\dot{x}_1 - \\ &- \omega[2(A - B) + m(2h^2 - 3l_1h + r_1^2 \sin^2 \alpha + r_2^2 \cos^2 \alpha)]x_2\dot{x}_2, \\ l &= (r_2 - r_1) \sin \alpha \cos \alpha, \quad l_1 = r_1 \sin^2 \alpha + r_2 \cos^2 \alpha, \\ l_2 &= r_1 \cos^2 \alpha + r_2 \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $m$  — масса тела,  $g$  — ускорение свободного падения,  $A, B, C$  — моменты инерции тела относительно осей  $G\xi, G\eta, G\zeta$ ,  $h$  — взятое со знаком расстояние от центра тяжести тела до опорной плоскости в невозмущенном движении (1),  $r_1$  и  $r_2$  — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке его касания с плоскостью,  $\alpha$  — угол между осью между осью  $G\xi$  и линией кривизны, соответствующей  $r_1$ , он отсчитывается от оси  $G\xi$  против часовой стрелки, если смотреть навстречу оси  $G\eta$ , занимающей вертикальное положение в движении (1). Через  $F_1, F_2$  в (3) обозначены квадратичные формы относительно  $x_i, \dot{x}_i$  ( $i = 1, 2$ ); их явный вид не потребуется.

2. Характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущенного движения (2) запишем в виде [7]

$$\begin{aligned} \lambda(P\lambda^4 + Q\omega\lambda^3 + R\lambda^2 + Q\omega^3\lambda + S) &= 0 \\ P &= (A + mh^2)(C + mh^2), \quad Q = mlh(A - C), \\ R &= [(A + C - B + 2mh^2)^2 - (A + C - B + 2mh^2)mh(r_1 + \\ &+ r_2) + m^2h^2r_1r_2]\omega^2 - (A + mh^2)[(A - B)\omega^2 + m(h - \\ &- l_1)(g + \omega^2h)] - (C + mh^2)[(C - B)\omega^2 + m(h - l_2) \cdot (g + \omega^2h)], \\ S &= (A - B)(C - B)\omega^4 + m(g + \omega^2h)\omega^2[A(h - l_2) + \\ &+ C(h - l_1) - B(2h - r_1 - r_2)] + m^2(g + \omega^2h)^2 \cdot (h - r_1)(h - r_2). \end{aligned} \quad (4)$$

В [5]–[7] получены

$$(R - P\omega^2)\omega^2 - S > 0, \quad S > 0, \quad (5)$$

$$\omega h(A - C)(r_2 - r_1) \sin \alpha \cos \alpha > 0, \quad (6)$$

при выполнении которых движение (1) устойчиво, причем асимптотически по отношению к возмущениям величин  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ . Неравенства (5) накладывает ограничения на распределение масс, геометрию поверхности тела и величину угловой скорости, а неравенство (6) — и на знак угловой скорости (направление вращения) тела. Если  $h > 0$ , т. е. в невозмущенном движении центр тяжести тела лежит выше опорной плоскости, то при устойчивом вращении меньшая горизонтальная ось центрального эллипсоида инерции идет впереди линии наименьшей кривизны поверхности тела в точке его касания с плоскостью; при  $h < 0$  картина обратная.

Показано также [5]–[7], что при строгом нарушении хотя бы одного из неравенств (5) или (6) имеет место неустойчивость. Отсюда, в частности, следует, что если  $Q \neq 0$ , то при достаточно малых  $\omega$  стационарное вращение (1) неустойчиво независимо от знака  $\omega$ , так как при малых  $\omega$  неравенства (5) несовместны.

Если хотя бы одна из величин  $\omega$ ,  $h$ ,  $A - C$ ,  $r_2 - r_1$ ,  $\sin 2\alpha$  равна нулю, то  $Q = 0$  и неравенство (6) не выполняется. Характеристическое уравнение (4) по-прежнему имеет один нулевой корень, а остальные четыре корня удовлетворяют биквадратному уравнению. Пусть биквадратное уравнение имеет две пары чисто мнимых корней  $\pm i\omega_1$ ,  $\pm i\omega_2$  ( $\omega_1 > \omega_2 > 0$ ). Тогда движение устойчиво в линейном приближении. Рассмотрим корни уравнения (4) при малых  $Q\omega$ . Вычисления показывают,

что в первом приближении относительно  $Q\omega$  у корней  $\pm i\omega_j$  ( $j = 1, 2$ ) помимо поправок к их мнимым частям появляются еще и вещественные части  $\chi_j$  ( $j = 1, 2$ ).

$$\chi_1 = \frac{Q\omega(\omega^2 - \omega_1^2)}{2(A + mh^2)(C + mh^2)(\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad (7)$$

$$\chi_2 = \frac{Q\omega(\omega_2^2 - \omega^2)}{2(A + mh^2)(C + mh^2)(\omega_1^2 - \omega_2^2)}.$$

Пусть  $Q\omega > 0$ , т.е. неравенство (6) удовлетворяется. Из (7) тогда следует, что если  $\omega_2^2 < \omega^2 < \omega_1^2$ , то  $\chi_j < 0$  ( $j = 1, 2$ ) и малые колебания тела, близкие его стационарному вращению (1), будут экспоненциально затухать; если  $0 < \omega^2 < \omega_2^2$ , то  $\chi_1 < 0$ ,  $\chi_2 > 0$  и экспоненциально затухают высокочастотные колебания (с частотой  $\omega_1$ ), а низкочастотные (с частотой  $\omega_2$ ) экспоненциально возрастают; если же  $\omega^2 > \omega_1^2$ , то, наоборот, затухают низкочастотные колебания, а высокочастотные растут. При  $Q\omega < 0$  характер развития малых колебаний будет противоположным.

**3.** Пусть в (1)  $\omega = 0$ , т.е. тело покоится на плоскости, опираясь на нее одной своей точкой, лежащей на оси  $G\eta$ , занимающей вертикальное положение. Необходимым и достаточным условием устойчивости этого положения равновесия будет, согласно [5], выполнение неравенств  $r_1 > h$ ,  $r_2 > h$ . Считая это условие выполненным, рассмотрим движение тела вблизи положения равновесия.

Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$(A + mh^2)\ddot{x}_1 = mg(h - l_2)x_1 - mglx_2 + X_1, \quad (8)$$

$$(c + mh^2)\ddot{x}_2 = -mglx_1 + mg(h - l_1)x_2 + X_2, \quad B\dot{x}_3 = X_3.$$

Здесь  $X_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — соответствующие функции из (3), вычисленные при  $\omega = 0$ . Сделаем в системе (8) замену переменных  $x_1, x_2, x_3 \rightarrow y_1, y_2, y_3$ , приводящую линеаризованные первые ее два уравнения к виду, соответствующему нормальным колебаниям.

Частоты  $\Omega_1, \Omega_2$  ( $\Omega_1 > \Omega_2 > 0$ ) нормальных колебаний удовлетворяют уравнению

$$(A + mh^2)(C + mh^2)\Omega^4 - mg[(A + mh^2)(l_1 - h) + (C + mh^2)(l_2 - h)]\Omega^2 + (mg)^2(r_1 - h)(r_2 - h) = 0. \quad (9)$$

Приведение к нормальным координатам  $y_1, y_2$  осуществляется при помощи замены переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= u_{11}y_1 + u_{12}y_2, & x_2 &= u_{21}y_1 + u_{22}y_2, & x_3 &= y_3 \\ u_{1j} &= k_j mgl, & u_{2j} &= k_j [(A + mh^2)\Omega_j^2 + mg(h - l_2)] \\ k_j &= \{(A + mh^2)(mgl)^2 + (C + mh^2)[(A + mh^2)\Omega_j^2 + \\ &+ mg(h - l_2)]^2\}^{-1/2}, \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (10)$$

В линейном приближении по  $x_1, x_2$  уравнение следа, описываемого точкой касания  $M$  на поверхности тела, будет таким

$$\xi(t) = -lx_1(t) - l_1x_2(t), \quad \xi(t) = l_2x_1(t) + lx_2(t)$$

Поэтому из (10) следует, что для  $j$ -го нормального колебания (с частотой  $\Omega_j$ ) касательная к следу в точке  $M$  составляет с осью  $G\xi$  угол  $\beta_j$ , вычисляемый по формуле

$$\operatorname{tg} \beta_j = -(lu_{1j} + l_1u_{2j})/(l_2u_{1j} + lu_{2j}) \quad (j = 1, 2).$$

Отсюда видно, какими должны быть возмущения  $x_1, x_2$ , чтобы тело совершало высокочастотные (с частотой  $\Omega_1$ ) или низкочастотные (с частотой  $\Omega_2$ ) малые колебания.

В переменных  $y_1, y_2, y_3$  уравнения (8) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \Omega_1^2 y_1 &= (a_1 \dot{y}_1 + a_2 \dot{y}_2) y_3 + G_1, \\ \ddot{y}_2 + \Omega_2^2 y_2 &= (b_1 \dot{y}_1 + b_2 \dot{y}_2) y_3 + G_2, \\ B \dot{y}_3 &= Y_3, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} a_j &= (c_1 u_{22} + c_2 u_{12}) u_{1j} + (d_1 u_{22} + d_2 u_{12}) u_{2j}, \\ b_j &= -(c_1 u_{21} + c_2 u_{11}) u_{1j} - (d_1 u_{21} + d_2 u_{11}) u_{2j}, \\ &(j = 1, 2), \end{aligned} \quad (12)$$

$$c_1 = -\frac{mlh}{(A + mh^2)\Delta}, \quad c_2 = \frac{(A + C - B) + 2mh^2 - ml_2h}{(C + mh^2)\Delta},$$

$$d_1 = \frac{(A + C - B) + 2mh^2 - ml_1h}{(A + mh^2)\Delta}, \quad d_2 = -\frac{mlh}{(C + mh^2)\Delta},$$

$$\Delta = k_1 k_2 mgl (A + mh^2) (\Omega_1^2 - \Omega_2^2),$$



$$\begin{aligned}
 Y_3 = & -(u_{11}\Omega_1^2 y_1 + u_{12}\Omega_2^2 y_2)\{mlh(u_{11}y_1 + u_{12}y_2) - \\
 & - [(A - B) + mh(h - l_1)](u_{21}y_1 + u_{22}y_2)\} - (u_{21}\Omega_1^2 y_1 + \\
 & + u_{22}\Omega_2^2 y_2)\{[C + mh(h - l_2)](u_{11}y_1 + u_{12}y_2) - mlh(u_{21}y_1 + \\
 & + u_{22}y_2)\} + (B + C - A)(u_{11}\dot{y}_1 + u_{12}\dot{y}_2)(u_{21}\dot{y}_1 + u_{22}\dot{y}_2).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Как и в (8), в системе (11) отброшены члены выше второго порядка относительно возмущений. Через  $G_1$ ,  $G_2$  в (11) обозначены квадратичные формы переменных  $y_j$ ,  $\dot{y}_j$  ( $j = 1, 2$ ).

Для исследования нелинейной системы (11) приведем ее к нормальной форме [11]. Сначала сделаем замену переменных

$$\begin{aligned}
 y_1 = \frac{z_1 - z_3}{2i\Omega_1}, \quad y_2 = \frac{z_2 - z_4}{2i\Omega_2}, \quad \dot{y}_1 = \frac{z_1 + z_3}{2}, \quad \dot{y}_2 = \frac{z_2 + z_4}{2}, \tag{14} \\
 y_3 = z_5.
 \end{aligned}$$

В переменных  $z_k$  ( $k = 1, \dots, 5$ ) линейная часть системы (11) имеет диагональную форму и получение нормальной формы сводится к выделению резонансных членов из нелинейностей в правых частях преобразованной системы (11). При  $\Omega_1 \neq 2\Omega_2$  структура нормальной формы не зависит от квадратичных форм  $G_j$  ( $j = 1, 2$ ) в уравнениях (11), или, что то же, от квадратичных форм  $F_j$  в (3). Считая, что  $\Omega_1 \neq 2\Omega_2$ , получаем следующую нормальную форму системы (11), записанную в комплексных переменных:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 = i\Omega_1 z_1 + c_{10001} z_1 z_5, \quad \dot{z}_2 = i\Omega_2 z_2 + c_{01001} z_2 z_5, \tag{15} \\
 \dot{z}_3 = -i\Omega_1 z_3 + c_{00101} z_3 z_5, \quad \dot{z}_4 = -i\Omega_2 z_4 + c_{00011} z_4 z_5, \\
 \dot{z}_5 = c_{10100} z_1 z_3 + c_{01010} z_2 z_4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{10001} = c_{00101} = a_1/2, \quad c_{01001} = c_{00011} = b_2/2, \tag{16} \\
 c_{10100} = mh(r_2 - r_1)\Omega_1^2 [(u_{21}^2 - u_{11}^2) \sin \alpha \cos \alpha - u_{11}u_{21} \cos 2\alpha]/(2B), \\
 c_{01010} = mh(r_2 - r_1)\Omega_2^2 [(u_{22}^2 - u_{12}^2) \sin \alpha \cos \alpha - u_{12}u_{22} \cos 2\alpha]/(2B).
 \end{aligned}$$

Введя вещественные полярные координаты согласно формулам

$$\begin{aligned}
 z_1 = \rho_1(\cos \sigma_1 + i \sin \sigma_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos \sigma_2 + i \sin \sigma_2), \\
 z_3 = \bar{z}_1, \quad z_4 = \bar{z}_2, \quad z_5 = \rho_3
 \end{aligned}$$

и проведя затем некоторые выкладки, использующие формулы (10), (12), и уравнение частот (9), получим нормализованную систему уравнений

возмущенного движения, которая распадается на две независимые подсистемы

$$\dot{\rho}_1 = -a\Omega_1^2\rho_1\rho_3, \quad \dot{\rho}_2 = a\Omega_2^2\rho_2\rho_3, \quad B\dot{\rho}_3 = a(\Omega_1^4\rho_1^2 - \Omega_2^4\rho_2^2), \quad (17)$$

$$\dot{\sigma}_1 = \Omega_1, \quad \dot{\sigma}_2 = \Omega_2, \quad (18)$$

$$a = \frac{(A - C)mh(r_2 - r_1) \sin \alpha \cos \alpha}{2(A + mh^2)(C + mh^2)(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)}.$$

В (17) отброшены члены выше второго, а в (18) — выше первого порядка относительно  $\rho_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

**4.** В  $\varepsilon$ -окрестности положения равновесия правые части уравнений (17) и (18) отличаются от соответствующих им правых частей точных уравнений возмущенного движения на величины порядка  $\varepsilon^3$  и  $\varepsilon^2$  соответственно. Решения точных уравнений аппроксимируются решениями системы (17), (18) с погрешностью порядка  $\varepsilon^2$  для  $\rho_k$  и порядка  $\varepsilon$  для  $\sigma_j$  на интервале времени порядка  $\varepsilon^{-1}$ . Ограничиваясь этой точностью, будем вместо полных уравнений возмущенного движения рассматривать приближенную систему (17), (18).

Уравнения (18) сразу интегрируются. Получаем  $\sigma_j(t) = \Omega_j t + \sigma_j(0)$  ( $j = 1, 2$ ). Система (17) имеет интегралы

$$\Omega_1^2\rho_1^2 + \Omega_2^2\rho_2^2 + B\rho_3^2 = B\mu^2 \quad (\mu > 0); \quad (19)$$

$$\rho_1^\chi \rho_2 = \nu \quad (\chi = \Omega_2^2/\Omega_1^2), \quad (20)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  — постоянные, определяемые начальными условиями.

Траектории системы (17) представлены на рис. 2 в пространстве  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ . Они расположены в области  $\rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0$  и представляют собой кривые, являющиеся пересечением поверхности эллипсоида (19) и цилиндрической поверхности (20). Принято обозначение  $A_j = B^{1/2}\mu/\Omega_j$  ( $j = 1, 2$ ). Для заданного значения постоянной  $\mu$  величина  $\nu$  должна удовлетворять неравенствам

$$0 \leq \nu \leq \nu_* = \chi^{-1}\{B\mu^2\chi/[(1 + \chi)\Omega_1^2]\}^{(1+\chi)/2}.$$

При  $\nu > \nu_*$  движение невозможно. Штриховкой показан плоскость  $\rho_1\Omega_1^2 = \rho_2\Omega_2^2$ , на которой обращается в нуль правая часть третьего уравнения системы (17). Траектории симметричны относительно плоскости  $\rho_3 = 0$ . Направление движения по траекториям показано стрелками. Считается, что  $a > 0$ ; при  $a < 0$  направление движения изменится на обратное.

Остановимся на свойствах решенной системы (17) и их связи с характером движения твердого тела по плоскости. Точками  $P_1 = (0, 0, \mu)$ ,  $P_2 = (0, 0, -\mu)$ ,  $P_3 = (\rho_1^0, \rho_2^0, 0)$  на рис. 2 отмечены положения равновесия системы (17). Точкам  $P_1$  и  $P_2$  отвечают стационарные вращения тела вокруг вертикали соответственно против часовой стрелки с угловой скоростью  $\mu$  и по часовой стрелке с угловой скоростью  $-\mu$ . Оба этих вращения неустойчивы, что следует из линеаризованных уравнений (17) и иллюстрируется рис. 2.

Положению равновесия  $P_3$  отвечают условно-периодические или периодические, если  $\Omega_1/\Omega_2$  — рациональное число (не равное двум, так как случай  $\Omega_1 = 2\Omega_2$  исключен из рассмотрения), колебания тела. При этом

$$\rho_1^0 = \frac{\mu}{\Omega_1} \left( \frac{B\chi}{1+\chi} \right)^{1/2}, \quad \rho_2^0 = \frac{\mu}{\Omega_1} \left[ \frac{B}{\chi(1+\chi)} \right]^{1/2}, \quad \nu = \nu_*.$$

Для таких колебаний не наблюдаются эффекты, характерные для кельтских камней [1]–[3]: колебания относительно горизонтальных осей не вызывают вращения тела вокруг вертикали ( $\rho_3 \equiv 0$ ). При исследовании устойчивости колебаний воспользуемся теоремой Ляпунова об устойчивости [12]. Функцию  $V$  построим в виде связи интегралов (19) и (20). Положив  $\rho_1 = \rho_1^0 + R_1$ ,  $\rho_2 = \rho_2^0 + R_2$ ,  $\rho_3 = R_3$ , перепишем их в виде

$$V_1 = R_1 + R_2 + \frac{1}{2\rho_1^0} R_1^2 + \frac{1}{2\rho_2^0} R_2^2 + \frac{B}{2\rho_1^0 \Omega_1^2} R_3^2 = \text{const},$$

$$V_2 = R_1 + R_2 + \frac{\Omega_2^2 - 1}{2\rho_1^0} R_1^2 + \frac{\Omega_1^2}{\rho_2^0} R_1 R_2 + \frac{\Omega_1^2 - 1}{2\rho_2^0} R_2^2 + \dots = \text{const}.$$

Многоточием в функции  $V_2$  обозначены члены выше второго порядка относительно возмущений  $R_1, R_2$ . Положим  $V = V_1 - V_2 + \Omega_1^2 V_2^2 / (2\rho_2^0)$ . Имеем разложение

$$V = \frac{1}{\rho_1^0} R_1^2 + \frac{1}{\rho_2^0} R_2^2 + \frac{B}{2\rho_1^0 \Omega_1^2} R_3^2 + \dots \quad (21)$$

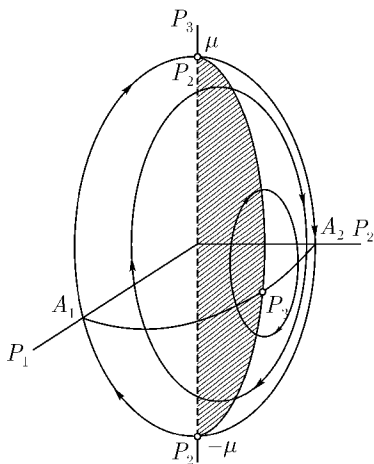


Рис. 2

Так как функция (21) определенно положительна, то рассматриваемые колебания устойчивы относительно возмущений  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$ . Этот вывод иллюстрируется рис. 2, где точка  $P_3$  окружена сколь угодно близко к ней расположенными замкнутыми траекториями, лежащими на эллипсоиде (19).

Система уравнений (17) имеет следующие два частных решения, в которых  $\rho_1$  или  $\rho_2$  тождественно равны нулю

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2(t) = A_2 \operatorname{sch}[\delta_1(t + e_1)], \quad \rho_3 = \mu t h[\delta_1(t + e_1)] \quad (22)$$

$$(\delta_1 = -a\mu\Omega_2^2, \quad e_1 = \delta_1^{-1} \operatorname{Arth}[\rho_3(0)/\mu]);$$

$$\rho_1(t) = A_1 \operatorname{sch}[\delta_2(t + e_2)], \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = \mu t h[\delta_2(t + e_2)], \quad (23)$$

$$(\delta_2 = a\mu\Omega_1^2, \quad e_2 = \delta_2^{-1} \operatorname{Arth}[\rho_3(0)/\mu]).$$

Эти решения на рис. 2 представлены асимптотическими траекториями, соединяющими неустойчивые положения равновесия  $P_1$ ,  $P_2$ .

Решение (22) отвечает таким движениям тела, когда оно, вращаясь вокруг вертикали, совершает низкочастотные колебания. Если  $\rho_3(0) \leq 0$ , т. е. в начальный момент тело либо совсем не закручено вокруг вертикали, либо закручено по часовой стрелке, то с течением времени «амплитуда» колебаний  $\rho_2$  монотонно убывает (при  $a > 0$ , как на рис. 2) от ее начального значения  $\rho_2(0)$  до нуля, а угловая скорость возрастает по модулю. В пределе тело совершает чистое верчение вокруг вертикали по часовой стрелке с угловой скоростью  $-\mu$ . Если же  $\rho_3(0) > 0$ , т. е. в начальный момент тело закручено против часовой стрелки, то предельное движение тела будет таким же, как и при  $\rho_3(0) \leq 0$ , но эволюция движения существенно иная. При  $0 < t < t_* = -e_1$  амплитуда колебаний  $\rho_2$  монотонно возрастает, а тело вращается вокруг вертикали против часовой стрелки с уменьшающейся угловой скоростью. В момент  $t = t_*$  угловая скорость обращается в нуль, а амплитуда колебаний  $\rho_2$  достигает своего максимального значения  $A_2$ . При  $t > t_*$  тело вращается уже по часовой стрелке с возрастающей по модулю угловой скоростью, а амплитуда колебаний монотонно убывает. Таким образом, при  $\rho_3(0) > 0$  за время эволюции движения один раз происходит смена направления вращения тела вокруг вертикали.

Решение (23) описывает движения, в которых тело, вращаясь вокруг вертикали, совершает высокочастотные колебания. Анализ эволюции движения аналогичен предыдущему случаю. Предельным движением здесь будет чистое верчение вокруг вертикали против часовой стрелки с угловой скоростью  $\mu$ . Если в начальный момент времени тело закручено вокруг вертикали по часовой стрелке, то при  $t = -e_2$  происходит

смена направления вращения. В этот момент амплитуда колебаний  $\rho_1$  достигает своего максимального значения  $A_1$ .

Рассмотрим теперь решения системы (17), отличные от решений (22), (23) и от положений равновесия  $P_1$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Из интегралов (19) и (20) имеем

$$\rho_2 = \nu \rho_1^{-\chi}, \quad \rho_3 = \pm f(\rho_1), \quad (24)$$

$$f(\rho_1) = \frac{[-\Omega_2^2 \nu^2 + B \mu^2 \rho_1^{2\chi} - \Omega_1^2 \rho_1^{2(\chi+1)}]^{1/2}}{B^{1/2} \rho_1^\chi}.$$

Подставив  $\rho_3$  из (24) в первое уравнение системы (17) и разделив переменные, получим

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1 f(\rho_1)} = \pm a \Omega_1^2 dt. \quad (25)$$

Если из (25) найдена функция  $\rho_1(t)$ , то  $\rho_2(t)$  и  $\rho_3(t)$  вычисляются по формулам (24).

Найти явную аналитическую зависимость  $\rho_1(t)$  в общем случае невозможно. Но качественный характер движения можно получить непосредственно из системы уравнений (17). Пусть, например, в начальный момент времени правая часть третьего из уравнений системы (17) и величина  $\rho_3$  положительны. Картина движения будет такой (см. рис. 2). При  $t > 0$  тело все быстрее вращается вокруг вертикали против часовой стрелки ( $\rho_3$  растет); при этом амплитуда  $\rho_1$  высокочастотных колебаний уменьшается, а амплитуда  $\rho_2$  низкочастотных колебаний увеличивается. Это приведет в конце концов к тому, что правая часть третьего уравнения системы (17) обратится в нуль; на рис. 2 это соответствует моменту, когда траектория пересекает плоскость  $\rho_1 \Omega_1^2 = \rho_2 \Omega_2^2$ . В этот момент угловая скорость  $\rho_3$  вращения тела вокруг вертикали достигает максимального значения и начнет убывать, оставаясь положительной (тело продолжает вращение вокруг вертикали против часовой стрелки); при этом  $\rho_1$  по-прежнему уменьшается, а  $\rho_2$  растет. Это продолжается до тех пор, пока угловая скорость не обратится в нуль. В этот момент  $\rho_1$  и  $\rho_2$  достигают своих минимального и максимального значений соответственно и далее  $\rho_1$  начинает возрастать,  $\rho_2$  убывать, а тело вращается уже в обратном направлении по часовой стрелке ( $\rho_3 < 0$ ) со всевозрастающей по модулю угловой скоростью. Убывание  $\rho_2$  и возрастание  $\rho_1$  приведет к тому, что правая часть третьего уравнения системы (17) снова обратится в нуль (на рис. 2 траектория снова пересечет плоскость  $\rho_1 \Omega_1^2 = \rho_2 \Omega_2^2$ , но уже в области отрицательных значений  $\rho_3$ ). В этот момент достигается наибольшая по модулю угловая скорость вращения тела по часовой

стрелке и вслед за этим начнется замедление вращения тела; при этом  $\rho_1$  продолжает возрастать, а  $\rho_2$  убывать. Так продолжается до тех пор, пока  $\rho_3$  не обратится в нуль, когда  $\rho_1$  и  $\rho_2$  достигают своих максимального и минимального значений соответственно, а тело изменяет вращение с направления по часовой стрелке на вращение против часовой стрелки. В дальнейшем картина движения будет периодически повторяться. Описанному циклу движения на рис. 2 соответствует замкнутая траектория. Период колебаний может быть найден из уравнения (25).

## Литература

- [1] *Walker G. T.*, On the curious dynamical property of celts. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1895, Vol. 8, Pt. 5, p. 305–306.
- [2] *Walker G. T.*, On a dynamical top. Quart. J. Pure and Appl. Math., 1896, Vol. 28, p. 175–184.
- [3] *Walker J.*, The mysterious “rattleback”; a stone that spins in one direction and then reverses. Sci. Amer., 1979, Vol. 241, No. 4, p. 144–149.
- [4] *Caughey T. K.*, A mathematical model of the «rattleback». Int. J. Non-linear Mech., 1980, Vol. 15, No. 4–5, p. 293–302.
- [5] *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости. Изв. АН СССР, МТТ, 1980, N 4, с. 11–21.
- [6] *Астапов И. С.* Об устойчивости вращения кельтского камня. Вестн. МГУ, Сер. I, матем., механ., 1980, N 2, с. 97–100.
- [7] *Каранетян А. В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений негोलомных систем. ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 418–426.
- [8] *Lindberg R. E. and Longman R. W.*, On the dynamic behavior of the wobble stone. AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Lake Tahoe, Nevada, 1981.
- [9] *Паскаль М.* Асимптотическое решение уравнений движения кельского камня. ПММ, 1983, т. 46, вып. 2, с. 321–329.
- [10] *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Собр. соч., т. 1. М.–Л.: Гостехиздат, 1948, с. 57–75.
- [11] *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
- [12] *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1966, с. 7–263.

## СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

*А. В. Карапетян, А. С. Кулешов*

Проблема существования, устойчивости и ветвления стационарных движений механических систем, допускающих первые интегралы, впервые была затронута в работах Э. Дж. Рауса [1, 2] и А. Пуанкаре [3], результаты которых получили дальнейшее развитие в работах [4–17]. Несмотря на то, что общие теоремы метода Рауса справедливы для любых динамических систем, допускающих первые интегралы, большинство результатов [1–17] относится к голономным системам. Дело в том, что для голономных систем существование первых интегралов и стационарных движений связано, как правило, с наличием одних и тех же групп симметрий. Для неголономных систем, вообще говоря, это не так: как правило, стационарные движения существуют при наличии одних групп симметрий, а первые интегралы — при наличии других групп симметрий. Более того, первые интегралы неголономных систем (отличные от интеграла энергии в консервативном случае) существуют значительно реже, чем стационарные движения. Кроме того, даже при наличии первых интегралов, их явный вид, как правило, неизвестен.

В предлагаемом обзоре излагаются методы исследования стационарных движений неголономных механических систем. Общие положения иллюстрируются примерами из динамики твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (01-01-00141), Ведущих научных школ России (00-15-96150) и гранта МАС (02-01-06041).

## 1. Общие положения теории Рауса

**1.1. Введение.** Рассмотрим динамическую систему общего вида, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbf{R}^n$  —  $n$ -мерный вектор фазовых переменных,  $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$ ,  $t \in [0; +\infty)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in C^1 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}^n$ . В дальнейшем скалярное произведение двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  будем обозначать  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ , а векторное произведение —  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ .

Пусть  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)$  — решение уравнений (1.1) с начальными условиями  $\mathbf{x}(0; \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0 \in \mathbf{X}$  (момент  $t = 0$  можно выбрать в качестве начального, поскольку уравнения (1.1) не зависят явно от времени). Это решение соответствует некоторому движению рассматриваемой системы, поэтому будем называть его движением  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)$  системы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** Множество  $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$  называется инвариантным множеством системы, если  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0) \in \mathbf{X}_0$  для всех  $t \geq 0$  и произвольного  $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{X}_0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.** Если  $\dim \mathbf{X}_0 = 0$ , то  $\mathbf{X}_0 = \{\mathbf{x}^0\}$ , где  $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{X}$  — неподвижная точка системы (1.1) ( $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ ), т.е.  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0) \equiv \mathbf{x}^0$  — установившееся движение системы.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.** Если  $\dim \mathbf{X}_0 = d > 0$  ( $d < n$ ), то  $\mathbf{X}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ , где  $\varphi_0(\mathbf{x}) \in C^1 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ . Движения системы на инвариантном множестве  $\mathbf{X}_0$  удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \Big|_{\varphi_0(\mathbf{x})=0}$$

и зависят от времени.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.** [5] Если множество  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$  представляет собой инвариантное множество системы, то

$$\left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \right)_{\varphi_0=0} = \mathbf{0}.$$

Если выполняются последние соотношения и

$$\text{rank} (\partial \varphi_0 / \partial \mathbf{x})_{\varphi_0=0} = n - d,$$

то множество  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$  — инвариантное множество системы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.** Функция  $U(\mathbf{x}) \in C^1 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$  называется первым интегралом системы, если  $dU/dt = (\text{grad } U \cdot \mathbf{f}) \equiv 0$ .



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.** Компактное инвариантное множество  $\mathbf{X}_0$  системы устойчиво, если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  существует положительное число  $\delta$ , такое что  $\text{dist}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^*); \mathbf{X}_0) < \varepsilon$  для всех  $t \geq 0$  и произвольного  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ , удовлетворяющего условию  $\text{dist}(\mathbf{x}^*; \mathbf{X}_0) < \delta$ ; в частности, установившееся движение  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0) \equiv \mathbf{x}^0$  устойчиво, если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  существует положительное число  $\delta$ , такое что  $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^*) - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon$  для всех  $t \geq 0$  и произвольного  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ , удовлетворяющего условию  $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0\| < \delta$ ; в противном случае  $\mathbf{X}_0$  и  $\mathbf{x}^0$  — неустойчивые инвариантное множество и стационарное движение соответственно.

Здесь и далее  $\text{dist}(\mathbf{x}; \mathbf{X}_0) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}_0} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ ;  $\|\mathbf{x}\|$  — норма вектора  $\mathbf{x}$ .

**1.2. Инвариантные множества и их устойчивость.** Рассмотрим динамическую систему (1.1) и предположим, что она допускает не зависящие от времени и дважды непрерывно дифференцируемые по входящим в них переменным первые интегралы

$$U_0(\mathbf{x}) = c_0, U_1(\mathbf{x}) = c_1, \dots, U_k(\mathbf{x}) = c_k, (k < n - 1), \quad (1.2)$$

где  $c_0, c_1, \dots, c_k$  — произвольные постоянные.

Будем говорить, что интеграл  $U_0(\mathbf{x})$  принимает невырожденное стационарное значение на некотором множестве  $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$  для фиксированных значений первых интегралов  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$  ( $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^k$ ), если  $\mathbf{X}_0$  — максимальное связанное подмножество множества  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \delta U_0|_{\mathbf{U}=\mathbf{c}} = 0\}$  и  $\delta^2 U_0|_{\mathbf{U}=\mathbf{c}} \neq 0$  для любого  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_0$ .

Между инвариантными множествами системы (1.1) и стационарными значениями одного из интегралов данной системы при фиксированных значениях постоянных других интегралов имеется соответствие, которое устанавливает

**ТЕОРЕМА 1.1.** [5] *Если один из интегралов системы принимает невырожденное стационарное значение на некотором множестве  $\mathbf{X}_0$ , то  $\mathbf{X}_0$  — инвариантное множество этой системы.*

Доказательства этой и последующих теорем приведены в монографии [18].

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.** Движения системы, лежащие на множестве  $\mathbf{X}_0$ , зависят от времени и совпадают с установившимися, только если  $\dim \mathbf{X}_0 = 0$ . Тем не менее, эти движения можно назвать стационарными, поскольку они доставляют одно и то же стационарное значение одному из интегралов системы при фиксированных значениях других интегралов.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.5.** Инвариантное множество  $\mathbf{X}_0$ , доставляющее интегралу  $U_0$  стационарное значение при фиксированных постоянных первых интегралов  $\mathbf{U} = \mathbf{c}$ , зависит от этих постоянных. Это означает, что инвариантные множества  $\mathbf{X}_0$  образуют некоторое семейство инвариантных

множеств  $\mathbf{X}_0(\mathbf{c})$ . Что касается стационарных движений  $\mathbf{x}^0(t)$ , лежащих на множестве  $\mathbf{X}_0(\mathbf{c})$ , то они, кроме того, зависят от начальных условий  $\mathbf{x}^0$ , принадлежащих этому множеству. Это означает, что стационарные движения  $\mathbf{x}^0(t, \mathbf{c}, \mathbf{x}^0)$  образуют семейство размерности, не меньшей суммы числа произвольных и независимых для  $\mathbf{X}_0(\mathbf{c})$  постоянных среди постоянных  $\mathbf{c}$  интегралов  $\mathbf{U} = \mathbf{c}$  и числа произвольных начальных условий  $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{X}_0(\mathbf{c})$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.6.** Интеграл  $U_0(\mathbf{x}) = c_0$  (даже при фиксированных значениях первых интегралов  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ ) может принимать стационарные значения не только на множестве  $\mathbf{X}_0$ , но, вообще говоря, и на других множествах  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ . Множества  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$  соответствуют одним и тем же значениям постоянных первых интегралов  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ , но, вообще говоря, различным значениям постоянной интеграла  $U_0(\mathbf{x})$ . Эти множества также зависят от постоянных  $\mathbf{c}$  и образуют некоторые семейства инвариантных множеств  $\mathbf{X}_1(\mathbf{c}), \mathbf{X}_2(\mathbf{c}), \dots$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.7.** Семейства инвариантных множеств  $\mathbf{X}_0(\mathbf{c}), \mathbf{X}_1(\mathbf{c}), \mathbf{X}_2(\mathbf{c}), \dots$  могут иметь различные размерности, а также (при некоторых значениях  $\mathbf{c}^*$ ) общие точки. Такие точки называются точками бифуркации (по Пуанкаре). Объединение данных семейств  $\mathbf{X}(\mathbf{c}) = \mathbf{X}_0(\mathbf{c}) \cup \mathbf{X}_1(\mathbf{c}) \cup \mathbf{X}_2(\mathbf{c}) \dots$  представляет в пространстве  $\mathbf{X} \times \mathbf{R}^k$  ( $\mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^k$ ) некоторую самопересекающуюся поверхность (диаграмму Пуанкаре).

Будем говорить, что множество  $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$  доставляет функции  $U_0(\mathbf{x})$  при ограничениях  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$  локально строго минимальное (максимальное) значение, если  $U_0(\mathbf{X}_0) = \text{const}$  и существует число  $\delta > 0$  такое, что для любых значений  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющих соотношениям

$$0 < \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_0) < \delta, \quad U(\mathbf{x}) = \text{const}$$

выполняется неравенство

$$U_0(\mathbf{x}) > U_0(\mathbf{X}_0) \quad (U_0(\mathbf{x}) < U_0(\mathbf{X}_0)).$$

Основной результат, касающийся устойчивости инвариантных множеств, дает следующая

**ТЕОРЕМА 1.2.** [10, 19] *Если (компактное) инвариантное множество  $\mathbf{X}_0$  доставляет одному из первых интегралов системы локально строго минимальное или максимальное значение при фиксированных значениях постоянных других интегралов, то  $\mathbf{X}_0$  — (устойчивое) инвариантное множество этой системы.*

**1.3. Степень неустойчивости Пуанкаре.** Функция  $U_0(\mathbf{x})$  имеет локально строгий минимум [не имеет даже нестрогого минимума] при

фиксированных постоянных  $\mathbf{c}^0$  первых интегралов  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$  на множестве  $\mathbf{X}_0(\mathbf{c}^0) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ , где  $\varphi_0(\mathbf{x}) \in C^1 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}^{n-d}$ ,  $d = \dim \mathbf{X}_0(\mathbf{c}^0)$ , если вторая вариация функции  $G = U_0 + (\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{c}^0))$  положительно определена по отношению к вариациям отклонений фазовых переменных  $\boldsymbol{\xi} = (\partial \varphi_0 / \partial \mathbf{x})_{\varphi_0=0} \delta \mathbf{x}$  от этого множества [может принимать отрицательные значения в некоторой окрестности этого множества] на линейном многообразии  $\delta \mathbf{U} = \mathbf{0}$ :

$$\delta^2 G(\mathbf{X}_0(\mathbf{c}^0); \boldsymbol{\lambda}^0(\mathbf{c}^0)) \Big|_{\delta \mathbf{U}(\mathbf{X}_0(\mathbf{c}^0))=\mathbf{0}} > 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} : 0 < \|\boldsymbol{\xi}\| < \delta$$

$$\left[ \exists \boldsymbol{\xi}, (0 < \|\boldsymbol{\xi}\| < \delta) : \delta^2 G(\mathbf{X}_0(\mathbf{c}^0); \boldsymbol{\lambda}^0(\mathbf{c}^0)) \Big|_{\delta \mathbf{U}(\mathbf{X}_0(\mathbf{c}^0))=\mathbf{0}} < 0 \right]$$

( $\delta$  — некоторое положительное число). Эта вторая вариация может быть представлена в виде

$$\frac{1}{2}(\mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}),$$

где  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^{n-d-k}$  и  $\mathbf{Q}_0$  —  $(n-d-k) \times (n-d-k)$ -матрица ( $n = \dim \mathbf{x}$ ,  $d = \dim \mathbf{X}_0(\mathbf{c}^0)$ ,  $k = \dim \mathbf{U}$ ). Индекс этой квадратичной формы называется степенью неустойчивости Пуанкаре: если степень неустойчивости Пуанкаре равна [не равна] нулю, то  $U_0(\mathbf{x})$  имеет локально строгий минимум [не имеет даже нестрогого минимума] при фиксированных значениях  $\mathbf{c}^0$  первых интегралов  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$  на множестве  $\mathbf{X}_0(\mathbf{c}^0)$ .

Рассмотрим случай, когда  $\dim \mathbf{X}_0 = 0$ , т.е.  $\mathbf{X}_0(\mathbf{c}) = \{\mathbf{x}^0(\mathbf{c})\}$ , где  $\mathbf{x}^0(\mathbf{c})$  — семейство стационарных движений системы  $(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0(\mathbf{c})) \equiv \mathbf{0})$ . Пусть  $\boldsymbol{\xi} = \delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0(\mathbf{c}^0)$ , тогда линеаризованная система уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_0 \boldsymbol{\xi}.$$

Здесь  $(\cdot)_0 = (\cdot)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0(\mathbf{c}^0)}$ .

**ТЕОРЕМА 1.3.** *Если степень неустойчивости Пуанкаре стационарного движения  $\mathbf{x}_0(\mathbf{c}^0)$  нечетна и  $\text{rank}(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x})_0 = n - k$ , то это стационарное движение неустойчиво.*

Отметим, что теорема 1.3. представляет собой модификацию одной из теорем Кельвина — Четаева [15, 16]. Формулировка и первое доказательство теоремы приведены в работе [20]. Более простое доказательство теоремы 1.3. предложено в [21].

## 2. Механические системы с симметрией

**2.1. Инвариантные множества стационарных движений.** В этом параграфе мы будем рассматривать консервативные механические системы с  $n$  степенями свободы, допускающие  $k$ -параметрическую группу симметрий ( $k < n$ ). Пусть  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$  и  $\mathbf{r} \in \mathbf{M} \subseteq \mathbf{R}^m$  – квазискорости (в частности, импульсы или обобщенные скорости) и существенные координаты системы соответственно,  $\mathbf{M}$  – конфигурационное пространство существенных координат;  $\dim \mathbf{M} \leq n$ . Данная механическая система допускает интеграл энергии

$$2U_0(\mathbf{v}; \mathbf{r}) = (\mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + 2V(\mathbf{r}) = 2c_0 \quad (2.1)$$

и  $k$  нётеровых интегралов

$$\mathbf{U}(\mathbf{v}; \mathbf{r}) = \mathbf{B}^T(\mathbf{r})\mathbf{v} = \mathbf{c} \quad (\mathbf{c} \in \mathbf{R}^k) \quad (2.2)$$

соответствующих группе симметрий.

Здесь  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \in \mathcal{C}^2$  – положительно определенная  $n \times n$ -матрица кинетической энергии,  $V(\mathbf{r}) \in \mathcal{C}^2 : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{R}$  – потенциальная энергия системы,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = n \times k$ -матрица интегралов Нётер ( $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \in \mathcal{C}^2$ ;  $\text{rank } \mathbf{B} = k$ ).

Согласно результатам, изложенным в предыдущем параграфе, критическим точкам интеграла энергии при фиксированных значениях постоянных других интегралов отвечают стационарные движения рассматриваемой системы. Учитывая структуру интегралов (2.1) и (2.2), задачу отыскания стационарных движений можно решать в два этапа. Сначала можно найти минимум квадратичной по  $\mathbf{v}$  функции (2.1) на линейном по  $\mathbf{v}$  многообразии (2.2), рассматривая  $\mathbf{r}$  как параметры. Очевидно, этот минимум зависит от  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{c}$ ; обозначим его  $W_c(\mathbf{r})$ . После определения функции  $W_c(\mathbf{r})$ , которая называется эффективным потенциалом, задача поиска стационарных движений сводится к определению критических точек этой функции на конфигурационном многообразии  $\mathbf{M}$ .

В явном виде выражение  $W_c(\mathbf{r})$  записывается следующим образом

$$W_c(\mathbf{r}) = V + \frac{1}{2} \left( (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \right). \quad (2.3)$$

При этом

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{c} = \mathbf{v}_c(\mathbf{r}). \quad (2.4)$$

**Замечание 2.1.** Если в некоторой точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0$  имеем  $\text{rank } \mathbf{B}(\mathbf{r}^0) < k$ , то исследование стационарных движений в окрестности точки  $\mathbf{r}^0$  конфигурационного пространства требует отдельного обсуждения (см. последний пункт этого параграфа).

С помощью теоремы 1.1. легко доказывается

**ТЕОРЕМА 2.1.** [14, 18] *Если эффективный потенциал принимает невырожденное стационарное значение на некотором множестве  $\mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}$ , то  $\mathbf{M}_0$  — инвариантное множество в пространстве конфигураций  $\mathbf{M}$ , а множество*

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{M}_0 \times \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{v} = \mathbf{v}_c(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbf{M}_0\} \subset \mathbf{M} \times \mathbf{R}^n \quad (2.5)$$

— инвариантное множество в фазовом пространстве  $\mathbf{M} \times \mathbf{R}^n$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.** Множество  $\mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}$  и соответствующее ему множество  $\mathbf{N}_0 \subset \mathbf{M} \times \mathbf{R}^n$  зависят от параметров  $\mathbf{c}$ . Эффективный потенциал может принимать стационарные значения при фиксированных значениях  $\mathbf{c}$  не только на множестве  $\mathbf{M}_0$ , но также и на некоторых других множествах  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots$ . Эти множества и соответствующие им множества  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots$  также зависят от параметров  $\mathbf{c}$ . Движения системы  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ , лежащие на множестве  $\mathbf{N}$ , можно назвать стационарными, поскольку они доставляют стационарные значения интегралу энергии на фиксированных уровнях других первых интегралов.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.** Если  $\mathbf{M} = \mathbf{R}^m$ , то для того, чтобы найти инвариантные множества, нужно решить систему  $\partial W_c / \partial \mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Если же  $\mathbf{M} = \{\mathbf{r} \in \mathbf{R}^m : \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}\}$ , где  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) \in \mathcal{C}^1 : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^{m-\mu}$  ( $\mu = \dim \mathbf{M}$ ), то нужно решить систему  $\partial \tilde{W}_c / \partial \mathbf{r} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ , где  $\tilde{W}_c(\mathbf{r}) = W_c + (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi})$  и  $\boldsymbol{\nu}$  —  $\mu$ -вектор неопределенных множителей Лагранжа.

**2.2. Устойчивость инвариантных множеств стационарных движений.** **ТЕОРЕМА 2.2.** [14, 18] *Если эффективный потенциал принимает локально строгий минимум при фиксированных значениях  $\mathbf{c}^0$  параметров  $\mathbf{c}$  на некотором компактном множестве  $\mathbf{M}_0(\mathbf{c}^0) \subset \mathbf{M}$ , то  $\mathbf{M}_0(\mathbf{c}^0)$  — устойчивое инвариантное в пространстве конфигураций множество, а  $\mathbf{N}_0(\mathbf{c}^0)$  — устойчивое инвариантное в фазовом пространстве множество системы.*

Данная теорема является простым следствием теоремы 1.2.

Рассмотрим случай, когда  $\dim \mathbf{M}_0 = 0$ , т.е.  $\mathbf{M}_0(\mathbf{c}) = \{\mathbf{r}^0(\mathbf{c})\}$ . Тогда (см. (2.5))  $\dim \mathbf{N}_0 = 0$ , т.е.  $\mathbf{N}_0(\mathbf{c}) = \{\mathbf{r}^0(\mathbf{c}); \mathbf{v}^0(\mathbf{c})\}$ , где  $\mathbf{v}^0(\mathbf{c}) = \mathbf{v}^0(\mathbf{r}^0(\mathbf{c}))$  (см. (2.4)). Это означает, что система допускает стационарные движения  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0$ ;  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0$ .

Уравнения движения системы, описываемой фазовыми переменными  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ , могут быть представлены в виде

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathbf{v}; \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}; \mathbf{v}). \quad (2.6)$$

Здесь  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \in \mathcal{C}^1$  —  $m \times n$ -матрица и  $\mathbf{f}(\mathbf{r}; \mathbf{v}) \in \mathcal{C}^1 : \mathbf{M} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , причем  $\mathbf{F}(\mathbf{r}^0)\mathbf{v}^0 = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{f}(\mathbf{r}^0; \mathbf{v}^0) = \mathbf{0}$ , поскольку  $\{\mathbf{r}^0; \mathbf{v}^0\}$  — стационарное движение системы (2.6).

Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{r}^0$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^0$ , тогда линеаризованная система уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \mathbf{S}_0 \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{S}_0$  —  $(m+n) \times (m+n)$ -матрица вида

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{Fv}}{\partial \mathbf{r}} & \mathbf{F} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \end{pmatrix}_0.$$

Из теоремы 1.3 следует

**ТЕОРЕМА 2.3.** [14, 18] *Если степень неустойчивости Пуанкаре стационарного движения нечетна и  $\text{rank } \mathbf{S}_0 = n - k + \mu$ , то оно неустойчиво.*

Отметим, что если  $\mathbf{M} = \mathbf{R}^m$ , то  $\mu = m$  (см. замечание 2.3).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.** Инвариантные множества  $\mathbf{N}_i(\mathbf{c}^0)$  и  $\mathbf{N}_j(\mathbf{c}^0)$  ( $i \neq j$ ) изолированы одно от другого, если и только если множества  $\mathbf{M}_i(\mathbf{c}^0)$  и  $\mathbf{M}_j(\mathbf{c}^0)$  изолированы одно от другого (см. (2.5)).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.5.** Индекс второй вариации интеграла энергии на линейном многообразии  $\delta \mathbf{U} = \mathbf{0}$  равен индексу второй вариации эффективного потенциала. Поэтому степень неустойчивости Пуанкаре инвариантного множества  $\mathbf{N}_0(\mathbf{c}^0)$  равна  $\text{ind } \delta^2 W_c^0(\mathbf{M}_0(\mathbf{c}^0))$ , где  $(\mathbf{r} \in \mathbf{M})$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.6.** Инвариантные множества  $\mathbf{N}_0(\mathbf{c}), \mathbf{N}_1(\mathbf{c}), \mathbf{N}_2(\mathbf{c}), \dots$  могут быть представлены в пространстве  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{M} \times \mathbf{R}^k$  ( $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{r} \in \mathbf{M}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^k$ ) как некоторые поверхности. Инвариантные (в пространстве конфигураций) множества  $\mathbf{M}_0(\mathbf{c}), \mathbf{M}_1(\mathbf{c}), \mathbf{M}_2(\mathbf{c}), \dots$  аналогично могут быть представлены в пространстве  $\mathbf{M} \times \mathbf{R}^k$  ( $\mathbf{r} \in \mathbf{M}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^k$ ). Согласно замечаниям 2.4 и 2.5, последние можно рассматривать как диаграммы Пуанкаре.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.7.** Согласно определению эффективного потенциала  $W_c(\mathbf{r}) \leq U_0(\mathbf{v}; \mathbf{r}) = c_0$ , где  $c_0$  — постоянная интеграла энергии. Поэтому неравенство  $W_c(\mathbf{r}) \leq c_0$  определяет в пространстве конфигураций области возможности движения при данных значениях  $\mathbf{c}$  постоянных первых интегралов и данного значения  $c_0$  интеграла энергии. Топологический тип этих областей изменяется на поверхностях  $(\mathbf{c}; c_0) \in \Sigma$ , где  $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \dots$

$$\Sigma_s = \{(\mathbf{c}; h) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R} : h = h_s(\mathbf{c}) = V_c(\mathbf{M}_s(\mathbf{c}))\} \quad (s = 0, 1, 2, \dots)$$

Для консервативных систем с симметрией [12, 13] все точки пространства  $(\mathbf{c}; c_0)$  инвариантны. Поверхность  $\Sigma$  в пространстве  $(\mathbf{c}; c_0)$  представляет собой диаграмму Смейла [12].

**2.3. О построении эффективного потенциала в сингулярных случаях.** Очевидно, что эффективный потенциал (2.3) определен только для таких точек конфигурационного пространства, в которых  $\text{rank } \mathbf{V}(\mathbf{r}) = k$ . Если в некоторой точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0$  имеем  $\text{rank } \mathbf{V}(\mathbf{r}^0) < k$ , то матрица  $\mathbf{V}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{V}$  не является обратимой в точке  $\mathbf{r}^0$ , поскольку

$$\det (\mathbf{V}^T(\mathbf{r}^0) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r}^0) \mathbf{V}(\mathbf{r}^0)) = 0.$$

Тем не менее, в некоторых случаях удастся определить эффективный потенциал и в этих точках, так как в этих точках константы  $\mathbf{c}$  нётеровых интегралов (2.2) могут быть не произвольны [22].

Предположим, что имеется точка конфигурационного пространства, в которой  $\text{rank } \mathbf{V} = k - 1$ . Без ограничения общности предположим, что

$$\text{rank } \mathbf{V}(\mathbf{0}) = k - 1, \quad \text{rank } \mathbf{V}(\mathbf{r}) = k, \quad \forall \mathbf{r} : 0 < \|\mathbf{r}\| < \rho,$$

где  $\rho$  — некоторое положительное число.

Более того, не ограничивая общности, мы можем рассмотреть случай, когда  $k = 2$ , т.е.  $\mathbf{V} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ , где  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  —  $n$ -мерные векторы, зависящие от  $\mathbf{r}$ , и считать, что

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}(\mathbf{r}) + \beta_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}(\mathbf{r}) + \beta_2(\mathbf{r}),$$

$$\beta_1(\mathbf{0}) = \beta_2(\mathbf{0}), \quad \mathbf{b}_1(\mathbf{r}) \neq \lambda \mathbf{b}_2(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} : 0 < \|\mathbf{r}\| < \rho.$$

В этом случае линейные интегралы (2.2) будут иметь вид

$$(\mathbf{b}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}) = k_1, \quad (\mathbf{b}_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}) = k_2, \quad (2.7)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — произвольные константы  $\forall \mathbf{r} : 0 < \|\mathbf{r}\| < \rho$  и  $k_1 = k_2 = k$  при  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ .

Для построения эффективного потенциала  $W_{k_1, k_2}$  при  $k_1 \neq k_2$  нам нужно найти минимум функции (2.1) по переменным  $\mathbf{v}$  на фиксированных уровнях интегралов (2.7). Для этого мы должны решить систему уравнений

$$\mathbf{A} \mathbf{v} - \lambda_1 \mathbf{b}_1 - \lambda_2 \mathbf{b}_2 = 0 \quad (2.8)$$

относительно переменных  $\mathbf{v}$ . Здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — множители Лагранжа. Разрешая систему (2.8) относительно  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_2 \quad (2.9)$$

и подставляя полученное выражение в интегралы (2.7), находим, что

$$c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 = k_1, \quad c_{21}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 = k_2, \quad (2.10)$$

где  $c_{ij} = c_{ij}(\mathbf{r}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j) = c_{ji}(\mathbf{r})$ .

Разрешая систему (2.10) относительно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , получим для них следующие выражения

$$\lambda_1 = \frac{c_{22}k_1 - c_{12}k_2}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad \lambda_2 = \frac{c_{11}k_2 - c_{12}k_1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}. \quad (2.11)$$

Таким образом, учитывая (2.9) и (2.11), получаем, что

$$W_{k_1, k_2} = \frac{c_{22}k_1^2 - 2c_{12}k_1k_2 + c_{11}k_2^2}{2(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)} + V. \quad (2.12)$$

$$\mathbf{v}_{k_1, k_2} = \frac{c_{22}k_1 - c_{12}k_2}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_1 + \frac{c_{11}k_2 - c_{12}k_1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_2, \quad (2.13)$$

Очевидно, что соотношения (2.12) и (2.13) эквивалентны соответствующим соотношениям (2.3) и (2.4). Более того, если  $k_1 \neq k_2$ , то  $\mathbf{r} \neq 0$  и  $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$  (по крайней мере, в области  $0 < \|\mathbf{r}\| < \rho$ ).

Рассмотрим теперь случай  $k_1 = k_2 = k$ , который соответствует значению  $\mathbf{r} = 0$ . Тогда

$$W_{k, k} = k^2 \frac{(c_{22} - 2c_{12} + c_{11})}{2(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)} + V. \quad (2.14)$$

Заметим, что  $c_{ij}(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r}) + \delta_{ij}(\mathbf{r})$ , где  $\delta_{ij}(\mathbf{0}) = 0$ , т.е. (см. (2.14))

$$W_{k, k} = \frac{k^2}{2c(1 + \delta)} + V; \quad \delta = \delta(\mathbf{r}) = \frac{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}{c(\delta_{11} + \delta_{22} - 2\delta_{12})}.$$

Если найдется функция  $d(\mathbf{r})$  такая, что существует значение  $d(\mathbf{0})$  и существует предел  $\lim_{\mathbf{r} \rightarrow 0} (\delta(\mathbf{r})/d(\mathbf{r})) = 1$ , то положим

$$W_{k, k} = \frac{k^2}{2c(1 + d)} + V. \quad (2.15)$$

Таким образом, эффективный потенциал имеет вид (2.12) для всех  $k_1 \neq k_2$  и вид (2.15) при  $k_1 = k_2 = k$  в замкнутой области  $\|\mathbf{r}\| < \rho$  конфигурационного пространства (при условии, что существует функция  $d(\mathbf{r})$ , обладающая указанными выше свойствами).



### 3. Стационарные движения шара на абсолютно шероховатой плоскости

**3.1. Предварительные замечания.** Теория, изложенная в первых двух параграфах, согласно которой критическим (экстремальным) значениям одного из интегралов системы при фиксированных значениях постоянных других интегралов отвечают (устойчивые) действительные движения системы (которые называются стационарными), применима к любым динамическим системам, в том числе, к неголономным. При этом предполагается, что уравнения движения могут быть представлены в виде (1.1), а первые интегралы имеют вид (1.2).

Поскольку движение систем с дифференциальными связями нередко описывают уравнениями, содержащими реакции этих связей или неопределенные множители Лагранжа, то применение теории Рауса к таким системам требует особой внимательности. Дело в том, что указанные выше уравнения систем с дифференциальными связями не могут быть представлены в виде (1.1), так как для реакций связей или неопределенных множителей Лагранжа нет соответствующих дифференциальных уравнений. Поэтому для применения теории, изложенной в предыдущих параграфах, к неголономным системам, необходимо исключить зависимые скорости из выражений всех первых интегралов указанных уравнений движения системы с помощью уравнений неголономных связей. При этом полученные функции будут представлять собой первые интегралы уравнений движения рассматриваемой системы, записанных в форме Чаплыгина (см. следующий параграф), Воронца, Больцмана — Гамеля и др., которые не содержат реакции связей и неопределенные множители Лагранжа и представимы в виде (1.1), а сами первые интегралы примут вид (1.2).

Проиллюстрируем изложенные выше соображения на примере исследования задачи о стационарных движениях неоднородного динамически симметричного шара на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости [22-24]<sup>1</sup>.

**3.2. Постановка задачи.** Пусть  $m$  — масса шара,  $A_1$  и  $A_3$  — его экваториальный и осевой центральные моменты инерции,  $r$  — радиус,  $a$  — расстояние от центра масс шара до его геометрического центра и  $g$  — ускорение свободного падения. Скорость центра масс шара обозначим через  $\mathbf{v}$ , а его угловую скорость — через  $\boldsymbol{\omega}$ . Обозначим также единичный вектор восходящей вертикали и единичный вектор оси симметрии через  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\mathbf{e}_3$  соответственно.

---

<sup>1</sup>См. также: Кулешов А.С. Исследование устойчивости и бифуркаций стационарных движений некоторых неголономных систем. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва, 2001.

Уравнения движения шара, отнесенные к его главным центральным осям инерции, можно представить в виде

$$m\dot{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{v}] = -mg\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{R}, \quad (3.1)$$

$$\Theta\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times \Theta\boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{r} \times \mathbf{R}], \quad (3.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}] = 0, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] = 0. \quad (3.4)$$

Уравнения (3.1) и (3.2) выражают соответственно законы изменения импульса и кинетического момента шара, уравнение (3.3) — условие постоянства вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  в инерциальной системе отсчета, а уравнение (3.4) — условие отсутствия скольжения шара. Здесь  $\mathbf{R}$  — реакция опорной плоскости,  $\Theta = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$  — центральный тензор инерции шара и  $\mathbf{r} = (-r\gamma_1, -r\gamma_2, -r\gamma_3 + a)$  — радиус-вектор точки касания шара с горизонтальной плоскостью по отношению к его центру масс.

Система (3.1)–(3.4) допускает четыре первых интеграла [22–24]

$$2U_0 = m\mathbf{v}^2 + (\Theta\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2mga(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e}_3) = 2c_0, \quad (3.5)$$

$$U_1 = \left( \Theta\boldsymbol{\omega} \cdot \left( \boldsymbol{\gamma} - \frac{a}{r}\mathbf{e}_3 \right) \right) = c_1, \quad (3.6)$$

$$U_2 = I(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_3) = c_2, \quad (3.7)$$

$$U_3 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1 \quad (3.8)$$

(интеграл энергии (3.5), интеграл Желле (3.6), интеграл Чаплыгина (3.7) и геометрический интеграл (3.8)).

Здесь  $c_0$ ,  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные константы, а через  $I$  обозначено выражение

$$I = \left[ A_1 A_3 + mr^2 \left( A_1 (1 - \gamma_3^2) + A_3 (\gamma_3 - a/r)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_3 = (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e}_3).$$

Геометрический интеграл (3.8) можно рассматривать как конфигурационное пространство существенных координат  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{S}^2$ , где  $\mathbf{S}^2$  — двумерная сфера, называемая сферой Пуассона. Таким образом, система уравнений (3.1)–(3.4) имеет интеграл энергии (3.5) и два линейных (относительно квазискоростей  $\boldsymbol{\omega}$ ) первых интеграла (3.6) и (3.7).

Очевидно, выражение полной энергии шара  $U_0$  содержит переменную  $\mathbf{v}$ , которую можно исключить с помощью уравнения (3.4). При этом функция  $U_0$  примет вид

$$2U_0 = m([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]^2) + (\Theta\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2mga(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e}_3) = 2c_0, \quad (3.9)$$

и будет зависеть, как и интегралы (3.6)–(3.8), только от переменных  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$ . Выражения (3.6)–(3.8) и (3.9) представляют собой первые интегралы системы уравнений движения шара вида

$$\begin{aligned} \Theta \dot{\boldsymbol{\omega}} + m(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \dot{\boldsymbol{\omega}} - m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - m(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} + m(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\omega} + \\ + [\boldsymbol{\omega} \times \Theta \boldsymbol{\omega}] - m(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] - mg[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}] = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}] = 0.$$

Уравнение (3.10) получается из уравнения (3.2), если из последнего исключить реакцию  $\mathbf{R}$  с помощью уравнений (3.1), (3.4), а также соотношения  $\dot{\mathbf{v}} + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}] = 0$ , которое получается из (3.4) дифференцированием по времени.

Система уравнений (3.10), (3.3) замкнута относительно переменных  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$ , имеет вид (1.1), допускает квадратичный первый интеграл (3.9) вида (2.1) и два линейных первых интеграла (3.6)–(3.7) вида (2.2). Следовательно, при изучении стационарных движений этой системы можно использовать теорию, изложенную в первых двух параграфах настоящего обзора.

**3.3. Построение эффективного потенциала.** Согласно теории, изложенной в предыдущем параграфе, исследование условий существования и устойчивости стационарных движений неоднородного динамически симметричного шара на абсолютно шероховатой плоскости сводится к исследованию эффективного потенциала данной системы. Для его построения мы должны найти минимум выражения (3.9) по переменным  $\boldsymbol{\omega}$  на фиксированных уровнях интегралов Желле (3.6) и Чаплыгина (3.7).

Заметим, что данные интегралы зависят на полюсах  $P_{\pm}$  ( $\gamma_3 = \pm 1$ ) сферы Пуассона  $\mathbf{S}^2$ . Действительно, если обозначить  $\omega_i$  и  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) проекции векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  на главные центральные оси инерции шара, то интегралы (3.6) и (3.7) можно записать в виде

$$U_1 = A_1(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + A_3\omega_3(\gamma_3 - a/r) = c_1,$$

$$U_2 = \left[ A_1A_3 + mr^2 \left( A_1(1 - \gamma_3^2) + A_3(\gamma_3 - a/r)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \omega_3 \equiv I\omega_3 = c_2.$$

Таким образом, для полюсов  $P_{\pm}$  ( $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = \pm 1$ ) имеем:

$$U_1 = A_3(\pm 1 - a/r)\omega_3 = c_1, \quad U_2 = I_{\pm}\omega_3 = c_2,$$

$$I_{\pm} = \left[ A_1A_3 + mr^2A_3(\pm 1 - a/r)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

и поэтому

$$I_{\pm}c_1 = A_3(\pm 1 - a/r)c_2.$$

В соответствии с теорией, изложенной в предыдущем параграфе (см. пункт 2.3.), если

$$I_{\pm}c_1 \neq A_3(\pm 1 - a/r)c_2,$$

то эффективный потенциал имеет вид

$$W_{c_1, c_2}(\gamma_3) = \frac{\left(Ic_1 - A_3\left(\gamma_3 - \frac{a}{r}\right)c_2\right)^2}{2A_1^2A_3(1 - \gamma_3^2)} - mga\gamma_3. \quad (3.11)$$

Если

$$c_2 = \frac{I_+c_1}{A_3\left(1 - \frac{a}{r}\right)} = c_{2+},$$

то эффективный потенциал имеет вид

$$W_{c_1, c_{2+}}(\gamma_3) = \frac{(1 - \gamma_3) \left[ A_3 \left( 1 - \frac{2a}{r} + \gamma_3 \right) + mr^2 \left( 1 - \frac{a}{r} \right)^2 (1 + \gamma_3) \right]^2 c_1^2}{2A_3(1 + \gamma_3) \left( 1 - \frac{a}{r} \right)^2 \left( \left( 1 - \frac{a}{r} \right) I_+ + \left( \gamma_3 - \frac{a}{r} \right) I_+ \right)^2} - mga\gamma_3. \quad (3.12)$$

Аналогично, если

$$c_2 = -\frac{I_-c_1}{A_3\left(1 + \frac{a}{r}\right)} = c_{2-},$$

то эффективный потенциал имеет вид

$$W_{c_1, c_{2-}}(\gamma_3) = \frac{(1 + \gamma_3) \left[ A_3 \left( 1 + \frac{2a}{r} - \gamma_3 \right) + mr^2 \left( 1 + \frac{a}{r} \right)^2 (1 - \gamma_3) \right]^2 c_1^2}{2A_3(1 - \gamma_3) \left( 1 + \frac{a}{r} \right)^2 \left( \left( 1 + \frac{a}{r} \right) I_- - \left( \gamma_3 - \frac{a}{r} \right) I_- \right)^2} - mga\gamma_3. \quad (3.13)$$

**3.4. Стационарные движения шара.** Очевидно, функция (3.12) не имеет особенностей в окрестности полюса  $P_+$  сферы Пуассона. Аналогично, функция (3.13) не имеет особенностей в окрестности полюса  $P_-$ . Эти полюса соответствуют перманентным вращениям

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_{\pm} = \frac{c_1}{A_3\left(\pm 1 - \frac{a}{r}\right)}, \quad \mathbf{v} = 0$$

шара вокруг его вертикально расположенной оси динамической симметрии.

Если  $\gamma_3 = +1$ , то центр масс шара занимает наинизшее положение. Соответствующие перманентные вращения будут устойчивы (неустойчивы) при выполнении условия

$$dW_{c_1, c_2+}(\gamma_3)/d\gamma_3 \Big|_{\gamma_3=+1} < 0 \quad (> 0),$$

т.е. когда выполняется неравенство

$$(A_3 + mr(r-a))^2 c_1^2 + 4mgaA_3^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 (A_1 + m(r-a)^2) > 0 \quad (< 0).$$

Очевидно, что данное неравенство выполнено при любом значении  $c_1$  константы интеграла (3.6). Таким образом, перманентные вращения шара с наинизшим расположением центра масс всегда устойчивы.

Если  $\gamma_3 = -1$ , то центр масс шара занимает наивысшее положение. Соответствующие перманентные вращения будут устойчивы (неустойчивы) при выполнении условия

$$dW_{c_1, c_2-}(\gamma_3)/d\gamma_3 \Big|_{\gamma_3=-1} > 0 \quad (< 0),$$

т.е. когда выполняется неравенство

$$(A_3 + mr(r+a))^2 c_1^2 - 4mgaA_3^2 \left(1 + \frac{a}{r}\right)^2 (A_1 + m(r+a)^2) > 0 \quad (< 0). \quad (3.14)$$

Таким образом, неравенство (3.14) представляет собой условие устойчивости перманентных вращений шара с наивысшим расположением центра масс.

При произвольных значениях постоянных интегралов Желле и Чаплыгина система уравнений (3.1)–(3.4) имеет также двухпараметрическое семейство решений

$$\omega_1 = \omega\gamma_1, \quad \omega_2 = \omega\gamma_2, \quad \omega_3 = \omega \cos\theta + \Omega, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma_3^2 = \sin^2\theta, \quad \gamma_3 = \cos\theta, \quad (3.15)$$

где постоянные  $\omega$  и  $\Omega$  находятся из системы уравнений

$$A_1\omega \sin^2\theta + A_3 \left(\cos\theta - \frac{a}{r}\right) (\omega \cos\theta + \Omega) = c_1; \quad I_\theta (\omega \cos\theta + \Omega) = c_2,$$

а угол  $\theta$  — из уравнения

$$dW(\theta)/d\theta = 0. \quad (3.16)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$W(\theta) = W_{c_1, c_2}(\gamma_3) \Big|_{\gamma_3 = \cos \theta} = \frac{\left( I_\theta c_1 - A_3 \left( \cos \theta - \frac{a}{r} \right) c_2 \right)^2}{2A_1^2 A_3 \sin^2 \theta} - mga \cos \theta,$$

$$I_\theta = I \Big|_{\gamma_3 = \cos \theta} = \left[ A_1 A_3 + mr^2 A_1 \sin^2 \theta + mr^2 A_3 (\cos \theta - a/r)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Решениям уравнения (3.16) отвечают параллели  $P_\theta = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \sin^2 \theta, \gamma_3 = \cos \theta)$  сферы Пуассона, а решениям (3.15) — регулярные прецессии шара: шар вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси динамической симметрии, которая, в свою очередь, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикали; при этом угол между осью динамической симметрии и вертикалью постоянно равен  $\theta = \arccos \gamma_3$ . Точки минимума (максимума) эффективного потенциала  $W(\theta)$  соответствуют устойчивым (неустойчивым) регулярным прецессиям шара.

**3.5. Исследование регулярных прецессий шара.** Уравнение (3.16) в явном виде записывается следующим образом:

$$\frac{mga}{\sin^3 \theta} F(\theta) = 0,$$

$$F(\theta) = \left( x_1 (\cos \theta - x_3) p_2 - \tilde{I}_\theta p_1 \right) \times$$

$$\times \left( (1 - x_3 \cos \theta) p_2 - \frac{\cos \theta + x_2 (\cos \theta - x_3) (1 - x_3 \cos \theta)}{\tilde{I}_\theta} p_1 \right) - \sin^4 \theta,$$

$$\tilde{I}_\theta = I_\theta / A_1 = \left[ x_1 + x_2 \sin^2 \theta + x_1 x_2 (\cos \theta - x_3)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.17)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$x_1 = A_3 / A_1 \in (0, 2), \quad x_2 = mr^2 / A_1, \quad x_3 = a/r \in (0, 1) -$$

безразмерные параметры;

$$p_1 = c_1 / \sqrt{mgaA_1}, \quad p_2 = c_2 / \sqrt{mgaA_1}$$

— безразмерные постоянные интегралов.

Уравнение

$$F(\theta) = 0 \quad (3.18)$$

представляет собой условие существования регулярных прецессий шара вида (3.16). Данное уравнение детально рассматривалось в работе [24]. Приведем здесь некоторые его свойства.

Очевидно, что при каждом фиксированном  $\theta$  уравнение (3.18) задает некоторую кривую второго порядка. Анализ ее инвариантов показывает, что при любом  $\theta \neq \pi k$  (где  $k$  — целое число) эта кривая представляет собой гиперболу, а при  $\theta = \pi k$  — прямую. В зависимости от того, является ли  $k$  четным или нечетным, эта прямая соответствует одному из однопараметрических решений системы (3.10), (3.3), которые, в свою очередь, отвечают перманентным вращениям шара вокруг оси динамической симметрии (с наимизшим расположением центра масс при  $k = 0$  и  $k$  — четном и с наивысшим расположением центра масс при  $k$  — нечетном).

Кроме того, в работе [24] с помощью компьютерной программы MAPLE V Release 5.1 в пространстве переменных  $p_1$ ,  $p_2$  и  $\theta$  была построена поверхность, задаваемая уравнением (3.18) при фиксированных значениях параметров  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , а также некоторые характерные сечения этой поверхности плоскостями  $p_2 = lp_1$ , где постоянная  $l$  может принимать различные значения. На рис. 1 при  $x_1 = 1.5$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = 0.9$  представлено сечение данной поверхности плоскостью

$$p_2 = -\frac{[x_1 + x_1 x_2 (1 + x_3)^2]^{1/2}}{x_1 (1 + x_3)} p_1.$$

Прямая, полученная в этом сечении, соответствует перманентным вращениям шара вокруг оси динамической симметрии при наивысшем расположении центра масс. Видно, как от этой прямой отходят устойчивые регулярные прецессии шара.

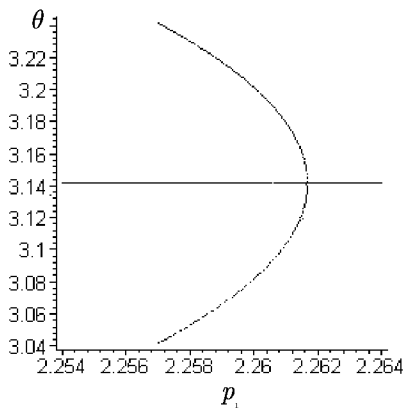


Рис. 1

#### 4. Стационарные движения неголономных систем Чаплыгина. Общая теория

**4.1. Постановка задачи.** Рассмотрим консервативную механическую систему, положение которой определяется  $n + \nu$  обобщенными координатами  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n+\nu})^T$ , а обобщенные скорости  $\dot{\mathbf{z}} = (\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_{n+\nu})^T$  стеснены  $\nu$  неинтегрируемыми соотношениями вида

$$\mathbf{N}(\mathbf{z})\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{N}(\mathbf{z})$  —  $\nu \times (n + \nu)$ -матрица ( $\mathbf{N}(\mathbf{z}) \in \mathcal{C}^1$ ,  $\text{rank } \mathbf{N} = \nu$ ), а символ  $T$  обозначает транспонирование. Такая система является неголономной и ее движение можно описать уравнениями Лагранжа первого рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{z}}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{z}} + \mathbf{N}^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (4.2)$$

Здесь  $2T = (\overline{\mathbf{A}}(\mathbf{z})\dot{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}})$  — кинетическая энергия,  $V = V(\mathbf{z})$  — потенциальная энергия ( $\overline{\mathbf{A}}(\mathbf{z}) \in \mathcal{C}^2$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{z}) \in \mathcal{C}^2$ ),  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^\nu$  — неопределенные множители Лагранжа. Система (4.1), (4.2) замкнута относительно переменных  $\mathbf{z}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  и допускает интеграл энергии

$$T + V = \text{const.}$$

Разрешая уравнения неголономных связей (4.1) относительно каких-либо  $\nu$  обобщенных скоростей, что всегда можно сделать, поскольку  $\text{rank } \mathbf{N} = \nu$ , представим эти уравнения в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\mathbf{x}}, \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_\nu)^T$ . Будем называть обобщенные скорости  $\dot{\mathbf{x}}$  независимыми, а обобщенные скорости  $\dot{\mathbf{y}}$  — зависимыми только потому, что  $\dot{\mathbf{y}}$  выражаются через  $\dot{\mathbf{x}}$  с помощью соотношений (4.3), понимая чистую условность такого определения. Относительно  $\nu \times n$ -матрицы  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  будем предполагать, что она непрерывно дифференцируема по входящим в нее обобщенным координатам.

Предположим теперь, что кинетическая энергия  $T$ , потенциальная энергия  $V$  и матрица  $\mathbf{M}$  неголономных связей, разрешенных относительно части обобщенных скоростей, не зависят от обобщенных координат, соответствующих этим скоростям (т.е.  $\partial T / \partial \mathbf{y} = \mathbf{0}$ ,  $\partial V / \partial \mathbf{y} = \mathbf{0}$ ,  $\partial \mathbf{M} / \partial \mathbf{y} = \mathbf{0}$ ). Такие неголономные системы называются системами Чаплыгина и наиболее часто встречаются в приложениях. При этом урав-



нения движения таких систем можно представить в виде уравнений Чаплыгина [25]

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{M}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}, \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_*}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial T_*}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + (\Omega \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}}. \quad (4.5)$$

Здесь  $2T_* = (\Theta(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \equiv 2T_{(4.4)}$  — результат исключения зависимых обобщенных скоростей  $\dot{\mathbf{y}}$  из кинетической энергии  $T$  с помощью соотношений (4.4), а  $\Omega = \Omega(\mathbf{x})$  представляет собой  $n \times n \times n$ -тензор вида

$$\Omega = (\omega_{ijh}); \quad \omega_{ijh} = \left( \frac{\partial m_{\alpha\beta i}}{\partial x_j} - \frac{\partial m_{\alpha\beta j}}{\partial x_i} \right) \theta_{\alpha\beta h} = -\omega_{jih}; \quad \theta_{\alpha\beta h} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_h} \left( \frac{\partial T}{\partial y_{\alpha\beta}} \right) \\ h = 1, \dots, n; \quad \alpha = 1, \dots, \nu,$$

где  $m_{\alpha\beta i}$  — элементы матрицы  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ ; по повторяющимся индексам предполагается суммирование в соответствующих пределах.

Уравнения (4.5) замкнуты относительно переменных  $\mathbf{x}$  и допускают интеграл энергии

$$T_* + V = \text{const}. \quad (4.6)$$

Следовательно, эти уравнения можно рассматривать независимо от уравнений неголономных связей (4.4), которые служат для определения переменных  $\mathbf{y}$ , как уравнения движения механической системы с  $n$  степенями свободы, определяемой обобщенными координатами  $\mathbf{x}$ , кинетической энергией  $T_*$  и находящейся под действием потенциальных сил, производных от потенциальной энергии  $V$ , и гироскопических сил  $(\Omega \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}}$  (заметим, что  $\dot{\mathbf{x}}^T (\Omega \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}} = \omega_{ijh} \dot{x}_i \dot{x}_j \dot{x}_h \equiv 0$ , так как  $\omega_{ijh} = -\omega_{jih}$ ). Наличие этих сил вызвано существованием неинтегрируемых связей в данной системе, поэтому слагаемые  $(\Omega \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}}$  в уравнениях (4.5) будем называть членами неголономности.

**4.2. Установившиеся движения.** Предположим, что кинетическая энергия системы, вычисленная с учетом неголономных связей (т.е.  $T_*$ ), потенциальная энергия  $V$  и коэффициенты членов неголономности  $\Omega$  не зависят от некоторых из обобщенных координат  $\mathbf{x}$ . Обозначим эти координаты через  $\mathbf{s}$ , а остальные — через  $\mathbf{r}$ . Другими словами, предположим, что

$$\partial T_*/\partial \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad \partial V/\partial \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad \partial \Omega/\partial \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad (4.7)$$

т.е.  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m)^T$  — псевдоциклические [18]<sup>1</sup>, а  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_k)^T$  ( $m + k = n$ ) — позиционные координаты системы (4.5). При этом ко-

<sup>1</sup>См. также: Карапетян А. В. Некоторые задачи динамики неголономных систем. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Москва. 1982.

эффиценты неголономных связей (т.е. элементы матрицы  $\mathbf{M}$ ) могут зависеть от псевдоциклических координат  $\mathbf{s}$ .

Разобьем матрицу  $\Theta$  и тензор  $\Omega$  на соответствующие блоки

$$\begin{aligned}\Theta &: \Theta_{rr}, \Theta_{rs} = \Theta_{sr}^T, \Theta_{ss}; \\ \Omega &: \Omega_{rrr}, \Omega_{rrs}, \Omega_{rsr} = -\Omega_{srr}^T, \Omega_{rss} = -\Omega_{srS}^T, \Omega_{ssr}, \Omega_{sss}\end{aligned}$$

(индекс  $\tau$  означает «транспонирование» соответствующего трехиндексного тензора по первым двум индексам) и предположим, что, кроме условий (4.7), выполняются условия

$$\Omega_{sss} = \mathbf{0}, \quad (4.8)$$

где  $\mathbf{0}$  — нулевой  $m \times m \times m$ -тензор.

При выполнении условий (4.7)-(4.8) уравнения (4.5) допускают решения вида  $\mathbf{r} = \mathbf{const}$ ,  $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{const}$ , если  $k + m$  постоянных  $\mathbf{r}$  и  $\dot{\mathbf{s}}$  удовлетворяют системе  $k$  уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \frac{1}{2} (\Theta_{ss}(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{s}} \cdot \dot{\mathbf{s}}) \right] + (\Omega_{rss}(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{s}}) \dot{\mathbf{s}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{0}. \quad (4.9)$$

Следовательно, при указанных условиях уравнения (4.5) допускают  $m$ -параметрическое семейство установившихся решений

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\boldsymbol{\sigma}), \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} = \dot{\mathbf{s}}^0(\boldsymbol{\sigma})t + \mathbf{s}^0, \quad \dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}^0(\boldsymbol{\sigma}) \quad (\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{R}^m) \quad (4.10)$$

(постоянные  $\mathbf{s}^0$  могут быть выбраны произвольно и принципиального значения не имеют, так как фазовыми переменными системы (4.5) являются  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$  и  $\dot{\mathbf{s}}$ ). В частности, в качестве параметров этого семейства можно взять значения скоростей псевдоциклических координат:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\boldsymbol{\omega}), \quad \dot{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\omega}, \quad (\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\omega}t + \mathbf{s}^0).$$

При этом (см. (4.9))  $\mathbf{r}^0(-\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{r}^0(\boldsymbol{\omega})$ .

Очевидно, при фиксированных значениях  $\dot{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\omega}$ , уравнения (4.9) (относительно  $\mathbf{r}$ ) могут иметь несколько различных решений  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0, \mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \dots$ . Это означает, что уравнения (4.9) могут допускать несколько семейств установившихся решений. Всем этим решениям отвечают движения рассматриваемой неголономной системы Чаплыгина (4.4)-(4.5) вида

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} = \dot{\mathbf{s}}^0 t + \mathbf{s}^0, \quad \dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}^0, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y}^0(t) = \int_0^t [\mathbf{M}(\mathbf{r}^0, \dot{\mathbf{s}}^0 t + \mathbf{s}^0) \dot{\mathbf{x}}^0] dt + \mathbf{y}^0\end{aligned} \quad (4.11)$$

(постоянные  $\mathbf{y}^0$  могут быть выбраны произвольно и также принципиального значения не имеют). Будем называть такие движения установившимися, несмотря на то, что функции  $\mathbf{y}^0(t)$ , описывающие поведение координат, отвечающих зависимым скоростям, могут быть, вообще говоря, произвольными функциями времени.

**Замечание 4.1.** При нарушении условия (4.8) рассматриваемая система, вообще говоря, не может совершать установившихся движений, отличных от равновесий, поскольку для их существования уравнения (4.9) необходимо дополнить уравнениями

$$(\Omega_{sss}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{s}})\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}. \quad (4.12)$$

В общем случае система  $k + m$  уравнений (4.9), (4.12) относительно  $k + m$  неизвестных имеет лишь тривиальные решения вида  $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{0})$  (здесь  $\mathbf{r}(\mathbf{0})$  — решение уравнения  $\partial V/\partial \mathbf{r} = \mathbf{0}$ ), отвечающие (см. (4.4)) положениям равновесия системы. Однако, если  $\det(\Omega_{sss}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{s}}) \equiv 0$  (в частности,  $\dim \mathbf{s} = 2q - 1$ ,  $q \in \mathbf{N}$ ), то система (4.12) имеет нетривиальные относительно  $\dot{\mathbf{s}}$  решения и рассматриваемая система может иметь семейства установившихся движений указанного выше вида, но размерность таких семейств может быть меньше числа псевдоциклических координат. Если же  $\dim \mathbf{s} = 1$ , то условие (4.8) заведомо выполнено (тензор  $\Omega$  кососимметричен по первым двум индексам) и установившиеся движения неголономных систем Чаплыгина с одной псевдоциклической координатой (в смысле выполнения условий (4.7)) в случае общего положения всегда образуют однопараметрические семейства.

**Замечание 4.2.** Даже при выполнении условий (4.7)-(4.8) неголономные системы Чаплыгина не имеют, вообще говоря, первых интегралов, отличных от интеграла (4.6). В частности,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_*}{\partial \dot{\mathbf{s}}} = (\Omega_{srr}\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}} + (\Omega_{srs}\dot{\mathbf{s}})\dot{\mathbf{r}} + (\Omega_{ssr}\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{s}} \neq \mathbf{0}.$$

**4.3. Устойчивость.** Рассмотрим произвольное установившееся решение (4.10) системы (4.5) и исследуем его устойчивость в силу этой системы по отношению к переменным  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$  и  $\dot{\mathbf{s}}$  (очевидно, что решение (4.10) неустойчиво по отношению к переменным  $\mathbf{s}$ , если в возмущенном движении  $\dot{\mathbf{s}} \neq \dot{\mathbf{s}}^0$ , а решение (4.11) системы (4.4)-(4.5) неустойчиво по отношению к переменным  $\mathbf{y}$ ).

Перейдем от фазовых переменных  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$  и  $\dot{\mathbf{s}}$  системы (4.5) к переменным  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{p} = \partial T_*/\partial \dot{\mathbf{s}}$  и введем аналог функции Рауса посредством соотношения  $R = T_* - V - (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{s}})$ , в правой части которого обобщенные скорости псевдоциклических координат исключены с помощью соотношений

$$\mathbf{p} = \partial T_*/\partial \dot{\mathbf{s}} = \Theta_{sr}\dot{\mathbf{r}} + \Theta_{ss}\dot{\mathbf{s}}, \quad \dot{\mathbf{s}} = \Theta_{ss}^{-1}(\mathbf{p} - \Theta_{sr}\dot{\mathbf{r}}). \quad (4.13)$$

При этом функция Рауса представляется в виде  $R = R_2 + R_1 + R_0$ , где

$$2R_2 = (\mathbf{A}(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \Theta_{rr} - \Theta_{rs} \Theta_{ss}^{-1} \Theta_{sr},$$

$$R_1 = \mathbf{g}^T(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \Theta_{rs} \Theta_{ss}^{-1} \mathbf{p},$$

$$R_0 = -W(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad 2W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 2V + (\Theta_{ss}^{-1} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}).$$

В новых переменных уравнения (4.5) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{\mathbf{r}}} &= \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{r}} - \widehat{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{r}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}} - \Gamma^T \frac{\partial W}{\partial \mathbf{p}} + \\ &+ \left\{ \left( \widehat{\Omega}_{rsr} \dot{\mathbf{r}} \right) \frac{\partial W}{\partial \mathbf{p}} + \left[ \left( \widehat{\Omega}_{rrr} \dot{\mathbf{r}} \right) - \Theta_{rs} \Theta_{ss}^{-1} \left( \widehat{\Omega}_{srr} \dot{\mathbf{r}} \right) \right] \dot{\mathbf{r}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \Gamma \dot{\mathbf{r}} + \left( \widehat{\Omega}_{srr} \dot{\mathbf{r}} \right) \dot{\mathbf{r}}.$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{G}} &= (\hat{g}_{ij}), \quad \hat{g}_{ij} = -\hat{g}_{ji} = \\ &= - \left[ \frac{\partial}{\partial r_i} (\theta^{\alpha\beta} \theta_{\beta j}) - \frac{\partial}{\partial r_j} (\theta^{\alpha\beta} \theta_{\beta i}) \right] p_\alpha - (\omega_{ijh} - \omega_{ij\alpha} \theta^{\alpha\beta} \theta_{\beta h}) \dot{r}_h - \\ &\quad - \omega_{ij\alpha} \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} + \theta^{\alpha\beta} (\theta_{\beta i} \omega_{\alpha j \gamma} - \theta_{\beta j} \omega_{\alpha i \gamma}) \frac{\partial W}{\partial p_\gamma}, \end{aligned}$$

$$\Gamma = (\gamma_{\alpha j}), \quad \gamma_{\alpha j} = (\omega_{\alpha j \beta} + \omega_{\alpha \beta j}) \frac{\partial W}{\partial p_\beta} \equiv \gamma_{\alpha j \beta} p_\beta, \quad \gamma_{\alpha j \beta} = (\omega_{\alpha j \gamma} + \omega_{\alpha \gamma j}) \theta^{\gamma \beta},$$

$$\widehat{\Omega}_{rrr} = (\hat{\omega}_{ijh}); \quad \hat{\omega}_{ijh} = (-\omega_{i\beta j} + \omega_{i\beta\delta} \theta^{\delta\alpha} \theta_{\alpha j}) \theta^{\beta\gamma} \theta_{\gamma h},$$

$$\widehat{\Omega}_{rsr} = (\hat{\omega}_{i\beta j}); \quad \hat{\omega}_{i\beta j} = \omega_{i\beta j} - \theta^{\alpha\gamma} (\theta_{\gamma i} \omega_{\alpha \beta j} + \theta_{\gamma j} \omega_{i\beta \alpha}),$$

$$\widehat{\Omega}_{srr} = (\hat{\omega}_{\alpha ij}); \quad \hat{\omega}_{\alpha ij} = \omega_{\alpha ij} - (\omega_{\alpha i\beta} + \omega_{\alpha \beta i}) \theta^{\beta\gamma} \theta_{\gamma j}$$

( $\theta^{\alpha\beta}$  — элементы матрицы  $\Theta_{ss}^{-1}$ ,  $\theta_{\alpha j}$  — элементы матрицы  $\Theta_{sr}$ ; остальные обозначения совпадают с введенными выше; индексы  $i, j, h$  пробегает значения от 1 до  $k$ , а индексы  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — от 1 до  $m$ ).

Система (4.14) допускает семейство установившихся решений вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0(\sigma), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}^0(\sigma), \quad (\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}) \quad (\sigma \in \mathbf{R}^m), \quad (4.15)$$

если  $k + m$  постоянных  $\mathbf{r}^0$  и  $\mathbf{p}^0$  удовлетворяют системе  $k$  уравнений

$$\frac{DW}{D\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad \left( \frac{D}{D\mathbf{r}} \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \Gamma^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right). \quad (4.16)$$

Очевидно, решения (4.15) отвечают решениям (4.10), система (4.16) — системе (4.9); при этом соответствие между  $\dot{\mathbf{s}}^0$  и  $\mathbf{p}^0$  задается соотношениями

$$\dot{\mathbf{s}}^0 = \Theta_{ss}^{-1}(\mathbf{r}^0)\mathbf{p}^0, \quad \mathbf{p}^0 = \Theta_{ss}(\mathbf{r}^0)\dot{\mathbf{s}}^0.$$

Более того, решение (4.10) системы (4.5) устойчиво по отношению к переменным  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$  и  $\dot{\mathbf{s}}$ , если и только если решение (4.15) системы (4.14) устойчиво по отношению к переменным  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$  и  $\mathbf{p}$ .

Полагая  $\mathbf{r} - \mathbf{r}^0 = \boldsymbol{\xi}$  и  $\mathbf{p} - \mathbf{p}^0 = \boldsymbol{\eta} + \Gamma_0\boldsymbol{\xi}$ , выпишем уравнения возмущенного движения

$$\mathbf{A}_0\ddot{\boldsymbol{\xi}} + (\mathbf{G}_0 + \mathbf{D}_0)\dot{\boldsymbol{\xi}} + (\mathbf{C}_0 + \mathbf{E}_0)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{F}_0\boldsymbol{\eta} = \Xi(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\eta}); \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\eta}), \quad (4.17)$$

$$\mathbf{G} + \mathbf{D} = \widehat{\mathbf{G}} - \widehat{\Omega}_{rsr}(\Theta_{ss}^{-1}\mathbf{p}), \quad \mathbf{C} + \mathbf{E} = \left( \frac{D^2W}{Dr^2} \right), \quad \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left( \frac{DW}{Dr} \right),$$

$$\mathbf{G}^T = -\mathbf{G}, \quad \mathbf{D}^T = \mathbf{D}, \quad \mathbf{C}^T = \mathbf{C}, \quad \mathbf{E}^T = -\mathbf{E},$$

$$\|\Xi\| = o(\rho), \quad \|\mathbf{H}\| = o(\rho), \quad \rho = \|\boldsymbol{\xi}\| + \|\dot{\boldsymbol{\xi}}\| + \|\boldsymbol{\eta}\|.$$

Очевидно, характеристическое уравнение, отвечающее линеаризованной системе, которая получается из (4.17) отбрасыванием правых частей, всегда имеет  $m$  нулевых корней:

$$\chi(\mu) = \mu^m \det(\mathbf{A}_0\mu^2 + (\mathbf{G}_0 + \mathbf{D}_0)\mu + (\mathbf{C}_0 + \mathbf{E}_0)) = 0. \quad (4.18)$$

Если среди остальных корней, которые удовлетворяют уравнению

$$\det(\mathbf{A}_0\mu^2 + (\mathbf{G}_0 + \mathbf{D}_0)\mu + (\mathbf{C}_0 + \mathbf{E}_0)) = 0, \quad (4.19)$$

имеются корни с положительной вещественной частью, то установившееся движение (4.15) неустойчиво согласно теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению. Если же все корни уравнения (4.19) имеют отрицательные вещественные части, то имеет место критический случай нескольких нулевых корней (см. (4.18)). Поскольку при указанных условиях число нулевых корней совпадает с размерностью семейства установившихся движений (4.15), которому принадлежит исследуемое движение, то имеет место особый случай критического случая нескольких нулевых корней и справедлива теорема Ляпунова–Малкина. Таким образом, справедлива

**ТЕОРЕМА 4.1.** [26, 27] *Установившееся движение (4.15) консервативной неголономной системы Чаплыгина устойчиво (неустойчиво), если все корни уравнения (4.19) имеют отрицательные вещественные части (по крайней мере один корень уравнения (4.19) имеет положительную вещественную часть), причем, в случае устойчивости,*

всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к одному из установившихся движений вида (4.10), отвечающих возмущенным значениям  $\mathbf{r}^0$  и  $\dot{\mathbf{s}}^0$ .

Отметим, что в случае устойчивости установившееся движение асимптотически устойчиво по части переменных, характеризующих отклонения возмущенного движения от семейства установившихся движений, которому принадлежит исследуемое движение; в частности, по отношению к  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $DW/D\mathbf{r}$ .

Уравнение (4.19) можно рассматривать как характеристическое уравнение линейной голономной системы

$$A_0 \ddot{\boldsymbol{\zeta}} + (G_0 + D_0) \dot{\boldsymbol{\zeta}} + (C_0 + E_0) \boldsymbol{\zeta} = 0 \quad (4.20)$$

с  $k$  степенями свободы ( $\dim \boldsymbol{\zeta} = \dim \mathbf{r} = k$ ), находящейся под действием сил произвольной структуры. При этом уравнение (4.19) имеет все корни с отрицательными вещественными частями (имеет корень с положительной вещественной частью), если и только если нулевое положение равновесия системы (4.20), которую будем называть линейной приведенной системой, асимптотически устойчиво (экспоненциально неустойчиво). Таким образом, справедливо

**СЛЕДСТВИЕ 4.1.** [26, 27] *Установившееся движение консервативной неголономной системы устойчиво, причем асимптотически по части переменных (неустойчиво), если положение равновесия соответствующей линейной приведенной системы асимптотически устойчиво (экспоненциально неустойчиво).*

#### 4.4. Обсуждение полученных результатов.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.3.** Уравнение (4.19) имеет вид

$$a_0 \mu^{2k} + a_1 \mu^{2k-1} + \dots + a_{2k} = 0, \\ a_0 = \det \mathbf{A}_0 > 0, \quad a_1 = \det \mathbf{A}_0 \cdot \text{Step} (\mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{D}_0), \dots$$

Следовательно, асимптотическая устойчивость положения равновесия линейной приведенной системы возможна только при условии, что матрица  $\mathbf{D}_0$  не является нулевой. Действительно, иначе  $a_1 = 0$  и уравнение (4.19) не может иметь все корни с отрицательными вещественными частями (в последнем случае, необходимо,  $a_1 > 0$ ).

В рассматриваемой задаче матрица  $\mathbf{D}_0$  диссипативно-ускоряющих сил, действующих на линейную приведенную систему (4.20), имеет вид

$$\mathbf{D}_0 = (d_{ij}^0); \quad d_{ij}^0 = \frac{1}{2} (d_{ij\alpha} + d_{ji\alpha})_0 \dot{s}_\alpha^0; \quad d_{ij\alpha} = \omega_{\alpha ij} + \theta^{\beta\gamma} (\theta_{\gamma i} \omega_{\beta \alpha j} + \theta_{\beta j} \omega_{i \gamma \alpha}) \quad (4.21)$$

и, вообще говоря, нулевой не является. Это означает, что при определенных условиях возможна асимптотическая по части переменных устойчивость установившихся движений консервативных неголономных систем.

**Замечание 4.4.** Коэффициенты матрицы  $\mathbf{D}_0$  представляют собой нечетные функции скоростей псевдоциклических координат, поскольку (см. (4.21))  $d_{ij}^0$  явно зависят от  $\dot{\mathbf{s}}^0$  линейным образом, а  $d_{ij\alpha}^0 = d_{ij\alpha}(\mathbf{r}^0(\dot{\mathbf{s}}^0))$  неявно зависят от  $\dot{\mathbf{s}}^0$  четным образом (см. (4.9)). Это означает, что если установившееся движение вида  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} = \text{const}$ ,  $\dot{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\omega} = \text{const}$  консервативной неголономной системы асимптотически по части переменных устойчиво (при этом, необходимо,  $\text{Step}(\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{D}_0) > 0$ ), то установившееся движение вида  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$ ,  $\dot{\mathbf{s}} = -\boldsymbol{\omega}$  этой системы при тех же условиях неустойчиво (так как при этом  $\text{Step}(\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{D}_0) < 0$ , т.е.  $a_1 < 0$  и уравнение (4.19) имеет корень с положительной вещественной частью). Другими словами, устойчивость установившихся движений неголономных систем может зависеть от направления движения (вперед — назад; вправо — влево и т. п.).

**Замечание 4.5.** Характеристическое уравнение (4.18) инвариантно (с точностью до постоянного множителя) относительно выбора переменных, определяющих состояние системы. Поэтому при исследовании устойчивости установившихся движений неголономных систем с помощью теоремы 4.1 уравнения движения этих систем можно брать в любом виде (приводить их к виду (4.14) не обязательно). В частности, характеристическое уравнение линеаризованной в окрестности решения (4.10) системы (4.5), эквивалентное уравнению (4.18), имеет вид

$$\mu^m \det \Delta(\mu) = 0,$$

а уравнение относительно ненулевых корней — вид

$$\det \Delta(\mu) = 0, \quad \Delta(\mu) = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{rr}\mu^2 + \mathbf{V}_{rr}\mu + \mathbf{U}_{rr} & \mathbf{W}_{rs}\mu + \mathbf{V}_{rs} \\ \mathbf{W}_{sr}\mu + \mathbf{V}_{sr} & \mathbf{W}_{ss} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{W}_{rr}$ ,  $\mathbf{W}_{rs} = \mathbf{W}_{sr}^T$ ,  $\mathbf{W}_{ss}$  — соответствующие блоки матрицы  $\Theta_0$ ;  $\mathbf{V}_{rr}$ ,  $\mathbf{V}_{rs}$ ,  $\mathbf{V}_{sr}$  — блоки матрицы  $\mathbf{V} = (v_{ij})$  ( $i, j = 1, \dots, n$ );  $\mathbf{U}_{rr}$  — матрица  $(u_{ij})$  ( $i, j = 1, \dots, k$ );

$$v_{ij} = \left( \frac{\partial \theta_{i\gamma}}{\partial x_j} - \frac{\partial \theta_{j\gamma}}{\partial x_i} + \omega_{\gamma ij} - \omega_{\gamma ji} \right)_0 \dot{s}_\gamma^0,$$

$$u_{ij} = \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial r_i \partial r_j} - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta_{\gamma\delta}}{\partial r_i \partial r_j} + \frac{\partial \omega_{i\gamma\delta}}{\partial r_j} \right) \dot{s}_\gamma \dot{s}_\delta \right]_0$$

(остальные обозначения совпадают с введенными ранее).

**Замечание 4.6.** Если все установившиеся движения семейства (4.10) устойчивы при  $\sigma > \sigma_0$  и неустойчивы при  $\sigma < \sigma_0$  (или наоборот), то при  $\sigma = \sigma_0$  от этого семейства могут ответвляться периодические движения, т.е. для консервативных неголономных смстем может иметь место явление бифуркации Андронова — Хопфа, характерное для диссипативных динамических систем (здесь для простоты полагается, что  $\sigma$  — скалярный параметр, т.е.  $m = 1$ ).

## 5. Динамика кельтского камня

**5.1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о движении без скольжения тяжелого твердого тела, опирающегося выпуклой поверхностью, в каждой точке которой однозначно определена нормаль, о горизонтальную плоскость [28].

Для описания движения тела введем две системы координат: неподвижную  $OXYZ$  с началом на опорной плоскости и осью  $OZ$ , направленной вертикально вверх, и подвижную  $Gx_1x_2x_3$  с началом в центре масс тела и осями, направленными по его главным центральным осям инерции.

Пусть  $\mathbf{v}$  — скорость центра масс тела,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость вращения тела вокруг центра масс,  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор восходящей вертикали,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки  $K$  касания тела с плоскостью относительно центра масс,  $m$  — масса тела,  $\Theta = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  — центральный тензор инерции,  $\mathbf{R}$  — реакция опорной плоскости,  $g$  — ускорение свободного падения (рис. 2).

Уравнения движения тела, отнесенные к подвижной системе координат, имеют вид (3.1)–(3.4). При этом связь между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  определяется с помощью уравнения поверхности тела. Если последнее задано в виде  $f(\mathbf{r}) = 0$ , где знак функции  $f(\mathbf{r}) \in C^2 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  выбран таким образом, что  $\text{grad } f(\mathbf{r})$  направлен во внешнюю по отношению к области, занятой телом, сторону, то

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\text{grad } f(\mathbf{r})}{\|\text{grad } f(\mathbf{r})\|}. \quad (5.1)$$

Система уравнений (3.1)–(3.4) (с учетом (5.1)) замкнута относительно переменных  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\mathbf{R}$  и допускает два интеграла (энергии и геометрический)

$$2H = m\mathbf{v}^2 + (\boldsymbol{\omega} \cdot \Theta \boldsymbol{\omega}) - 2mg(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 2h = \text{const}, \quad (5.2)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \quad (5.3)$$



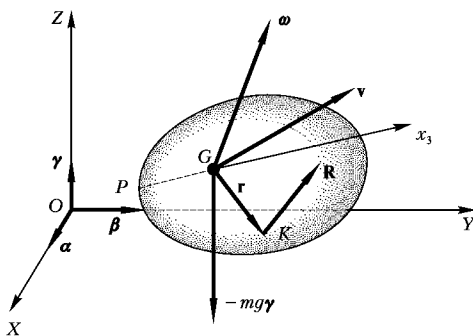


Рис. 2

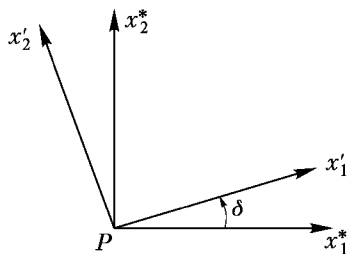


Рис. 3

Замечание 5.1. Если ввести те или иные обобщенные координаты (например, углы Эйлера, определяющие ориентацию подвижной системы координат по отношению к неподвижной, и координаты центра масс тела в неподвижной системе координат), то системе (3.1)–(3.3) будут отвечать уравнения движения в форме уравнений Лагранжа первого рода; при этом роль неопределенных множителей играют проекции вектора  $\mathbf{R}$ , а уравнения (3.4) представляют собой уравнения связей (одно интегрируемое:  $\dot{Z}_G + (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma})' = 0$  и два неинтегрируемых).

С помощью первого и четвертого уравнений системы (3.1)–(3.4) можно определить реакцию опорной плоскости

$$\mathbf{R} = mg\boldsymbol{\gamma} - m([\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]])$$

и исключить ее из второго уравнения этой системы. При этом уравнения движения тела примут вид

$$\begin{aligned} \Theta \dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times \Theta \boldsymbol{\omega}] + m[\mathbf{r} \times [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}]] + m[\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]]] = \\ = mg[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}] - m[\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}]], \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}] = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Система (5.4) замкнута (с учетом (5.1)) относительно переменных  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  и ее можно рассматривать независимо от уравнения (3.4); последнее определяет скорость центра масс тела, после чего координаты центра масс вычисляются с помощью квадратур

$$X_G = \int (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\alpha}) dt, \quad Y_G = \int (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\beta}) dt, \quad Z_G = -(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma})$$

( $\boldsymbol{\alpha}$  и  $\boldsymbol{\beta}$  — орты осей  $OX$  и  $OY$ , удовлетворяющие, очевидно, уравнениям  $\dot{\boldsymbol{\alpha}} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\alpha}] = \mathbf{0}$  и  $\dot{\boldsymbol{\beta}} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\beta}] = \mathbf{0}$ , аналогичным уравнению (3.3)).

В тех или иных обобщенных координатах системе (5.4) отвечают уравнения в форме Чаплыгина. Эта система также допускает два интеграла («энергии» и геометрический)

$$2H_* = m([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}])^2 + (\boldsymbol{\omega} \cdot \Theta \boldsymbol{\omega}) - 2mg(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 2h^*, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \quad (5.5)$$

Таким образом, тяжелое твердое тело на абсолютно шероховатой (скольжения нет) горизонтальной плоскости представляет собой консервативную неголономную систему Чаплыгина [25].

**5.2. Перманентные вращения.** Уравнения (5.4) допускают установившиеся решения вида

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^0, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\gamma}^0, \quad (5.6)$$

если постоянный (в подвижной системе координат) вектор  $\boldsymbol{\gamma}^0$  и постоянная  $\boldsymbol{\omega}$  удовлетворяют уравнению [29]

$$\boldsymbol{\omega}^2 \{[\boldsymbol{\gamma} \times \Theta \boldsymbol{\gamma}] + m[\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\gamma} \times [\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}]]]\} = mg[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}], \quad (5.7)$$

которое получается из (5.4) с учетом (5.6) (при этом  $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$ ).

Умножая уравнение (5.7) скалярно на  $\mathbf{r}$  и учитывая геометрический интеграл, получим, что вектор  $\boldsymbol{\gamma}^0$  удовлетворяет двум скалярным уравнениям

$$([\boldsymbol{\gamma} \times \Theta \boldsymbol{\gamma}] \cdot \mathbf{r}) = 0, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \quad (5.8)$$

Умножая теперь уравнение (5.7) скалярно на единичный вектор оси  $Gx_3$ , получим, что постоянная  $\boldsymbol{\omega}$  удовлетворяет уравнению

$$[(A_2 - A_1)\gamma_1\gamma_2 + m(r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1)(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma})]\boldsymbol{\omega}^2 = mg(r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1). \quad (5.9)$$

При этом, очевидно, для существования действительного решения ( $\boldsymbol{\omega}^2 \geq 0$ ) необходимо выполнение неравенства [28, 29]

$$(A_1 - A_2)\gamma_1\gamma_2(r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1) \leq m(r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1)^2(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}).$$

Заметим, что правая часть последнего неравенства неположительна, так как  $(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = -Z_G < 0$ . Здесь и всюду далее компоненты векторов  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\mathbf{r}$  даны в главных центральных осях инерции тела.

Таким образом, решениям (5.6) отвечает однопараметрическое семейство перманентных вращений тела следующего вида: тело касается опорной плоскости одной и той же своей точкой ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma}^0) = \mathbf{r}^0 = \text{const}$ ) и вращается вокруг вертикали, проходящей через эту

точку, с постоянной угловой скоростью  $\omega$ ; при этом центр масс тела описывает окружность, параллельную опорной плоскости ( $Z_G = -(\mathbf{r}^0 \cdot \boldsymbol{\gamma}^0) = Z_G^0 = \text{const}$ ), с центром на оси вращения и радиусом  $\rho_G = \sqrt{(\mathbf{r}^0)^2 - (\mathbf{r}^0 \cdot \boldsymbol{\gamma}^0)^2}$ . Каждой оси перманентного вращения, определяемой вектором  $\boldsymbol{\gamma}^0$ , удовлетворяющим системе (5.8), отвечает единственное по модулю значение угловой скорости  $\omega$ , вычисляемое с помощью соотношения (5.9). При этом тело может вращаться как по часовой ( $\omega < 0$ ), так и против часовой ( $\omega > 0$ ) стрелки.

Для простоты рассмотрим случай, когда одна из главных центральных осей инерции тела в одном из двух противоположных направлений ортогональна поверхности тела. Для определенности предположим, что этому условию удовлетворяет отрицательная полуось  $Gx_3$ ; точку ее «пересечения» с поверхностью тела обозначим  $P$ . В этом случае тело может вращаться вокруг вертикально расположенной оси  $Gx_3$  с произвольной постоянной угловой скоростью, опираясь о горизонтальную плоскость точкой  $P$  (при этом центр масс тела неподвижен). Действительно, при указанных условиях уравнения (5.4) допускают решение

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1, \omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega \quad (\omega \in \mathbf{R}), \quad (5.10)$$

причем  $r_1 = r_2 = 0, r_3 = -a_3$  ( $a_3 = \overline{GP}$ ), поскольку уравнение (5.7) тождественно по  $\omega$  выполняется при  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^0 = (0, 0, 1)^T, \mathbf{r} = \mathbf{r}^0 = (0, 0, -a_3)^T$ , так как  $[\boldsymbol{\gamma}^0 \times \Theta \boldsymbol{\gamma}^0] = \mathbf{0}$ .

Пусть  $a_1$  и  $a_2$  — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке  $P$ ,  $\delta$  — угол между направлением главной кривизны, отвечающей радиусу  $a_1$ , и главной осью инерции  $Gx_1$ , отсчитываемый против часовой стрелки (см. рис. 3, где  $Px_1^*$  и  $Px_2^*$  — направления главных кривизн  $a_1$  и  $a_2$ ,  $Px_1' \parallel Gx_1, Px_2' \parallel Gx_2$ ). Тогда уравнение поверхности тела в окрестности точки  $P$  можно представить в виде [11]

$$r_3 = -a_3 + \frac{1}{2} \left[ \frac{(r_1 \cos \delta - r_2 \sin \delta)^2}{a_1} + \frac{(r_1 \sin \delta + r_2 \cos \delta)^2}{a_2} \right] + \dots,$$

а уравнение функции  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma})$ , определяемое из (5.1), — в виде [11, 28]

$$\begin{aligned} r_1 &= - \left[ (a_1 \cos^2 \delta + a_2 \sin^2 \delta) \gamma_1 + (a_2 - a_1) \sin \delta \cos \delta \gamma_2 \right] \gamma_3^{-1} + \dots, \\ r_2 &= - \left[ (a_2 - a_1) \sin \delta \cos \delta \gamma_1 + (a_1 \sin^2 \delta + a_2 \cos^2 \delta) \gamma_2 \right] \gamma_3^{-1} + \dots, \\ r_3 &= -a_3 + \dots \end{aligned}$$

(многоточием обозначены члены более высокого порядка малости, чем выписанные, в окрестности решения (5.10)).

Если  $A_1 \neq A_2$ ,  $a_1 \neq a_2$ ,  $\delta \neq 0 \pmod{\pi/2}$ , то твердое тело с указанным распределением масс и описанной геометрией поверхности называется кельтским камнем.

**5.3. Устойчивость вращения кельтского камня.** Полагая  $\omega_3 = \omega + y$ ,  $\gamma_3 = 1 + z$  и сохраняя для  $\omega_i$ ,  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) их прежние обозначения, выпишем уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned} & (A_1 + ma_3^2) \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2 - ma_3^2) \omega \omega_2 - \\ & - ma_3 \omega [(a_1 \cos^2 \delta + a_2 \sin^2 \delta) \dot{\gamma}_1 + (a_2 - a_1) \dot{\gamma}_2 \sin \delta \cos \delta] + \\ & + m(g + a_3 \omega^2) [(a_2 - a_1) \gamma_1 \sin \delta \cos \delta + (a_1 \sin^2 \delta + a_2 \cos^2 \delta) \gamma_2] - \\ & - m g a_3 \gamma_2 = \Omega_1, \\ & (A_2 + ma_3^2) \dot{\omega}_2 - (A_3 - A_1 - ma_3^2) \omega \omega_1 - \\ & - ma_3 \omega [(a_2 - a_1) \dot{\gamma}_1 \sin \delta \cos \delta + (a_1 \sin^2 \delta + a_2 \cos^2 \delta) \dot{\gamma}_2] - \\ & - m(g + a_3 \omega^2) [(a_1 \cos^2 \delta + a_2 \sin^2 \delta) \gamma_1 + (a_2 - a_1) \gamma_2 \sin \delta \cos \delta] + \\ & + m g a_3 \gamma_1 = \Omega_2, \\ & \dot{\gamma}_1 - \omega \dot{\gamma}_2 + \dot{\omega}_2 = \Gamma_1, \quad \dot{\gamma}_2 + \omega \dot{\gamma}_1 - \dot{\omega}_1 = \Gamma_2, \quad A_3 \dot{y} = Y, \quad \dot{z} = Z. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Здесь  $\Omega_i$ ,  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $Y$  и  $Z$  — функции, зависящие от  $\omega_j$ ,  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ),  $y$  и  $z$ , разложения которых по степеням указанных переменных начинаются с членов не ниже второго порядка, причем все эти функции тождественно по  $y$  и  $z$  уничтожаются при  $\omega_j = 0$ ,  $\gamma_j = 0$ , ( $j = 1, 2$ ) [27–31].

Характеристическое уравнение, отвечающее линеаризованной системе, которая получается из системы (5.11) отбрасыванием правых частей, имеет вид

$$\mu^2 [\varkappa_0 \mu^4 + \varkappa_1 \mu^3 + \varkappa_2 \mu^2 + \varkappa_3 \mu + \varkappa_4] = 0, \quad (5.12)$$

$$\varkappa_0 = (A_1 + ma_3^2) (A_2 + ma_3^2) > 0,$$

$$\varkappa_1 = (A_2 - A_1) ma_3 (a_2 - a_1) \omega \sin \delta \cos \delta,$$

$$\varkappa_2 = (A_3 - A_1) (A_3 - A_2) \omega^2 +$$

$$+ ma_3 \omega^2 [(A_3 - A_1 \sin^2 \delta - A_2 \cos^2 \delta) (a_1 - a_3) + (A_3 - A_2 \sin^2 \delta - A_1 \cos^2 \delta) (a_2 - a_3)] +$$

$$+ [m^2 a_3^2 (a_1 - a_3) (a_2 - a_3) + (A_1 + ma_3^2) (A_2 + ma_3^2)] \omega^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + mg [(A_1 \sin^2 \delta + A_2 \cos^2 \delta + ma_3^2) (a_2 - a_3) + \\
& + (A_1 \cos^2 \delta + A_2 \sin^2 \delta + ma_3^2) (a_1 - a_3)], \\
\mathfrak{x}_3 & = (A_2 - A_1) ma_3 (a_2 - a_1) \omega^3 \sin \delta \cos \delta = \omega^2 \mathfrak{x}_1, \\
\mathfrak{x}_4 & = [(A_3 - A_1) (A_3 - A_2) + m^2 a_3^2 (a_1 - a_3) (a_2 - a_3)] \omega^4 + \\
& + m\omega^2 (a_3 \omega^2 + g) [(A_3 - A_1 \sin^2 \delta - A_2 \cos^2 \delta) (a_1 - a_3) + \\
& + (A_3 - A_2 \sin^2 \delta - A_1 \cos^2 \delta) (a_2 - a_3)] + \\
& + m^2 g (2a_3 \omega^2 + g) (a_1 - a_3) (a_2 - a_3).
\end{aligned}$$

Это уравнение имеет два нулевых корня. Один из них обусловлен однопараметричностью семейства перманентных вращений (5.10) (свободный параметр —  $\omega$ ), а другой — наличием геометрического интеграла. Следовательно, если все корни уравнения

$$\mathfrak{x}_0 \mu^4 + \mathfrak{x}_1 \mu^3 + \mathfrak{x}_2 \mu^2 + \mathfrak{x}_3 \mu + \mathfrak{x}_4 = 0 \quad (5.13)$$

имеют отрицательные вещественные части, то перманентное вращение (5.10) устойчиво, причем всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к перманентному вращению того же вида (5.10), но, в общем случае, с возмущенной угловой скоростью. Другими словами, в этом случае перманентное вращение устойчиво по отношению к  $\omega$ ,  $\gamma$  и асимптотически устойчиво по отношению к  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\gamma$ . Если же уравнение (5.13) имеет корень с положительной вещественной частью, то перманентное вращение неустойчиво.

Таким образом, согласно критерию Гурвица, перманентные вращения (5.10) с  $\omega \neq 0$  устойчивы при выполнении условий [27-31]

$$(A_2 - A_1) (a_2 - a_1) \omega \sin \delta \cos \delta > 0, \quad (5.14)$$

$$J\omega^2 - mg (a_1 - a_3) (a_2 - a_3) > 0, \quad \mathfrak{x}_4 > 0, \quad (5.15)$$

$$J = (A_1 + A_2 - A_3) (a_1 + a_2 - 2a_3) - ma_3 [4a_3^2 - 3a_3 (a_1 + a_2) + 2a_1 a_2],$$

и неустойчивы при строгом нарушении хотя бы одного из неравенств (5.14), (5.15).

Условия (5.15) накладывают ограничения только на распределение масс и геометрию поверхности тела, а также на абсолютную величину его угловой скорости (левые части неравенств (5.15) представляют собой четные функции  $\omega$ ), тогда как условие (5.14) накладывает ограничение на направление вращения тела (на знак параметра  $\omega$ ).

Предположим, что

$$0 < \delta < \pi/2, \quad A_1 < A_2 < A_3, \quad a_1 > a_2 > a_3. \quad (5.16)$$

Первое из этих условий можно считать выполненным всегда (если  $\delta \neq 0 \pmod{\pi/2}$ ), второе означает, что вращение (5.10) происходит вокруг оси наибольшего момента инерции, а третье — что положение равновесия тела (решение  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1, \omega = 0$ , которое принадлежит семейству решений (5.10) при  $\omega = 0$ ), устойчиво (центр масс в положении равновесия находится ниже обоих центров кривизны поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью). Предположения  $A_1 < A_2$  и  $a_1 > a_2$  несущественны и сделаны лишь для определенности. Тогда второе неравенство ( $\alpha_4 > 0$ ) в (5.15) выполняется при любом  $\omega \in \mathbf{R}$ , а для выполнения первого необходимо соблюдение условия  $J > 0$  (в противном случае оно не выполняется ни при каком  $\omega \in \mathbf{R}$ ). При  $J > 0$  вращение (5.10) устойчиво, если  $\omega < 0$  (см. (5.14), (5.16)) и  $\omega^2 > \omega_*^2$ , где

$$\omega_*^2 = mg(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) / J \quad (5.17)$$

(см. первое неравенство в (5.15)). Для определенности будем считать, что  $\omega_* = -\sqrt{\omega_*^2} < 0$ .

Итак, при выполнении условий (5.16) и  $J > 0$ , которые накладывают ограничения только на распределение масс и геометрию поверхности тела, вращение (5.10) устойчиво, если

$$\omega < \omega_* < 0 \quad (5.18)$$

и неустойчиво, если  $\omega > \omega_*$  ( $\omega \neq 0$ ) [28, 30]. Таким образом, устойчивость вращения ( $\omega \neq 0$ ) кельтского камня с указанными выше параметрами имеет место, если только вращение происходит по часовой стрелке и величина (модуль) угловой скорости больше некоторого критического значения, определяемого также параметрами кельтского камня.

**5.4. Бифуркация Андронова–Хопфа в динамике кельтского камня.** Заметим, что при нарушении неравенства  $\omega < \omega_*$  и соблюдении неравенства  $\omega < 0$  (ср. с (5.18)), два ненулевых корня уравнения (5.12) пересекают мнимую ось слева направо, а два других корня остаются в левой полуплоскости. При  $\omega = \omega_*$  это уравнение имеет два нулевых корня, два чисто мнимых корня  $\pm \omega_* \sqrt{-1}$  и два корня с отрицательными вещественными частями, т.е. имеет место ситуация, близкая к такой, при которой может возникать бифуркация Хопфа [32] (отличие определяется лишь наличием двух нулевых корней).

Исключая переменные  $y$  и  $z$  из уравнений возмущенного движения (5.11) с помощью первых интегралов (5.5), получим замкнутую

систему четырех уравнений относительно переменных  $\omega_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ), которая получается из системы (5.11) отбрасыванием двух последних уравнений (для  $y$  и  $z$ ) и заменой нелинейностей  $\Omega_i, \Gamma_i$  на  $\Omega_i^*, \Gamma_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) в первых четырех уравнениях. Нелинейности  $\Omega_i^*, \Gamma_i^*$  представляют собой функции от  $\omega_j, \gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ), зависящие от параметра  $\varepsilon = (h^* - h_*) / (mga_3)$ , характеризующего отклонение постоянной  $h^*$  интеграла «энергии» (5.5) от ее критического значения

$$h_* = mg [1 + A_3 (a_1 - a_3) (a_2 - a_3) / (2J)],$$

отвечающего вращению (5.10) с критической угловой скоростью  $\omega_*$ . Существенно, что линейная часть первых четырех уравнений (5.11) при этом не изменяется, т.е. характеристическое уравнение полученной системы имеет вид (5.13), где  $\alpha_s = \alpha_s(\omega)$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ), а  $\omega = \omega(\varepsilon)$ .

При сделанных выше предположениях (условие  $J > 0$  и условия (5.16)) уравнение (5.13) имеет все корни с отрицательными вещественными частями, если  $\omega < \omega_*$  ( $\varepsilon > 0$ ); два чисто мнимых корня и два корня с отрицательными вещественными частями, если  $\omega = \omega_*$  ( $\varepsilon = 0$ ); два корня с положительными вещественными частями, если  $\omega > \omega_*$  ( $\varepsilon < 0$ ) (напомним, что  $\omega_* < 0$ ). Покажем, что при переходе параметра  $\varepsilon$  ( $\omega$ ) справа налево через нуль (критическое значение  $\omega_*$ ) происходит строгая потеря устойчивости [28]. Последнее означает, что два корня уравнения (5.13), имеющие в окрестности критического значения  $\omega = \omega_*$  вид

$$\mu_{1,2} = -a(\omega) \pm \alpha(\omega) \sqrt{-1}, \quad (5.19)$$

где  $a(\omega) > 0$  ( $< 0$ ) при  $\omega < \omega_*$  ( $> \omega_*$ ),  $a(\omega_*) = 0$ ,  $\alpha(\omega_*) = \omega_*$ , удовлетворяют условию  $a'_* \neq 0$ . Здесь и далее штрих означает дифференцирование по  $\omega$ , а нижний индекс  $*$  указывает, что соответствующая величина вычисляется при  $\omega = \omega_*$ .

Непосредственное отыскание корней вида (5.19) уравнения (5.13) сопряжено с громоздкими вычислениями, поэтому заметим, что производная по  $\omega$  от выражения  $J\omega^2 - mg(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)$ , стоящего в левой части первого из неравенств (5.15), не равна нулю при  $\omega = \omega_*$  (так как  $J > 0$ ,  $\omega_* < 0$ ) и докажем, что это возможно лишь при условии  $a'_* \neq 0$ . Действительно, при указанных условиях два других корня уравнения (5.13) могут иметь вид

$$\mu_{3,4} = -b(\omega) \pm \beta(\omega) \sqrt{-1} \quad (5.20)$$

или вид

$$\mu_3 = -c(\omega), \quad \mu_4 = -d(\omega), \quad (5.21)$$

причем функции  $b(\omega)$ ,  $c(\omega)$  и  $d(\omega)$  положительны при  $\omega < 0$  (в том числе, при  $\omega = \omega_* < 0$ ).

Рассмотрим первый случай: уравнение (5.13) имеет корни (5.19) и (5.20). Тогда это уравнение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mu^4 + 2\mu^3(a+b) + \mu^2(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 4ab) + \\ + 2\mu[a(b^2 + \beta^2) + b(a^2 + \alpha^2)] + (a^2 + \alpha^2)(b^2 + \beta^2) = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Согласно выражениям для коэффициентов  $\varkappa_s$  ( $s = 0, \dots, 4$ ) уравнения (5.13) ( $\varkappa_3 \equiv \omega^2 \varkappa_1$ ), должно выполняться соотношение

$$a(b^2 + \beta^2) + b(a^2 + \alpha^2) \equiv \omega^2(a+b). \quad (5.23)$$

Дифференцируя это соотношение по  $\omega$  и подставляя в полученное тождество  $\omega = \omega_*$ , имеем

$$a'_* (b_*^2 + \beta_*^2 - \omega_*^2) = 2\omega_* b_* (1 - \alpha'_*). \quad (5.24)$$

Далее, условие, отвечающее первому неравенству в (5.15), для уравнения (5.22), в котором коэффициент при  $\mu$  заменен, согласно (5.23), на  $2(a+b)\omega^2$ , имеет вид

$$(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 4ab)\omega^2 - (a^2 + \alpha^2)(b^2 + \beta^2) - \omega^4 > 0. \quad (5.25)$$

Вычисляя производную по  $\omega$  от выражения, стоящего в левой части неравенства (5.25), и полагая  $\omega = \omega_*$ , получим

$$2\omega_* (b_*^2 + \beta_*^2 - \omega_*^2) (1 - \alpha'_*) + 4a'_* b_* \omega_*^2.$$

Очевидно, последнее выражение равно нулю при  $a'_* = 0$ , так как при этом (см. (5.24))  $\alpha'_* = 1$  (напомним, что  $\omega_* \neq 0$ ,  $b_* \neq 0$ ).

Аналогично рассматривается и второй случай, когда уравнение (5.13) имеет корни (5.19) и (5.21).

Таким образом, при критическом значении угловой скорости (см. (5.17)) происходит строгая потеря устойчивости вращения (5.10). Согласно теореме Хопфа [32] это означает, что при значениях полной энергии, близких к критическому  $h_*$ , от устойчивых перманентных вращений кельтского камня ответвляются периодические движения с частотой, близкой к критическому значению  $|\omega_*|$  угловой скорости.



## 6. Стационарные движения неголономных систем с неизвестными первыми интегралами

**6.1. Системы с псевдоциклическими координатами.** Рассмотрим консервативную неголономную систему Чаплыгина. Уравнения движения системы возьмем в виде (4.4), (4.5) и напомним, что уравнения (4.5) замкнуты относительно переменных  $\mathbf{x}$ , отвечающих независимым скоростям, и допускают интеграл «энергии» (4.6). Предположим, что координаты  $\mathbf{s}$  системы — псевдоциклические, т.е. выполнены условия (4.7), (4.8). Тогда уравнения движения этой системы можно привести к виду (4.14), где  $\mathbf{r}$  — позиционные координаты системы. Уравнения (4.14) допускают установившиеся движения (4.15), которые образуют  $m$ -параметрическое семейство, определяемое соотношениями (4.16) ( $m = \dim \mathbf{s}$ ).

Согласно результатам § 4, устойчивость этих движений зависит от свойств нулевого решения линейной приведенной системы (4.20); при этом для получения достаточных условий устойчивости установившихся движений (4.15) требуется нетривиальность матрицы  $\mathbf{D}_0$  диссипативно-ускоряющих сил, действующих на линейную приведенную систему.

Рассмотрим теперь случай, когда матрица этих сил тождественно по позиционным координатам обращается в нулевую при любых значениях скоростей псевдоциклических координат. Точнее, предположим, что (см. (4.21))

$$\omega_{\alpha ij} + \theta^{\beta\gamma} (\theta_{\gamma i} \omega_{\beta\alpha j} + \theta_{\beta j} \omega_{i\gamma\alpha}) + \omega_{\alpha ji} + \theta^{\beta\gamma} (\theta_{\gamma j} \omega_{\beta\alpha i} + \theta_{\beta i} \omega_{j\gamma\alpha}) \equiv 0.$$

При этом (см. выражения для коэффициентов системы (4.14))

$$\hat{\omega}_{i\beta j} + \hat{\omega}_{j\beta i} \equiv 0, \quad \hat{\omega}_{\alpha ij} + \hat{\omega}_{\alpha ji} \equiv 0,$$

и уравнения (4.14) принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{G}} \dot{\mathbf{r}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}} - \Gamma^T \frac{\partial W}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \Gamma \dot{\mathbf{r}}, \quad (6.1)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = (\tilde{g}_{ij}), \quad \tilde{g}_{ij} = \hat{g}_{ij} - \hat{\omega}_{i\beta j} \frac{\partial W}{\partial p_\beta} - \hat{\omega}_{ijh} \dot{r}_h + \theta_{i\alpha} \theta^{\alpha\beta} \hat{\omega}_{\beta hj} \dot{r}_h$$

(остальные обозначения совпадают с введенными в § 4).

Очевидно, уравнения (6.1) допускают обобщенный интеграл энергии

$$U_0(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p}) = R_2 + W = c_0. \quad (6.2)$$

Если матрица  $\Gamma$  — нулевая, то уравнения (6.1) совпадают с уравнениями движения консервативных механических систем с циклическими координатами, записанными в переменных Рауса [1, 2] и допускают  $m$  циклических интегралов

$$U_1 = p_1 = c_1, \dots, U_m = p_m = c_m. \quad (6.3)$$

При этом стационарным значениям интеграла (6.2) при фиксированных значениях интегралов (6.3) отвечают стационарные движения вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}^0, \quad (6.4)$$

причем постоянные  $\mathbf{p}^0$  произвольны, а постоянные  $\mathbf{r}^0$  определяются из уравнений

$$\partial W / \partial \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (6.5)$$

(стационарные движения (6.4) образуют семейство  $S_0$  размерности, не меньшей числа циклических координат).

Для таких ( $\Gamma = 0$ ) систем теорема Рауса может быть сформулирована в следующем виде [1, 2, 6].

**ТЕОРЕМА 6.1.** *Если функция  $W$  (эффективный потенциал) имеет строгий минимум в точке  $(\mathbf{r}^0, \mathbf{p}^0)$  при фиксированных значениях интегралов (6.3), то соответствующее стационарное движение (6.4) устойчиво.*

Отметим, что условия теоремы 6.1 заведомо выполнены, если все собственные значения матрицы  $(\partial^2 W / \partial \mathbf{r}^2)$  положительны в точке  $(\mathbf{r}^0, \mathbf{p}^0)$ .

В общем случае  $\Gamma \neq 0$  система уравнений (6.1) также допускает стационарные движения вида (6.4), однако при этом постоянные  $\mathbf{r}^0$  и  $\mathbf{p}^0$  определяются из уравнений

$$\frac{DW}{D\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad \left( \frac{D}{D\mathbf{r}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \Gamma^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right), \quad (6.6)$$

которые, вообще говоря, не совпадают с уравнениями (6.5). Очевидно, как и в случае  $\Gamma = \mathbf{0}$ , стационарные движения (6.4) образуют семейство размерности, не меньшей числа псевдоциклических координат, поскольку  $k$  уравнений (6.6) служат для определения  $k + m$  неизвестных  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$ . Будем по-прежнему обозначать это семейство через  $S_0$ .

Достаточные условия устойчивости таких стационарных движений дает следующая

**ТЕОРЕМА 6.2.** [18, 33] *Если все собственные значения матрицы*

$$D^2 W / D\mathbf{r}^2 \quad (6.7)$$

положительны в точке  $(\mathbf{r}^0, \mathbf{p}^0)$  и в некоторой окрестности этой точки выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \partial\gamma_{\alpha i\beta}/\partial r_j - \partial\gamma_{\alpha j\beta}/\partial r_i + (\gamma_{\alpha i\delta}\gamma_{\delta j\beta} - \gamma_{\alpha j\delta}\gamma_{\delta i\beta}) \equiv 0, \\ (i, j = 1, \dots, k; \alpha, \beta = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (6.8)$$

(выражения для  $\gamma_{\alpha i\beta}$  см. в § 4), то стационарное движение (6.4) системы (6.1) устойчиво.

Кроме того, как в случае  $\Gamma = \mathbf{0}$ , так и в случае  $\Gamma \neq \mathbf{0}$  справедлива (ср. с теоремой 2.3)

**ТЕОРЕМА 6.3.** Если определитель матрицы (6.7) меньше нуля в точке  $(\mathbf{r}^0, \mathbf{p}^0)$ , то стационарное движение (6.4) неустойчиво.

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.1.** При выполнении условий (6.8) система (6.1), кроме обобщенного интеграла энергии, допускает  $m$  первых интегралов вида

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{c}, \quad (\mathbf{c} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{U}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \in \mathcal{C}^1 : O_\delta \rightarrow \mathbf{R}^m). \quad (6.9)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.** Применение теоремы 6.2 для исследования устойчивости стационарных движений (6.4) системы (6.1) связано с исследованием собственных значений матрицы (6.7) и требует лишь знания функции  $W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  и матрицы  $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ ; явные выражения интегралов (6.9) (а также матриц  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  и  $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p})$  ( $2R_2 = (\mathbf{A}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})$ ) при этом не требуются. Отметим также, что условие стационарности интеграла (6.2) при постоянных значениях интегралов (6.9) имеют вид (6.6) и также не требуют знания явного вида последних. Более того, уравнения (6.6) определяют установившиеся решения (6.4) системы (6.1) и в случае отсутствия этих интегралов (т.е. при невыполнении условий (6.8)).

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.3.** Условия (6.8) заведомо выполнены, если  $\Gamma = \mathbf{0}$  (при этом интегралы (6.9) можно выписать в явном виде (6.3)) или если (при  $\Gamma \neq \mathbf{0}$ )  $\dim \mathbf{r} = 1$  (при этом интегралы (6.9), вообще говоря, в явном виде выписать невозможно).

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.4.** При фиксированных значениях постоянных  $\mathbf{p}^0$  как уравнения (6.5), так и уравнения (6.6) (относительно  $\mathbf{r}$ ) могут иметь не только решение  $\mathbf{r}^0$ , но и, вообще говоря, решения  $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \dots$ , которые также зависят от постоянных  $\mathbf{p}$ , т.е. стационарные движения  $\mathbf{r}^1(\mathbf{p}), \mathbf{r}^2(\mathbf{p}), \dots$  образуют семейства  $S_1, S_2, \dots$ . Таким образом, множество  $S$  всех стационарных движений рассматриваемой системы представляет собой объединение семейств  $S_0, S_1, S_2, \dots$ .

## 7. Стационарные движения диска на абсолютно шероховатой плоскости

**7.1. Уравнения движения и их первые интегралы.** Рассмотрим движение без скольжения тяжелого круглого диска, опирающегося о горизонтальную плоскость. Пусть  $m$  — масса диска,  $a$  — радиус,  $A_1$  и  $A_3$  — соответственно экваториальный и осевой моменты инерции,  $g$  — ускорение свободного падения.

Следуя предложенному ранее подходу [18, 34], будем определять положение диска декартовыми координатами  $x$  и  $y$  проекции его центра на горизонтальную плоскость и углами Эйлера  $\theta$ ,  $\psi$  и  $\varphi$  ( $\theta$  — угол между плоскостью диска и опорной плоскостью,  $\psi$  — угол прецессии,  $\varphi$  — угол собственного вращения). При этом высота центра диска над опорной плоскостью определяется соотношением  $h = a \sin \theta$ . Тогда функция Лагранжа и уравнения связей, выражающие отсутствие проскальзывания диска в точке его контакта с опорной плоскостью, примут вид

$$\begin{aligned} 2L &= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (A_1 + ma^2 \cos^2 \theta) \dot{\theta}^2 + \\ &\quad + A_1 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + A_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - 2mga \sin \theta, \\ \dot{x} &= a\dot{\theta} \sin \theta \sin \psi - a(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \psi, \\ \dot{y} &= -a\dot{\theta} \sin \theta \cos \psi - a(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \sin \psi. \end{aligned}$$

Функция Лагранжа и коэффициенты связей не зависят от координат  $x$  и  $y$ , скорости которых стоят в левых частях этих связей, т.е. рассматриваемая система представляет собой консервативную неголономную систему Чаплыгина с тремя степенями свободы. Уравнения движения этой системы в форме Чаплыгина имеют вид [18]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\varphi}} &= ma^2 \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\psi}} &= -ma^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Функция  $\Lambda$  получается из функции  $L$  исключением из последней

зависимых скоростей  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  с помощью уравнений связи:

$$2\Lambda = (A_1 + ma^2) \dot{\theta}^2 + A_1 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + (A_3 + ma^2) (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - 2mga \sin \theta.$$

В явном виде уравнения (7.1) записываются следующим образом

$$\begin{aligned} (A_1 + ma^2) \ddot{\theta} &= A_1 q^2 \operatorname{ctg} \theta - (A_3 + ma^2) qr - mga \cos \theta, \\ (A_3 + ma^2) \dot{r} &= ma^2 q \dot{\theta}, \quad A_1 \frac{d}{dt} (q \sin \theta) = A_3 r \sin \theta \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь через  $q$  и  $r$  обозначены выражения

$$q = \dot{\psi} \sin \theta, \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta,$$

представляющие собой проекции угловой скорости диска на линию наибольшего ската и на нормаль к плоскости диска.

Полученная система уравнений имеет интеграл энергии

$$2H = (A_1 + ma^2) \dot{\theta}^2 + A_1 q^2 + (A_3 + ma^2) r^2 + 2mga \sin \theta = c_0 = \text{const.} \quad (7.3)$$

Покажем, что помимо данного интеграла уравнения движения имеют еще два первых интеграла. Для этого перейдем в уравнениях (7.2) к новой независимой переменной — углу  $\theta$ . Тогда эти уравнения примут вид

$$(A_3 + ma^2) \frac{dr}{d\theta} = ma^2 q, \quad A_1 \frac{d}{d\theta} (q \sin \theta) = A_3 r \sin \theta. \quad (7.4)$$

Из (7.4) получаем для  $r$  следующее дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{dr}{d\theta} - Br = 0, \quad B = \frac{ma^2 A_3}{A_1 (A_3 + ma^2)}.$$

Вводя в это уравнение вместо угла  $\theta$  новую независимую переменную  $z$ , определяемую равенством [34]

$$\cos \theta = 1 - 2z,$$

окончательно получим

$$z(1-z) \frac{d^2 r}{dz^2} + (1-2z) \frac{dr}{dz} - Br = 0. \quad (7.5)$$

Уравнение (7.5) представляет собой гипергеометрическое уравнение Гаусса [35]. Таким образом, рассматриваемая задача о движении диска интегрируется при помощи гипергеометрических функций.

Если обозначить через  $F(\xi, \eta, \zeta; z)$  гипергеометрический ряд Гаусса [35]

$$F(\xi, \eta, \zeta; z) = 1 + \frac{\xi\eta}{1 \cdot \zeta}z + \frac{\xi(\xi+1)\eta(\eta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \zeta(\zeta+1)}z^2 + \dots + \\ + \frac{\xi(\xi+1) \dots (\xi+n)\eta(\eta+1) \dots (\eta+n)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)\zeta(\zeta+1) \dots (\zeta+n)}z^{n+1} + \dots, \quad (7.6)$$

то уравнение

$$z(1-z) \frac{d^2r}{dz^2} + [\zeta - (\xi + \eta + 1)z] \frac{dr}{dz} - \xi\eta r = 0$$

допускает [35] следующие частные решения

$$F(\xi, \eta, \zeta; z), \quad F(\xi, \eta, \xi + \eta - \zeta + 1; 1 - z).$$

Для уравнения (7.5)

$$\zeta = 1, \quad \xi + \eta = 1, \quad \xi\eta = B$$

и, следовательно, его общее решение имеет вид

$$r = c_1 F(\xi, \eta, 1; z) + c_2 F(\xi, \eta, 1; 1 - z),$$

где  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные, а  $\xi$  и  $\eta$  — корни квадратного уравнения  $s^2 - s + B = 0$ .

В дальнейшем будем предполагать, что  $\xi$  и  $\eta$  являются комплексно сопряженными числами, т.е. справедливо неравенство  $B > 1/4$ , которое заведомо выполнено для однородного диска ( $A_3 = 2A_1 = ma^2/2, B = 4/3$ ). Отметим [35], что ряд (7.6) сходится равномерно на любом отрезке числовой оси, лежащем внутри интервала  $-1 < z < 1$ .

Возвращаясь от  $z$  к прежней независимой переменной  $\theta$ , получим функцию  $r(\theta)$  в виде

$$r = \sum_{i=1}^2 c_i u_i, \quad u_i = F(\xi, \eta, 1; (1 + (-1)^i \cos \theta)/2), \quad i = 1, 2. \quad (7.7)$$

Функцию  $q = q(\theta)$  находим из соотношений (7.4) и (7.7)

$$q = \frac{A_3}{2A_1} \sin \theta \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} c_i v_i, \quad (7.8)$$

$$v_i = F(\xi + 1, \eta + 1, 2; (1 + (-1)^i \cos \theta)/2), \quad i = 1, 2$$

с учетом выражения для производной гипергеометрической функции

$$\frac{d}{dz} F(\xi, \eta, \zeta; z) = \frac{\xi \eta}{\zeta} F(\xi + 1, \eta + 1, \zeta + 1; z).$$

Таким образом, уравнения движения допускают, помимо интеграла энергии, еще два первых интеграла, которые заданы неявно соотношениями (7.7) и (7.8) и представляются в виде гипергеометрических рядов.

**7.2. Эффективный потенциал и стационарные движения.** Хотя явный вид дополнительных первых интегралов в данной задаче неизвестен, тем не менее, учитывая тот факт, что эти интегралы линейны относительно квазискоростей и, используя выражения (7.7) и (7.8), удастся построить в данной задаче эффективный потенциал (см. § 1–3) и с его помощью провести полное исследование стационарных движений диска [36, 37].

Пусть  $W = W(\theta)$  — минимум функции  $H$  (интеграла энергии (7.3)) по переменным  $\dot{\theta}$ ,  $q$  и  $r$  на уровнях  $c_1$  и  $c_2$  интегралов, заданных неявно соотношениями (7.7)–(7.8). Таким образом,

$$W(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \left[ (A_3 + ma^2) u_i u_j + (-1)^{i+j} \frac{A_3^2}{4A_1} \sin^2 \theta v_i v_j \right] c_i c_j + mga \sin \theta.$$

Полагая  $A_1 = kma^2$ ,  $A_3 = 2kma^2$ ,  $x_i = c_i \sqrt{a/g}$ , ( $i = 1, 2$ ), выражение для  $W(\theta)$  можно переписать в безразмерном виде

$$W(\theta) = (1/2) \sum_{i,j=1}^2 w_{ij} x_i x_j + \sin \theta, \quad w_{ij} = (2k+1) u_i u_j + (-1)^{i+j} k \sin^2 \theta v_i v_j.$$

Неравенство  $B > 1/4$  перейдет при этом в неравенство  $k < 3.5$  (для однородного диска  $k = 1/4$ ).

Известно (см. [18, 34, 38]), что диск может совершать стационарные движения, определяемые соотношениями

$$\theta = \alpha = \text{const}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad q = q_0 = \text{const}, \quad r = r_0 = \text{const}, \quad (7.9)$$

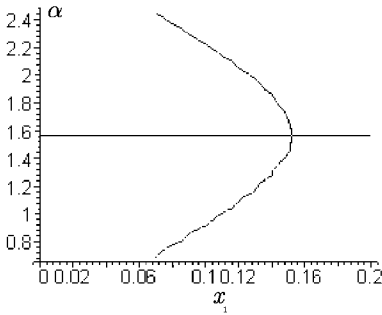


Рис. 4.  $x_2 = -x_1$ .

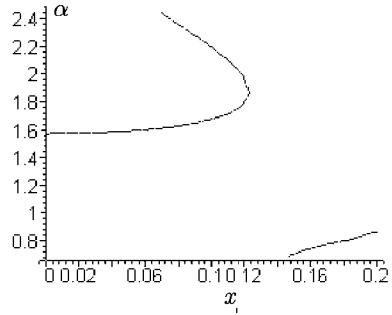


Рис. 5.  $x_2 = -0.5x_1$ .

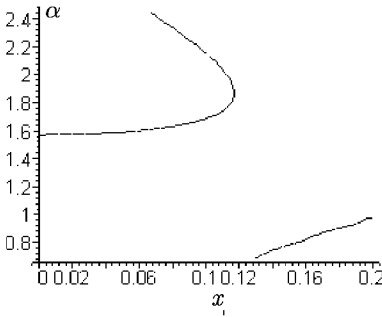


Рис. 6.  $x_2 = 0.5x_1$ .

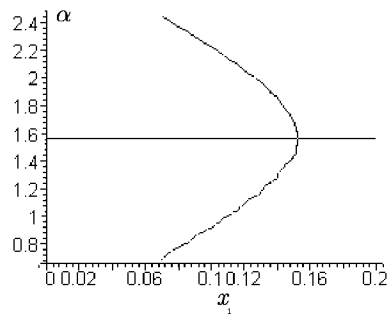


Рис. 7.  $x_2 = x_1$ .

где угол  $\alpha$  выражается из уравнения  $dW/d\theta|_{\theta=\alpha} = 0$ . Соотношения (7.9) отвечают стационарным движениям, при которых угол между плоскостью диска и опорной плоскостью постоянен.

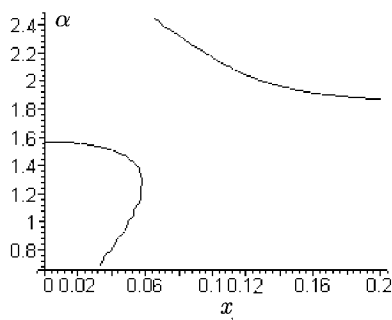
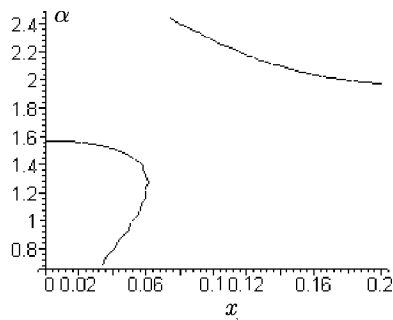
В явном виде условие существования стационарных движений (7.9)  $dW/d\theta|_{\theta=\alpha} = 0$  записывается следующим образом

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} x_i x_j - \cos \alpha = 0, \tag{7.10}$$

$$a_{ij} = a_{ji} = \sin \alpha \left[ (k+1/2) \left( (-1)^i u_j v_i + (-1)^j u_i v_j \right) + (-1)^{i+j} k \cos \alpha v_i v_j \right].$$

С помощью компьютерной программы MAPLE V Release 5.1 можно построить поверхность, задаваемую уравнением (7.10) в пространстве переменных  $x_1$ ,  $x_2$  и  $\alpha$  при фиксированном значении параметра  $k$ , а



Рис. 8.  $x_2 = -2x_1$ .Рис. 9.  $x_2 = 2x_1$ .

также сечения этой поверхности плоскостями  $x_2 = lx_1$ , где постоянная  $l$  принимает различные значения (рис. 4-9). На приведенных рисунках  $k = 1/4$ , что соответствует случаю однородного диска. Отметим, что сечения, аналогичные приведенным на рис. 4-9 были построены в работе [39].

Легко видеть, что при каждом фиксированном  $\alpha$  уравнение (7.10) задает некоторую кривую второго порядка. Анализ инвариантов этой кривой показывает, что при  $\alpha \neq \pi/2$  она представляет собой гиперболу, а при  $\alpha = \pi/2$  — пару пересекающихся прямых. Эти прямые определяются равенствами  $x_1 = x_2$  и  $x_1 = -x_2$  и соответствуют двум однопараметрическим подсемействам стационарных движений диска вида

$$\theta = \pi/2, \quad \dot{\theta} = 0, \quad r = 2u_*c_1 = \Omega, \quad q = 0; \quad u_* = F(\xi, \eta, 1; 1/2), \quad (7.11)$$

$$\theta = \pi/2, \quad \dot{\theta} = 0, \quad q = 2v_*c_1 = \omega, \quad r = 0; \quad v_* = F(\xi + 1, \eta + 1, 2; 1/2). \quad (7.12)$$

Данные подсемейства отвечают соответственно равномерному качению вертикально расположенного диска вдоль прямой (7.11) и равномерному верчению диска вокруг вертикально расположенного диаметра (7.12). Первое устойчиво (неустойчиво) при

$$\Omega^2 > \Omega_0^2 = \frac{g}{2a(2k+1)} \quad (\Omega^2 < \Omega_0^2),$$

а второе — при

$$\omega^2 > \omega_0^2 = \frac{g}{a(k+1)} \quad (\omega^2 < \omega_0^2)$$

(подробнее см. [18, 34, 38]).

**7.3. Условие устойчивости стационарных движений и его анализ.** Условие устойчивости стационарных движений (7.9), полученное на основании модифицированной теоремы Рауса–Сальвадори [10, 11, 18], имеет вид  $d^2W/d\theta^2|_{\theta=\alpha} \geq 0$ , или

$$\sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j - \sin \alpha \geq 0,$$

$$b_{ij} = b_{ji} = 2(2k+1)u_i u_j + (3k+1/2) \cos \alpha \left( (-1)^i u_j v_i + (-1)^j u_i v_j \right) + (-1)^{i+j} \left( (k+1) \sin^2 \alpha + 3k \cos^2 \alpha \right) v_i v_j.$$

При каждом фиксированном  $\alpha$  границей области устойчивости (т.е. кривой, задаваемой уравнением  $d^2W/d\theta^2|_{\theta=\alpha} = 0$ ) также будет некоторая кривая второго порядка. Анализ ее инвариантов показывает, что при всех  $k > 1/\sqrt{3} - 1/2$ , данная кривая представляет собой эллипс с центром в начале координат (т.е. в точке  $x_1 = x_2 = 0$ ). Вне соответствующего эллипса будет область устойчивости стационарных движений (7.9), а внутри — область неустойчивости.

Таким образом, можно указать на следующую геометрическую интерпретацию условий существования и устойчивости стационарных движений диска [40] (рис. 10–11). Те стационарные движения, которые на плоскости безразмерных констант первых интегралов  $x_1$  и  $x_2$  соответствуют точкам гиперболы (см. пункт 7.2.), лежащим вне эллипса, очевидно, являются устойчивыми. Если для некоторого  $\alpha$  эллипс и гипербола не пересекаются, то все стационарные движения, существующие для данного  $\alpha$ , являются устойчивыми, независимо от того, какие значения принимают величины  $x_1$  и  $x_2$ .

Полученные условия существования и устойчивости стационарных движений диска детально анализировались в работах [36, 37]. В частности, в указанных работах было показано, что стационарные движения диска (7.9) являются устойчивыми при всех значениях  $\alpha$ , удовлетворяющих условию

$$\cos^2 \alpha \geq \cos^2 \alpha_* = \frac{2(2k+1) \left[ (4k+3) - \sqrt{6(2k+1)(k+1)} \right]}{(2k+3)^2 + 3(2k+1)^2}.$$

В частности, для однородного диска ( $k = 1/4$ ) имеем

$$\cos^2 \alpha > (24 - 9\sqrt{5})/38 \approx 0.102, \quad \alpha_* \approx 1.2457.$$

При других значениях  $\alpha$  стационарные движения диска (7.9) будут устойчивы, если величина  $x_1$  превосходит по модулю некоторое критическое значение, явный вид которого здесь не приводится вследствие

его громоздкости. Полученные в работах [36, 37] результаты полностью согласуются с приведенными в статье [39] и в настоящем обзоре бифуркационными диаграммами.

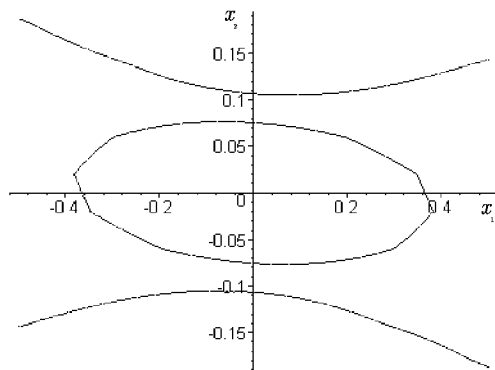


Рис. 10. Вид эллипса и гиперболы при  $\alpha = \pi/3$ .

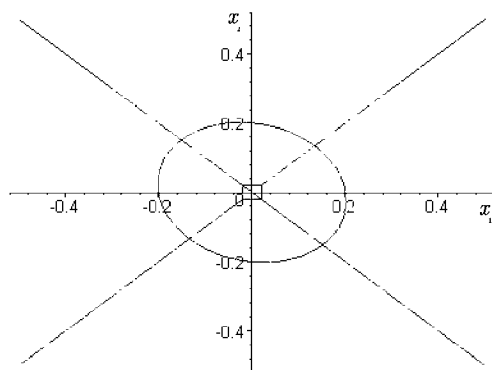


Рис. 11. Вид эллипса и гиперболы при  $\alpha = \pi/2$ .

## 8. Заключение

Разрозненные результаты исследования устойчивости стационарных движений тех или иных конкретных неголономных систем, по-видимому, впервые были систематизированы в монографии Ю.И. Неймарка и Н.А. Фуфаева [38]. Дальнейшее развитие теории устойчивости стационарных движений неголономных систем дано первым автором

данного обзора, в соответствии с результатами которого изложены §§ 1, 2, 4 и 6. При этом следует отметить, что §§ 1 и 2 содержат модифицированную теорию Рауса [10, 11, 18], а §§ 4 и 6 — обобщение и формализацию идей Ю.И. Неймарка и Н.А. Фуфаева [38], а также И.М. Миндлина и Г.К. Пожарицкого [41].

Задача о движении тяжелого твердого тела по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости является классической задачей динамики неголономных систем и имеет более чем вековую историю (см. монографию А.П. Маркеева [34] и библиографию в ней). Стационарные движения динамически симметричного шара были изучены в работах авторов [22–24], круглого диска — в работах второго автора [36, 37], а кельтского камня — в работах [30, 31, 42–45] и первого автора [28, 29]. Изложение §§ 3, 5 и 7 дано в соответствии с результатами авторов настоящего обзора. При этом следует отметить, что бифуркации Пуанкаре–Четаева в задачах о стационарных движениях шара и диска впервые были исследованы в работах второго автора данного обзора [24, 36, 37].

Приведенные в обзоре результаты показывают, что, несмотря на некоторую специфику неголономных систем, исследование устойчивости и бифуркации стационарных движений данных систем вполне успешно может быть проведено на основе модифицированной теории Рауса–Сальвадори и Пуанкаре–Четаева, если эти системы допускают первые интегралы, заданные в явной или неявной формах, и теории Ляпунова–Малкина и Андронова–Хопфа, если эти системы являются системами общего вида, т.е. не допускают первых интегралов, отличных от интеграла энергии, но обладают «диссипативными» (см. замечания 4.3 и 4.4) свойствами.

## Литература

- [1] *E.J. Routh*. A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. London. MacMillan and Co. 1877.
- [2] *E.J. Routh*. The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. London. MacMillan and Co. 1884.
- [3] *H. Poincare*. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Math. V. 7. 1885. P. 259–380.
- [4] *А.М. Ляпунов*. Общая задача об устойчивости движения. Харьков: Изд-во харьковского мат. общ-ва. 1892.
- [5] *T. Levi-Civita*. Sur la recherche des solutions particulieres des systemes differentiels et sur les mouvements stationnaires // Prace Math. Fis. V. 17. 1906. P. 1–140.

- [6] *L. Salvadori*. Un'osservazione su di un criterio di stabilita del Routh // *Rend. Accad. Sci. Fis. Math. Napoli (IV)*. V. 20. 1953. P. 267–272.
- [7] *В.В. Румянцев*. Об устойчивости равномерных вращений механических систем // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика. Машиностроение*. Вып. 6. 1962. С. 113–121.
- [8] *В.В. Румянцев*. Об устойчивости стационарных движений // *ПММ*. Т. 30. Вып. 5. 1966. С. 922–933.
- [9] *L. Salvadori*. Sull'estensione ai sistemi dissipativi del criterio di stabilita del Routh // *Ric. mat.* V. 15. 1966. P. 162–167.
- [10] *A.V. Karapetyan*. The Routh Theorem and its Extensions // *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*. 53. *Qualitative Theory of Differential Equations*. North Holland. Amsterdam and New York. 1990. P. 271–290.
- [11] *A.V. Karapetyan, V.V. Rumyantsev*. Stability of Conservative and Dissipative Systems // *Appl. Mech. Soviet Reviews*. V. 1. *Stability and Anal. Mech.* New York. Hemisphere Publ. Co. 1990. P. 3–144.
- [12] *S. Smale*. Topology and mechanics // *Invent. Math.* 1970. V. 10. P. 305–311; 1970. V. 11. P. 45–64.
- [13] *R. Abraham, J. Marsden*. *Foundations of Mechanics*. New York and Amsterdam. Benjamin. 1978.
- [14] *А.В. Карпетян*. Первые интегралы, инвариантные множества и бифуркации в диссипативных системах // *Регулярная и хаотическая динамика*. Т. 2. 1997. С. 75–80.
- [15] *W. Thomson, P. Tait*. *Treatise on Natural Philosophy*. Cambridge Univer. Press. Cambridge. 1879.
- [16] *Н.Г. Четаев*. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР. 1962.
- [17] *P. Hagedorn*. On the stability of steady motions in free and restricted dynamical systems // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* V. 46 No 2. 1979. P. 427–432.
- [18] *А.В. Карпетян*. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС. 1998.
- [19] *А.В. Карпетян, В.Н. Рубановский*. О модификации теоремы Рауса об устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами // *Сб. научно-методич. статей по теор. мех.* Вып. 17. 1986. М.: Изд-во МПИ. С. 91–99.
- [20] *В.Н. Рубановский*. О бифуркации и устойчивости стационарных движений // *Теор. и прилож. мех.* София. 1974. Т. 5. С. 67–79.
- [21] *В.В. Козлов*. О степени неустойчивости // *ПММ*. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 14–19.

- [22] *A.V. Karapetyan*. On construction of the effective potential in singular cases // Regular and Chaotic Dynamics. V. 5. No 2. 2000. P. 219–224.
- [23] *А.В. Карапетян*. О специфике применения теории Рауса к системам с дифференциальными связями // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 17–22.
- [24] *А.С. Кулешов*. К динамике волчка на шероховатой плоскости // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 1999. С. 130–140.
- [25] *С.А. Чаплыгин*. Исследования по динамике неголономных систем. М.–Л.: Гостехиздат. 1949. 112 с.
- [26] *А.В. Карапетян*. Об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 801–807.
- [27] *А.В. Карапетян*. К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 418–426.
- [28] *А.В. Карапетян*. Бифуркация Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела по шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. No. 2. С. 19–24.
- [29] *А.В. Карапетян*. О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 808–814.
- [30] *И.С. Астапов*. Об устойчивости вращения кельтского камня // Вестник МГУ. Сер. 1. Мат. мех. 1980. No 2. С. 97–100.
- [31] *В.В. Румянцев*. Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. No. 4. С. 11–21.
- [32] *Дж. Марсден, М. Мак-Кракен*. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир. 1980.
- [33] *А.В. Карапетян*. Об устойчивости стационарных движений систем некоторого вида // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. No 2. С. 45–52.
- [34] *А.П. Маркеев*. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука. 1992.
- [35] *И.С. Градштейн, И.М. Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука. 1971.
- [36] *А.С. Кулешов*. О стационарных движениях диска на абсолютно шероховатой плоскости // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 797–800.
- [37] *А.С. Кулешов*. О стационарных качениях диска на шероховатой плоскости // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 173–175.
- [38] *Ю.И. Неймарк, Н.А. Фужаев*. Динамика неголономных систем. М.: Наука. 1967.

- [39] *O.M. O'Reilly*. The Dynamics of Rolling Disks and Sliding Disks // *Nonlinear Dynamics*. 1996. No 10. P. 287–305.
- [40] *А.П. Дувакин*. Об устойчивости движений диска // *Инж. журн.* 1965. Т. 5. Вып. 1. С. 3–9.
- [41] *И.М. Миндлин, Г.К. Пожарицкий*. Об устойчивости стационарных движений тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // *ПММ*. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 742–745.
- [42] *А.П. Маркеев*. О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости // *ПММ*. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 575–582.
- [43] *М. Паскаль*. Асимптотическое решение уравнений движения кельтского камня // *ПММ*. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 321–329.
- [44] *G.T. Walker*. On a curious dynamical property of celts // *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1895. V. 45. pt. 5. P. 808–814.
- [45] *J. Walker*. The mysterious «rattleback»: a stone spins in one direction and then reverses // *Scientific American*. 1979. No. 10. P. 144–149.

# СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ В ДИНАМИКЕ КЕЛЬТСКИХ КАМНЕЙ<sup>1</sup>

*А. В. Борисов, И. С. Мамаев*

## 1. Исторические комментарии и уравнения движения

Не предполагая здесь подробно останавливаться на исторических и описательных аспектах, касающихся движения кельтских камней, отметим только, что они подробно обсуждаются в литературе, приведенной в книге [8]. Замечательные свойства кельтских камней были замечены Г. Т. Уолкером (G. T. Walker) в 1895 г., который дал их элементарное физическое описание. Задачей занимались также Г. Герглотц (1941), К. Магнус (1974), которые, в основном исследовали вопросы устойчивости. Мы будем в дальнейшем ссылаться на работы И. С. Астапова [1], А. В. Карапетяна [3, 4], А. П. Маркеева [7], имеющие непосредственное отношение к нашим результатам, а также на численную работу Линдберга, Лонгмана (R. E. Lindberg, R. W. Longman) [11], краткий анализ которой содержится в приложении. Среди других авторов, занимавшихся проблемой, видимо следует отметить Кейна и Левинсона (T. R. Kane, D. A. Levinson) [10], М. Паскаль [9].

Напомним, что необычное поведение кельтского камня заключается в следующем, Если его поместить на горизонтальную плоскость и закрутить в определенном направлении вдоль вертикальной оси, то он может устойчиво продолжать свое вращение. Если же направление вращения изменить на противоположное, то он вскоре перестает вращаться, начинает колебаться вокруг горизонтальной оси, а потом без внешнего воздействия меняет направление вращения вокруг вертикальной оси

---

<sup>1</sup>Подано в «Успехи физических наук» (2002 г.).



на противоположное (явление реверса). Для некоторых моделей камней такие смены вращения могут наблюдаться при любом направлении вертикального вращения и происходят многократно. Популярное изложение физических опытов с кельтскими камнями содержится в статье Дж. Уолкера (J. Walker) в журнале *Scientific American* [12].

Существует несколько динамических моделей, иллюстрирующих поведение кельтского камня. Наиболее общая постановка заключается в исследовании движения твердого тела по горизонтальной плоскости с учетом силы тяжести и силы трения (диссипации), которое может быть, например, сухим (кулоновским) или вязким (пропорциональным скорости). Однако такая общая постановка не допускает подробного динамического анализа в силу своей сложности. Фактически здесь выполнено лишь несколько численных экспериментов.

Менее реалистической, но более простой и наглядной является неголономная модель движения кельтского камня. Отметим, что неголономные динамические системы занимают некоторое промежуточное положение между обычными лагранжевыми (и гамильтоновыми) и общими диссипативными системами. Например, как правило, неголономные системы обладают интегралом энергии (и в этом смысле являются консервативными и близкими к гамильтоновым), а с другой стороны — у них отсутствует инвариантная мера [6]. Отсутствие инвариантной меры типично для диссипативных систем, в то же время, гамильтоновы системы всегда обладают стандартной инвариантной мерой в силу теоремы Лиувилля.

Более подробно с различными формами уравнений неголономной механики можно ознакомиться по книгам [5, 8]. В данной работе для вывода уравнений движения мы не будем пользоваться этими формами, а приведем уравнения движения кельтского камня без вывода, хотя их и легко получить из общих принципов динамики (закона изменения кинетического момента и некоторых кинематических уравнений). В частности, основным постулируемым свойством неголономной модели является наличие неинтегрируемой связи, состоящей в том, что скорость точки контакта тела и плоскости равняется нулю. Это условие сильно отличается от гамильтоновой модели полного проскальзывания (абсолютно гладкая плоскость) и не допускает действия силы трения скольжения. В этом случае говорят об абсолютно шероховатой плоскости (поверхности) и об условии полного сцепления. Несложно видеть, что при полном сцеплении (т.к. силы трения не совершают работы) имеется интеграл энергии и система является консервативной.

Неголономная модель динамики кельтского камня, как оказывается, ухватывает основные качественные свойства его движения, но вследствие отсутствия проскальзывания и наличия интеграла энергии все

эффекты (колебания и перевороты) проходят за существенно большее время, чем в реальных экспериментах. Тем не менее для первоначального физического описания такая модель применяется наиболее часто (см. [1, 3, 4, 5, 7, 9, 10]).

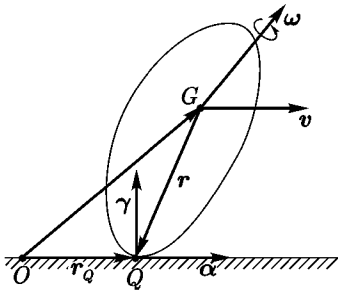


Рис. 1

Условие отсутствия проскальзывания между телом и плоскостью можно записать в виде

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, соединяющий центр масс  $G$  с точкой контакта  $R$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  — скорость центра масс и угловая скорость тела соответственно (см. рис. 1). В дальнейшем все вектора мы предполагаем спроецированными на оси, жестко связанные с твердым телом.

Уравнения движения твердого тела имеют вид (см. [5])

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + m\mathbf{g}\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  — кинетический момент тела относительно точки контакта,  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный орт вертикали,  $m\mathbf{g}$  — вес тела. Уравнения (2) аналогичны классическим уравнениям Эйлера–Пуассона, описывающим движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, они обладают двумя интегралами

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (3)$$

энергии и геометрическим. При этом предполагается, что вектора  $\mathbf{r}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  связаны соотношением, задающим гауссову проекцию

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\text{grad } F(\mathbf{r})}{|\text{grad } F(\mathbf{r})|}, \quad (4)$$

где  $F(\mathbf{r}) = 0$  представляет собой уравнение поверхности тела в жестко связанных с ним осях.

В отличие от уравнений Эйлера–Пуассона, для уравнений (2) в общем случае уже отсутствует интеграл площадей и инвариантная мера, что приводит к новым динамическим эффектам, не типичным для гамильтоновых систем.

## 2. Модели поверхности — параболоид и эллипсоид

Для моделирования движения кельтского камня используют наиболее простые поверхности эллиптического параболоида и трехосного эллипсоида.

Наиболее простая поверхность параболоида используется для описания колебаний и вращений тела вблизи вертикали (при этом точка контакта совпадает с вершиной параболоида), но не позволяет описывать перевороты и качение. Поверхность тела и гауссова проекция (4) задаются соотношениями

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{r_1^2}{a_1} + \frac{r_2^2}{a_2} \right) - (r_3 + h) = 0, \quad (5)$$

$$r_1 = -a_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_3}, \quad r_2 = -a_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \quad r_3 = -h + \frac{a_1 \gamma_1^2 + a_2 \gamma_2^2}{2\gamma_3^2},$$

где  $a_1, a_2$  — радиусы главных кривизн в вершине параболоида,  $h$  — высота центра масс, расположенного на оси параболоида.

Для исследования глобальных эффектов (не только движения вблизи вертикальных вращений) используется модель трехосного эллипсоида, поверхность и гауссова проекция для которого задается формулами

$$F(\mathbf{r}) = \frac{r_1^2}{b_1^2} + \frac{r_2^2}{b_2^2} + \frac{r_3^2}{b_3^2} - 1 = 0, \quad r_i = \frac{b_i^2 \gamma_i}{\sqrt{b_1^2 \gamma_1^2 + b_2^2 \gamma_2^2 + b_3^2 \gamma_3^2}}, \quad (6)$$

где  $b_1, b_2, b_3$  — главные полуоси эллипсоида. Главные радиусы кривизны  $a_1, a_2$ , например, в вершине  $r_1 = r_2 = 0, r_3 = b_3$ , задаются формулами

$$a_1 = \frac{b_1^2}{b_3}, \quad a_2 = \frac{b_2^2}{b_3}.$$

Предположим также, что центр масс в обоих случаях располагается в точке  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ , а одна из главных осей инерции (ось  $OX_3$ ) совпадает с главной геометрической осью ( $e_3$ ). *Отличительной особенностью кельтских камней является то, что две другие главные оси инерции повернуты относительно геометрических осей на угол  $\delta \neq 0$ .* Тензор инерции в главных геометрических (но не динамических) осях имеет вид

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \delta + I_2 \sin^2 \delta & (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & 0 \\ (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & I_1 \sin^2 \delta + I_2 \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

где  $I_1, I_2, I_3$  — главные центральные моменты инерции.

### 3. Переменные Андуайе – Дебри и трехмерные отображения Пуанкаре

Система (2) в терминологии углов Эйлера, описывает поведение углов нутации  $\theta$  ( $\cos \theta = \gamma_3$ ) и собственного вращения  $\varphi$   $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ . В дальнейшем мы сосредоточимся именно на изучении этой системы, не забывая при этом, что поведение угла прецессии  $\psi$  и точки контакта, зная решение (2) можно получить простыми квадратурами [2].

Вместо углов Эйлера и переменных  $(M, \gamma)$  для численного изучения наиболее приемлемы переменные Андуайе – Дебри  $(L, G, H, l, g)$  с физическим смыслом которых можно ознакомиться, например, по книге [2]. Здесь мы приведем только явные формулы пересчета

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, & M_2 &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, & M_3 &= L, \\ \gamma_1 &= \left( \frac{H}{G} \sqrt{1 - \left( \frac{L}{G} \right)^2} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \left( \frac{H}{G} \right)^2} \cos g \right) \sin l + \sqrt{1 - \left( \frac{H}{G} \right)^2} \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= \left( \frac{H}{G} \sqrt{1 - \left( \frac{L}{G} \right)^2} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \left( \frac{H}{G} \right)^2} \cos g \right) \cos l - \sqrt{1 - \left( \frac{H}{G} \right)^2} \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= \left( \frac{H}{G} \right) \left( \frac{L}{G} \right) - \sqrt{1 - \left( \frac{L}{G} \right)^2} \sqrt{1 - \left( \frac{H}{G} \right)^2} \cos g. \end{aligned} \quad (8)$$

На уровне двух известных интегралов движения (3) уравнения (2) задают четырехмерный фазовый поток, сечение которого трехмерной гиперплоскостью приводит к некоторому точечному трехмерному отображению (отображение Пуанкаре). Отметим, что для переменных  $L, G, H, l, g$  из (8) заведомо выполнено  $(\gamma, \gamma) = 1$ , поэтому на уровне этого интеграла формулы (8) задают взаимно однозначное преобразование. Трехмерное сечение четырехмерного уровня энергии  $\mathcal{H}(L, G, H, l, g) = E$  мы зададим плоскостью  $g = g_0 = \text{const}$ , на которой выберем координаты  $\left( l, \frac{L}{G}, \frac{H}{G} \right)$ .

Отметим, что в классических уравнениях Эйлера – Пуассона, в силу наличия дополнительного интеграла площадей  $H = \text{const}$  (да и вообще для всех двухстепенных гамильтоновых систем) исследование динамики сводится к двумерному отображению, сохраняющему меру.

В нашем случае ситуация существенно более сложная (что, кстати, подчеркивает нетривиальность описания динамических эффектов кельтских камней) — отображение является трехмерным и, вообще говоря, не сохраняет меру. Подобное свойство приближает нашу систему к «диссипативному» типу и обуславливает существование сложных притягивающих множеств (странных аттракторов), обсуждаемых далее. В качестве

простого трехмерного отображения, обладающего хаотическим аттрактором укажем на известное отображение Смейла – Вильямса.

Таким образом, задача об исследовании фазового потока уравнений (2) на уровне энергии приводится к исследованию отображения

$$x_{n+1} = \mathcal{F}(x_n), \quad x_n = \left( l, \frac{L}{G}, \frac{H}{G} \right). \quad (9)$$

*Вследствие наличия соотношений  $0 < l \leq 2\pi$ ,  $-G \leq L \leq G$ ,  $-G \leq H \leq G$ , точечное отображение (9) определено в некоторой компактной области.*

Ранее аналогичные трехмерные отображения были введены и исследовались нами при изучении проблем интегрируемости в статьях 15, 16 в этом сборнике.

Очевидно, что неподвижным точкам отображения (9) соответствуют периодические решения фазового потока (2), его инвариантным кривым — двумерные торы, двумерным точечным многообразиям — трехмерные многообразия. В дальнейшем мы будем пользоваться как терминологией для потока, так и для отображения, надеясь, что это не вызовет путаницы.

**Замечание.** Согласно формулам (8) на каждом уровне  $\frac{H}{G} = \text{const}$  необходимо отождествить точки с координатами  $l$  и  $l + 2\pi$ , а также заклеймить всю прямую  $\frac{L}{G} = 1$  в одну точку. После такого отождествления получается двумерная сфера  $S^2$ . Таким образом фазовое пространство отображения (9) гомеоморфно  $S^2 \times I$ , где  $I$  — отрезок  $[-1, 1]$ .

#### 4. Симметрии потока и отображения

Остановимся на различных симметриях (инволюциях) системы (2) и соответствующих им симметриях трехмерного отображения.

**Свойство обратимости.** Система (2) инвариантна относительно преобразования

$$\gamma \rightarrow \gamma, \quad \omega \rightarrow -\omega, \quad t \rightarrow -t. \quad (10)$$

Для определенного выше сечения при  $g_0 = 0$  преобразование (10) задает следующую инволюцию

$$l' = \pi - l, \quad \left( \frac{L}{G} \right)' = -\frac{L}{G}, \quad \left( \frac{H}{G} \right)' = -\frac{H}{G}, \quad \mathcal{F}' = \mathcal{F}^{-1},$$

где через  $\mathcal{F}^{-1}$  обозначено обратное отображение (9). Основные следствия обратимости следующие.

1. Вблизи неподвижных точек инволюции, т. е. вблизи положений равновесия  $\omega = 0$ , применима КАМ-теория. Нелинейный анализ вблизи устойчивых положений равновесия выполнен А. П. Маркеевым [7] и более подробно обсуждается ниже.

2. Неподвижные точки отображения  $\mathcal{F}$  (т. е. периодические траектории системы (2)), не инвариантные относительно инволюции (10) встречаются парами, причем их мультипликаторы равны по модулю и имеют противоположные знаки. Таким образом, если система (2) имеет притягивающее множество при  $t \rightarrow +\infty$ , то оно имеет аналогичное симметричное притягивающее множество при  $t \rightarrow -\infty$ .

Если тело обладает дополнительными геометрическими и динамическими симметриями, то уравнения (2) могут допускать другие инволюции.

**Симметрия относительно поворота осей.** Если главная геометрическая ось  $e_3$  совпадает с главной осью инерции (две оставшиеся могут быть повернуты вокруг нее на угол  $\delta$  по отношению к динамическим осям) то уравнения (2) допускают поворот осей  $e_1, e_2$  на угол  $\pi$  вокруг оси  $e_3$ , т. е. остаются инвариантными относительно преобразования

$$\begin{aligned} \omega_1 &\rightarrow -\omega_1, & \omega_2 &\rightarrow -\omega_2, & \omega_3 &\rightarrow \omega_3, \\ \gamma_1 &\rightarrow -\gamma_1, & \gamma_2 &\rightarrow -\gamma_2, & \gamma_3 &\rightarrow \gamma_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Для отображения  $x_{n+1} = \mathcal{F}(x_n)$  этому преобразованию соответствует симметрия

$$l' = l - \pi, \quad \left(\frac{L}{G}\right)' = \frac{L}{G}, \quad \left(\frac{H}{G}\right)' = \frac{H}{G}.$$

Как следствие, отображение  $\mathcal{F}$  симметрично относительно плоскости  $l = \pi$ , а все неподвижные точки, не принадлежащие этой плоскости, спарены.

**Симметрия относительно плоскости.** Если, например, у эллипсоида геометрическая и динамическая оси  $e_3$  совпадают, то уравнения (2) инвариантны при отражении относительно плоскости  $e_1 e_2$  и последующей замены времени, т. е.

$$\begin{aligned} \omega_1 &\rightarrow \omega_1, & \omega_2 &\rightarrow \omega_2, & \omega_3 &\rightarrow -\omega_3, \\ \gamma_1 &\rightarrow \gamma_1, & \gamma_2 &\rightarrow \gamma_2, & \gamma_3 &\rightarrow -\gamma_3, & t &\rightarrow -t. \end{aligned}$$

Трехмерное отображение при этом становится инвариантным относительно инволюции  $\mathcal{F}$ :

$$l' = l, \quad \left(\frac{L}{G}\right)' = -\left(\frac{L}{G}\right), \quad \left(\frac{H}{G}\right)' = \frac{H}{G}, \quad \mathcal{F}' = \mathcal{F}^{-1}. \quad (12)$$

Докажем следующее простое утверждение:

*для неподвижных точек отображения  $\mathcal{F}$  одно собственное число равно 1, а произведение двух других также равно 1.*

Действительно, если обозначить матрицу линейного преобразования координат (12) через  $\sigma = \text{diag}(1, -1, 1)$ , а матрицу линеаризации отображения  $\mathcal{F}$  вблизи неподвижной точки через  $\mathbf{A}$ , из условия инвариантности (12) следует

$$\mathbf{A} = \sigma \mathbf{A}^{-1} \sigma,$$

а также  $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{-1} = 1$ ,  $a = \text{Tr} \mathbf{A} = \text{Tr} \mathbf{A}^{-1}$ . Для характеристического полинома матрицы  $\mathbf{A}$  имеем

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + a\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + (1 - a)\lambda + 1).$$

*Появление единичного собственного значения связано с вырождением неподвижных точек, которые лежат в плоскости  $L = 0$  (см. рис. 9). Если два оставшиеся мультипликатора будут иметь ненулевые мнимые части, то вблизи этих точек имеются замкнутые инвариантные кривые.*

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай, при котором все динамические и геометрические оси совпадают (см. далее). Здесь имеются еще две плоскости симметрии и инвариантные кривые существуют вблизи вертикальных вращений, которые оказываются инвариантными при отражении в плоскостях, проходящих через ось вращения.

## **5. Устойчивость перманентных вращений (И. А. Астапов, А. В. Карапетян)**

Приведем явное выражение для характеристического полинома линеаризации системы (2) вблизи равномерных вращений параболоида вокруг вертикальной оси, которые для уравнений (2) являются неподвижными точками с координатами  $\omega = (0, 0, \omega_0)$ ,  $\gamma = (0, 0, 1)$ . Он имеет вид [1, 4]

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \lambda^2(k_0\lambda^4 + k_1\lambda^3 + k_2\lambda^2 + k_3\lambda + k_4), \quad k_0 = (I_1 + mh^2)(I_2 + mh^2), \\ k_1 &= \omega_0 mh(a_1 - a_2)I_{12}, \quad k_3 = \omega_0^3 mh(a_1 - a_2)I_{12}, \\ k_2 &= \omega_0^2((I_3 - I_2)(I_3 - I_1) + mh((I_3 - I_{11})(a_2 - h) + \\ &\quad + (I_3 - I_{22})(a_1 - h)) + m^2 h^2(a_1 - h)(a_2 - h)) + \\ &\quad + mg((I_{22} + mh^2)(a_2 - h) + (I_{11} + mh^2)(a_1 - h)), \\ k_4 &= \omega_0^4((I_3 - I_2)(I_3 - I_1) + mh((I_3 - I_{11})(a_2 - h) + \\ &\quad + (I_3 - I_{22})(a_1 - h)) + m^2 h^2(a_1 - h)(a_2 - h)) + \\ &\quad + \omega_0^2 mg((I_3 - I_{11})(a_2 - h) + (I_3 - I_{22})(a_1 - h) + \\ &\quad + 2mh(a_1 - h)(a_2 - h)) + m^2 g^2(a_1 - h)(a_2 - h), \end{aligned} \tag{13}$$

$I_{ij}$  — компоненты матрицы (7). Линейная устойчивость определяется вещественными частями решений (13). На каждом уровне энергии существует два вертикальных вращения в разные стороны с одной и той же по величине частотой  $\omega_0$ .

По теореме Рауса – Гурвица могут быть получены следующие условия устойчивости вертикальных вращений.

**Теорема (Астапов, Карапетян [1, 4]).** *Вертикальные вращения параболоида устойчивы при выполнении следующих условий*

$$1^\circ. (I_1 + I_2 + I_3)(a_1 + a_2 - 2h) - mh(4h^2 - 3h(a_1 + a_2) + 2a_1a_2) = F_{GD} > 0$$

$$2^\circ. \omega_0 < -\omega_*, \text{ где } \omega_*^2 = F_{GD}^{-1}mg(a_1 - h)(a_2 - h),$$

где  $F_{GD}$  — мы обозначим указанную геометро-динамическую функцию.

Уровень энергии, соответствующий  $\omega_*$ , обозначим через  $E_*$ .

Основным динамическим выводом из этой теоремы является зависимость устойчивости вращений при  $\delta \neq 0$  от направления вращения. Это, в частности, отличает неголономные системы от гамильтоновых.

Кроме того, для существования устойчивости вращений необходимо специальное распределение масс  $F_{GD} > 0$  и достаточно большая по абсолютной величине угловая скорость. При этом существуют тела, вертикальные вращения которых в обе стороны неустойчивы.

На рис. 2 приведены графики вещественных частей характеристических показателей при выполнении и невыполнении геометро-динамического неравенства  $1^\circ$ .

Из приведенных графиков следует, что при энергиях  $E$ , для которых  $\omega_0 < \omega_*$  всегда существует неустойчивое вертикальное вращение, к которому асимптотически стремится система при  $t \rightarrow -\infty$ . Характерный фазовый портрет точечного отображения для параболоида при  $E > E_*$  приведен на рис. 3. При этом все траектории при  $t \rightarrow +\infty$  наматываются на устойчивое равномерное вращение, а при  $t \rightarrow -\infty$  на неустойчивое. Как показывают расчеты, других аттракторов в фазовом пространстве не существует.

## 6. Бифуркация Хопфа. Рождение цикла (А. В. Карапетян)

В работе [4]<sup>1</sup> было показано, что вблизи критического значения частоты  $\omega_0 > -\omega_*$ ,  $\omega_0 \approx -\omega_*$  при потере устойчивости вращения выполняются условия теоремы о рождении цикла (теорема Андронова –

<sup>1</sup>См. также статью 18 из этого сборника.



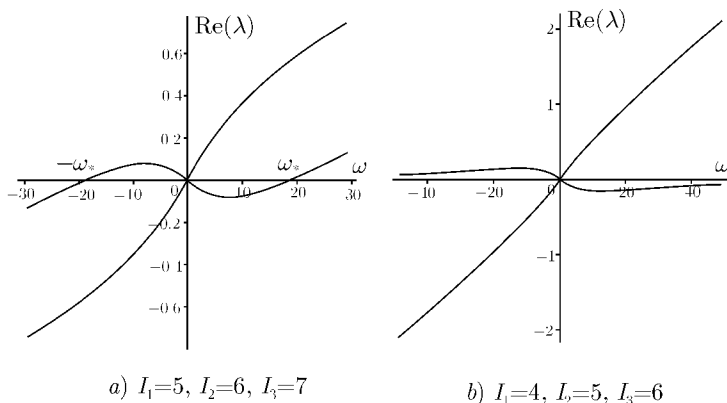


Рис. 2. Вещественные части характеристических показателей вертикальных вращений при различных соотношениях главных моментов инерции. В случае а) геометрико-динамическое неравенство  $1^\circ$  выполнено, а в случае б) — нет. ( $m = 1$ ,  $g = 100$ ,  $a_1 = 9$ ,  $a_2 = 4$ ,  $h = 1$ ,  $\delta = 0.2$ )

Хопфа). При этом вблизи вертикального вращения возникает устойчивый предельный цикл, определяющий некоторое периодическое решение системы (2).

Как следует из рис. 2 а при  $\omega_0 < \omega_*$ ,  $\omega_0 \approx \omega_*$  также выполняются условия теоремы о рождении цикла при обращении времени (это так называемая обратная бифуркация Хопфа).

Компьютерные исследования, приведенные на рис. 4, показывают, что при  $t \rightarrow +\infty$  помимо (устойчивого) цикла Карапетяна в фазовом пространстве рождаются еще два устойчивых цикла (сохраняющихся при малом шевелении параметров), аналитическое предсказание появления которых невозможно. Согласно свойству обратимости (см. выше) аналогичные неустойчивые циклы (притягивающие решения при  $t \rightarrow -\infty$ ) возникают вблизи неустойчивого вертикального вращения. Других аттракторов (включая  $t \rightarrow \pm\infty$ ) в фазовом пространстве нет.

## 7. Нелинейные колебания вблизи положения равновесия (А. П. Маркеев)<sup>2</sup>

А. П. Маркеев объяснил некоторые свойства движения кельтских камней, исследуя нелинейные малые колебания вблизи положения рав-

<sup>2</sup>См. статью 17 из этого сборника.

новесия, т. е. при  $\omega_0 = 0$ . При этом характеристический полином (13) становится биквадратным и при  $a_1 > h$ ,  $a_2 > h$  его корнями являются две пары чисто мнимых чисел.

В работе [7] построена нормальная форма системы (2) вблизи положения равновесия с точностью до членов третьего порядка. Она имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= -a\Omega_1^2\rho_1\rho_3, & \dot{\rho}_2 &= a\Omega_2^2\rho_2\rho_3, & B\dot{\rho}_3 &= a(\Omega_1^4\rho_1^2 - \Omega_2^2\rho_2^2), \\ \dot{\sigma}_1 &= \Omega_1, & \dot{\sigma}_2 &= \Omega_2, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  — некоторые полярные координаты,  $\sigma_i$  — угловые координаты,  $\Omega_1, \Omega_2$  — частоты нормальных колебаний системы,  $a, B = \text{const}$ .

При этом отделяется укороченная трехмерная система (для  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ ), которая является интегрируемой. Уравнения (14) имеют интегралы

$$\Omega_1^2\rho_1^2 + \Omega_2^2\rho_2^2 + B\rho_3^2 = \text{const}, \quad \rho_1^\alpha\rho_2 = \text{const}, \quad \alpha = \Omega_2^2/\Omega_1^2,$$

которые и позволяют провести качественный анализ движения.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Явные выражения координат  $\rho_i, \sigma_i$  и частот нормальных колебаний  $\Omega_i$  через фазовые переменные и интегралы системы (2) получаются из решения задачи на собственные векторы и собственные числа и имеют сложный вид, их можно найти в статье [7].

Для нормальной формы полной системы (14) траектории представляют собой обмотки трехмерных инвариантных торов.

Кроме того, у нормальной формы системы (14) существует особая трехмерная поверхность, заполненная двоякоасимптотическими траекториями, при которых тело выходит из вращения в одну сторону и приходит к вращению в другую сторону. Таким образом, при  $t \rightarrow +\infty$  вблизи рассматриваемого положения равновесия система (14) (и, следовательно, система (2)) имеет почти гамильтонов характер.

Вследствие обратимости в окрестности положения равновесия выполняются условия КАМ-теоремы, причем в качестве невозмущенной системы можно взять нормальную форму (14), а в качестве малого параметра — отклонение энергии от минимального значения  $E_{\min} = mgh$ .

*Таким образом, при малых энергиях в полной системе (2) существуют трехмерные колмогоровские торы.* На рис. 7 приведены трехмерные сечения торов, вложенных в четырехмерное пространство.

Приведенные соображения из КАМ-теории дополняют результаты А. П. Маркеева [7], имеющие асимптотический характер и справедливые на ограниченных временах.

ЗАМЕЧАНИЕ. В приложении 2 мы привели анализ обратимого плоского отображения, предложенного Квиспелом и Робертсом, обладающего неподвижными точками различного типа. Здесь также вблизи «гамильтоновых неподвижных точек» (с чисто мнимыми характеристическими показателями) сохраняются инвариантные кривые.

## 8. Несуществование инвариантной меры (В. В. Козлов)<sup>3</sup>

Этот результат также является основой для понимания динамики кельтского камня. Он справедлив при условии  $\delta \neq 0$  и отражает качественное отличие поведения неголономных систем от гамильтоновых, в которых мера всегда существует по теореме Лиувилля. Как уже было отмечено, в этом смысле неголономные системы ближе к диссипативным и в фазовом пространстве возникают аттракторы.

Приведем результат [6] в более точной формулировке.

*Для параболоида показано отсутствие вблизи вертикального вращения  $\omega = \omega_0$ ,  $\gamma_3 = 1$ ,  $\omega_0 \neq 0$  инвариантной меры с аналитической плотностью при выполнении неравенств  $I_1 \neq I_2$ ,  $\delta \neq 0$ , справедливых для кельтских камней.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим случай  $\delta = 0$ , справедливый для эллипсоидов или параболоидов, у которых геометрические оси совпадают с динамическими, в частности, однородных. С помощью явных вычислений можно показать, что в любых порядках в окрестности рассматриваемого вертикального вращения не существует препятствий к существованию инвариантной меры с аналитической плотностью. К сожалению, в явном (алгебраическом) виде она найдена только в нескольких специальных случаях (см. статью 15 в этом сборнике). Вопрос о ее форме в общем случае или о других препятствиях к ее существованию остается открытым.

## 9. Численные исследования Линдберга, Лонгмана

Кроме описанных аналитических результатов, в нескольких работах были проведены численные исследования, среди которых особенно выделяются результаты Линдберга, Лонгмана [11]. Основной вывод работы [11] состоит в том, что параболоид, закрученный в одну сторону вокруг вертикальной оси, через некоторое время, пройдя стадию колебаний, снова придет к вращению вокруг вертикальной оси, но в другую сторону. Для параметров, выбранных в [11] не выполнено условие устойчивости 2° вертикального вращения и как показывают более детальные исследования, приведенные далее, в этом случае в фазовом пространстве имеется также регулярный аттрактор — предельный цикл. Более

---

<sup>3</sup>См. статью 14 в этом сборнике.

подробное обсуждение результатов [11], которые к тому же оказались не вполне верифицируемыми, содержится в приложении I.

## 10. Глобальная динамика кельтского камня

Опишем общую динамику отображения в зависимости от значения энергии  $E$ . При  $E > E_*$  движение асимптотически стремится к устойчивому перманентному вращению, а при  $E \lesssim E_*$  — к циклу Карапетяна. В то же время при малых энергиях  $E \gtrsim E_{\min}$  система демонстрирует гамильтоново поведение по Маркееву. Как показано далее в промежутке  $[E_{\min}, E_*]$  система, как правило демонстрирует сложное хаотическое поведение, которое в некоторых случаях имеет характер перемежаемости, а в других — странного аттрактора.

Приведем результаты компьютерных исследований описанного выше трехмерного отображения для случая параболоида и эллипсоида в зависимости от значений полной энергии тела. Динамика эллипсоида при этом оказывается более сложной вследствие возможности переворотов тела.

Для обоих случаев зафиксируем следующие динамические и геометрические параметры

$$I_1 = 5, \quad I_2 = 6, \quad I_3 = 7, \quad m = 1, \quad g = 100,$$

для параболоида (5) примем  $a_1 = 9$ ,  $a_2 = 4$ ,  $h = 1$ , для эллипсоида  $b_1 = 3$ ,  $b_2 = 2$ ,  $b_3 = 1$ . В обоих случаях главные радиусы кривизны в точке  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $r_3 = 1$  совпадают, устойчивость описывается диаграммой рис. 2а, а соответствующее критическое значение энергии  $E_* = 1300$ , и частота вертикальных вращений  $\omega_* = \pm 18,516\dots$  (единицы измерения здесь следующие: длины — см, массы — кг, время —  $10^{-1/2}$  с).

### Модель параболоида ( $\delta = 0, 2$ )

Компьютерные исследования, хотя и носящие предварительный характер, позволяют разбить область возможных энергий  $(E_{\min}, \infty)$ , где  $E_{\min} = mgh = 100$ , на пять областей, в каждой из которых динамика носит сходный характер.

**1.  $E > E_*$  (рис. 3).** В фазовом пространстве имеется только вертикальное вращение (в одну сторону), которое является асимптотически устойчивым (в отображении имеется регулярный аттрактор). Вследствие обратимости при  $t \rightarrow -\infty$  все решения стремятся к вертикальному вращению, но в другую сторону. Заметим, что здесь мультипликаторы

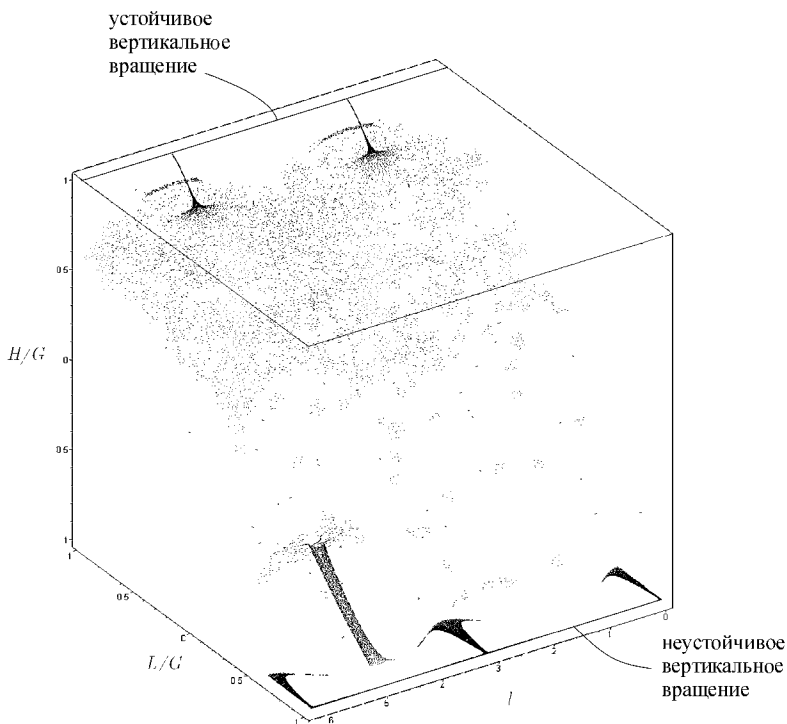
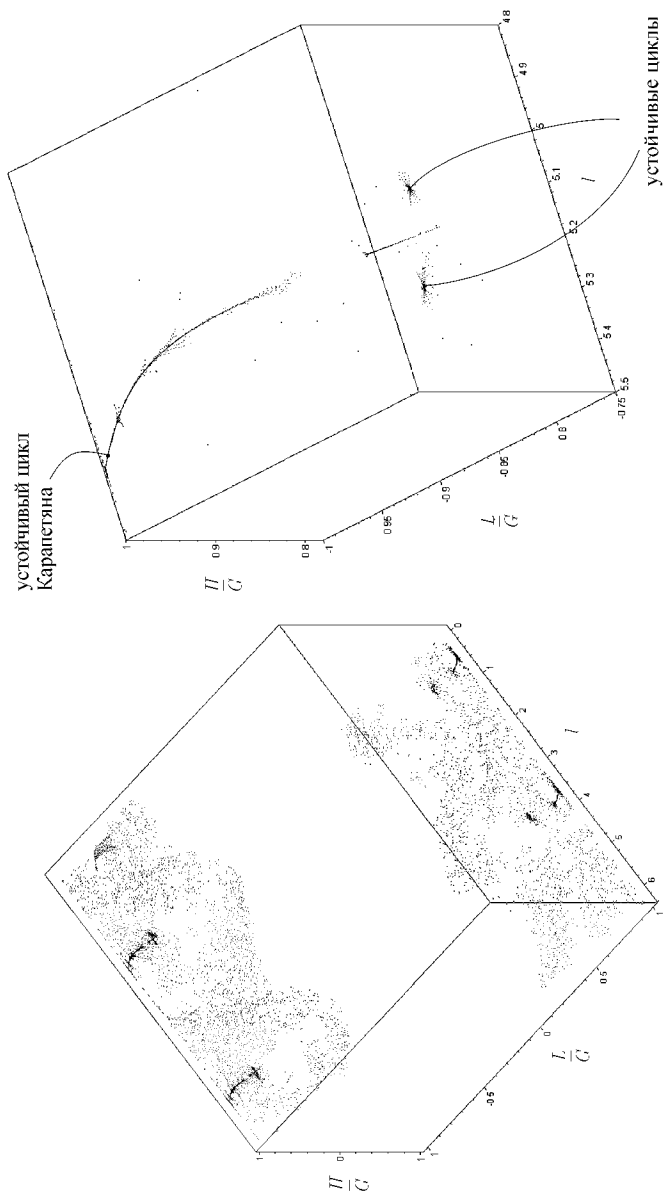


Рис. 3.  $E = 2000$ ,  $\delta = 0.005$ ,  $g_0 = 0.5\pi$ . Иллюстрируется поведение при больших энергиях  $E > E_*$ : все траектории сматываются с неустойчивого нормального вращения (при  $t \rightarrow \infty$ ) и наматываются на устойчивое. (Здесь для увеличения времени, проводимого вблизи перманентных вращений взято  $\delta = 0.005$ , что не соответствует указанному в тексте.)

устойчивого перманентного вращения меньше 1, один — вещественный и два комплексно сопряженных. Видимо, на одномерной сепаратрисе, выходящей из неустойчивого вращения расположен также неустойчивый предельный цикл, являющийся неподвижной точкой отображения (рис. 3).

**II.  $E_1 < E < E_*$  ( $933 < E_1 < 941$ , рис. 4).** При уменьшении энергии ниже  $E_*$  происходит описанная выше (см. разд. 6) бифуркация Андронова – Хопфа, и вблизи становящегося неустойчивым вертикально-



b)

a)

Рис. 4.  $E = 1295 \lesssim 1300 = E_*$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $g = 0.5\pi$ . Общий вид фазового портрета при уменьшении энергии ниже уровня  $E_*$ : все траектории уходят от трех неустойчивых циклов (они устойчивы при  $t \rightarrow \infty$ ) в правом нижнем углу на рис. а) и наматываются на три устойчивых цикла сверху (один из них — цикл Карапелъяна). На рис. б) увеличена область vicinity левого угла рис. а).

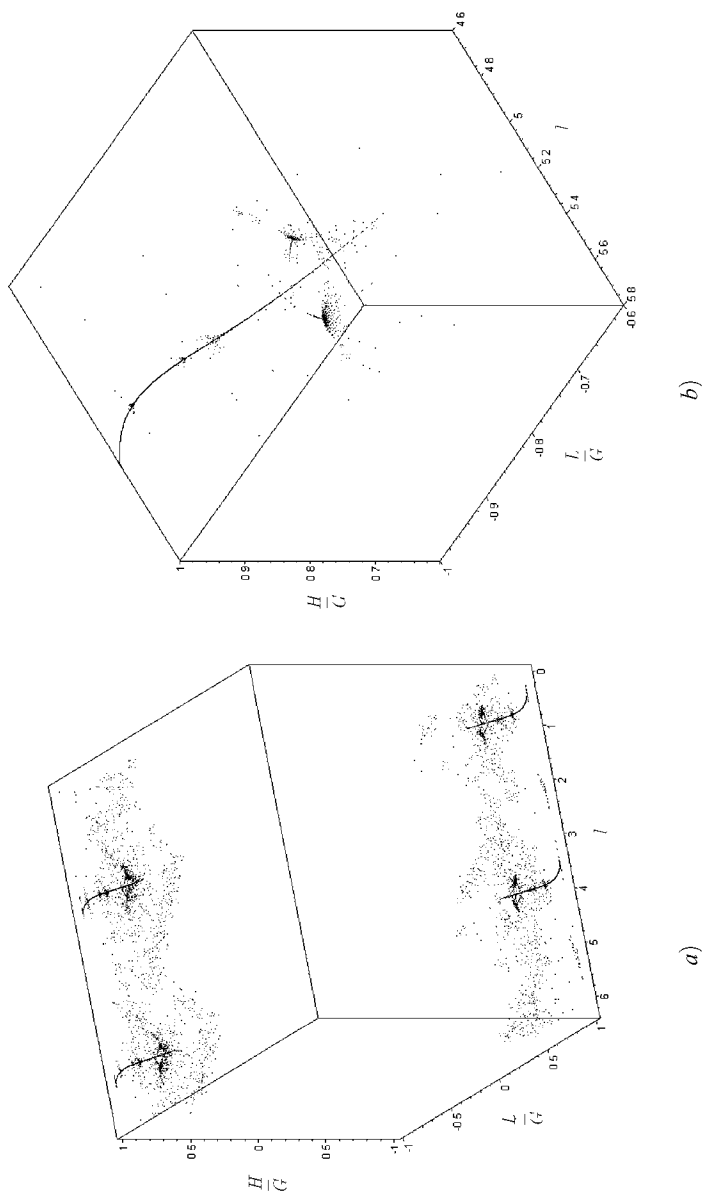


Рис. 5.  $E = 900$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $g = 0.5\pi$ . Общий вид фазового портрета после потери устойчивости цикла Карапеляна: все траектории сматываются с двух неустойчивых предельных циклов (внизу рис. а)) и наматываются на два устойчивых цикла (сверху). Область в левом верхнем углу увеличена на рис. б).

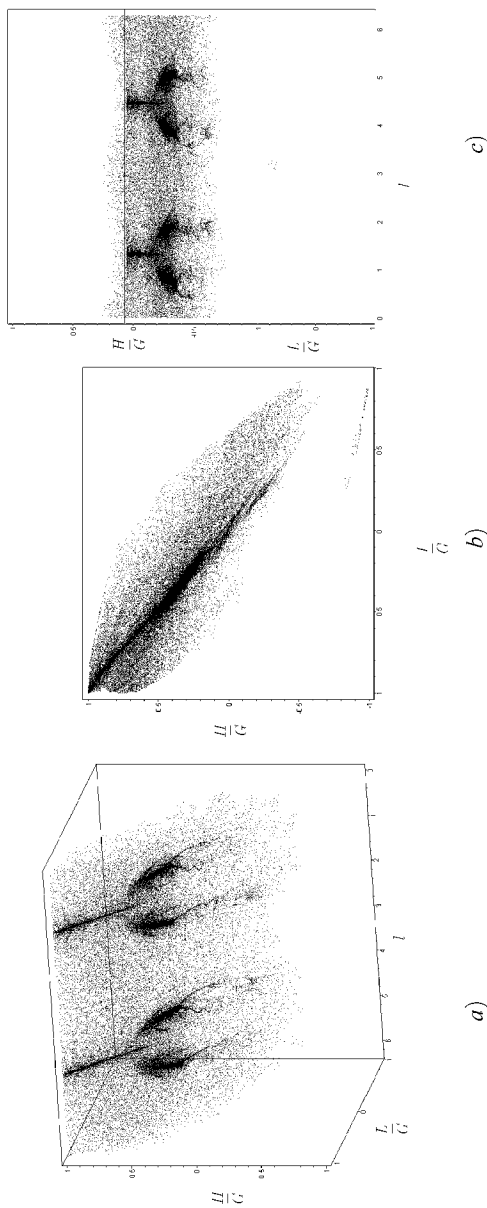
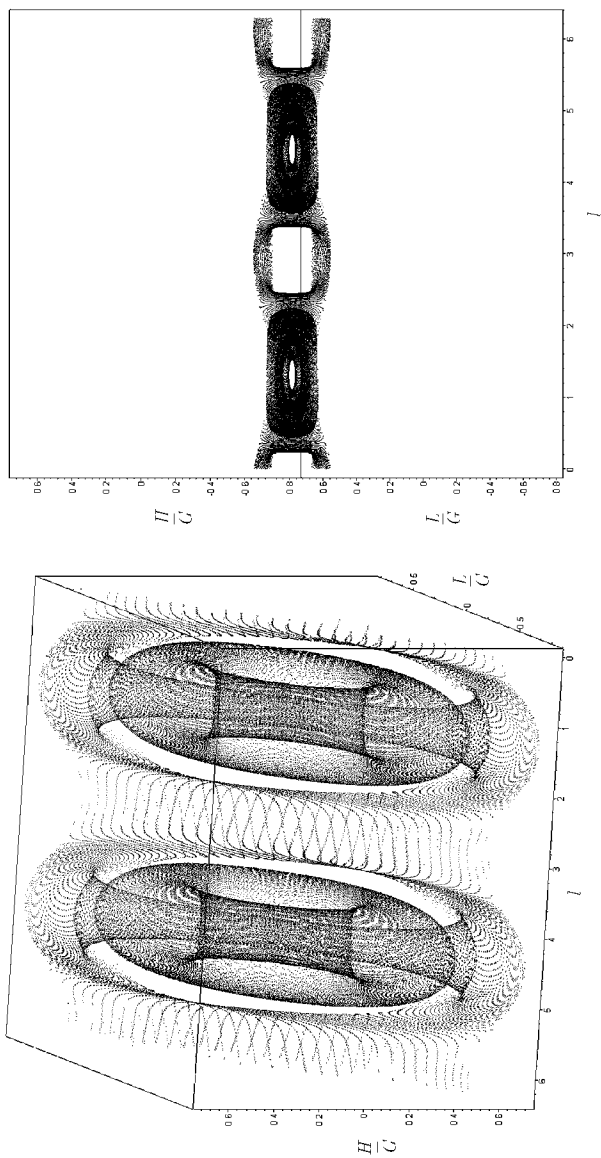


Рис. 6.  $E = 555$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $g = 0$ . Возникновение странного аттрактора при потере устойчивости циклов. На рисунке видно, что траектория покидает область vicinity перманентного вращения (снизу вблизи прямой  $L/G = H/G = -1$ ) и попадает в сложное притягивающее множество — странный аттрактор.





a)

b)

Рис. 7.  $E = 200$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $g_0 = 0$ . Общий вид фазового портрета с различных точек зрения при небольших энергиях. На рисунке хорошо заметны сохранившиеся нерезонансные торы.

го вращения рождается предельный цикл. Вблизи второго вертикального вращения происходит обратная бифуркация и также рождается предельный цикл, притягивающий траектории при  $t \rightarrow -\infty$ .

Кроме того, и это является удивительным фактом, который, видимо, нельзя предсказать аналитически, в фазовом пространстве рождаются еще два устойчивых цикла, отличных от цикла Карапетяна (рис. 4). Пара аналогичных циклов (устойчивых при  $t \rightarrow -\infty$ ) рождаются вблизи неустойчивых перманентных вращений. (Эти циклы сохраняются при малых изменениях параметров.)

На этом режиме все траектории сматываются с трех неустойчивых циклов и наматываются на три устойчивых. Два из них являются непосредственными продолжениями (по энергии) циклов Карапетяна, а четыре остальных найдены нами в численных экспериментах. В фазовом пространстве имеются также неустойчивые неподвижные точки, соответствующие вертикальным вращениям.

**III.  $E_2 < E < E_1$  ( $560,7 < E_2 < 561,9$ , рис. 5.)** При прохождении через  $E_1$  происходит потеря устойчивости одного цикла Карапетяна, при этом два другие устойчивые цикла сохраняют устойчивость. В фазовом пространстве остаются регулярные аттракторы (при  $t \rightarrow \pm\infty$ ), соответственно два устойчивых и неустойчивых предельных цикла. На фазовом портрете также имеется 4 неустойчивых неподвижных точки: два вертикальных вращения и два неустойчивых цикла Карапетяна.

**IV.  $E_3 < E < E_2 - \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  и мало. Рождение странного аттрактора, рис. 6.** В этой области теряют устойчивость два оставшихся предельных цикла и возникает притягивающее множество сложной структуры. Как показывают вычисления, максимальный показатель Ляпунова для траекторий этого множества положителен, что позволяет отнести его к *странным аттракторам*. Его возникновение в динамике кельтского камня является не очевидным и замечательным, тем более что первоначальная система (2) является консервативной. Сценарий перехода к странному аттрактору связан с потерей устойчивости нескольких предельных циклов, при этом динамика кельтского камня на соответствующих уровнях энергии становится глобально хаотической. Отметим, что на предыдущих режимах также наблюдались хаотические стадии колебаний, тем не менее их эволюция заканчивалась выходом на регулярный периодический режим. При дальнейшем уменьшении энергии  $E$  также наблюдаются сложные хаотические режимы, имеющие характер перемежаемости, их сложно описать даже численно.

**V.  $E_{\min} < E < E_{\min} + \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_2 > 0$  и мало, рис. 7** Т. е. имеется ввиду окрестность малых колебаний вблизи положения равновесия (ситуация Маркеева). Как уже указывалось, при малых  $\varepsilon_2$  здесь имеются трехмерные инвариантные колмогоровские торы, запирающие остальные траектории системы.

При  $E_{\min} + \varepsilon_2 \leq E \leq E_3$  поведение системы остается неисследованным. Более детальный анализ требует компьютерного исследования поведения сепаратрис неподвижных точек и предельных циклов. Необходимо также дать более точные значения для значений  $E_3$  и  $\varepsilon_2$ , при которых возникает странный аттрактор и дать его более строгое математическое описание.

### Модель эллипсоида

Здесь мы только сосредоточимся на некоторых геометрических и динамических особенностях по сравнению с параболоидом.

**I. Геометрические и динамические оси совпадают** (это собственно не ситуация кельтского камня, но в дальнейшем будет рассматриваться ее возмущение). При этом система (2) инвариантна при отражениях относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей. Как следствие, периодические решения (неподвижные точки отображения), лежащие в плоскостях *a*)  $L = 0$ , *b*)  $l = 0$ , *c*)  $l = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$  являются вырожденными и они образуют целые кривые в трехмерном пространстве, окруженные инвариантными кривыми, задающими двумерные торы фазового потока (рис. 8). Между этими торами, видимо, возможна диффузия, однако, ее механизм еще не изучен. Кривая неподвижных точек соответствует колебаниям эллипсоида вокруг главных осей в теле и горизонтальных осей — в пространстве. Вертикальные вращения в этом случае также имеют мультипликаторы, равные по модулю единице.

**II. Главные динамические оси повернуты вокруг одной геометрической оси  $e_3$  на угол  $\delta$ .** При этом сохраняется вырождение для колебательных решений в плоскости  $L = 0$ , а мультипликаторы возможных вращений уже не равны по модулю единице. При  $E > E_*$  одно из вертикальных вращений вокруг оси  $e_3$  приобретает устойчивость. На рис. 9 показано рождение двух притягивающих множеств, одно при  $t \rightarrow +\infty$ , другое при  $t \rightarrow -\infty$ , имеющих природу странных аттракторов (возможно, квазиаттракторов) — их показатели Ляпунова больше нуля. В отличие от параболоида к этим странным аттракторам притягиваются не все траектории — существует область в которой имеются описанные выше

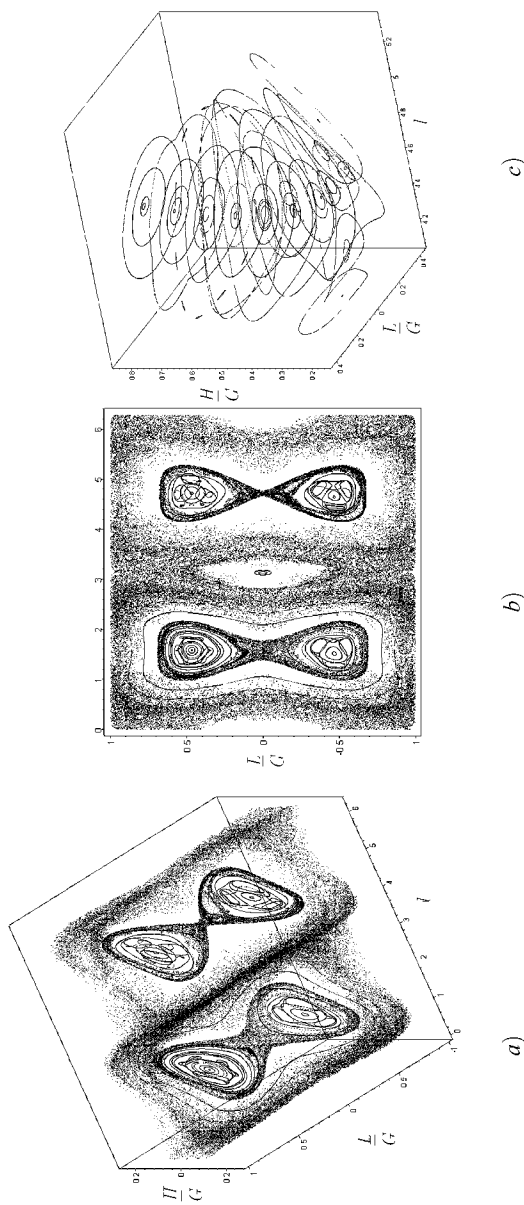


Рис. 8. Фазовый портрет (с различных точек зрения a, b) для случая эллипсоида, у которого совпадают главные геометрические и динамические оси. На рисунках хорошо заметно вырождение периодических решений для этого случая, обусловленное дискретными симметриями. На рис. c) показано увеличение фазового портрета с рис. a), b). Хорошо прослеживается кривая вырожденных периодических решений и сохраняющиеся вблизи нее одномерные инвариантные кривые отображения, которым в потоке соответствуют двумерные торы. Видно, что эти торы не обладают свойством запыряния. ( $E = 1500$ )

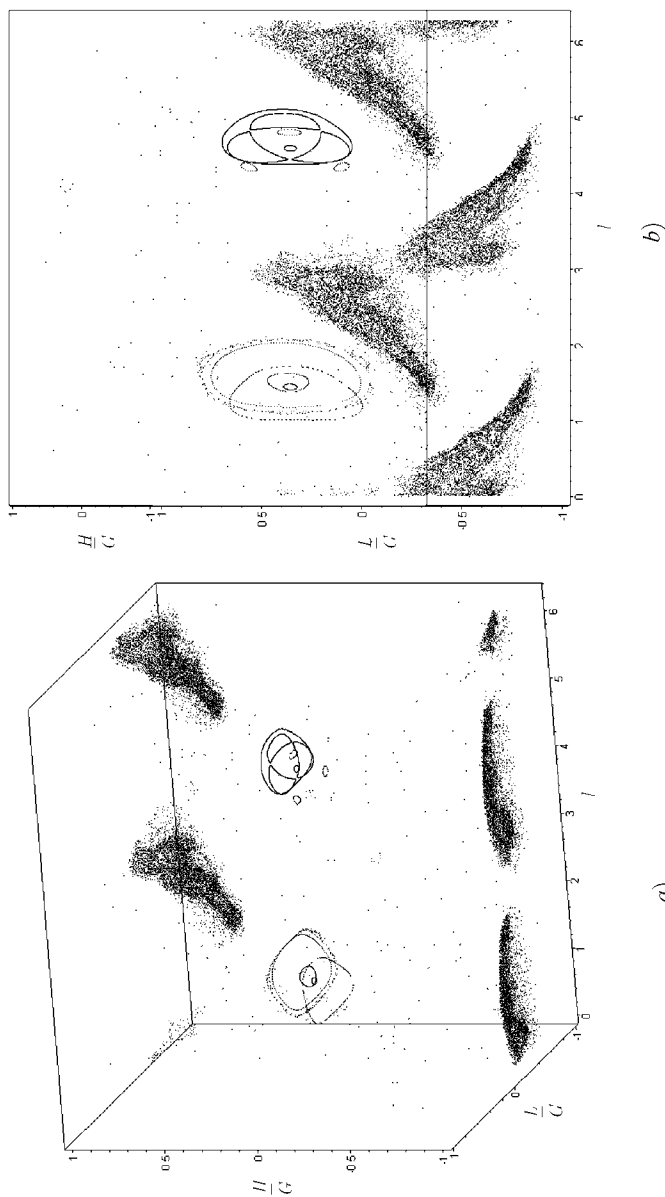


Рис. 9. Фазовый портрет (с различных точек зрения). Хорошо заметны темные области (странные аттракторы), к которым траектории притягиваются при  $t \rightarrow +\infty$  (область сверху) и при  $t \rightarrow -\infty$  (область снизу). Наряду с этим на фазовом портрете эллипсоида наблюдаются также сохраняющиеся инвариантные кривые волизи вырожденных периодических решений ( $E = 245$ ,  $\theta = 0$ ,  $\psi = 0.1$ ).

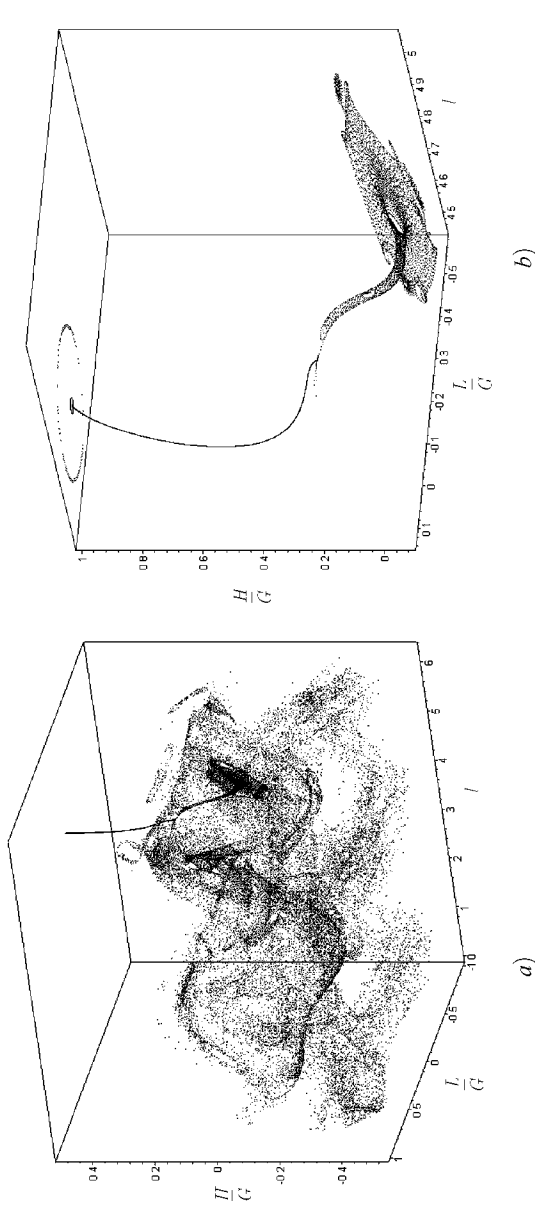


Рис. 10. Фазовый портрет в случае малого произвольного ( $\theta \neq 0, \psi \neq 0$ , здесь  $\theta, \psi, \varphi$  — углы Эйлера поворота геометрических осей) поворота динамических осей относительно геометрических. Хорошо заметно разрушение вырождения (эллиптических) периодических решений. На рис. б) показаны увеличенные начальные участки трех траекторий предыдущего портрета. Хорошо заметна кривая, вблизи которой траектория, выпущенная из периодического решения невозмущенной системы ( $\theta = 0, \psi = 0$ ) проводит очень длительное время. ( $E = 1500, \theta = 0.08, \psi = 0.01, \varphi = 0$ )

вырожденные периодические решения и охватывающие их двумерные инвариантные торы.

**III. Произвольное расположение осей.** Пусть динамические оси  $e_1 e_2$  повернуты относительно оси  $l_3$  на малый угол  $\delta$ , а далее ось  $e_3$  также наклонена относительно геометрической на некоторый малый угол  $\zeta$ .

В этом случае пропадают все геометрические симметрии и с неподвижных точек, образующих кривую на рис. 8 b, снимается вырождение и они становятся изолированными. Как показывают эксперименты, точка, запущенная вблизи эллиптической неподвижной точки невозмущенной системы (соответствующей совпадению геометрических и динамических осей) долгое время движется вблизи кривой, которая в невозмущенном случае заполнена вырожденными неподвижными точками (рис. 10). Несложно показать, что здесь наблюдаются экспоненциально малые эффекты, обуславливающие существование почти инвариантного многообразия, содержащего возмущенные траектории. Отметим, что более изученным является гиперболический случай, т. е. когда в невозмущенной ситуации имеется гиперболическое многообразие (например, множество, заполненное неподвижными гиперболическими точками — в отличие от кривой рис. 8 c). По теореме Хирша–Пью–Шуба при возмущении это гиперболическое многообразие сохраняется, хотя уже неподвижные точки на нем становятся изолированными или исчезают вовсе.

Для этой ситуации также характерно появление сложных аттракторов, а общая динамика является еще менее изученной. Отметим также, что вообще трехмерные отображения (как с мерой, так и без нее), к сожалению, пока очень слабо изученными, а задачи неавтономной механики, рассмотренные в этой работе, представляют целый полигон, на котором могут быть опробованы новые математические методы.

После подготовки окончательного варианта статьи авторы узнали об интересной работе Н. Broer, С. Simó, R. Vitolo *Bifurcations and strong attractors in the Lorentz-84 climate model with seasond forcing*, которую можно посмотреть на сайте [www.maia.ub.es](http://www.maia.ub.es) (2001 г., препринт 21). В ней разбирается неавтономная модель долгопериодических климатических изменений в атмосфере, предложенная Лоренцом в 1984 году, описываемая уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax - y^2 - z^2 + aF(1 + \varepsilon \cos \omega t), \\ \dot{y} = -y + xy - bxy + G(1 + \varepsilon \cos \omega t), \\ \dot{z} = -z + bxy + xz, \quad a, b, \varepsilon, \omega = \text{const}, \end{cases} \quad (15)$$

где  $F, G$  являются периодическими функциями с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Исследование системы также сводится к трехмерному отображению. В указанной работе были обнаружены странные аттракторы и родственные сценарии перехода к ним при разрушении инвариантных циклов.

Авторы благодарны А. В. Карапетяну, В. В. Трещеву за полезные замечания.

## Литература

- [1] *Астапов И. С.* Об устойчивости вращения кельтского камня. Вестн. МГУ, сер. 1, мат., механ. 1980, №2, с. 97–100.
- [2] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика твердого тела, РХД, 2001.
- [3] *Карапетян А. В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивость кельтских камней. Прикл. мат. и механ. 1981, т. 45, вып. 1, с. 42–51.
- [4] *Карапетян А. В.* Бифуркации Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела по шероховатой плоскости. Изв. АН СССР, механ. тв. тела, 1985, №2, с. 19–24.
- [5] *Карапетян А. В.* Устойчивость стационарных движений, УРСС, 1998, 150 с.
- [6] *Козлов В. В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики. Успехи механ., 1985, т. 8, №3, с. 85–107.
- [7] *Маркеев А. П.* О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости. Прикл. мат. и механ., 1983, т. 47, вып. 4, С. 575–582.
- [8] *Маркеев А. П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992.
- [9] *Паскаль М.* Асимптотическое решение уравнений движения кельтского камня. Прикл. мат. и механ., 1983, т. 46, вып. 2, с. 321–329.
- [10] *Kane T. R., Levinson D. A.* Realistic mathematical modeling of the rattleback. International Journal Non-Linear Mechanics, 1982, v. 17, №3, p. 175–186.
- [11] *Linderberg R. E., Longman R. W.* On the dynamic behavior of the wobblestone. Acta mechanica, 1983, v. 49, №1–2, p. 81–94.
- [12] *Walker J.* The mysterious «rattleback»: a stone spins in one direction and then reverses. Scientific American, 1979, №10, p. 144–149.



## Приложение 1

# ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ КЕЛЬТСКОГО КАМНЯ<sup>1</sup>

В этом приложении мы пытаемся реконструировать результаты работы [1], относительно численного интегрирования уравнений движения кельтского камня.

Рассмотрим задачу о качении произвольного параболоида по плоскости без проскальзывания, причем оси инерции параболоида повернуты относительно его геометрических осей на некоторый угол  $\alpha$  (см. рис. 1). Поверхность параболоида в системе связанной осями инерции тела задается уравнением

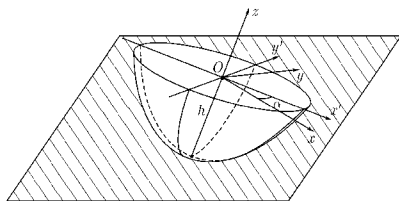


Рис. 1. Качение параболоида по плоскости. Точка  $O$  — центр масс параболоида,  $(x', y', z)$  — его геометрические оси, а  $(x, y, z)$  — его главные оси инерции.

$$F(\mathbf{r}) = z - \frac{1}{2} (\mathbf{x}, \mathbf{T}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{x}) + h = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,  $h$  — высота центра масс, когда параболоид находится в состоянии равновесия,  $\mathbf{T}$  —  $(2 \times 2)$ -матрица поворота на угол  $\alpha$ ,  $\mathbf{B} = \text{diag}(p, q)$  — матрица главных радиусов кривизны, причем  $q > p > h$ . Уравнения движения в этой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m \dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + mg(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\gamma}$  — вектор вертикали в связанной с телом системе координат,  $\mathbf{M}$  — вектор кинетического момента тела относительно точки контакта. Вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  выражается через  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{r}$  из уравнения

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + m g \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}),$$

<sup>1</sup>Результаты приложений 1, 2 получены А. А. Килиным.

где  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  — главный центральный тензор инерции тела. Радиус вектор точки контакта  $\mathbf{r}$  выражается следующим образом:  $r_1$  и  $r_2$  задаются выражением

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{\gamma_3} \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{T} \hat{\gamma}, \quad \hat{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2),$$

а  $r_3$  определяется из уравнения (1).

Приведем результаты численного исследования эффекта вертикального реверса (изменения направления вращения) кельтского камня в сравнении с результатами Р. Линдберга и Р. Лонгмана [1]. Нами проводилось численное интегрирование уравнений движения (2) со следующими параметрами:  $m = 0.15$  кг,  $I_1 = 2$  кг см<sup>2</sup>,  $I_2 = 4.5$  кг см<sup>2</sup>,  $I_3 = 6$  кг см<sup>2</sup>,  $h = 1$  см,  $p = 2.5$  см,  $q = 5$  см,  $\alpha = 5^\circ$ . Эти параметры полностью совпадают с параметрами в экспериментах [1].

На рис. 2 приведена сравнительная таблица зависимостей частот от времени при следующих начальных условиях  $\omega_0 = (0, 0, 5 \text{ рад/сек})$ ,  $r_0 = (0.2 \text{ см}, 0, z(0.2, 0))$ , где  $z(0.2, 0)$  выражается из уравнения (1). Как следует из рисунка, сильно не совпадают полученные временные масштабы. Так, если в [1] переворот оси вращения происходит за время порядка 30 секунд, то в проведенных нами экспериментах это время равно примерно 1300 секундам. С другой стороны, общая качественная картина результатов проведенных исследований совпадает с результатами [1]. На рис. 3 приведена сравнительная таблица зависимостей частоты вращения вокруг максимальной оси инерции  $\omega_3$  от времени для случая  $\alpha = 30^\circ$ , в котором наблюдается многократный реверс. Как и в предыдущем случае при сохранении общей качественной картины численные значения значительно отличаются.

Как уже было отмечено в основной работе, для области малых энергий вращения вокруг наибольшей из осей инерции в обе стороны являются неустойчивыми. Таким образом можно наблюдать многократный реверс.

При увеличении энергии выше некоторого критического значения, а также при выполнении следующего условия на распределение масс в теле

$$(I_1 + I_2 - I_3)(p + q - 2h) - mh(4h^2 - 3h(p + q) + 2pq) > 0 \quad (3)$$

одно из перманентных вращений становится устойчивым и возможен только однократный реверс. Критическое значение энергии, при котором это происходит, равно

$$\begin{aligned} E_* &= \frac{1}{2} I_3 \omega_*^2 + mgh = \\ &= \frac{1}{2} \frac{mgI_3(p-h)(q-h)}{(I_1 + I_2 - I_3)(p + q - 2h) - mh(4h^2 - 3h(p + q) + 2pq)} + mgh. \end{aligned} \quad (4)$$

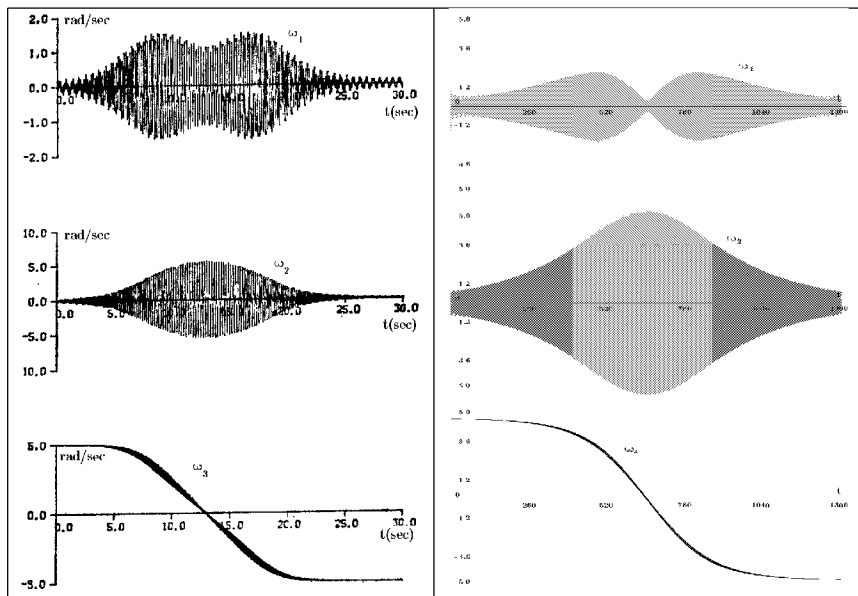


Рис. 2. Слева — результаты Р. Линдберга и Р. Лонгмана; справа — результаты полученные в ходе численного эксперимента.

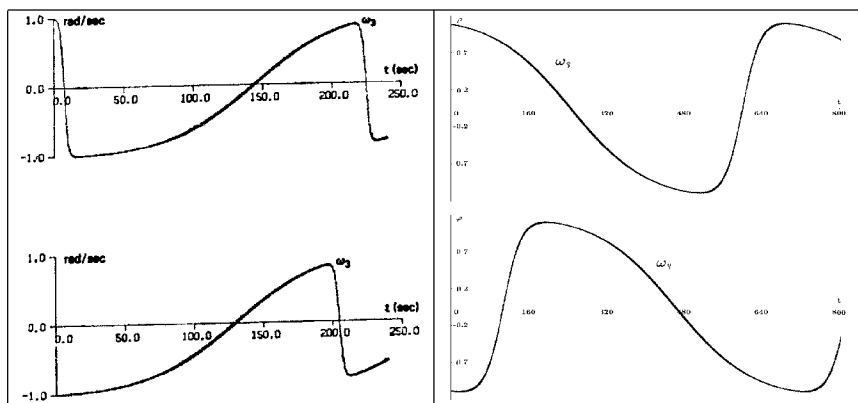


Рис. 3. Слева — результаты Р. Линдберга и Р. Лонгмана; справа — результаты полученные в ходе численного эксперимента. Начальные условия:  $r_0 = (0.2 \text{ см}, 0, z(0.2, 0))$ ,  $\omega_0 = (0, 0, 1 \text{ рад/сек})$  — для верхних рисунков, и  $\omega_0 = (0, 0, -1 \text{ рад/сек})$  — для нижних рисунков.

Легко проверить, что для параметров [1] условие (3) выполнено, а критическое значение энергии равно  $E_* = 1637.7042253$  ( $\omega_* = 22.29128548$ ). Таким образом параметры рассмотренные [1] близки к области малых энергий для которых картина почти интегрируема. При повышении энергии, вдали от интегрируемой ситуации доля хаотического поведения в системе увеличивается и реверс происходит только после прохождения хаотических колебаний.

## Литература

- [1] Lindberg R. E., Longman R. W. *On the Dynamic Behavior of the Wobblestone*. Acta Mechanica, 49, 1983, p. 81–94.

## Приложение 2

---

### ПРИМЕР ОБРАТИМОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

В этом приложении мы подробно рассмотрим одно обратимое точечное отображение плоскости  $\mathbb{R}^2$  в себя, которое не сохраняет площадь, но тем не менее является обратимым. Как мы видели, подобные отображения могут демонстрировать эффекты неголономных систем. Действительно, в неголономных системах типа кельтского камня, на уровне интеграла энергии возникают трехмерные отображения, не сохраняющие меру, но являющиеся обратимыми. Рассматриваемое отображение было предложено Г. Квиспелом и Дж. Робертсом [1] для демонстрации свойств сохранения и разрушения КАМ-торов, а также возникновения различных аттракторов. Рассматриваемое отображение  $(x, y) \rightarrow (x_1, y_1)$  задается неявно следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= -y + y^3 + x, \\ y_1^3 - y^3 - y_1^2 - y^2 + y_1 - y + 2Cx_1 + 2x_1^2 - 2x_1 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $C \in \mathbb{R}$  — параметр. Обращающая инволюция имеет вид

$$\begin{aligned} x' &= -y + y^3 + x, \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

Покажем, что свойства рассматриваемого отображения в некоторых аспектах похожи на свойства отображений неголономных систем, то есть отображение (1) обладает как диссипативными, так и консервативным поведением.

Ввиду того, что отображение (1) задается достаточно простыми формулами, для него можно найти все неподвижные точки и классифицировать их. Положим в системе (1)  $x_1 = x = x_*$  и  $y_1 = y = y_*$  и разрешим ее относительно  $x_*$  и  $y_*$ . В результате мы получим шесть неподвижных точек отображения:

$$\begin{cases} 1) & y_* = 0, & x_* = 0; \\ 2) & y_* = 0, & x_* = 1 - C; \\ 3-6) & y_* = \pm 1, & x_* = \frac{1 - C \pm \sqrt{(1 - C)^2 + 4}}{2}. \end{cases}$$

Из этих шести точек первые две являются также неподвижными точками обращающей инволюции, следовательно согласно обобщению КАМ-теоремы для обратимых систем, вблизи них должны существовать КАМ-торы (см. таблицу 1 и рис. 1).

Рассмотрим линеаризацию отображения (1) вблизи неподвижной точки. Выполним замену

$$\begin{aligned} x_1 &= x_* + \xi_1, & x &= x_* + \xi, \\ y_1 &= x_* + \eta_1, & y &= x_* + \eta. \end{aligned} \tag{2}$$

и разрешив в первом порядке малости по  $\xi$  и  $\eta$  получившиеся уравнения относительно  $\xi_1$  и  $\eta_1$  получим явное представление линейной части отображения (1) вблизи неподвижной точки

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3y_* - 1 \\ \frac{2(1 - C - 2x_*)}{3y_*^2 - 2y_* + 1} & \frac{3y_*^2 - 1 + 2(1 - C - 2x_*)(3y_* - 1)}{3y_*^2 - 2y_* + 1} \end{pmatrix}.$$

Характеристические показатели (собственные числа матрицы  $\mathbf{A}$ ) определяют тип неподвижной точки и, следовательно, поведение вблизи нее. В таблице 1 приведены результаты анализа системы (3) вблизи всех шести неподвижных точек, иллюстрирующие эволюцию динамики системы при изменении параметра  $C$ .

Наибольший интерес представляет область параметров  $C \in (-1, 3)$ , в которой система проявляет как гамильтоновы, так и диссипативные

№	Координаты неподвижной точки $x_*, y_*$ .	$\det A$	Различные области возможных значений управляющего параметра и соответствующие значения характеристических показателей неподвижных точек							
			$(-\infty, C_1^*)$	$(C_1^*, C_2^*)$	$(C_2^*, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, C_3^*)$	$(C_3^*, C_4^*)$	$(C_4^*, \infty)$
1	$x_* = 0,$ $y_* = 0$	1	седло $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \lambda_2 = 1)$						седло $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \lambda_2 = 1)$	
2	$x_* = 1 - C,$ $y_* = 0$	1	седло $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \lambda_2 = 1)$						центр $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C},  \lambda_1  =  \lambda_2  = 1)$	седло $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \lambda_2 = 1)$
3	$x_* = \frac{1 - C + D}{2},$ $y_* = 1$	3	отталкивающее седло $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \lambda_2 = 3)$	отталкивающий узел $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \lambda_2 = 3)$	неустойчивый фокус $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C},  \lambda_1  =  \lambda_2  = 3)$			отталкивающий узел $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \lambda_2 = 3)$	отталкивающее седло $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \lambda_2 = 3)$	
4	$x_* = \frac{1 - C - D}{2},$ $y_* = 1$	3	отталкивающее седло $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \lambda_2 = 3)$							
5	$x_* = \frac{1 - C + D}{2},$ $y_* = -1$	$\frac{1}{3}$	притягивающее седло $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{3})$			притягивающий узел $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C},  \lambda_1  =  \lambda_2  = \frac{1}{3})$			притягивающее седло $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{3})$	
6	$x_* = \frac{1 - C - D}{2},$ $y_* = -1$	$\frac{1}{3}$	притягивающее седло $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{3})$							

Таблица 1 В таблице использованы следующие обозначения  $C_1^* = 1 - 2\sqrt{3}, C_2^* = 1 - \sqrt{3} + 4\sqrt{3}, C_3^* = 1 + 2\sqrt{3}, D = \sqrt{(1 - C)^2 + 4}$



Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

**subscribe@rcd.ru**

**Внимание:** дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

**http://shop.rcd.ru**

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307, тел.: 332-48-92, (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34).
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135-54-37.
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 15 этаж).
4. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

*Борисов Алексей Владимирович, Мамаев Иван Сергеевич (ред.)*

## НЕГОЛОНОМНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ, ХАОС, СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ

*Дизайнер М. В. Ботя*

*Технический редактор А. В. Широбоков*

*Корректор М. А. Ложкина*

---

Подписано в печать 29.07.02. Формат 60 × 84<sup>1/16</sup>.

Усл. печ. л. 18,83. Уч. изд. л. 18,32.

Гарнитура Антиква. Бумага офсетная №1.

Печать офсетная. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.

http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

---