Т.А. ОБГАДЗЕ, З.Н. ЦВЕРАИДЗЕ

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

“Технический университет”

ГРУЗИНСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.А. ОБГАДЗЕ, З.Н. ЦВЕРАИДЗЕ

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

20 лабораторных работ на основе Mathcad 2001 PROFESSIONAL

Утверждено Редакционно-
издательским советом ГТУ
в качестве учебного пособия

Тбилиси

2006

УДК 517.958

Учебное пособие посвящено последовательному анализу математических моделей экономики. Каждая тема иллюстрируется лабораторной работой. Предлагаются соответствующие программы на языке Mathcad 2001 Professional и задания для изучающих предмет

– Математические методы в экономике.

Пособие предназначено для студентов - бакалавров и магистров факультета информатики и систем управления Грузинского технического университета.

Рецензенты: профессор, д.т.н. Н. Джибладзе
профессор, д.т.н. З. Гаситашвили

ISBN – 99940-57-28-6

**Посвящается светлой памяти
грузинских философов
академика Вахтанга Гагоидзе и
Мананы Обгадзе**

П р е д и с л о в и е

Предлагаемый курс - **"Лабораторные работы по курсу: математическое моделирование в экономике", (20 лабораторных работ на основе Mathad 2001 PROFESSIONAL)**, в течение ряда лет один из авторов читал во Владимирском государственном университете (Россия), в Витебском государственном технологическом университете (Беларусь), в Московском государственном горном университете (Россия), в Сухумском филиале Тбилисского государственного университета им. И.Джавахишвили (Грузия) и читается в Грузинском техническом университете.

Курс сопровождается лекционным материалом по "Математическим методам экономики", который авторы собираются издать отдельной книгой.

Подход к изложению материала и методические воззрения продолжаются исходя из других учебно-методических работ авторов:

а) "Элементы математического моделирования", изд.ГПИ, Тбилиси, 1989;

б) "Вычислительная физика", изд. ВлГУ, Владимир, 1999;

в) "Высшая математика для экономистов, рабочая программа и методические рекомендации", изд. ИГУМО, Москва, 2002.

В работе широко используется пакет прикладных программ Mathcad 2001 PROFESSIONAL. Все лабораторные работы доведены до конкретного числового результата. Предлагаются соответствующие программы на языке Mathcad. В конце каждой лабораторной работы предлагаются варианты для индивидуальных заданий студентам. Каждый студент должен выполнить свой вариант работы и сдать отчет по каждой работе с соответствующими пояснениями. В конце учебного пособия предлагается список литературы для более глубокого изучения предлагаемого материала лабораторных работ.

Авторы благодарят своих студентов, которые своим интересом побуждали авторов к работе над курсом. Авторы искренне благодарны своим коллегам за интерес к рукописи курса и предложенные советы по улучшению изложения, что во многом способствовало совершенствованию методического плана курса.

Особенно благодарен один из авторов светлой памяти своей сестры, философа Обгадзе Мананы, беспредельная вера которой сделала его профессором и побудила интерес к математическому моделированию в социальных, экономических и психологических науках. Авторы не могут не отдать должное, Светлой памяти Великого грузинского философа, академика Вахтанга Гагоидзе, воспитавшего целую плеяду грузинских философов и одарившего всех окружающих беспредельной любовью и душевной теплотой.

Авторы благодарны г-же Манане Исраелян за нелегкий труд набора текста и работу над ним, что значительно улучшило изложение текста.

Особую благодарность заслуживают наши жены - Нателa Шаликашвили и Лаура Бузаладзе, которые своим терпением и душевной теплотой поддерживали авторов и способствовали созданию этого учебного пособия.

Лабораторная работа №1

Тема: СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ СРЕДНЕЙ ЦЕНЫ ТОВАРА В РЕГИОНЕ

Для обработки большого объема информации в экономике широко используются методы статистического анализа данных. Исходя из темы данной лабораторной работы, рассмотрим те понятия статистики, которые необходимы для выполнения этой лабораторной работы.

Основные понятия : Для изучения **средней цены** товара в заданном регионе, когда число торговых точек N - большое число (N>1000) и расстояние между ними достаточно, чтобы было неудобно обходить их, за период постоянства цены, применяют статистические понятия.

Определение. Общее число торговых точек региона называется **объемом генеральной совокупности**.

Рассмотрим случай, когда объем генеральной совокупности N=1000. Тогда удобно **произвести выборку** из генеральной совокупности. Иначе говоря, выбрать из всех торговых (N=1000) точек лишь некоторые из них в меньшем количестве, например, n=100, с тем, чтобы легко было обойти все эти точки и узнать соответствующие цены. Выборку надо производить таким образом, чтобы все районы данного региона были представлены пропорционально.

Определение. Общее число торговых точек выборки называется **объемом выборки**.

В нашем примере объем выборки n= 100.

Далее, изучают **средние характеристики** выборки, и полученные результаты переносят по известным формулам на генеральную совокупность.

Пусть, после обхода торговых точек выборки мы получили следующие значения цен (тетри) на продукт (например, хлеб)(**статистический ряд данных**):

$$\underbrace{40;40;40;...;40;}_{10\ \text{раз}} \quad \underbrace{50;50;...;50;}_{70\ \text{раз}} \quad 45;45;45; \quad \underbrace{60;...;60;}_{17\ \text{раз}} \qquad (1)$$

Для обработки этого массива чисел (цен) составляется **вариационный ряд.**

Определение. Таблица значений признака X с соответствующими частотами F называется **вариационным рядом**.

Для данных (1) вариационный ряд имеет вид: (2)

X	40	50	45	60
F	10	70	3	17

Определение. Число повторений заданного значения цены X_i, называется F_i - частотой.

Из вариационного ряда (2) ясно, что $F_1=10$ указывает, что соответствующее значение цены $X_1=40$ тетри встречается в 10 торговых точках выборки; значение $x_2=50$ встречается в 70 торговых точках и т.д.

Обработка данных вариационного ряда (2) начинается с **ранжирования.**

Определение. Вариационный ряд, где значения признака расположены в порядке возрастания, называется **ранжированным**.

Перепишем вариационный ряд (2) в ранжированном виде: (3)

X	40	45	50	60
F	10	3	70	17

Переходим к изучению **средних характеристик** вариационного ряда (3).

Средние характеристики. Средними характеристиками ранжированного вариационного ряда являются: **медиана**, **мода** и **среднее значение выборки.**

Определение. Медианой ранжированного вариационного ряда называется значение признака (цены), стоящее в середине (MeX).

P.S. Когда число различных значений признака **нечетное,** мы имеем одно значение в середине и это значение будет медианой, в нашем случае, число различных значений признака четное, их всего четыре (40; 45; 50; 60). В таких случаях в середине оказываются два числа и медиана вычисляется, как их среднее арифметическое:

$$\mathrm{M}e\mathrm{X} = \frac{45+50}{2} = 47.5 \text{ (тетри)} \qquad (4)$$

Определение. Модой (MoX), ранжированного вариационного ряда называется такое значение признака, которому соответствует наивысшая частота.

Для нашего примера (3) наивысшую частоту $F_{i\ max}=70$, имеет значение признака $X_i=50$. Поэтому модой вариационного ряда (3) будет

$$\mathrm{MoX}=50. \qquad (5)$$

Определение. Средним значением выборки называется взвешенная средняя ранжированного вариационного ряда.

$$\mathrm{X}sr = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi \cdot Fi}{\sum_{i=1}^{n} Fi}. \qquad (6)$$

В нашем примере

$$\mathrm{X}sr = \frac{\sum_{i=0}^{3} Xi \cdot Fi}{\sum_{i=0}^{3} Fi}. \qquad (7)$$

P.S. В суммировании, параметр i меняется от 0 до 3 так, как в Mathcad, если не указать дополнительно соответствующим оператором, то суммирование всегда начинается с i=0.

Характеристики разброса. Средние значения мы вычислили, но для оценки разброса значений цен применяются понятия: **дисперсия - (DX), среднее квадратическое отклонение - (σX) и коэффициент вариации - (νX).**

Определение. Среднее значение квадрата отклонения значений признака от его среднего значения называется дисперсией.

$$DX = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - Xsr\right)^2 \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \qquad (8)$$

В нашем примере

$$DX = \frac{\sum_{i=0}^{3}\left(X_i - Xsr\right)^2 \cdot F_i}{\sum_{i=0}^{3} F_i}. \qquad (9)$$

Значение дисперсии имеет квадратическую размерность по сравнению с X_i - признаком, поэтому рассматривают другую характеристику разброса, у которой уже нет этого недостатка.

Определение. Среднее квадратическое отклонение значений признака от его среднего значения вычисляется как квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma X = \sqrt{DX}\,. \qquad (10)$$

P.S. Среднее квадратическое отклонение σX является мерой абсолютного отклонения значения X_i -признака от его среднего значения Xsr.

Рассматривается и относительный коэффициент разброса, который называется коэффициентом вариации (νx) и вычисляется по формуле

$$\nu X = \frac{\sigma X}{Xsr} \cdot 100\,. \qquad (11)$$

Коэффициент вариации задает относительный разброс в процентах.

Для пересчета среднего значения XGsr генеральной совокупности применяются оценки:

$$Xsr - \frac{\sigma X}{\sqrt{n}} \le XGsr \le Xsr + \frac{\sigma X}{\sqrt{n}} \quad \text{, если} \quad - \quad \frac{n}{N} \le 0.1; \qquad (12)$$

$$Xsr - \sqrt{\frac{(\sigma X)^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)} \le XGsr \le Xsr + \sqrt{\frac{(\sigma X)^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)},$$

если $0.1 < \dfrac{n}{N} \le 0.9$. (13)

Для изучения распределения частот по значениям признака используют также **графические методы.**

Определение. График зависимости распределения частот от значения признака называется полигоном частот.

Для оценки геометрических свойств полигона частот вводятся **коэффициент асимметрии** и **эксцесс.**

Определение. Коэффициентом асимметрии называется третий момент:

$$\mu X = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - Xsr)^3 \cdot F_i}{(\sigma X)^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} F_i} \,. \tag{14}$$

В нашем случае

$$\mu X = \frac{\sum_{i=0}^{3}(X_i - Xsr)^3 \cdot F_i}{(\sigma X)^3 \cdot \sum_{i=0}^{3} F_i} \,. \tag{15}$$

P.S. Если график полигона частот симметричен относительно медианы, то μx=0. Если μx>0, то симметрия нарушается справа от медианы, если μx<0, то - слева.

Для оценки скорости изменения полигона частот, по сравнению с нормальным законом распределения Гаусса, рассматривается четвертый момент, называемый **эксцессом:**

$$EX = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - Xsr)^4 \cdot F_i}{(\sigma X)^4 \cdot \sum_{i=1}^{n} F_i} - 3 \,. \tag{16}$$

Для нашей задачи

$$EX = \frac{\sum_{i=0}^{3}(X_i - Xsr)^4 \cdot F_i}{(\sigma X)^4 \cdot \sum_{i=0}^{3} F_i} - 3 \,. \tag{17}$$

P.S. Наличие числа 3 в формуле (16) наводит на мысль, что "Бог Троицу любит".

Это число в формуле (16) обеспечивает тот факт, что для гауссовского распределения значение эксцесса EX=0. Если EX>0, то экспериментальное распределение частот меняется быстрее, чем гауссовское, а если EX<0, то оно меняется медленнее.

Теперь рассмотрим **программу** для решения задачи лабораторной работы № 1 на основе Mathcad.

Задача № 1. При изучении средней цены выборки (n=100; N=1000) получен вариационный ряд

(3)

X	45	49	50	55	60	65	70
F	10	30	40	5	2	3	10

Найти: MeX; MoX; Xsr; DX; σX; νX; μX; EX.

Постройте: полигон частот f=S(x). Поясните полученные данные. Оцените среднюю генеральной совокупности.

Решение. Данные ранжированного ряда переписываем в виде матриц.

ПРОГРАММА № 1

$$X := \begin{pmatrix} 45 \\ 49 \\ 50 \\ 55 \\ 60 \\ 65 \\ 70 \end{pmatrix} \qquad F := \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 40 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$ данные

Средние характеристики

$MeX := 55$ Медиана

$MoX := 50$ Мода

$$Xsr := \frac{\sum_{i=0}^{6} X_i \cdot F_i}{\sum_{i=0}^{6} F_i}$$

$Xsr = 52.1$ взвешенное среднее значение

Характеристики разброса

$$DX := \frac{\sum_{i=0}^{6} \left(X_i - Xsr\right)^2 \cdot F_i}{\sum_{i=0}^{6} F_i}$$

$DX = 48.39$ Дисперсия

$$S := \sqrt{DX}$$

$S = 6.956$ Среднее квадратическое отклонение

$$\nu := \frac{S}{Xsr} \cdot 100$$

$\nu = 13.352$ Коэффициент вариации

$$Xsr - \frac{S}{\sqrt{100}} = 51.404$$

$$Xsr + \frac{S}{10} = 52.796$$

Среднее значение генеральной совокупности находится в промежутке (51.4, 52.8).

Геометрические характеристики данных

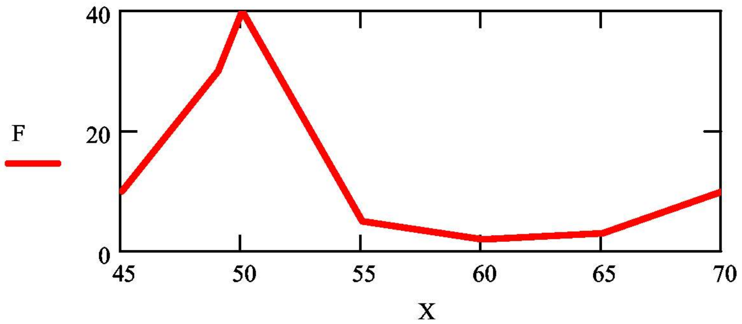
$$\mu := \frac{\sum_{i=0}^{6} (X_i - Xsr)^3 \cdot F_i}{S^3 \cdot \sum_{i=0}^{6} F_i}$$

$\mu = 1.784$ Коэффициент асимметрии

$$E := \frac{\sum_{i=0}^{6} (X_i - Xsr)^4 \cdot F_i}{S^4 \cdot \sum_{i=0}^{6} F_i} - 3$$

$E = 1.898$ Эксцесс

Полигон частот



ЗАДАНИЕ

Найти: MeX, MoX, Xsr, DX, σX, νX, nX, EX.

Оцените среднюю генеральной совокупности.

Постройте полигон частот f=S(X). Поясните полученные данные, если при изучении цены товара в генеральной совокупности объемом N=1000 была сделана выборка объемом n=100 и получен вариационный ряд:

1.

X	7	6	5	8	9
F	70	10	5	5	10

2.

X	25	30	28	20	10
F	5	30	5	50	10

Всем студентам составить для себя аналогичные данные и решить задачу на основе Mathcad.

Лабораторная работа №2

Тема: РАСЧЕТ РЕНТАБЕЛЬНОСТИ И РИСКА ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

Рассмотрим понятия рентабельности и риска инвестиционного проекта для условий конкретной задачи.

Определение. Отношение объема ожидаемого дохода к объему инвестиционного капитала называется показателем рентабельности проекта.

Например, если для реализации нашего проекта нужны инвестиции в объеме \$20000, а ожидаемый годовой доход \$30000, тогда показатель рентабельности ReX будет:

$$\operatorname{Re} X = \frac{30000}{20000} = 1.5 \ . \tag{1}$$

Для выполнения лабораторной работы №2 требуются некоторые понятия теории вероятностей, каковыми являются **функция распределения случайной величины, математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.**

Определение. Функцией распределения дискретной случайной величины называется таблица значений случайной величины вместе с соответствующими вероятностями.

X	X_1	X_2	...	X_n
P	P_1	P_2	...	P_n

P_i - вероятность того, что значением случайной величины X будет X_i.

Для оценки среднего значения дискретной случайной величины X вводится понятие **математического ожидания (MX)**.

Определение. Математическим ожиданием (MX) дискретной случайной величины X называется сумма произведений значений X_i на соответствующие вероятности P_i, т.е.

$$MX = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot P_i \ . \tag{2}$$

Дисперсия случайной величины DX характеризует разброс значений случайной величины X от ее среднего значения - математического ожидания.

$$DX = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - MX\right)^2 \cdot P_i \ . \tag{3}$$

Определение. Квадратный корень из дисперсии называется средним квадратическим отклонением.

$$SX = \sqrt{DX} \tag{4}$$

P.S. Среднее квадратическое отклонение в финансовом анализе называется абсолютным значением риска.

Определение. Относительным значением риска называется отношение риска к ожидаемому среднему доходу, выраженное в процентах.

$$vX = \frac{SX}{MX} \cdot 100 \qquad (5)$$

Теперь мы уже готовы к **лабораторной работе № 2**.

Задача № 2. При инвестировании данного проекта в объеме $20000, ожидаемая годовая прибыль равна 30%. Вероятность провала проекта p=0.05. Изучить рентабельность и оценить возможные значения рисков предлагаемого проекта.

Решение. При инвестировании проекта в объеме $20000 в конце года мы имеем две возможности: а) успех, тогда получаем 20000+20000·0.3=20000·1.3; б) провал, тогда получаем 0 (т.е. вложенные деньги теряются).

Функция распределения ожидаемого годового дохода имеет вид:

X	20000 · 1.3	0
P	0.95	0.05

Для решения этой задачи на основе Mathcad, формируем матрицы X и P и составляем соответствующую программу.

ПРОГРАММА № 2

$$X := \begin{pmatrix} 26000 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P := \begin{pmatrix} 0.95 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

$$MX := \sum_{i=0}^{1} X_i \cdot P_i$$

$MX = 24700$ Ожидаемый средний доход

$$DX := \sum_{i=0}^{1} \left(X_i - MX\right)^2 \cdot P_i$$

$DX = 32110000$ Дисперсия

$$S := \sqrt{DX}$$

$S = 5666.569$ Абсолютное значение риска

$$\nu := \frac{S}{MX} \cdot 100$$

$\nu = 22.942$ Относительное значение финансового риска

ЗАДАНИЕ

При инвестиции данного проекта в объеме I ожидаемая годовая прибыль равна m%. Вероятность провала проекта p=PA. Изучить рентабельность и оценить возможные значения рисков предлагаемого проекта, если:

1. I=$30000,   m=25%,   PA=0.01
2. I=$50000,   m=20%,   PA=0.02
3. I=$60000,   m=30%,   PA=0.03
4. I=$70000,   m=15%,   PA=0.011
5. I=$80000,   m=35%,   PA=0.1
6. I=$20000,   m=25%,   PA=0.07
7. I=$40000,   m=35%,   PA=0.03
8. I=$60000,   m=18%,   PA=0.001

Лабораторная работа |№ 3

Тема: ТЕХНОЛОГИЯ СРАВНЕНИЯ ДВУХ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Определение. Два инвестиционных проекта называются альтернативными, если инвестирование одного из них исключает инвестирование другого проекта.

В случае альтернативности двух проектов вычисляются показатели рентабельности и коэффициенты рисков для обоих проектов.

Далее: а) если у обоих проектов имеются одинаковые показатели рентабельности, выбирают тот проект, у которого меньше показатель относительного риска; б)если у обоих проектов одинаковые показатели относительного коэффициента риска, то выбирают тот проект, у которого больше показатель рентабельности; в) если у первого проекта показатель рентабельности больше, а коэффициент риска меньше, чем у второго проекта, тогда предпочтение отдается первому проекту; г) если у первого проекта показатель рентабельности больше и риск больше, чем у второго проекта, то выбор производится менеджером из дополнительных данных для инвестора, а именно, исходя из допустимости величины рисков и ценности относительного коэффициента рентабельности.

Так как эта лабораторная работа основывается на понятиях лабораторной работы № 2, мы переходим сразу к конкретной задаче.

Задача№3. Инвестору предоставили два альтернативных инвестиционных проекта А и В. Проект А требует инвестиции в объеме $100 тыс., под 25% годовой прибыли, вероятность провала проекта А равна РА=0.011.Проект В требует инвестиции в объеме $250 тыс. под 30% годовых, вероятность провала - РВ=0.012.

Следует сделать выбор между этими проектами.

Решение. Для обоих проектов нужно составить функции распределения и по отдельности надо посчитать показатели рентабельности и коэффициенты риска, что далее даст возможность их сравнения.

Составляем функции распределения:

(1)

A	100·1.25	0
PA	0.989	0.011

B	250·1.3	0
PB	0.988	0.012

Теперь мы формируем матрицы ожидаемых доходов и соответствующих вероятностей исходя из функций распределения (1) и пишем программу на основе Mathcad.

ПРОГРАММА № 3

Посчитаем показатели рентабельности и относительные значения финансового риска для обоих проектов

$$A := \begin{pmatrix} 100 \cdot 1.25 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad PA := \begin{pmatrix} 0.989 \\ 0.011 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 250 \cdot 1.3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad PB := \begin{pmatrix} 0.988 \\ 0.012 \end{pmatrix}$$

$$MA := \sum_{i=0}^{1} A_i \cdot PA_i \qquad MB := \sum_{i=0}^{1} B_i \cdot PB_i$$

$$MA = 123.625 \qquad MB = 321.1$$

$$RA := \frac{MA}{100} \qquad RB := \frac{MB}{250}$$

$$RA = 1.236 \qquad RB = 1.284$$

$$DA := \sum_{i=0}^{1} \left(A_i - MA\right)^2 \cdot PA_i \qquad DB := \sum_{i=0}^{1} \left(B_i - MB\right)^2 \cdot PB_i$$

$$DA = 169.984 \qquad DB = 1252.29$$

$$SA := \sqrt{DA} \qquad SB := \sqrt{DB}$$

$$SA = 13.038 \qquad SB = 35.388$$

$$\nu A := \frac{SA}{MA} \cdot 100 \qquad \nu B := \frac{SB}{MB} \cdot 100$$

$$\nu A = 10.546 \qquad \nu B = 11.021$$

В этом примере показатели рентабельности и относительные риски проектов примерно одинаковы, поэтому выбор проекта происходит из дополнительных соображений о ценности денег для инвестора и соответствующих величин расхождений характеристик проектов.

ЗАДАНИЕ

Инвестору предоставили два альтернативных проекта A и B. Проект A требует инвестиции в объеме IA, под ma% годовой прибыли, вероятность провала проекта – PA. Проект B требует инвестиции в объеме IB, под mb% годовой прибыли, вероятность провала проекта – PB. Следует сделать выбор между этими проектами, если :

1. IA= $ 80 000, ma= 30 %, PA= 0.02
IB= $ 70 000, mb= 40 %, PB= 0.04
2. IA= $ 100 000, ma= 15 %, PA= 0.011
IB= $ 200 000, mb= 15 %, PB= 0.02
3. IA= $ 90 000, ma= 20 %, PA= 0.05
IB= $ 90 000, mb= 18 %, PB= 0.02

4. IA= $ 400 000, ma= 15 %, PA= 0.02
IB= $ 500 000, mb= 20 %, PB= 0.05
5. IA= $ 1.5 млн., ma= 20 %, PA= 0.03
IB= $ 2.1 млн., mb= 15 %, PB= 0.01
6. IA= $ 4.5 млн., ma= 15 %, PA= 0.02
IB= $ 5 млн., mb= 18 %, PB= 0.03
7. IA= $ 30 млн., ma= 20 %, PA= 0.02
IB= $ 35 млн., mb= 25 %, PB= 0.04
8. IA= $ 15 млн., ma= 18 %, PA= 0.01
IB= $ 20 млн., mb= 17 %, PB= 0.01

Лабораторная работа № 4

Тема: МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА ЛЕОНТЬЕВА

Рассмотрим задачу межотраслевого баланса, суть которой состоит в том, чтобы на основе межотраслевого баланса за предыдущий год и в условиях необходимости приоритетного развития отдельных отраслей хозяйства правильно спланировать валовой выпуск продукции всех отраслей за текущий год. Эту задачу можно рассматривать в рамках отдельно взятого района, региона, а также, в рамках всего государства.

Для построения соответствующей математической модели введем обозначения: пусть, X_i - валовой выпуск i-ой отрасли в денежном выражении, X_y - объем продукции i-ой отрасли, который применяется для обеспечения производства в j-ой отрасли; y_i- объем конечного продукта i-ой отрасли для непроизводственного назначения в денежном выражении.

Тогда получаем уравнение межотраслевого баланса Леонтьева в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + y_i \ , \qquad (1)$$

Введем обозначения:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \ ; \qquad (2)$$

α_{ij} - объем продукции i-ой отрасли, который расходуется для производства единичного объема продукции j-ой отрасли.

Определение. Матрица α_{ij} называется технологической матрицей.

Из (2) и (1) получаем уравнение Леонтьева в виде.

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + y_i \ . \qquad (3)$$

Уравнение межотраслевого баланса (3) нужно решить относительно x_i. Для этого введем матричные обозначения:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \ , \ A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \dot{a}_{n1}\dot{a}_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \ , \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} . \qquad (4)$$

тогда уравнение Леонтьева (3) можно переписать в матричном виде:

$$X = A \cdot X + Y \, . \qquad (5)$$

Для решения уравнения (5) перенесем слагаемые, содержащие X, в левую сторону равенства и вынесем X за скобки

$$(E - A) \cdot X = Y \, , \qquad (6)$$

теперь из (6) легко получаем решение матричного уравнения Леонтьева (5):

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y \, . \qquad (7)$$

Теперь рассмотрим конкретную задачу и решим ее на основе Mathcad.

Задача № 4. За предыдущий год три отрасли народного хозяйства: сельское хозяйство, машиностроение и энергетика дали возможность составления таблицы межотраслевого баланса:

№		Сельское хозяйство	Машиностроение	Энергетика	Конечный продукт	Валовой выпуск
1	Сельское хозяйство	$x_{11}=10$	$x_{12}=20$	$x_{13}=30$	$y_1=40$	$x_1=100$
2	Машиностроение	$x_{21}=30$	$x_{22}=20$	$x_{23}=10$	$y_2=30$	$x_2=90$
3	Энергетика	$x_{31}=20$	$x_{32}=30$	$x_{33}=20$	$y_3=50$	$x_3=120$

Найти план валового выпуска за текущий год при условии, что конечный продукт первой отрасли (сельское хозяйство) должен увеличиться на **10%**, второй отрасли (машиностроение) - на **20%**, а третьей отрасли (энергетики) - на **8%**.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся возможностями пакета Mathcad и составим программу для решения задачи № 4.

ПРОГРАММА № 4

$$Y := \begin{pmatrix} 40 \cdot 1.1 \\ 30 \cdot 1.2 \\ 50 \cdot 1.08 \end{pmatrix}$$

Рекомендуемые значения объема конечного продукта для трех отраслей.

$$A := \begin{pmatrix} \frac{10}{100} & \frac{20}{90} & \frac{30}{120} \\ \frac{30}{100} & \frac{20}{90} & \frac{10}{120} \\ \frac{20}{100} & \frac{30}{90} & \frac{20}{120} \end{pmatrix} \qquad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X := (E - A)^{-1} \cdot Y$$

$$X = \begin{pmatrix} 111.362 \\ 103.481 \\ 132.919 \end{pmatrix}$$

План для валового выпуска трех заданных отраслей.

ЗАДАНИЕ

За предыдущий год восемь отраслей народного хозяйства дали возможность составления таблицы межотраслевого баланса:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	Конечный продукт	Валовой выпуск
1	10	20	30	40	20	10	30	40	100	300
2	20	10	40	30	10	20	40	30	150	350
3	40	20	10	20	30	10	30	40	200	400
4	20	20	10	40	40	30	10	30	100	300
5	10	40	20	20	30	30	40	10	200	400
6	10	30	20	40	20	40	30	10	150	350
7	40	30	10	20	40	30	20	10	100	300
8	10	10	20	20	30	30	40	40	50	250

Найти план валового выпуска за текущий год при условии, что конечный продукт первой отрасли увеличивается на m_1%, второй отрасли - на m_2%, третьей отрасли - на m_3, ..., восьмой отрасли на - m_8%, где:

1. m_1=10%; m_2=20%; m_3=5%; m_4=8%; m_5=20%; m_6=5%; m_7=0%; m_8=9%;
2. m_1=5%; m_2=9%; m_3=10%; m_4=8%; m_5=6%; m_6=0%; m_7=0%; m_8=0%;
3. m_1=10%; m_2=5%; m_3=-20%; m_4=2%; m_5=-10%; m_6=5%; m_7=2%; m_8=9%;
4. m_1=9%; m_2=9%; m_3=20%; m_4=5%; m_5=10%; m_6=5%; m_7=2%; m_8=10%;
5. m_1=8%; m_2=-10%; m_3=-25%; m_4=2%; m_5=-40; m_6=2%; m_7=4%; m_8=20%;
6. m_1=5%; m_2=10%; m_3=10%; m_4=5%; m_5=8%; m_6=20%; m_7=5%; m_8=10%;
7. m_1=20%; m_2=-10%; m_3=50%; m_4=10%; m_5=50%; m_6=10%; m_7=2%; m_8=20%;
8. m_1=10%; m_2=35%; m_3=45%; m_4=10%; m_5=6%; m_6=-10%; m_7=8%; m_8=15%.

Лабораторная работа № 5

Тема: МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА САМУЭЛЬСОНА-ХИКСА

Для экономики характерна волновая природа развития, поэтому национальный доход то увеличивается, то уменьшается.

Для изучения волновой природы развития экономики Самуэльсон и Хикс составили соответствующую математическую модель. В этой модели колебание величины национального дохода X(t) объясняется **принципом акселерации** и **концепцией мультипликатора.**

Принцип акселерации утверждает, что масштабы инвестиций зависят от темпов роста спроса на конечный продукт. Инвестиционный спрос пропорционален спросу на конечный продукт. Степень пропорциональности называется фактором акселерации.

В модели Самуэльсона - Хикса уравнение инвестиций, основанное на принципе акселерации, имеет вид

$$I(t) = \beta(X(t-1) - X(t-2)), \qquad (1)$$

где β - коэффициент акселерации (фактор).

Величина C(t) - расхода линейно зависит от спроса, где рассматривается единичный лаг (запаздывание):

$$C(t) = \alpha \cdot X(t-1) + A, \qquad (2)$$

где α∈(0,1),

A=(прожиточный минимум) x (число жителей). (3)

Если учесть условие равновесия спроса и предложения, тогда получаем:

$$X(t) = C(t) + I(t). \qquad (4)$$

Если внести значения для C(t) и I(t), тогда будем иметь уравнение Самуэльсона-Хикса:

$$X(t) = (\alpha + \beta) \cdot X(t-1) - \beta \cdot X(t-2) + A. \qquad (5)$$

В зависимости от значения коэффициента акселерации β, из (5) можно получить колебания национального дохода как с нарастающей, так и с затухающей амплитудой.

Задача № 5. Изучить динамику национального дохода по уравнению Самуэльсона-Хикса при $\alpha = 0.5$.

Для города Тбилиси найти коэффициент A, и при различных значениях β изучить динамику X(t).

Решение. Для решения **задачи № 5** выбирают начальные условия.

Составляем программу для изучения динамики национального дохода на основе Mathcad.

ПРОГРАММА № 5

$X_0 := 10^6$ $X_1 := 10^7$ Начальные значения национального дохода

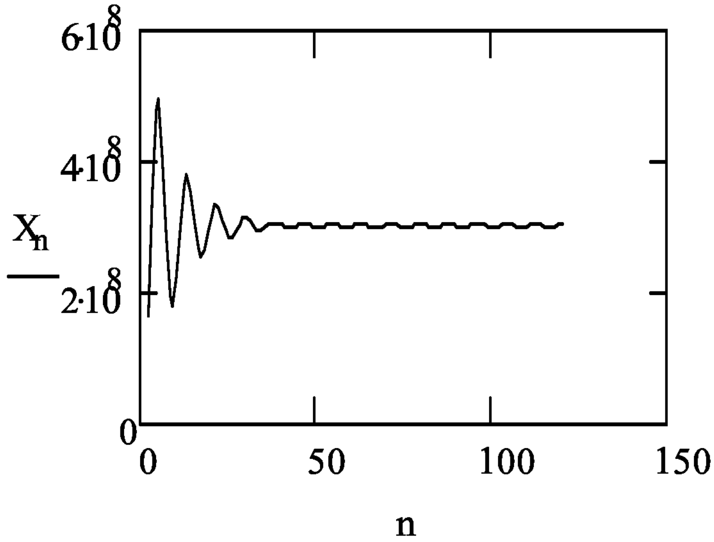
$A := 1.5 \cdot 10^8$ число жителей х прожиточный минимум

$\alpha := 0.5$

$\beta := 0.8$ коэффициент акселерации

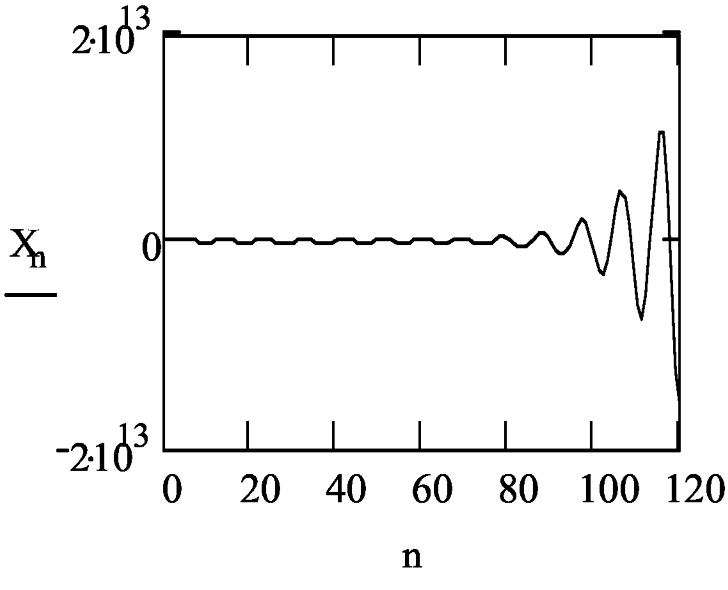
$n := 2..120$

$X_n := (\alpha + \beta) \cdot X_{n-1} - \beta \cdot X_{n-2} + A$ рекуррентная модель Самуэльсона-Хикса



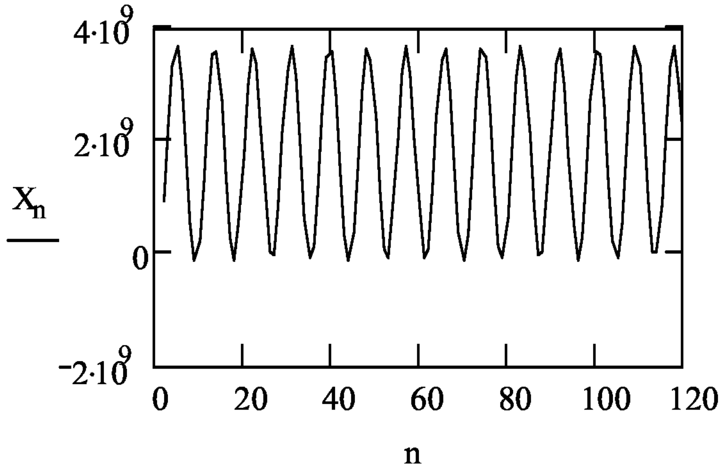
$\beta := 1.2$

$X_n := (\alpha + \beta) \cdot X_{n-1} - \beta \cdot X_{n-2} + A$



$\beta := 1.$

$X_n := (\alpha + \beta) \cdot X_{n-1} - \beta \cdot X_{n-2} + A$



ЗАДАНИЕ

Изучить динамику национального дохода по уравнению Самуэльсона-Хикса при известном α. Для города с N-жителями и с прожиточным минимумом l, при различных значениях коэффициента акселерации β изучить динамику X(t), если:

1. $\alpha=0.3$; $N=3\cdot10^6$; $l=80$; β-?
2. $\alpha=0.2$; $N=3\cdot10^6$; $l=80$; β-?
3. $\alpha=0.1$; $N=3\cdot10^6$; $l=80$; β-?
4. $\alpha=0.4$; $N=5\cdot10^6$; $l=100$; β-?
5. $\alpha=0.5$; $N=5\cdot10^6$; $l=100$; β-?
6. $\alpha=0.6$; $N=5\cdot10^6$; $l=100$; β-?
7. $\alpha=0.1$; $N=3\cdot10^6$; $l=100$; β-?
8. $\alpha=0.1$; $N=3\cdot10^6$; $l=100$; β-?

Лабораторная работа № 6

Тема: МОДЕЛЬ ФЕРХЮЛЬСТА ДЛЯ ДИНАМИКИ ВКЛАДОВ В БАНКЕ

Пусть X_n - объем денежного вклада за n лет. Коэффициент относительного прироста вкладов обозначим через R. Тогда имеем :

$$R = \frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} \quad , \tag{1}$$

т.е. $X_{n+1} = X_n + R \cdot X_n$, (2)

где $R = R_0 = const$.

Для исследования динамики вклада, перепишем формулу (2) в виде

$$X_{n+1} = (1 + R_0) \cdot X_n . \tag{3}$$

Ясно, что, если начальное значение денежного вклада было X_0, тогда

$$X_1 = (1 + R_0) \cdot X_0 \ ,$$

$$X_2 = (1 + R_0) X_1 = (1 + R_0)^2 \cdot X_0 \ , \tag{4}$$

$$. \quad . \quad .$$

$$X_n = (1 + R_0)^n \cdot X_0 .$$

Из итерационной формулы (4) следует, что с ростом n количество денежных вкладов неограниченно увеличивается, так как

$$\lim_{n \to \infty} x_n \to \infty . \tag{5}$$

Формула (4) позволяет решить задачу о допустимых процентах роста R. Например, выясним, каким должен быть R_0, чтобы удвоение вкладов происходило за 50 лет.

Имеем

$$\frac{X_{50}}{X_0} = (1 + R_0)^{50} = 2 , \tag{6}$$

тогда

$$R_0 = \sqrt[50]{2} - 1 , \tag{7}$$

т.е. в процентном выражении получаем норму прироста

$$(\sqrt[50]{2} - 1) \cdot 100\% \ . \tag{8}$$

Теперь допустим, что совет директоров банка решил увеличить коэффициент прироста R для привлечения клиентов. Чтобы защитить себя от банкротства, он решил не допускать дальнейшего роста вклада, если его величина достигает максимального значения 1. После этого коэффициент должен становиться отрицательным, т.е. уменьшать вклады, пока они не опустятся ниже 1.

Для обеспечения этого процесса решили, что

$$R = r(1 - X_n). \tag{9}$$

Тогда из формулы (1) получаем

$$\frac{X_{n+1}-X_n}{X_n}=r(1-X_n), \text{ где } r>R_0. \qquad (10)$$

Из (10) будем иметь рекуррентное соотношение

$$X_{n+1}=(1+r)\cdot X_n - r\cdot X_n^2 \ . \qquad (11)$$

Исследуем точки равновесия этой системы, которая называется моделью Ферхюльста.

Определение. Точками равновесия рекуррентной системы называются те значенияX_n, которые не изменяются с ростом n, т.е. те значения X_n, для которых

$$X_{n+1}=X_n, \qquad (12)$$

являются точками равновесия модели Ферхюльста (11).

Очевидно, что такими значениями служат:

а) $X_n=0$; б) $X_n=1$.

Для того чтобы точка равновесия реализовалась на практике, нужна ее устойчивость к малым возмущениям.

Поэтому исследуем эти состояния на устойчивость.

а) Рассмотрим сначала состояние равновесия $X_n=0$, т.е. состояние, когда на вашем расчетном счете денег нет. Добавим "малое возмущение" - $\delta_n<<1$, точке равновесия и исследуем ее динамику со временем, т.е. $X_n=0+\delta_n$, тогда из формулы (11) получаем

$$\delta_{n+1}=(1+r)\delta_n - r\delta_n^2 . \qquad (13)$$

Так как $\delta_n<<1$, ясно, что $\delta_n^2=0(\delta_n)<<1$, поэтому ею можно пренебречь в равенстве (13). Врезультате имеем

$$\delta_{n+1}=(1+r)\delta_n \ . \qquad (14)$$

Отсюда легко получить, что

$$\left|\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right|>1 , \qquad (15)$$

т.е. возмущения нарастают со временем. Это означает неустойчивость точки равновесия $X_n=0$. По смыслу задачи это означает рост вклада со временем, если хоть какая-то малая сумма денег δ_n перечислена на расчетный счет.

б) Исследуем теперь устойчивость второй точки равновесия $X_n=1$. Здесь также дадим малое приращение $\delta_n<<1$ к точке равновесия, т.е. рассмотрим значение $X_n=1+\delta_n$ и исследуем динамику этого состояния с течением времени n. Из формулы (11) получаем:

$$1+\delta_{n+1}=(1+r)(1+\delta_n)-r(1+\delta_n)^2 . \qquad (16)$$

Произведя преобразования, имеем:

$$1+\delta_{n+1}=1+r+(1+r)\delta_n - r - 2r\delta_n - r\delta_n^2 . \qquad (17)$$

Учитывая, что $\delta_n^2=0(\delta_n)<<1$ и поэтому пренебрегая ею, получаем

$$\delta_{n+1}=(1-r)\delta_n . \qquad (18)$$

Для устойчивости точки равновесия $X_n=1$ должно выполняться условие

$$\left|\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right| < 1 \quad , \tag{19}$$

т.е. $|1-r| < 1.$ (20)

Это условие со своей стороны означает, что

$0 < r < 2.$ (21)

Таким образом, если выполняется условие (21), тогда точка равновесия X_n=1 системы Ферхюльста устойчива. Иначе мы вступаем в зону неустойчивости, которая полна неожиданностей.

В частности, при r=2.3 возникают периодические колебания X_n (рис.1).

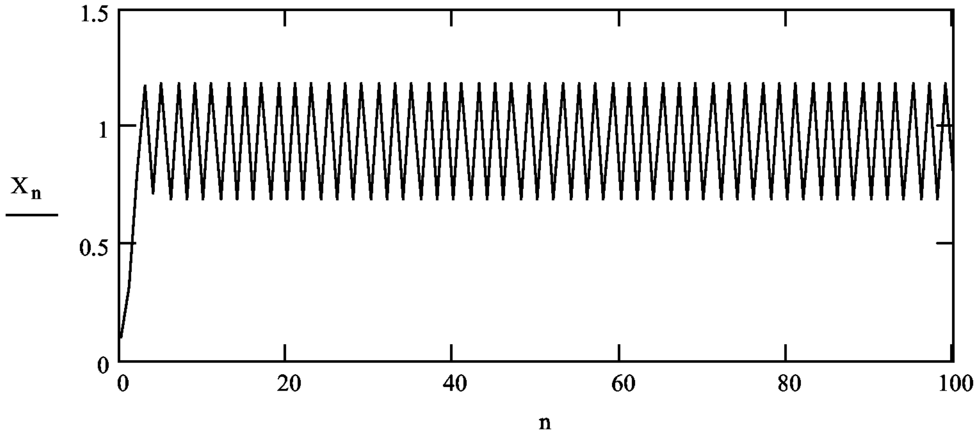


Рис.1. Периодические колебания вклада

В случае r=2.57 картина усложняется и появляются двоякопериодические колебания (рис.2).

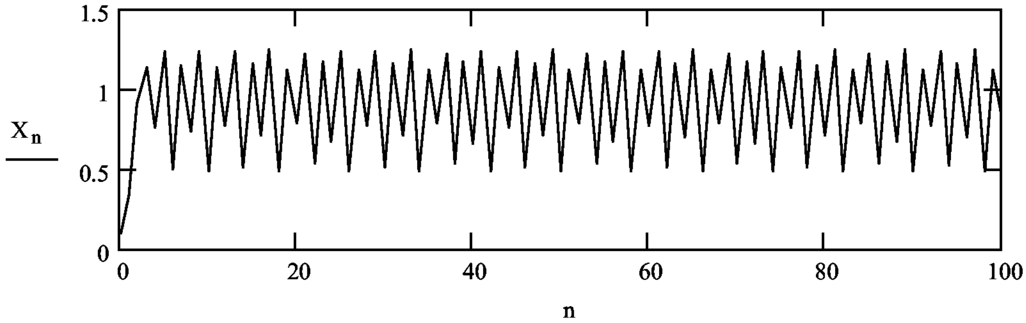


Рис.2. Двоякопериодические колебания вклада

При дальнейшем росте коэффициента прироста r получаем учетверение периода и т.д. В случае $r \geq 3.0$ наблюдаются **хаотические колебания** (рис.3).

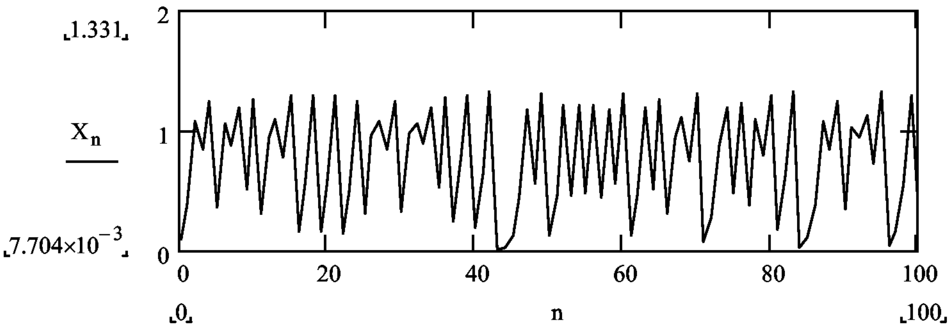


Рис.3. Хаотические колебания вклада.

Таким образом, нелинейные рекуррентные системы скрывают в себе множество тайн, и для их раскрытия нужны дополнительные исследования в каждом конкретном случае. Тем более, что не всегда удается глобально оценить сходимость итерационного процесса заданного рекуррентной системой.

Задача № 6. Исследуйте модель Ферхюльста

$$X_{n+1} = (1+r) \cdot X_n - r \cdot X_n^2 \qquad (22)$$

для различных значений коэффициента прироста r и начальных условий на основе графических средств Mathcad.

Решение. Для выпольнения работы № 6 зададимся начальыми условиями X_0 и значением для коэффициента прироста r. После этого составляем программу на основе Mathcad.

ПРОГРАММА № 6

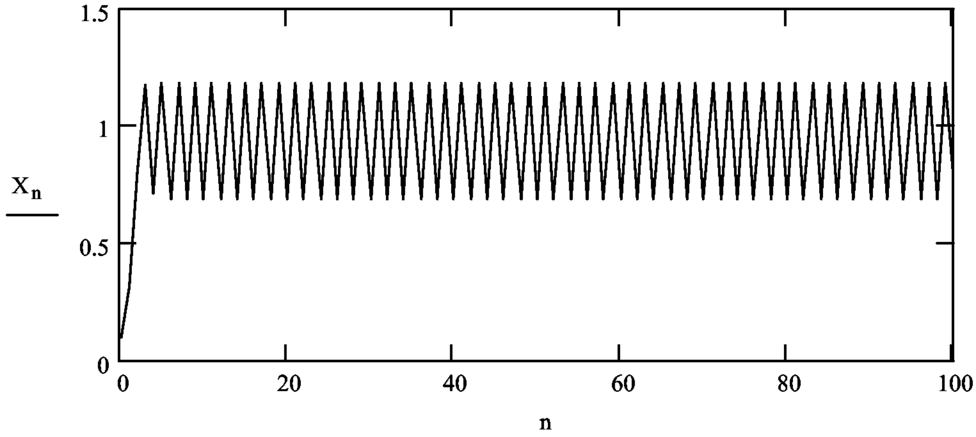
Начальный вклад на лицевом счете

$X_0 := 0.1$

Расчет динамики объема вклада по модели Ферхюльста при процентной ставке $r := 2.3$

$n := 0..100$

$X_{n+1} := (1 + r) \cdot X_n - r \cdot (X_n)^2$

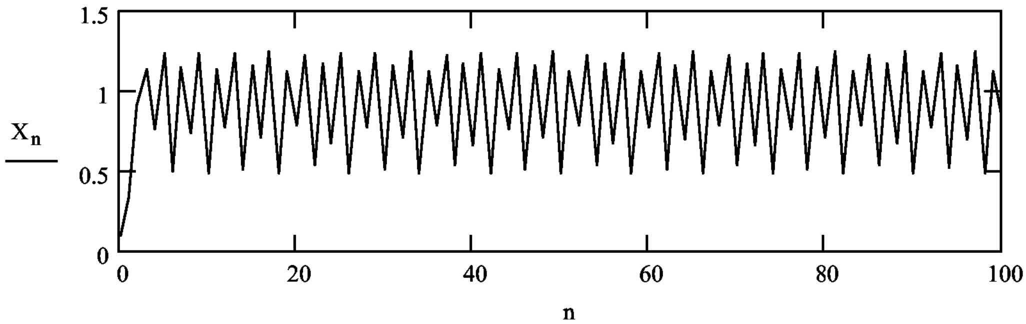


Расчет динамики объема вклада по модели Ферхюльста при процентной ставке $r := 2.57$

$n := 0..100$

$r := 2.57$

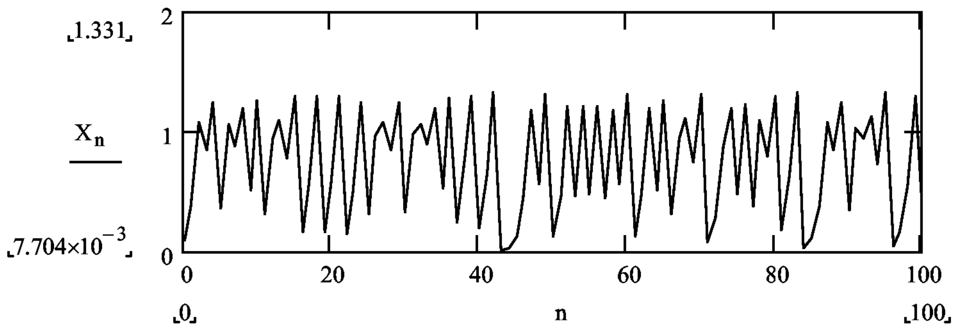
$X_{n+1} := (1 + r) \cdot X_n - r \cdot \left(X_n\right)^2$



Рсчет динамики объема вклада по модели Ферхюльста при процентной ставке $r := 3$

$r := 3$

$X_{n+1} := (1 + r) \cdot X_n - r \cdot \left(X_n\right)^2$



ЗАДАНИЕ

Исследуйте модель Ферхюльста

$$X_{n+1} = (1 + r) \cdot X_n - r \cdot X_n^2$$

для различных значений коэффициента прироста r и начальных условий на основе графических средств Mathcad.

Составить аналогичную рекуррентную систему, найти точки равновесия, исследовать их на устойчивость и исследовать систему графическими средствами Mathcad.

Лабораторная работа № 7

Тема: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРАНГИШВИЛИ-ОБГАДЗЕ

Рассмотрим равновесную экономику, т.е. экономику, когда спрос = предложению. Иначе говоря, производится ровно столько X(t), сколько требуется рынку Y(t):

$$X(t)=Y(t)\,. \qquad (1)$$

X(t)-предложение (объем производства), Y(t)-спрос.

По условию равновесия (1) можно составить уравнение:

$$X(t)=C(t)+I(t), \qquad (2)$$

где C(t) - функция потребления,
I(t) - функция инвестиций.

На основе принципа акселерации Семуэльсона-Хикса можно записать уравнение:

$$I(t)=\beta \overset{\circ}{X}(t)\ , \qquad (3)$$

где β - коэффициент акселерации.

Кроме того, потребление является функцией объема производства, зависящей от всей предыстории производства за предшествующее время t, иначе говоря,

$$C(t)=\int_0^t F[X(\tau),\ \tau]\,d\tau, \qquad (4)$$

подставляя (4) и (3) в уравнение равновесия (2), получаем:

$$X(t)=\beta\dot{X}(t)+\int_0^t F[X(t)]dt\ . \qquad (5)$$

Продифференцировав обе части уравнения (5), имеем:

$$\dot{X}(t)=\beta\cdot\ddot{X}(t)+F[X(t)]\ . \qquad (6)$$

Иначе говоря, получаем дифференциальное **уравнение динамики** Прангишвили – Обгадзе в виде:

$$\ddot{X}(t)-\frac{1}{\beta}\dot{X}(t)+\frac{1}{\beta}F[X(t)]=0\,. \qquad (7)$$

Пусть,

$$\beta=-\frac{1}{e}; \qquad (8)$$

тогда имеем уравнение динамики равновесной экономики в виде:

$$\ddot{X}(t)+e\cdot\dot{X}(t)+F_1[X(t)]=0\,, \qquad (9)$$

где $e=const$, а $F_1[X(t)]$- плотность потребления.

Если рассмотреть случай, когда

$$F_1[X(t)]=[X(t)]^3-X(t)-A\cdot\cos(\omega\cdot t)\,, \qquad (10)$$

тогда из (9) получаем уравнение Дюффинга в виде:

$$\ddot{X}(t)+e\cdot\dot{X}(t)-X(t)+[X(t)]^3=A\cos(\omega\cdot t)\,. \qquad (11)$$

Для решения уравнения (11) на основе Mathcad, нужно переписать его в нормальном виде т.е. в виде системы двух уравнений первого порядка.Для этого нужно ввести обозначения:

$$\dot{X}(t) \equiv X_1 \ ; \qquad X(t) \equiv X_0 . \tag{12}$$

Тогда уравнение (11) перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) = X_1 \\ \dot{X}_1(t) = A\cos(\omega \cdot t) + X_0 - X_0^3 - e \cdot X_1 \end{cases} . \tag{13}$$

Задача №7. Рассмотреть уравнение экономической динамики Дюффинга при начальных условиях

$$\begin{cases} X_0(0) = 1 \\ X_1(0) = 1 \end{cases} \tag{14}$$

и данных: $A = 0.25; \omega = 1{,}0; e = 0.2$, а далее решить задачу на основе Mathcad.

Решение. Для решения уравнения Дюффинга на основе Mathcad составляем программу

ПРОГРАММА № 7

$c := 0.2$ -коэффициент пропорциональности демпфирования

$\omega := 1.0$ -сезонная частота внешнего возмущения спроса

$A := 0.25$ -амплитуда внешнего возмущения спроса

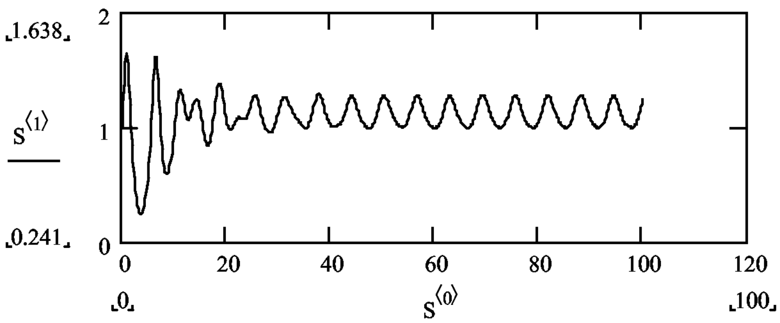
$ic := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ - начальные условия для объема производства и ее скорости изменения

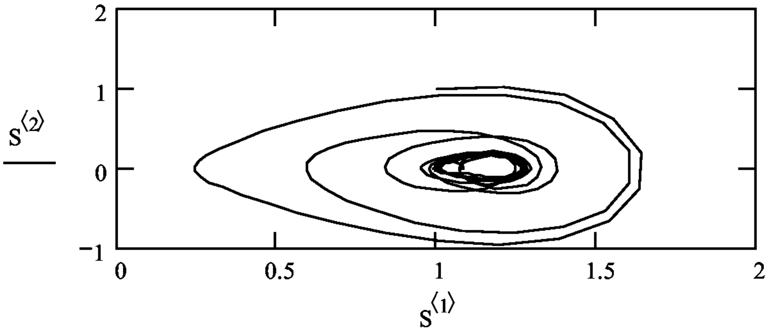
$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ A \cdot \cos(\omega \cdot t) + X_0 - (X_0)^3 - c \cdot X_1 + 0.3 \end{bmatrix}$ матрица правых частей системы уравнений Дюффинга.

$S := \mathrm{Rkadapt}(ic, 0, 100, 500, D)$ оператор решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге- Кутта с переменным шагом.

Зависимости объема производства от времени и картина динамики на фазовой плоскости

$i := 0 .. \mathrm{last}\left(S^{\langle 0 \rangle}\right)$





ЗАДАНИЕ

Рассмотреть уравнение Дюффинга в нормальном виде:

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = X_1 \\ \dot{X}_1 = A\cos(\omega t) + X_0 - X_0^3 - eX_1 \end{cases}$$

И решить его при начальных условиях

$$\begin{cases} X_0(0) = 1 \\ X_1(0) = 1 \end{cases}$$

при различных значениях параметров A, ω ,e; постарайтесь подобрать значения параметров таким образом, чтобы получить различные режимы развития экономики.

Лабораторная работа № 8

Тема: УРАВНЕНИЕ ЭКОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ МАТЬЕ

Рассмотрим равновесную экономику. По условию равновесия составляем уравнение равновесия

X(t)=C(t)+I(t), (1)

где C(t) - потребление,
I(t) - инвестиции.

На основе принципа акселерации Самуэльсона-Хикса можно записать **обобщенное уравнение инвестиций**

$$I(t)=\beta(t)\cdot \dot{X}(t), \qquad (2)$$

где $\beta(t)$- коэффициент акселерации.

Кроме того, потребление $C(t)$является функцией объема производства, причем оно зависит от всей предыстории потребления, т.е. объема национального дохода:

$$C(t)=\int_0^t F[X(t)]dt. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем

$$X(t)=\beta(t)\cdot \dot{X}(t)+\int_0^t F[X(t)]dt. \qquad (4)$$

Продифференцировав обе части уравнения (4) по t , будем иметь

$$\dot{X}(t)=\dot{\beta}(t)\cdot \dot{X}(t)+\beta(t)\cdot \ddot{X}(t)+F[X(t)]=0 \ . \qquad (5)$$

Иначе говоря, получаем дифференциальное **уравнение динамики** в виде:

$$\beta(t)\cdot \ddot{X}(t)+(\dot{\beta}(t)-1)\dot{X}(t)+F[x(t)]=0. \qquad (6)$$

Так как $\beta(t)\neq 0$, можно разделить на $\beta(t)$ уравнение (6) и имеем уравнение динамики в виде

$$\ddot{X}(t)+\frac{\dot{\beta}(t)-1}{\beta(t)}\cdot \dot{X}(t)+\frac{1}{\beta(t)}\cdot F[x(t)]=0. \qquad (7)$$

Если в (7) выбрать $\beta(t)$ и $F[x(t)]$,

$$\begin{aligned} &\beta(t)=t \\ &F[x(t)]=t(\omega^2+\varepsilon\cos 2t)\cdot x(t) \end{aligned}, \qquad (8)$$

то получаем **уравнение экономический динамики Матье**:

$$\ddot{X}(t)+(\omega^2+\varepsilon\cos 2t)x(t)=0. \qquad (9)$$

Для решения этого уравнения на основе Mathcad, нужно переписать его в нормальном виде, т.е. в виде системы двух уравнений первого порядка. Для этого нужно ввести обозначения:

$$\dot{X}_0(t)\equiv X_1; X(t)\equiv X_0. \qquad (10)$$

Тогда уравнение (9) перепишется в виде:

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t)=X_1 \\ \dot{X}_1(t)=-(\omega^2+\varepsilon\cos 2t)\cdot X_0 \end{cases}. \qquad (11)$$

Задача № 8. Рассмотреть уравнение экономической динамики Матье при начальных условиях:

$$\begin{cases} X_0(0) = 1 \\ X_1(0) = 1 \end{cases} \qquad (12)$$

и данных $\omega = 0.5; \varepsilon = 0.3$. Изучить экономическую динамику при различных значениях ω и ε.

Построить графики зависимости $X_0(t)$ при различных значениях параметров и изучить фазовый портрет.

Решение. Составляем программу на языке Mathcad.

ПРОГРАММА №8

$\varepsilon := 0.8$ малая амплитуда возмущения коэффициента демпфирования объема производства

$\omega := 0.01$ частота возмущения

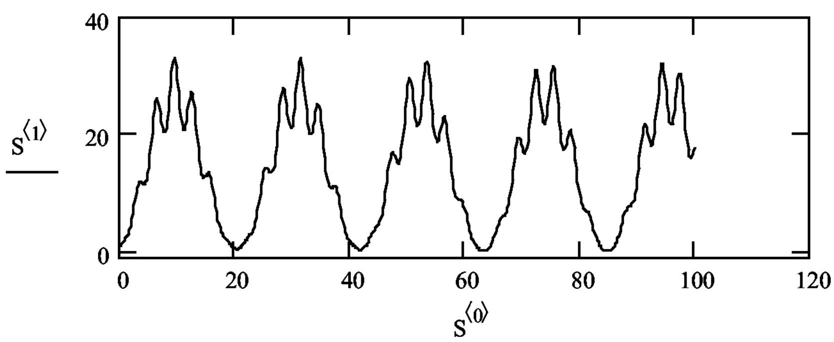
$ic := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ начальные приближения для объема производства и скорости его изменения

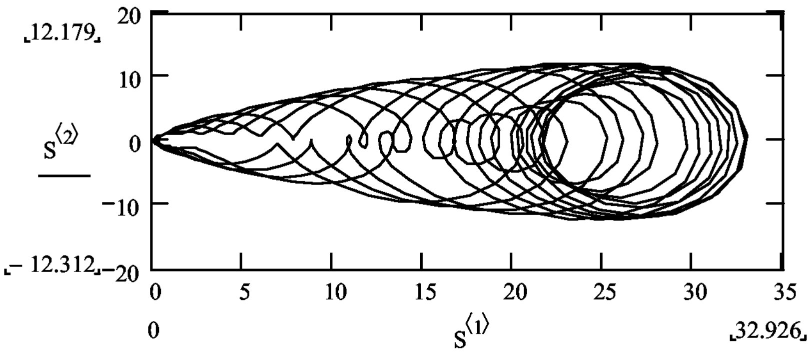
$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ -X_0 \cdot \left(\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos(2 \cdot t)\right) + 1.1 \end{bmatrix}$ матрица правых частей уравнения Матье

$S := \text{Rkadapt}(ic, 0, 100, 500, D)$ оператор решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта с переменным шагом

Зависимость объема производства от времени и картина динамики на фазовой плоскости приводятся на рисунках

$i := 0..\,\text{last}\left(S^{\langle 0 \rangle}\right)$





ЗАДАНИЕ

Изучить модель Матье при различных значениях определяющих параметров ε и ω.

Изучить влияние начальных условий.

Лабораторная работа № 9

Тема: МЕТОД ЭКОНОМИКО-ПОЛИТИЧЕСКОЙ БОРЬБЫ КЮРАСАО

В биологии существуют различные методы борьбы с нежелательным биологическим видом. Один из них, известный как "метод борьбы Кюрасао", заключается в следующем: в популяцию, которая обитает в некотором ареале и которую хотят подавить, регулярно вводят стерильных особей. Эти стерильные особи не участвуют в процессе воспроизводства, но вместе со всеми другими участвуют во внутривидовой борьбе, тем самым снижая скорость естественного роста популяции. То же самое происходит и в экономике, и в политике.

Теперь рассмотрим соответствующую модель.

Пусть $N_1(t)$ - число нормальных особей, $M(t)$ - скорость, с которой в эту популяцию вводятся стерильные особи, численность которых равна $N_2(t)$. Задача заключается в определении по возможности минимальной скорости $M(t)$, при которой популяция N_1 вымирает. Рассмотрим следующую динамическую модель метода Кюрасао:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{N_1 dt} = a - m(gN_1 + hN_2) \\ \dfrac{dN_2}{N_2 dt} = \dfrac{M(t)}{N_2(t)} - m(gN_1 + hN_2) \end{cases} . \tag{1}$$

Здесь m-коэффициент чувствительности популяции к недостатку корма,

a - коэффициент естественного прироста численности популяции в условиях изобилия пищи, g и h - положительные константы (коэффициента прожорливости популяций).

Допустив, что стерильных особей вводят пропорционально объему популяции $N_2(t)$, т.е.

$$M(t) = K \cdot N_2(t), \tag{2}$$

а также взяв константы прожорливости

$$g=h=1 , \tag{3}$$

из (1), (2) получаем модель Кюрасао:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1[a - m(N_1 + N_2)] \\ \dot{N}_2 = N_2(t)[k - m(N_1 + N_2)] \end{cases} \tag{4}$$

Расчеты показывают, что:

а) если $a>k$, то нормальная популяция не погибает, даже если $N_2(0)$ очень велико. Более того, стерильные особи в этом случае рано или поздно погибают;

б) если $a<k$, то нормальная популяция вымирает, а популяция стерильных особей увеличивается и ее численность достигает своего максимального значения $N_2=k/m$. После этого начинает вымирать и популяция стерильных особей.

Одной из стратегий метода Кюрасао является следующая: вместо зависимости (2), предлагается использовать неизменное во времени его максимальное, стабильное решение:

$$M = M_0 = K \cdot N_{2\max} = K \cdot \frac{k}{m} = \frac{k^2}{m} \qquad (5)$$

Здесь принято, что параметры a и m известны, а для коэффициента k выполнено условие k>a, вследствие чего численность нормальной популяции $N_1(t) \to 0$.

В науковедении аналогичная математическая задача возникает, например, при анализе научного потенциала некоторого творческого коллектива, пополняемого неквалифицированными кадрами.

В качестве экономической аналогии может служить закупка негодного оборудования.

Аналогичная задача может быть построена и при анализе конкуренции некоторых промышленных групп при освоении производства новых видов товаров, когда, например, один из соперников "заманивает" своего конкурента на менее перспективный путь развития исследований конструкторских разработок, приводящий к созданию неконкурентоспособной продукции.

Задача № 9. Изучить математическую модель борьбы Кюрасао (на основе Mathcad):

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1[a - m(N_1 + N_2)] \\ \dot{N}_2 = N_2[k - m(N_1 + N_2)] \end{cases},$$

при начальных условиях:

$$\begin{cases} N_1(0) = 2000 \\ N_2(0) = 2000 \end{cases},$$

когда а) m=0.01; a=10; k=9.9 (a>k)

б) m=0.01; a=9.9; k=10 (a<k)

Решение.Составим программу решения на языке Mathcad.

ПРОГРАММА №9

$a := 9.9$ естественный темп роста подавляемой популяции

$ic := \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \end{pmatrix}$ начальные объемы подавляемой и внесенной популяций

$k := 10$ темп роста стерильной популяции

$m := \sqrt{0.0000}$ показатель прожорливости популяций

$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_0 \cdot [a - m \cdot (X_0 + X_1)] \\ X_1 \cdot [k - m \cdot (X_0 + X_1)] \end{bmatrix}$$ матрица правых частей модели Кюрасао

S := Rkadapt(ic, 0, 200, 300, D) оператор решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта с переменным шагом

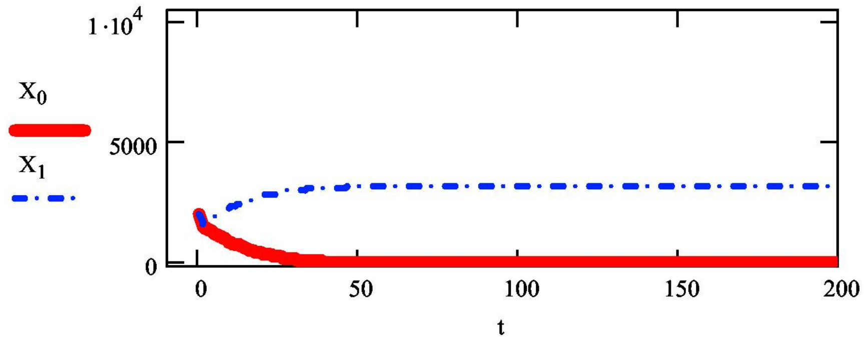
Динамика популяций в зависимости от времени

$$i := 0..\,\mathrm{last}\left(S^{\langle 0\rangle}\right)$$

$$t := S^{\langle 0\rangle}$$

$$X_0 := S^{\langle 1\rangle}$$

$$X_1 := S^{\langle 2\rangle}$$



ЗАДАНИЕ

Изучить математическую модель борьбы Кюрасао на основе Mathcad, при различных значениях параметров m,a,k. Рассмотреть различные варианты начальных условий. Построить графики своих результатов и объяснить полученные результаты.

Лабораторная работа № 10

Тема: ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Во многих областях практики возникают своеобразные задачи оптимизации решений, для которых характерны следующие черты:

а) показатель эффективности $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ представляет собой линейную функцию от элементов решения $x_1, x_2, ..., x_n$;

б) ограничительные условия, налагаемые на возможные решения, имеют вид линейных равенств или неравенств.

Такие задачи называются задачами программирования. Рассмотрим конкретную задачу линейного программирования.

Задача № 10. Рацион кормления коров на молочной ферме может состоять из трех продуктов - сена, силоса, концентратов, содержащих вещества: белок, кальций и витамины. Численные данные представлены в таблице:

Продукты	Питательные вещества		
	Белок (г/кг)	Кальций (г/кг)	Витамины
Сено	$\alpha_{11} = 50$	$\alpha_{21} = 10$	$\alpha_{31} = 2$
Силос	$\alpha_{12} = 70$	$\alpha_{22} = 6$	$\alpha_{32} = 3$
Концентра-ты	$\alpha_{13} = 180$	$\alpha_{23} = 3$	$\alpha_{33} = 1$

В расчете на одну корову суточные нормы потребления белка и кальция представляют не менее 2000 г и 210 г соответственно. Потребление витаминов строго дозировано и должно быть 87 мг в сутки.

Составить самый дешевый рацион, если стоимость 1 кг сена 150 руб., силоса - 200 руб., концентрата - 600 руб..

Решение. Сначала формализуем задачу, т.е. составим соответствующую математическую модель.

Пусть оптимальное количество: сена - X1 (кг), силоса - X2 (кг), концентратов - X3(кг). Тогда **целевая функция** (стоимость рациона за сутки) будет:

$$L(X1, X2, X3)=150\cdot X1+200\cdot X2+600\cdot X3. \quad (1)$$

Эту функцию нужно минимизировать при условиях задачи.

Теперь формализуем ограничения: количество белка за сутки ≥2000г; кальция ≥210г; а витамины ровно 87 мг:

$$\begin{cases} 50\cdot X1+70\cdot X2+180\cdot X3 \geq 2000 \\ 10\cdot X1+6\cdot X2+3\cdot X3 \geq 210 \\ 2\cdot X1+3\cdot X2+1\cdot X3 = 87 \\ X1>0, X2>0, X3>0 \end{cases} . \quad (2)$$

Составим теперь программу решения задачи линейного программирования (1), (2) на основе Mathcad.

ПРОГРАММА № 10

$f(x1,x2,x3) := 150 \cdot x1 + 200 \cdot x2 + 600 \cdot x3$ Целевая функция

начальные приближения переменных

$x1 := 1$

$x2 := 1$

$x3 := 1$

Программный блок ограничений и решения задачи на основе MATHCAD

Given

$x1 \ge 1$

$x2 \ge 1$

$x3 \ge 1$

$50 \cdot x1 + 70 \cdot x2 + 180 \cdot x3 \ge 2000$

$10 \cdot x1 + 6 \cdot x2 + 3 \cdot x3 \ge 210$

$2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 + 1 \cdot x3 = 87$

R:=Minimize(f,x1,x2,x3)

Точка минимума целевой функции

$$R = \begin{pmatrix} 5.833 \\ 24.778 \\ 1 \end{pmatrix}$$

минимальное значение целевой функции

$$f(R_0, R_1, R_2) = 6430.556$$

ЗАДАНИЕ

Пусть цех малого предприятия должен изготовить 100 изделий трех типов. Каждого изделия нужно сделать не менее 20 штук. На изделия уходит соответственно 4,3.4 и 2 кг металла при его общем запасе 340 кг, а также по 4.75,11 и 2 кг пластмассы при общем объеме 700 кг. Сколько изделий каждого типа X1, X2 и X3 надо выпустить для получения максимального объема выпуска в денежном выражении, если цены изделий по калькуляции составляют 4, 3 и 2 лари?

Лабораторная работа № 11

Тема: УСТАНОВЛЕНИЕ ПРОЖИТОЧНОГО МИНИМУМА В ЗАДАННОМ ГОРОДЕ, В ДАННОМ РАЙОНЕ

К задачам линейного программирования относятся: **задача о прожиточном минимуме, о производстве, а также транспортная задача о перевозках: задача об оптимальном распределении посевных площадей и т.д.**

Рассмотрим задачу об установлении прожиточного минимума.
Пусть имеется n-продуктов питания (хлеб, мясо, молоко, картошка, соль, сахарный песок...), в которых содержатся необходимые для жизнеобеспечения вещества (жиры, белки, углеводы и витамины).

Известны следующие параметры:

a_{ij} - содержание i-го вещества в единице j-го продукта $(a_{ij} \geq 0)$;

b_i - минимальное количество i-го вещества, которое должно потребляться индивидуумом за заданный промежуток времени (сутки, день, месяц...);

c_j - рыночная цена единичного количества j-го продукта ($c_j>0$).

Среди всех рационов питания ($X_1, X_2, \ldots, X_n$), покрывающих минимальные потребности индивидуума в полезных веществах, необходимо выбрать наиболее дешевый, где X_j количество j-го продукта, потребляемого индивидуумом за заданный промежуток времени. Кроме того, нужно учесть, что за заданный промежуток времени индивидуум должен получить заданное количество калорий q;
t_1- содержание в единичном объеме i-го продукта калорий.

Решение. Формализуем задачу об определении прожиточного минимума.

Целевая функция (стоимость рациона (X1,X2,X3,...Xn))

$$L(X1, X2, \ldots, Xn) = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot X_j \to \min . \qquad (1)$$

Далее строим ограничения на необходимые количества жиров, белков, углеводов, витаминов за заданный промежуток времени:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j \geq b_i , \qquad (2)$$

где $i = \overline{1, m}$,
m-число необходимых веществ.

Кроме ограничений (2) имеем ограничение в виде равенства для необходимого объема калорий:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot X_i = q . \qquad (3)$$

Эта задача (1), (2), (3) ставится, как задача линейного программирования.

Найти оптимальные значения (X1,X2,...,Xn), при которых целевая функция (1) принимает минимальное значение. Причем, эти значения должны удовлетворять ограничениям (2), (3).

Задача № 11. Установить прожиточный минимум в районе, где основными продуктами питания служат: хлеб, картошка, мясо. Рыночная цена хлеба - 0.5 л, картошки - 0.6 л, мяса - 10 лари.

Решение. Целевая функция будет:
L(X1,X2,X3)=0.5·X1+0.6·X2+10·X3→min.

Значения необходимого количества b_i-жиров, белков и витаминов, а также содержание этих веществ в заданных продуктах a_{ij}, необходимое количество q- калорий, и содержание t_i- калорий в заданных продуктах находятся в Интернете.

Для примера (здесь числа взяты произвольно), если

$$b = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix}; \quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}; \ q = 15000; \ t = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix};$$

тогда получаем ограничения:
0.1·X1+0.2·X2+0.1·X3 ≥100;
0.3·X1+0.4·X2+0.2·X3≥80;
0.2·X1+0.1·X2+0.5·X3≥90;
20·X1+15·X2+30·X3=15000.
Для решения этой задачи на основе Mathcad составляем программу.

ПРОГРАММА № 11

Целевая функция задачи

$$f(x1,x2,x3) := 0.5\cdot x1 + 0.6\cdot x2 + 10\cdot x3$$

Начальные приближения для переменных задачи

x1 := 1

x2 := 1

x3 := 1

Программный блок ограничений и нахождения решения

Given

$x1 \ge 0$

$x2 \ge 0$

$x3 \ge 0$

$0.1\cdot x1 + 0.2\cdot x2 + 0.1\cdot x3 \ge 100$

$0.3\cdot x1 + 0.4\cdot x2 + 0.2\cdot x3 \ge 80$

$20\cdot x1 + 15\cdot x2 + 30\cdot x3 = 15000$

$0.2\cdot x1 + 0.1\cdot x2 + 0.5\cdot x3 \ge 90$

$$R := \mathrm{Minimize}(f, x1, x2, x3)$$

Точка минимума задачи

$$R = \begin{pmatrix} 600 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение задачи

$$f(R_0, R_1, R_2) = 480$$

Реальный пример

Определение прожиточного минимума на основе задачи линейого программирования в районе «Исани» города Тбилиси.

Для расчета прожиточного минимума требуется исследовать, какие продукты пользуются большим спросом в исследуемом районе.

В районе «Исани» самым большим спросом пользуются следующие продукты:

- хлеб
- баранина
- творог
- картофель
- фасоль
- говядина
- рис

Известно, что для жизнеобеспечения человек должен получать: жиры, белки и углеводы, которые содержатся в употребляемых пищевых продуктах(данные приводятся в следующей таблице):

		Углеводы	*Белки*	*Жири*
1	***Хлеб***	a_{11}=5.0	a_{21}=7.9	a_{31}=0.8
2	**Баранина**	a_{12}=16	a_{22}=2.0	a_{32}=0
3	***Творог***	a_{13}=2.8	a_{23}=13.2	a_{33}=20.0
4	***Картофель***	a_{14}=16	a_{24}=2.0	a_{34}=0
5	***Фасоль***	a_{15}=46	a_{25}=21	a_{35}=0
6	***Говядина***	a_{16}=0	a_{26}=18.9	a_{36}=12.4
7	***Рис***	a_{17}=1.0	a_{27}=71	a_{37}=0

	Суточная норма	$b_1 \leq 500$	$b_2 \leq 90$	$b_3 \leq 100$

Задача решается на основе программы Mathcad.

$L(X) := 0.40 \cdot X_1 + 1.10 \cdot X_2 + 2.5 \cdot X_3 + 0.50 \cdot X_4 + 2 \cdot X_5 + 4 \cdot X_6 + 1 \cdot X_7$

$X_1 := 1$

$X_2 := 1$

$X_3 := 1$

$X_4 := 1$

$X_5 := 1$

$X_6 := 1$

$X_7 := 1$

Given

$X_1 \geq 0.500$

$X_2 \geq 0.500$

$X_3 \geq 0.500$

$X_4 \geq 0.500$

$X_5 \geq 0.500$

$X_6 \geq 0.500$

$X_7 \geq 0.500$

$3950 X_1 + 500 X_2 + 13200 X_3 + 2000 X_4 + 21000 X_5 + 18900 X_6 + 1000 X_7 \geq 9($

$400 X_1 + 83500 X_2 + 20000 X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 + 12400 X_6 + 0 \cdot X_7 \geq 10($

$250000 X_1 + 1300 X_2 + 2800 X_3 + 16000 X_4 + 46000 X_5 + 0 \cdot X_6 + 71000 X_7 \geq 50($

$255 \cdot X_1 + 781 \cdot X_2 + 94 \cdot X_3 + 94 \cdot X_4 + 55 \cdot X_5 + 187 \cdot X_6 + 351 \cdot X_7 = 120($

$R := \text{Minimize}(L, X)$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.873 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$L(R) = 6.161$

<u>Прожиточный минимум для района «Исани» города Тбилиси состовляет: в день 6,161 лари, в месяц- 184,83 лари.</u>

ЗАДАНИЕ

Установить прожиточный минимум в вашем районе, где основными продуктами питания служат: хлеб, картошка, мясо.

Замечание: Используйте рыночные цены на заданные продукты. Всю необходимую информацию найдите в Интернете и найдите оптимальный рацион питания.

Лабораторная работа № 12

Тема: ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ

Пусть, имеются какие-то ресурсы (сырье, рабочая сила, оборудование):

$R_1, R_2, ..., R_m$; (1)

в количествах соответственно

$b_1, b_2,..., b_m$ (2)

единиц. С помощью этих ресурсов могут производиться товары:

$T_1, T_2, ..., T_n$. (3)

Для производства одной единицы товара T_j необходимо a_{ij} единиц ресурса $R_i (i = \overline{1,m}\,; j = \overline{1,n})$. Каждая единица ресурса R_i стоит d_i лари. Каждая единица товара T_j может быть реализована по цене C_j $(j = \overline{1,n})$ лари.

По каждому виду товара количество произведенных единиц ограничивается спросом. Известно что рынок не может поглотить более чем K_j - единиц товара T_j $(j = \overline{1,n})$.

Спрашивается: какое количество единиц какого товара надо произвести для того, чтобы реализовать максимальную прибыль?

Решение. Запишем условия задачи в виде математической модели линейного программирования.

Пусть, X_1, X_2,...,X_n количество товаров T_1, T_2,...,T_n, которые мы запланировали к производству.

Условия спроса налагают ограничения:

$X_i \le K_i$, $i = \overline{1,n}$. (4)

Кроме того, ресурсов должно хватить, поэтому получают ограничения:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \left(i = \overline{1,m}\right).$ (5)

Составим теперь целевую функцию прибыли. Себестоимость s_j единиц товара T_j равна

$s_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i \qquad (j = \overline{1,n}).$ (6)

Чистая прибыль q_j, получаемая от реализации **одной единицы** товара T_j, равна разнице между ее продажной ценой c_j и себестоимостью s_j:

$q_j = c_j - s_j$; (7)

общая чистая прибыль от реализации всех товаров будет

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i) \cdot x_j \to \max$$

Задача № 12. Прядильная фабрика для производства двух видов пряжи использует три типа сырья - чистую шерсть, капрон и акрил.

В таблице указаны нормы расхода сырья, его общее количество, которое может быть использовано фабрикой в течение года и прибыль от реализации тонны пряжи каждого вида.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на 1т пряжи (т)		Количество сырья (т)
	Вид 1	Вид 2	
Шерсть	$\alpha_{11} = 0.5$	$\alpha_{12} = 0.2$	$b_1 = 600$
Капрон	$a_{21} = 0.1$	$a_{22} = 0.6$	$b_2 = 620$
Акрил	$a_{31} = 0.4$	$a_{32} = 0.2$	$b_3 = 500$
Прибыль от реализации 1т пряжи (лари)	$q_1 = 1100$	$q_2 = 900$	

Требуется составить годовой план производства пряжи с целью максимизации прибыли.

Решение. Формализуем задачу. Пусть x_1 - количество пряжи первого вида, x_2 - количество пряжи второго вида.

Тогда ограничения будут иметь вид:

$$\begin{cases} 0.5 \cdot X1 + 0.2 \cdot X2 \le 600 \\ 0.1 \cdot X1 + 0.6 \cdot X2 \le 620 \\ 0.4 \cdot X1 + 0.2 \cdot X2 \le 500 \end{cases}.$$

Целевая функция (чистая прибыль) будет:

$L(X1, X2) = 1100 \cdot X1 + 900 \cdot X2 \to \max$.

Для решения этой задачи линейного программирования составляем программу на основе Mathcad.

ПРОГРАММА № 12

Целевая функция задачи

$f(x1, x2) := 1100 \cdot x1 + 900 \cdot x2$

Начальные приближения для переменных

$x1 := 1$

$x2 := 1$

Программный блок ограничений и решения задачи

Given

$$x1 \geq 0$$
$$x2 \geq 0$$
$$0.5 \cdot x1 + 0.2 \cdot x2 \leq 600$$
$$0.1 \cdot x1 + 0.6 \cdot x2 \leq 620$$
$$0.4 \cdot x1 + 024 \cdot x2 \leq 500$$
$$R := \text{Maximize}(f, x1, x2)$$

Точка максимума

$$R = \begin{pmatrix} 1199.664 \\ 0.839 \end{pmatrix}$$

Решение задачи

$f(R_0, R_1) = 1320385.9$

ЗАДАНИЕ

1. Для производства трех видов изделий A, B и C используется сырье типов T1, T2, T3, причем закупки сырья T1 и T3 ограничены возможностями поставщиков. В таблице приведены нормы затрат сырья, цены на сырье и изделия, а также ограничения по закупке сырья.

Тип сырья	Цена1 кг сырья (лари)	Нормы затрат сырья на 1 изделие (кг)			Ограничения по закупке сырья (кг)
		A	B	C	
T_1	$d_1=2$	$a_{11}=1$	$a_{12}=3$	$a_{13}=a$	$b_1=3000$
T_2	$d_2=1$	$a_{21}=4$	$a_{22}=1$	$a_{23}=3$	-
T_3	$d_3=b$	$a_{31}=6$	$a_{32}=5$	$a_{33}=2$	$b_3=3320$
Цена одного изделия (лари)		$c_1=6b+12$	$c_2=5b+22$	$c_3=c$	

Требуется определить оптимальный план производства продукции с целью максимизации прибыли. Составить математическую модель в общем виде.

Рассмотреть различные случаи задания параметров (a,b,c):

a	b	c
2	1	17
2	2	19
2	3	21

Лабораторная работа № 13

Тема: ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА О ПЕРЕВОЗКАХ

Пусть, некоторый продукт (уголь, кирпич, бензин...) хранится на m складах и потребляется в n пунктах (заводах, строительстве, магазинах, бензоколонках,...).

a_i - запас продукта на i-ом складе $(a_i > 0)$;

$i = \overline{1,n}$; b_j- заявки на товар в j-ом пункте потребления;

c_{ij}- стоимость перевозки единичного количества продукта с i-го склада в j-й пункт потребления, $c_{ij} > 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

При этом считается, что задача сбалансирована, т.е. суммарные запасы равны суммарным потребностям:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (1)$$

Нужно выбрать такую стратегию перевозок, чтобы полностью удовлетворить потребности и чтобы **суммарные расходы перевозок** были минимальны.

Решение: пусть, x_{ij}-количество товара, который перевозится из i-го пункта в j-й пункт потребления, тогда целевая функция (суммарные расходы перевозок), имеет вид

$$L = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min . \qquad (2)$$

Кроме того, нужно удовлетворить все заявки, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1,n). \qquad (3)$$

Так как нужно израсходовать все запасы складов, имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \ , \quad (i = \overline{1,m}) \ . \qquad (4)$$

Ясно, что

$$X_{ij} \geq 0 . \qquad (5)$$

Таким образом получаем задачу линейного программирования (2) - (5), которую мы уже умеем решать.

Задача № 13. В области имеются два цементных завода и три потребителя их продукции - домостроительных комбината. В таблице указаны суточные объемы производства цемента, суточные потребности в нем комбинатов и стоимость перевозки 1т цемента от каждого завода к каждому комбинату.

Требуется составить оптимальный план перевозок цемента с целью минимизации транспортных расходов.

Заводы	Производство цемента, т/сут	Стоимость перевозки 1т цемента		
		Комб. 1	Комб. 2	Комб. 3
1-й завод	a_1=40	c_{11}=10	c_{12}=15	c_{13}=25
2-й завод	a_2=60	c_{21}=20	c_{22}=30	c_{23}=30
	Потребность в цементе, т/сут	b_1=50	b_2=20	b_3=30

Решение. Для решения задачи составляем математическую модель.

Пусть, X_{ij} - количество цемента, перевозимого с двух заводов $\left(i=\overline{1,2}\right)$ к трем домостроительным комбинатам $\left(j=\overline{1,3}\right)$. Тогда целевая функция имеет вид:

$$L(X)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}C_{ij}\cdot X_{ij}\to \min .$$

Ограничения имеем в виде:

$$\sum_{i=1}^{2}X_{ij}=b_j\ ,\quad \left(j=\overline{1,3}\right);$$

$$\sum_{j=1}^{3}X_{ij}=a_i\ ,\quad \left(i=\overline{1,2}\right);$$

$$X_{ij}\geq 0 .$$

Для решения транспортной задачи составляем программу на основе Mathcad.

ПРОГРАММА № 13

Индексация начинается с i=1

ORIGIN:= 1

Цены перевозок

$$C:=\begin{pmatrix}10 & 15 & 25\\ 20 & 30 & 30\end{pmatrix}$$

Запасы цемента на двух заводах

$$A:=\begin{pmatrix}40\\ 60\end{pmatrix}$$

Потребность в трех домостроительных комбинатах

$$B:=\begin{pmatrix}50\\ 20\\ 30\end{pmatrix}$$

Целевая функция перевозок

$$L(X) := \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} C_{i,j} \cdot X_{i,j}$$

Начальные приближения для переменных

$$i := 1..2$$

$$j := 1..3$$

$$X_{i,j} := 1$$

Программный блок ограничений и решения задачи

Given

$$\sum_{i=1}^{2} X_{i,1} = B_1$$

$$\sum_{i=1}^{2} X_{i,2} = B_2$$

$$\sum_{i=1}^{2} X_{i,3} = B_3$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{1,j} = A_1$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{2,j} = A_2$$

$$X \geq 0$$

$$R := \text{Minimize}(L, X)$$

Точка минимума задачи

$$R = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \\ 30 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

Оптимизированная цена перевозок

$$L(R) = 2000$$

ЗАДАНИЕ

Составьте аналогичную задачу перевозок для вашего района и найдите оптимальный план перевозок. (Данные у всех студентов должны быть разные, как и содержание задачи).

Лабораторная работа № 14

Тема: ОБЩАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая задача нелинейного программирования имеет вид:

Найти точку минимума (максимума) и минимальное (максимальное) значение нелинейной функции

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \; ; \qquad (1)$$

при наличии ограничений в виде равенств:

$$S_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \, , \quad i = \overline{1, k} \, ; \qquad (2)$$

и в виде неравенств

$$\Psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0 \, , \quad j = \overline{1, m} \; . \qquad (3)$$

Для решения этой задачи пишем соответствующую программу на основе Mathcad.

Задача № 14. Найти максимальное значение нелинейной функции:

$$f(x1, x2) = 6x1 - (x1)^2 + x2 \, ,$$

при наличии ограничений:

$$\begin{cases} 2x1 + 3x2 \le 24 \\ x1 + 2 \cdot x2 \le 15 \\ 3x1 + 2 \cdot x2 \le 24 \\ x2 \le 4 \\ x1 \ge 0, \\ x2 \ge 0 \end{cases} \; ;$$

Решение. Составляем программу на основе Mathcad.

ПРОГРАММА № 14

Целевая функция

$$f(x1, x2) := 6 \cdot x1 + x2 - x1^2$$

Начальные приближения переменных задачи

x1 := 1

x2 := 1

Программный блок ограничений и решения задачи

Given

$x1 \ge 0$

$4 \ge x2 \ge 0$

$2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 \le 24$

$x1 + 2 \cdot x2 \le 15$

$$3 \cdot x1 + 2 \cdot x2 \le 24$$

$$R := \mathrm{Maximize}(f, x1, x2)$$

Точка максимума

$$R = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Решение задачи

$$f(R_0, R_1) = 13$$

ЗАДАНИЕ

1. Найти максимальное и минимальное значения нелинейной функции

$$f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2;$$

при наличии ограничений:

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ 10x_1 - x_2 \le 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0. \end{array};$$

Ответ: $x_{1\min} = \dfrac{123}{101}; \quad x_{2\min} = \dfrac{422}{101}; \quad f_{\min} = \dfrac{324}{101}.$

$x_{2\max} = 2; \quad x_{2\max} = 12; \quad f_{\max} = 65$

2. Найти минимальное значение нелинейной функции

$$f(x) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2;$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 = 180,$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0.$$

Ответ: $x_{1\min} = 91; \ x_{2\min} = 89; \ f_{\min} = 17278.$

3. Найти максимальное значение

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2^2 - x_1^2 - 2x_2^2;$$

если

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x_{1\max} = x_{2\max} = 1, \ f_{\max} = 3.$

4. Найти $f_{\max}$, если

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \quad\quad x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x_{1\max} = 0.99528; x_{2\max} = 0.96321; \quad f_{\max} = 2.99957$.

5. Найти $f_{\min}$, если

$$f(x) = (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^2$$

$$\begin{cases} x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \\ -3x_1^2 - 2x_2^2 + 21 \ge 0 \\ -4x_1 - 5x_2 + 20 \ge 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x_{1\min} = 0.9989; \quad x_{2\min} = 2.999763; \quad f_{\min} = 0$.

6. Найти $f_{\min}$, если

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

$$x_1 + x_2 - 5 = 0 \quad .$$

Ответ: $x_{1\min} = 2.5; \quad x_{2\min} = 2.5; \quad f_{\min} = 4.5$.

7. Найти $f_{\min}$, если

$$f(x) = (x_1 - 1)\cdot(x_1 - 2)\cdot(x_1 - 3) + x_3$$

$$x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 \ge 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \ge 0 \quad .$$

$$5 - x_3 \ge 0$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0$$

Ответ: $x_{1\min} = 2.01; \quad x_{2\min} = 0.001; \quad x_{3\min} = 2.011; \quad f_{\min} = 2.0$.

8. Найти $f_{\max}$, если

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2; \quad 18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2 \ge 0, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Ответ: $x_{1\max} = 4.021; \quad x_2 = 4.021; \quad f_{\max} = -32.337$.

Лабораторная работа № 15

Тема: МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ГАУССА ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЦЕНЫ АКЦИЙ. ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Метод наименьших квадратов Гаусса позволяет приблизиться к заданным экспериментальным точкам с помощью функций заданного класса наилучшим образом. Причем, если заданный класс функций - это **линейные функции** $y = a \cdot x + b$, то задача называется **задачей линейной регрессии**, если заданный класс функций нелинейные функции, то имеем **задачу нелинейной регрессии**.

Рассмотрим **задачу о приближении результатов эксперимента, линейной функцией**: $y = a \cdot x + b$.

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Решение. Для нахождения именно той функции $y = a \cdot x + b$, которая "лучше" других аппроксимирует экспериментальные точки, мы должны в каждой точке (x_i, y_i) составить разности (отклонения)

$$r_i = (ax_i + b) - y_i . \qquad (1)$$

Здесь $ax_i + b$ -теоретическое приближение к экспериментальному значению y_i в точке $x=x_i$. Таким образом, r_i - суть разности между теоретическими и экспериментальными значениями функции в точках $x=x_i$.

Составляется сумма квадратов этих отклонений (1), которая называется функцией Гаусса $G^2(a,b)$ [10] :

$$G_1^2(a,b) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 . \qquad (2)$$

Теперь минимизируем функцию Гаусса $G_1^2(a,b)$. Точка минимума ($a_{\min}, b_{\min}$) индивидуализирует именно ту прямую линию

$$y = a_{\min} \cdot x + b_{\min} , \qquad (3)$$

которая лучше всех приближает экспериментальные точки (x_i, y_i) по совокупности.

Поскольку критерием наилучшего приближения в методе Гаусса является минимизация **суммы квадратов** отклонений, этот метод носит название **наименьших квадратов**.

Для функции (2) двух переменных необходимые условия экстремума позволяют составить систему линейных уравнений, определяющих точку минимума $(a_{\min}, b_{\min})$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta G_1^2}{\delta \alpha} &= 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\delta G_1^2}{\delta b} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (a \cdot x_i + b - y_i) = 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (4)$$

Систему (4) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} . \qquad (5)$$

Далее,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & n \end{vmatrix} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2 ;$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_i y_i & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & n \end{vmatrix} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right);$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 & \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X & \sum_{i=1}^{n} y_i \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot y_i \right);$$

поэтому получаем, что

$$\begin{cases} \alpha_{\min} = \dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta} \\ b_{\min} = \dfrac{\Delta_b}{\Delta} \end{cases} .$$

Далее строим на одном рисунке два графика: экспериментальные точки и теоретическая оптимальная прямая.

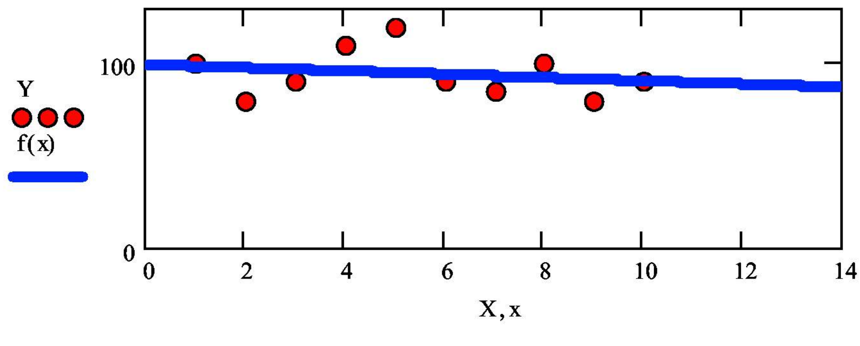


Рис. 1. Экспериментальные точки ... и теоретическая прямая.

Задача № 15. Динамика Y-цены акций за X-первые 10 месяцев показана в таблице:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	100	80	90	110	120	90	85	100	80	90	?	?

Постройте прогноз цены за ноябрь и декабрь.

Решение. Для решения этой задачи составим соответствующую программу на основе Mathcad.

ПРОГРАММА № 15

Индексация начинается с i=1

ORIGIN:= 1

Экспериментальные данные

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 90 \\ 110 \\ 120 \\ 90 \\ 85 \\ 100 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Нахождение коэффициентов линейного представления данных

$b := \mathrm{intercept}(X, Y)$

$a := \mathrm{slope}(X, Y)$

$b = 99.333$

$a = -0.879$

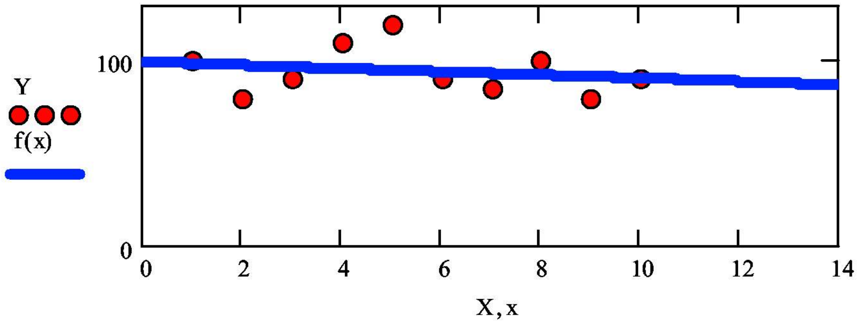
Теоретическая функция-приближающая экспериментальные данные задачи

$f(z) := a \cdot z + b$

Спрогнозированные значения построенной зависимости данных

$f(11) = 89.667$

$f(12) = 88.788$



ЗАДАНИЕ

Изучите курсы акций известных вам крупных предприятий за предыдущие месяцы и постройте прогноз курса за последующие три месяца. Проиллюстрируйте ваше решение графически.

Лабораторная работа № 16

Тема: ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗА ЦЕНЫ ТОВАРА

Иногда линейная регрессия дает слишком грубое приближение для прогноза курса акций, цены товара, курса национальной валюты и т.д. В таких случаях часто применяют метод **обобщенной линейной регрессии**. Суть этого метода заключается в том, что заданную совокупность экспериментальных точек приближают функцией типа

$$F(x, k1, k2,...,kn)=k1\cdot F1(x)+k2\cdot F2(x)+...+kn\cdot Fn(x)\,, \quad (1)$$

т.е. линейной комбинацией функций F1(x), F2(x),...,Fn(n), причем сами эти функции могут быть и линейными, что резко расширяет возможности такой аппроксимации и распространяет ее на нелинейные функции.

Для реализации линейной регрессии общего вида используется функция linfit(VX,VY,F), возвращающая вектор $\vec{k}$ - коэффициентов линейной регрессии общего вида, при котором среднеквадратическая погрешность приближения "облака" исходных точек, координаты которых хранятся в векторах VX,VY оказывается минимальной. Вектор F должен содержать функции F1(x),F2(x),...,Fn(x)-записанные в символьном виде.

Задача № 16. Известно, что за 5 месяцев VX, цена товара VX менялась согласно заданной таблице:

VX	1	2	3	4	5	6	7	8
VY	25	12	9.4	16.2	26	?	?	?

Составить прогноз цены на следующие три месяца.

Решение. Составим программу для решения задачи прогноза цены товара на основе Mathcad с использованием обобщенной линейной регрессии.

ПРОГРАММА № 16

Экспериментальные данные задачи

$$VX := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 9.4 \\ 16.2 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Матрица функций приближения при обобщенной линейной интерполяции данных

$$F(x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ x^2 \\ e^x \end{pmatrix}$$

Программа нахождения коэффициентов разложения

$$i := 0..4$$

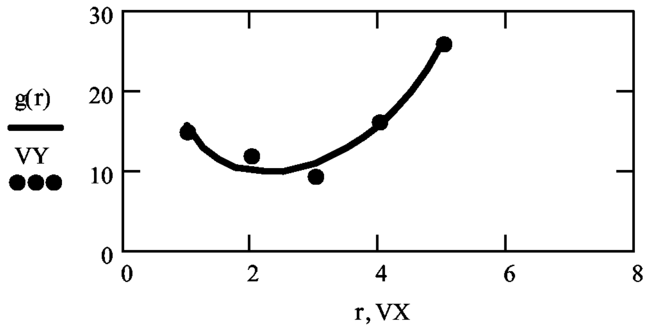
$$K := \mathrm{linfit}(VX, VY, F)$$

$$K = \begin{pmatrix} 14.899 \\ 0.509 \\ 0.07 \end{pmatrix}$$

Построение приближающей функции

$$g(t) := F(t) \cdot K$$

$$r := 1, 1.25..5$$



Спрогнозированние значения функциональной зависимости

$$g(6) = 48.98$$

$$g(7) = 103.651$$

$$g(8) = 242.607$$

ЗАДАНИЕ

Постройте на основе метода обобщенной линейной регрессии приближение к закону динамики цены: а) за нефть; б) за газ; в) за электричество.

Вычислить прогнозируемые значения цен за ближайшие три месяца.

Лабораторная работа № 17

Тема: НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗА КУРСА АКЦИЙ

Когда линейная регрессия и обобщенная линейная регрессия дают грубые для нашего прогноза результаты, надо обращаться к методу нелинейной регрессии общего вида.

Под нелинейной регрессией общего вида подразумевается нахождение вектора K-параметров произвольной функции F(x,k1,k2,...,kn), при котором обеспечивается минимальная среднеквадратическая погрешность приближения "облака" исходных точек.

Для проведения нелинейной регрессии общего вида используется функция

genfit (VX,VY,VS,F) , (1)

которая возвращает вектор K-параметров функции F, дающий минимальную среднеквадратическую погрешность приближения функцией F(x,k1,k2,...,kn) исходных данных.

Вектор F должен быть вектором с символьными элементами, причем они должны содержать аналитические выражения для исходной функции и ее производных по всем параметрам, т.е.

$$F(x,k)=\begin{pmatrix} F \\ \dfrac{d}{dk_1}F \\ \dots \\ \dfrac{d}{dk_n}F \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Вектор VS должен содержать начальные приближения для вектора K, необходимые для решения системы нелинейных уравнений регрессии итерационным методом.

Рассмотрим пример нелинейной регрессии общего вида с помощью функции:

$$F(x,a,b)=a\cdot\exp(-b\cdot x)+a\cdot b. \quad (3)$$

Тогда нужно посчитать производные по всем параметрам, т.е. по

$$\frac{d}{da}F(x,a,b)\to\exp(-bx)+b\ , \quad (4)$$

$$\frac{d}{db}F(x,a,b)\to -a\cdot x\cdot\exp(-b\cdot x)+a\,; \quad (5)$$

тогда матричная функция F(x,k) будет иметь вид

$$F(x,k)=\begin{pmatrix} k_1\cdot\exp(-k_2\cdot x)+k_1\cdot k_2 \\ \exp(-k_2\cdot x)+k_2 \\ -k_1\cdot x\cdot\exp(-k_2\cdot x)+k_1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим конкретную задачу прогноза.

Задача № 17. Курс акций Газпрома РФ за полгода менялся по закону, заданному таблицей:

VX	1	2	3	4	5	6	7	8	9
VY	1.9	1.6	1.34	1.22	1.35	1.05	?	?	?

Составить прогноз курса акций на последующие три месяца.

Решение. Для аппроксимации закона изменения курса акций Газпрома будем пользоваться нелинейной регрессией общего вида. В качестве опорного класса функций приближения выбираем экспоненциальные функции (3):

$$F(x,k1,k2)=k1\cdot\exp(-k2\cdot x)+k1\cdot k2, \qquad (7)$$

тогда

$$\frac{d}{dk1}F(x,k1,k2)=\exp(-k2\cdot x)+k2; \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dk2}F(x,k1,k2)=-k1\cdot x\cdot\exp(-k2\cdot x)+k1.$$

Таким образом, можем составлять программу на основе Mathcad для решения заданной задачи.

ПРОГРАММА № 17

ORIGIN:= 1

Данные задачи

$$VX:=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{pmatrix} \qquad VY:=\begin{pmatrix}1.9\\1.607\\1.34\\1.22\\1.35\\1.05\end{pmatrix}$$

Матрица приближающей функции и ее частных производных по переменным коэффициентам **k**

$$F(x,k):=\begin{pmatrix}k_1\cdot e^{-k_2\cdot x}+k_1\cdot k_2\\ e^{-k_2\cdot x}+k_2\\ -k_1\cdot x\cdot e^{-k_2\cdot x}+k_1\end{pmatrix}$$

Начальные приближения для неизвестных коэффициентов **k**

$$VS := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Оператор решения задачи

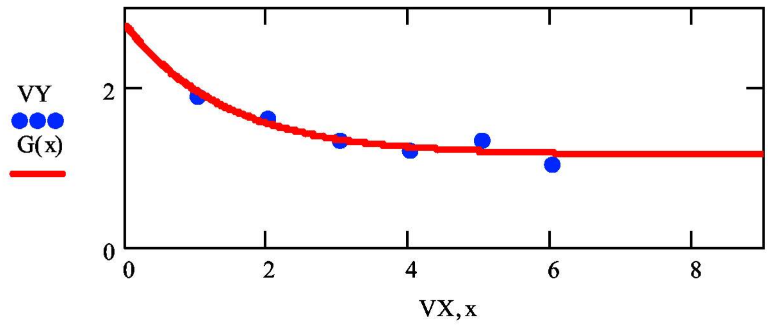
$$P := \mathrm{genfit}(VX, VY, VS, F)$$

Значения искомых коэффициентов разложения

$$P = \begin{pmatrix} 1.62 \\ 0.712 \end{pmatrix}$$

Построение приближающей функции

$$G(x) := F(x, P)_1$$



Спрогнозированные значения зависимости

$$G(7) = 1.164$$

$$G(8) = 1.158$$

$$G(9) = 1.156$$

ЗАДАНИЕ

1. Курс акций РАО ЭС РФ за полгода менялся по закону, заданному таблицей.

VX	1	2	3	4	5	6	7	8	9
VY	2	1.9	1.7	1.8	1.3	1.25	?	?	?

Составить прогноз курса акций на последующие три месяца.

2. Изучить динамику курса акций ведущих мировых корпораций (при помощи Интернета) и сделать прогноз курса на ближайшие три месяца.

Лабораторная работа № 18

Тема: ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РЕГРЕССИЯ

Одним из видов нелинейной регрессии является полиномиальная регрессия. Это регрессия, при которой в качестве функции аппроксимации выбирают множество многочленов.

В Mathcad введена функция для обеспечения полиномиальной регрессии при произвольной степени многочлена регрессии:

VS:=regress (VX, VY, h), (1)

которая возвращает вектор VS, запрашиваемый функцией

f(x):=interp (VS, VX, VY, x) (2)

и содержащий коэффициенты многочлена n-й степени, который наилучшим образом приближает "облако" точек с координатами, хранящимися в векторах VX и XY.

А оператор (2) задает значение сплайна в точке x по исходным VX и VY и коэффициентам сплайна VS.

Рассмотрим теперь конкретный пример.

Задача № 18. Задана динамика курса акций Сургутнефти по таблице данных:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	0.8	3.5	8	15	19	26	?	?	?

Постройте полином, наилучшим образом приближающийся к этим данным, и составьте прогноз курса акций на последующие три месяца.

Решение. Составляем матрицу данных data:

$$data := \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 2 & 3.5 \\ 3 & 8 \\ 4 & 15 \\ 5 & 19 \\ 6 & 26 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Пусть степень полинома

k:=3. (4)

Создаем векторы исходных данных VX и VY:

$VX:=data^{<0>}$ $VY:=data^{<1>}$. (5)

Вычисляем коэффициенты "наилучшего" многочлена третьей степени (k=3):

VS:=regress (VX, VY, k). (6)

Строим наилучшее полиномиальное приближение:

f(x):=interp(VS, VX, VY, x). (7)

Строим графическую интерпретацию результатов

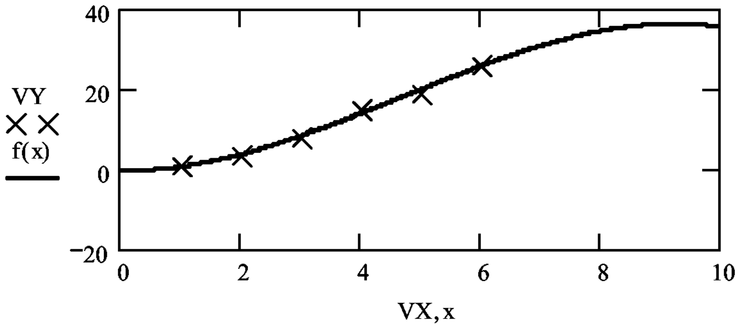


Рис. 1. Интерпретация полиномиальной регрессии.

Теперь можно вычислять прогнозируемые значения:
f(7)=?   f(8)=?   f(9)=?

ПРОГРАММА № 18

Данные задачи

$$data := \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 2 & 3.5 \\ 3 & 8 \\ 4 & 15 \\ 5 & 19 \\ 6 & 26 \end{pmatrix}$$

Степень полинома приближения

$$k := 3$$

Формированые векторов данных из данных матрицы

$$VX := data^{\langle 0 \rangle}$$

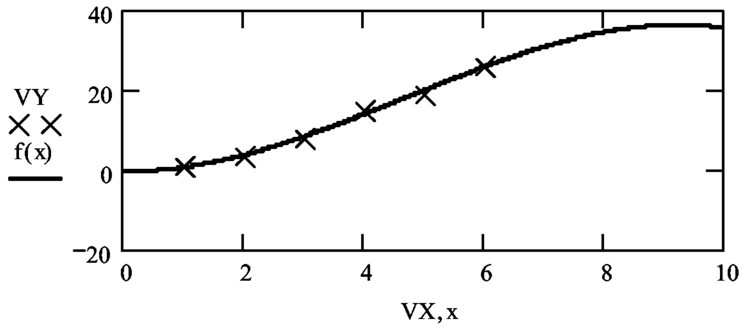
$$VY := data^{\langle 1 \rangle}$$

Оператор решения задачи

$$VS := regress(VX, VY, k)$$

$$VS = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ -0.2 \\ -0.391 \\ 1.369 \\ -0.097 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := interp(VS, VX, VY, x)$$



Спрогнозированные значения данных

$$f(7) = 30.8$$

$$f(8) = 34.514$$

$$f(9) = 36.3$$

Нахождение коэффициентов разложения

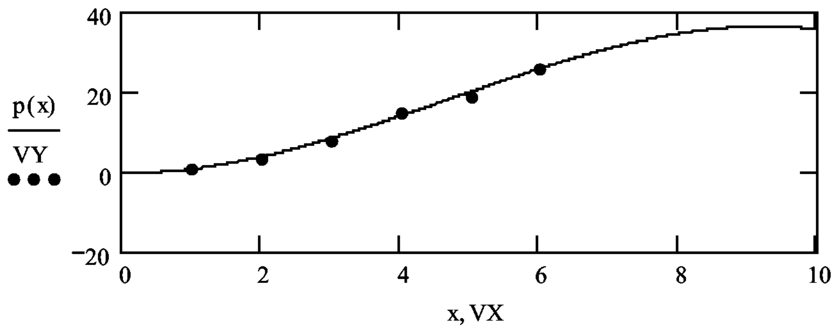
$$coeffs := \mathrm{submatrix}(VS, 3, \mathrm{length}(VS) - 1, 0, 0)$$

$$coeffs^T = (-0.2 \;\; -0.391 \;\; 1.369 \;\; -0.097)$$

$$a := coeffs$$

Полином аппроксимации

$$p(x) := \sum_{i=0}^{3} a_{3-i} \cdot x^{3-i}$$



ЗАДАНИЕ

На основе метода полиномиальной регрессии изучите динамику цен на энергоносители за первое полугодие 2005 года в Тбилиси и постройте прогноз на второе полугодие. Результаты сравните с реальностью. Объясните их различие.

Лабораторная работа № 19

Тема: ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОВОКУПНОГО СПРОСА НА ПРОДУКТЫ ПИТАНИЯ. МНОЖЕСТВЕННЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Множественный регрессионный анализ является развитием парного регрессионного анализа применительно к случаям, когда зависимая нерешенная гипотетически связана более чем с одной независимой переменной.

Рассмотрим пример определения совокупного спроса на продукты питания. Будем исходя из наличия данных по доходам X населения и ценам P на продукты питания, искать связь

$$y=f(x,p), \qquad (1)$$

где y - общая величина расходов на питание, а f - функция из заданного класса. Для примера, мы будем пользоваться полиномами, т.е. пользуемся полиномиальной регрессией в многомерном случае; частным случаем множественной полиномиальной регрессии является многомерная линейная регрессия, т.е. случаи, когда данные приближаются по формуле

$$y=\alpha+\beta_1\cdot x+\beta_2\cdot p\,. \qquad (2)$$

Для решения задачи множественной полиномиальной регрессии нужно задать массив чисел соответствующих переменной Y:

$$Y:=\begin{pmatrix}350\\360\\400\\380\\400\\450\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Затем создать двумерный массив данных MXP для соответствующих точек (x, p):

$$MXP:=\begin{pmatrix}400 & 2.5\\400 & 3\\400 & 3.5\\400 & 3.4\\400 & 3.35\\400 & 3.4\end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Далее, используют оператор regress(MXP,Y,n), где n - степень аппроксимирующего полинома. Для формулы (2) имеем

n:=1,

VS:=regress(MXP, Y, n), (5)

где VS - коэффициенты наилучшего приближающего полинома (2).

Далее строится сам аппроксимирующий полином (2), где X_0:=X и X_1:=P, f(x):=interp(VS, MXP, Y, X). (6)

После этого мы можем строить и прогноз для других значений $\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}$, а также посмотреть на трехмерное изображение аппроксимирующей поверхности.

Задача № 19. При заданном совокупном спросе Y и соответствующей матрице данных MXP, по доходам населения X и ценам на продукты питания P, построить аппроксимирующий многочлен (2); сделать прогноз, оценить погрешности аппроксимаций и построить графическую интерпретацию.

Решение. Для графической интерпретации удобно и привычно обозначить совокупный спрос Y через Z; и данные задаем в виде матриц:

$$Z := \begin{pmatrix} 350 \\ 360 \\ 400 \\ 380 \\ 400 \\ 450 \end{pmatrix}; \qquad n := 1; \qquad \text{MXP} := \begin{pmatrix} 400 & 2.5 \\ 400 & 3 \\ 400 & 3.5 \\ 400 & 3.4 \\ 400 & 3.35 \\ 400 & 3.4 \end{pmatrix}$$

VS:=regress(MXP,Z,n); f(x):=interp(VS,MXP,Z,x);

Прогноз: $f\left(\begin{pmatrix} 450 \\ 340 \end{pmatrix}\right) = ?$ (отв.: 426) $f\left(\begin{pmatrix} 500 \\ 400 \end{pmatrix}\right) = ?$ (отв.: 488)

X:=MXP$^{<0>}$ P=MXP$^{<1>}$

i:=0..5

Абсолютная погрешность вычислений: $\Delta C_i = f\begin{pmatrix} X_i \\ P_i \end{pmatrix} - Z_i \quad \Delta C = ?$

Относительная погрешность вычислений: $\nu := \dfrac{\Delta C}{450} \cdot 100 \ \nu = ? \ \ \max \nu \approx 10\%$

$$i := 0..100 \qquad j := 0..100$$
$$X1_i := 400 + i \quad P1_j := 250 + 1.5 \cdot j \qquad M1_{i,j} := f\left(\begin{pmatrix} X1_i \\ P1_j \end{pmatrix}\right).$$

ПРОГРАММА №19

Данные совокупного спроса на продукты питания, расходы на питание и данные о доходах

$$Z := \begin{pmatrix} 350 \\ 360 \\ 400 \\ 380 \\ 400 \\ 450 \end{pmatrix} \qquad MXP := \begin{pmatrix} 400 & 2.5 \\ 400 & 3 \\ 400 & 3.5 \\ 400 & 3.4 \\ 400 & 3.35 \\ 400 & 3.4 \end{pmatrix}$$

$$X := MXP^{\langle 0 \rangle}$$

$$P := MXP^{\langle 1 \rangle}$$

Нахождение коэффициентов разложения

$$n := 1$$

$$VS := \mathrm{regress}(MXP, Z, n)$$

$$VS = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0.439 \\ 0.672 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

Построение приближающей функции

$$f(X) := \mathrm{interp}(VS, MXP, Z, X)$$

Прогнозирование значений совокупного спроса

$$f\left(\begin{pmatrix} 450 \\ 340 \end{pmatrix}\right) = 425.946$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 500 \\ 400 \end{pmatrix}\right) = 488.199$$

$$coeffs := \mathrm{submatrix}(VS, 3, \mathrm{length}(VS) - 1, 0, 0)$$

$$coeffs^T = (0.439\ \ 67.167\ \ 0.001)$$

$$\alpha := (coeffs^T)^{<0>}$$

$$\alpha = (0.439)$$

$$\beta := (coeffs^T)^{<1>}$$

$$\beta = (67.167)$$

$$m := (coeffs^T)^{<2>}$$

$$m = (0.001)$$

$Z = m + \alpha * X + \beta * P$ - Функция совокупного спроса

$$Z1(X, P) := 0.001 + 0.439 \cdot X + 67.167 \cdot P$$

$$i := 0 .. 5$$

Абсолютная погрешность

$$\Delta c_i := \left| f\left(\begin{pmatrix} X_i \\ P_i \end{pmatrix}\right) - Z_i \right|$$

$$\Delta c = \begin{pmatrix} 6.457 \\ 17.126 \\ 10.71 \\ 23.993 \\ 0.635 \\ 46.007 \end{pmatrix}$$

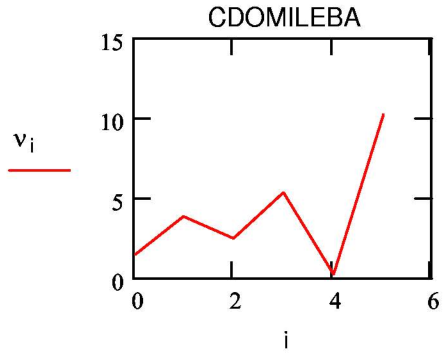
Относительная погрешность

$$\nu := \frac{\Delta c}{450} \cdot 10($$

$$\nu = \begin{pmatrix} 1.435 \\ 3.806 \\ 2.38 \\ 5.332 \\ 0.141 \\ 10.224 \end{pmatrix}$$

$$\max(\nu) = 10.224$$

График относительной погрешности вычисления



ЗАДАНИЕ

При заданном совокупном спросе Y и соответствующей матрице данных MXP, по X - доходам населения и P - ценам построить аппроксимирующий полином

$Y = \alpha + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot P$;

построить графическую интерпретацию и сделать прогноз.

Лабораторная работа № 20

Тема: ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ КОББА-ДУГЛАСА

В 1927 году Пол Дуглас, экономист по образованию, обнаружил, что, если совместить графики зависимости от времени логарифмов показателей реального объема выпуска (Y), капитальных затрат (K) и затрат труда (L), то расстояния от точек графика показателей выпуска до точек графиков показателей затрат труда и капитала будут составлять постоянную пропорцию. Затем он обратился к математику Чарльзу Коббу с просьбой найти математическую зависимость, обладающую такой особенностью, и Кобб предложил следующую функцию:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}. \tag{1}$$

Часто рассматривают обобщенную функцию Кобба-Дугласа

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}, \tag{2}$$

где коэффициенты A, α и β определяются методами нелинейной множественной регрессии при заданных: векторе данных Y и матрице данных K и L.

Задача № 20. При заданном индексе реального объема производства (Y), реальных капитальных затрат (K) и реальных затрат труда (L) промышленности США за 1899 - 1922 г., найти зависимость (2), если имеем данные (за основу взят объем 1899 г. =100).

Год	Y	K	L		Год	Y	K	L
1899	100	100	100		1911	153	216	145
1900	101	107	105		1912	177	226	152
1901	112	114	110		1913	184	236	154
1902	122	122	118		1914	169	244	149
1903	124	131	123		1915	189	266	154
1904	122	138	116		1916	225	298	182
1905	143	149	125		1917	227	335	196
1906	152	163	133		1918	223	336	200
1907	151	176	138		1919	218	387	193
1908	126	185	121		1920	231	407	193
1909	155	198	140		1921	179	417	147
1910	159	208	144		1922	240	431	161

Решение. Для нахождения параметров зависимости Кобба-Дугласа

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}, \tag{3}$$

прологарифмуем это соотношение

$$\ln Y = \ln A + \alpha \cdot \ln K + \beta \cdot \ln L. \tag{4}$$

Теперь, если ввести обозначения:

$\ln Y \equiv y$; $\ln A \equiv m$; $\ln K \equiv X$; $\ln L \equiv P$, (5)

получаем зависимость

$y = m + \alpha \cdot x + \beta \cdot P$, (6)

т.е. зависимость в виде полинома первой степени, где нужно определить значения m, α и β по методу множественной полиномиальной регрессии, а далее, используя формулы (5), определить искомый параметр A, как

$A = e^{m}$. (7)

Теперь составляем программу на основе Mathcad, для решения нашей задачи.

ПРОГРАММА № 20

$$Y := \begin{pmatrix} 100 \\ 101 \\ 112 \\ 122 \\ 124 \\ 122 \\ 143 \\ 152 \\ 151 \\ 126 \\ 155 \\ 159 \\ 153 \\ 177 \\ 184 \\ 169 \\ 189 \\ 225 \\ 227 \\ 223 \\ 218 \\ 231 \\ 179 \\ 240 \end{pmatrix} \quad K := \begin{pmatrix} 100 \\ 107 \\ 114 \\ 122 \\ 131 \\ 138 \\ 149 \\ 163 \\ 176 \\ 185 \\ 198 \\ 208 \\ 216 \\ 226 \\ 236 \\ 244 \\ 266 \\ 298 \\ 335 \\ 366 \\ 387 \\ 407 \\ 417 \\ 431 \end{pmatrix} \quad L := \begin{pmatrix} 100 \\ 105 \\ 110 \\ 118 \\ 123 \\ 116 \\ 125 \\ 133 \\ 138 \\ 121 \\ 140 \\ 144 \\ 145 \\ 152 \\ 154 \\ 149 \\ 154 \\ 182 \\ 196 \\ 200 \\ 193 \\ 193 \\ 147 \\ 161 \end{pmatrix}$$

$$i := 0..23$$

$$Y1_i := \ln(Y_i)$$

$$K1_i := \ln(K_i)$$

$$L1_i := \ln(L_i)$$

$$MXP^{\langle 0 \rangle} := K1$$

$$MXP^{\langle 1 \rangle} := L1$$

$$n := 1$$

$$VS := \text{regress}(MXP, Y1, n)$$

$$VS = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0.233 \\ 0.807 \\ -0.177 \end{pmatrix}$$

$$f(X) := \text{interp}(VS, MXP, Y1, X)$$

$$\text{coeffs} := \text{submatrix}(VS, 3, \text{length}(VS) - 1, 0, 0)$$

Коэффициенты разложения производственной функции Кобба-Дугласа.

$$\ln Y=\ln A+\alpha\ln K+\beta\ln L$$

$$\text{coeffs}^T = (0.233 \;\; 0.807 \;\; -0.177)$$

$$\alpha := \left(\text{coeffs}^T\right)^{\langle 0\rangle}$$

$$\alpha=0.233$$

$$\beta := \left(\text{coeffs}^T\right)^{\langle 1\rangle}$$

$$\beta=0.807$$

$$A := e^{\left(\text{coeffs}^T\right)^{\langle 2\rangle}}$$

$$A=0.838$$

Спрогнозированные значения производственной функции

$$f\left(\begin{pmatrix} 420 \\ 330 \end{pmatrix}\right) = 364.107$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix}\right) = 335.228$$

P.S. Эластичность выпуска продукции по капиталу и труду равна соответственно α и β.

ЗАДАНИЕ

При заданном индексе реального объема производства (Y), реальных капитальных затрат (K) и реальных затрат труда (L) для Грузии найти необходимые данные и определить параметры производственной функции Кобба-Дугласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anrew F.Sigel. Practical Buisiness Statistics, Boston Burr Ridged,WI New York, San Francisco, Lisbon, London, Madrid, Toronto, 2000.
2. Мицкевич.А.А. Деловая математика в экономической теории и практике. Москва: Высшая школа экономики, 1995.
3. Пу.Т. Нелинейная экономическая динамика. Пер. с англ. Москва, 2002.
4. Лебедев.В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов.Москва, 1997.
5. Салманов. О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel. Санкт-Петербург, 2003.
6. Robert F.Bruner, Mark R.Eaker, R.Edward Freeman, Robert E.Spekman, Elizabeth O.Teisberg. The portable MBA, New York, Singapore, Toronto, 1998.
7. Gilbert A.Cherchill. Marketing Reserch, New York, Orlando, Toronto, Montreal, London, Sydney, Tokyo, 1996.
8. Дьяконов. Mathcad 2001 учебный курс:численные и символьные вычисления. "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001.
9. Обгадзе.Т.А. Высшая математика для экономистов. Министерство образования РФ, Институт гуманитарного образования. Москва, 2002.
10. Обгадзе.Т.А. Прокошев.В.Г. Вычислительная физика. Министерство образования РФ, ВГУ. Владимир, 1999.
11. Christopher Dougherty. Introduction to econometrics, New York, Oxford University PRESS, 1992.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ……………………………………………...…………..…….3
1.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
Тема: СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ СРЕДНЕЙ ЦЕНЫ ТОВАРА В РЕГИОНЕ ……………………………………………………5
2.Программа №1……………………………………………………………..9
3.Задание……………………………………………………………………10
4.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
Тема: РАСЧЕТ РЕНТАБЕЛЬНОСТИ И РИСКА ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА ……………………………………………………………11
5.Программа №2 ………...……………………………………………….12
6.Задание ……………………………………………………………..…12
7.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3
Тема: ТЕХНОЛОГИЯ СРАВНЕНИЯ ДВУХ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ ……………………………………14
8.Программа №3 …………………………………………………………15
9.Задание ………………………………………………………………….15
10.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4
Тема: МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА ……….……..**17**
11.Программа №4 ………………………………………………………..…**18**
12.Задание ……………………………………………………………….…**19**
13.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5
Тема: МОДЕЛЬ САМУЭЛЬСОНА-ХИКСА ДИНАМИКИ НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА ………………………………..………………………...**20**
14.Программа №5 ……………………………………………………….…**21**
15.Задание ……………………………………..……………………………**22**
16.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6
Тема: МОДЕЛЬ ФЕРХЮЛЬСТА ДЛЯ ДИНАМИКИ ВКЛАДОВ В БАНКЕ …....23
17.Программа №6 …………………………………………………………..26
18.Задание ………………………………………………………...………28
19.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7
Тема: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРАНГИШВИЛИ-ОБГАДЗЕ …………...**29**
20.Программа №7 …………………………………………………………..30
21.Задание …………………………………………………………………..31
22.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8
Тема: УРАВНЕНИЕ МАТЬЕ В ЭКОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ ……..…………..**32**
23.Программа №8 …………………………………………………………..33
24.Задание …………………………………………………………………..34
25.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №9
Тема: МЕТОД ЭКОНОМИКО-ПОЛИТИЧЕСКОЙ БОРЬБЫ КЮРАСАО ………**35**
26.Программа №9 ……………………………………………………….....36
27.Задание …………………………………………………………………..37
28.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №10

Тема: ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ ……………………………..…...…**38**
29.Программа №10 ……………………………………………………39
30.Задание ……………………………………………………………..39
31.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №11
Тема: УСТАНОВЛЕНИЕ ПРОЖИТОЧНОГО МИНИМУМА В ЗАДАННОМ ГОРОДЕ, В ДАННОМ РАЙОНЕ ……………………………………………...**40**
32.Программа №11 ……………………………………………………...41
33.Задание …………………………………...…………………………...44
34.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №12
Тема: ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ ………………...…...**45**
35.Программа №12 ……………………………………………………46
36.Задание …………………………………………………………......47
37.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №13
Тема: ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА О ПЕРЕВОЗКАХ ……………………...….**48**
38.Программа №13 ……………………………………………………49
39.Задание ……………………………………………………………..50
40.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №14
Тема: ОБЩАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ …………...51
41.Программа №14 ……………………………………………………...51
42.Задание ……………………………………………………………..52
43.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №15
Тема: МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ГАУССА ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЦЕНЫ АКЦИЙ. ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ ……….......54
44.Программа №15 …..…………………………………………………...56
45.Задание ……………………………………………………………..57
46.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №16
Тема: ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗА ЦЕНЫ ТОВАРА ……………………………………………………………………...58
47.Программа №16 ……………………………………………………58
48.Задание ……………………………………………………………..59
49.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №17
Тема: НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗА КУРСА АКЦИЙ ……….60
50.Программа №17 ……………………………………………………61
51.Задание ……………………………………………………………..62
52.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №18
Тема: ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РЕГРЕССИЯ ……………………………………...63
53.Программа №18 ……………………………………………………64
54.Задание ……………………………………………………………..65
55.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №19
Тема: ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОВОКУПНОГО СПРОСА НА ПРОДУКТЫ ПИТАНИЯ. МНОЖЕСТВЕННЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ …………………………...…66
56.Программа №19 ……………………………………………………68
57.Задание ……………………………………………………………..69
58.ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №20
Тема: ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ КОББА-ДУГЛАСА ……………...….70

59.Программа №20 ……………………………………………………………71
60.Задание ………………………………………………………………………..72
61.Литература ………………………………………………………………..73
62.ОГЛАВЛЕНИЕ ……………...……………………………………………74