УДК 517.915
ББК 22.161
М77

Монахов В. Н., Семенко Е. В. **Краевые задачи и псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 416 с. — ISBN 5-9221-0049-1.

Книга состоит из двух частей. В первой части авторы строят общую теорию краевых задач для аналитических функций на римановых поверхностях с позиций единого подхода — выделения классов корректности этих задач и отыскания достаточно широких групп преобразований, относительно которых эти классы инвариантны.

Вторая часть посвящена псевдодифференциальным операторам на римановых поверхностях с вырождающимся символом и их приложениям — краевым задачам с косой производной для эллиптических уравнений второго порядка.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов университетов, интересующихся вопросами теории функций комплексного переменного.

Ил. 13. Библиогр. 45 назв.

Рецензент: член-корреспондент РАН П. И. Плотников

Ответственный редактор: академик М. М. Лаврентьев

ISBN 5-9221-0049-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Краевые задачи сопряжения на компактной римановой поверхности

II. Псевдодифференциальные операторы на компактной римановой поверхности

Предисловие

Книга состоит из двух частей. Первая часть посвящена краевым задачам сопряжения аналитических и квазианалитических функций на компактных римановых поверхностях. Под квазианалитическими функциями здесь имеются в виду решения квазилинейных эллиптических систем уравнений. Отметим ряд приложений указанных задач.

Струйные и волновые задачи гидродинамики. Безвихревые плоские течения несжимаемой жидкости описываются аналитической функцией $w(z) = \varphi + i\psi$ $(z = x + iy)$ — комплексным потенциалом течения, $dw/dz = u - iv$, $\mathbf{u} = (u, v)$ — вектор скорости потока, φ — потенциал скорости ($\varphi_x = u$, $\varphi_y = v$), ψ — функция тока.

Струйные и волновые задачи гидродинамики заключаются в отыскании комплексной скорости течения dw/dz в области D с частично неизвестной границей ∂D, состоящей из линий тока $\psi = \mathrm{const}$. Граница ∂D включает в себя известные кривые Γ^1 и свободные (неизвестные) кривые Γ^2 ($\Gamma^1 \cup \Gamma^2 = \partial D$), на которых задано распределение скорости потока $|dw/dz| = q(x)$.

Отображая известный образ D_* в плоскости переменного $w = \varphi + i\psi$ на единичный круг E: $|\zeta| < 1$, приходим к следующей нелинейной задаче для функции Жуковского $\omega(\zeta) = \ln \dfrac{dw}{dz}(\zeta)$, $z = z(\zeta)$, $z : E \to D$ — искомое конформное отображение:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \omega(t) &= -\vartheta[x(t)], \quad t \in \gamma^1\,; \\ \operatorname{Re} \omega(t) &= \ln q[x(t)], \quad t \in \gamma^2, \quad |t| = 1\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\vartheta(x) = -\arg dw/dz$ — угол наклона касательной к Γ^1 с осью Ox, γ^k — прообразы Γ^k, $k = 1, 2$.

Задача (1) нелинейна, поскольку функция $x = x(t)$ до нахождения $\omega(t)$ неизвестна. Разрешимость задачи (1), соответствующей простейшей схеме обтекания Кирхгофа, исследована в работах Leray J. и Лаврентьева М.А. методом итераций по нелинейности, при этом на каждом шаге итераций задача (1) являлась линейной (библиография в [19]). Широкий класс задач обтекания и волновых задач вида (1) изучен Монаховым В.Н. с помощью аппроксимации заданных кривых Γ^1 полигонами [19, гл. IV], а также методами теории квазиконформных отображений [19, гл. VII].

Среди рассмотренных в [19] задач содержится и гидродинамическая схема Эфроса, когда след за плохо обтекаемым препятствием заменяется струей, выходящей на второй лист римановой поверхности.

Более сложные гидродинамические схемы на римановых поверхностях рассмотрены Шурыгиным В.М. [45]. Им для описания и расчета сложных пространственных течений жидкости в рамках теории плоских задач гидродинамики предлагается моделирование дополнительных потоков жидкости (с малым расходом), создаваемых струйными и воздухозаборными устройствами летательных аппаратов, помещением каждого из этих потоков на свой лист римановой поверхности. Если искомую m-листную область D отобразить конформно внутрь m-листного единичного круга, придем к задаче вида (1), в которой $\vartheta(x)$ и $q(x)$ будут кусочно-гладкими функциями. При этом в требуемом классе функций $\omega = \ln \dfrac{dw}{dz}(\zeta)$ задача (1), как правило, имеет отрицательный индекс.

Род римановой поверхности, на которой решается задача (1), может быть и отличным от нуля, например, в задаче обтекания двоякопериодических решеток профилей род равен единице.

Дозвуковая газовая динамика. В задачах о неизменно дозвуковых потенциальных течениях газа обобщенная функция Жуковского $\omega(\zeta) = \ln q - i\vartheta$ является решением квазилинейного уравнения Бельтрами ([19], гл. VII):

$$\omega_{\overline{\zeta}} - \mu(\zeta, \omega)\omega_\zeta = 0\,, \quad \sup_{\zeta,\omega} |\mu| = \mu_0 < 1\,. \tag{2}$$

Функция $\mu(\zeta, \omega)$ выражается явно через характеристики газа и известное конформное отображение $w : E \to D_*$. Струйным течениям, как и выше, соответствует граничная задача (1) для решения $\omega = \omega(\zeta)$ уравнения (2), в общем случае определенного на римановой поверхности.

Гидродинамические задачи сопряжения. Простейший класс задач сопряжения в гидродинамике возникает при продолжении характеристик течения по симметрии через дуги окружностей и отрезки прямых. Как правило, такие продолжения проводятся в плоскости $\zeta = e^{iw}$ (линиям тока $\psi = \mathrm{const}$ отвечают окружности) или в плоскости $\zeta = u - iv$ годографа скорости (линиям $q = (u^2 + v^2)^{1/2} = \mathrm{const}$ соответствуют окружности). Более содержательный класс задач сопряжения возникает в гидродинамике при «склеивании» различных моделей, например, потенциального и вихревого течений (Антонцев С.Н., Лелюх В.Д., библиография в [19]).

Квазиконформные деформации сплошной среды. Рассмотрим изотопии шара B^n, $\varphi_t : B^n \times [0, 1] \to B^n$, определяемые решениями динамических систем

$$\frac{dy}{dt} = u(y, t)\,, \quad y = \varphi_t(x)\Big|_{t=0} = x \in B^n \tag{3}$$

и являющиеся $\forall\, t \in [0, 1]$ квазиконформными автоморфизмами. Если считать начальные данные x координатами Лагранжа, а переменные $y = \varphi_t(x)$ координатами Эйлера, то (3) определяет движение (деформацию) механического континуума, порождаемое полем скоростей $u(y, t)$. В работах Монахова В.Н. и Селезнева В.А. [21] изучены качественные свойства таких деформаций, названных там квазиконформными. Обычно поле скоростей $u(y, t)$ является неизвестным вектором, определяемым какой-либо моделью механики сплошной среды — моделями Эйлера или Навье–Стокса несжимаемой жидкости, различными моделями деформируемого твердого тела и т.д. При этом необходимо уже рассматривать деформации, порожденные (3), на многообразиях, например, в двумерном случае на римановых поверхностях. В частности, в случае плоских дозвуковых течений газа функция $\omega = u_1 - iu_2$, $u = (u_1, u_2)$ удовлетворяет квазилинейному уравнению Бельтрами вида (2), определенному в общем случае на римановой поверхности.

Вторая часть книги посвящена псевдодифференциальным операторам на римановых поверхностях с вырождающимся символом, возникающим в задачах математической физики.

Краевая задача с косой производной для эллиптического уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} P(y, \partial)u = 0, & y \in D^+\,, \\ (b(y), \nabla u)\Big|_{y \in D} = g(y), & y \in D\,. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь риманова поверхность $D = \partial D^+$ — граница области $D^+ \subset \mathbb{R}^3$, $P(y, \partial)$ — эллиптический линейный дифференциальный оператор второго порядка, $b(y) : D \to \mathbb{R}^3$ — граничное векторное поле. Как известно, эту задачу можно свести к уравнению с псевдодифференциальным оператором на D [43]. Если выполнено условие Лопатинского $a_n(y) = (b(y), n(y)) \neq 0$, где $n(y)$ — нормаль к D, $a_n(y)$ — нормальная составляющая вектора $b(y)$, то задача (4) — нетерова индекса нуль. В работе рассматривается случай, когда условие Лопатинского не выполнено, т.е. нормальная составляющая граничного векторного поля может обращаться в нуль.

Структура книги. Обе части предваряют введения. При ссылке на литературу во введениях обычно указываются только фамилии авторов работ. Каждая часть делится на главы и параграфы. Нумерация глав и параграфов своя внутри каждой части, нумерация формул, теорем и лемм отдельная внутри каждого параграфа, нумерация рисунков — сквозная. При ссылке на формулу (лемму, теорему) из другого параграфа указывается номер параграфа.

Благодарности. Идея книги возникла в ходе работы семинара по краевым задачам института гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН. Всем участникам этого семинара авторы выражают благодарность за полезное обсуждение результатов. Отдельно авторы хотели бы поблагодарить проф. В.А. Селезнева и чл.-корр. РАН П.И. Плотникова за плодотворное участие в подготовке книги. Особую благодарность авторы выражают доценту Д.Б. Верховоду за внесенный им значительный вклад в написание параграфов 5, 6, 8, 9, первой части.

Часть I

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ НА КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Введение

В первой части подробно излагается теория краевой задачи сопряжения (задачи Римана) для аналитических функций на компактной римановой поверхности D рода $\rho \geqslant 0$ и в частности на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Классическая задача сопряжения заключается в построении функций $\Phi^{\pm}(z)$, аналитических соответственно в областях $D^{\pm} \subset \mathbb{C}$ и непрерывных вплоть до их границы $L = \partial D^{+} = \partial D^{-}$, на которой выполняется краевое условие

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \quad t \in L. \tag{0.1}$$

Здесь функции $G(t)$, $g(t)$ непрерывны по Гельдеру и $G(t) \neq 0$, $t \in L$.

Впервые полное решение задачи на плоскости $\mathbb{C}$ было построено Ф.Д. Гаховым: на первом этапе им отыскивалось мероморфное решение $X^{\pm}(z)$ однородной задачи (задачи факторизации)

$$X^{+}(t) = G(t)X^{-}(t), \quad t \in L, \tag{0.2}$$

после чего для аналитических функций $\Phi_0^{\pm}(z) = \Phi^{\pm}(z)/X^{\pm}(z)$ решалась задача о скачке

$$\Phi_0^{+}(t) - \Phi_0^{-}(t) = g(t)/X^{+}(t), \quad t \in L.$$

При этом было показано, что разность между числом нулей и полюсов решения $X^{\pm}(z)$ задачи (0.2) равна индексу Коши функции $G(t)$ (нетеровость задачи).

К задаче (0.1) сопряжения аналитических функций приводятся задача сопряжения со сдвигом

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \quad t \in L, \tag{0.3}$$

где $\alpha:\ L \to L$ — гомеоморфизм контура L, задача Гильберта

$$\operatorname{Re}[G(t)\Phi^{+}(t)] = g(t), \quad t \in L, \tag{0.4}$$

и другие краевые задачи, к которым непосредственно применим метод Ф.Д. Гахова.

Задача сопряжения для квазианалитических функций. Существенное изменение этого метода потребовалось при изучении задачи (0.3) для квазианалитических функций $w^{\pm}(z)$ — обобщенных решений квазилинейных (нелинейных) эллиптических систем дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial w^{\pm}}{\partial \overline{z}} - \mu_1 \frac{\partial w^{\pm}}{\partial z} - \mu_2 \overline{\frac{\partial w^{\pm}}{\partial z}} = A(z, w^{\pm})w^{\pm}, \quad z \in D^{\pm}, \tag{0.5}$$

$$\sup\left(|\mu_1(z, w^{\pm})| + |\mu_2(z, w^{\pm})|\right) = \mu_0 < 1.$$

Решение общей краевой задачи сопряжения (0.3), (0.5) квазианалитических функций впервые построено в работах С.Н. Антонцева, В.Н. Монахова по следующей схеме.

С помощью квазиконформных отображений

$$\zeta^{\pm} = R^{\pm}(z), \qquad R^{\pm}\colon\ D^{\pm} \to D^{\pm}$$

и некоторых интегральных преобразований $\Phi^{\pm}(z) = J^{\pm}(w^{\pm})$ задача (0.3), (0.5) формально трансформируется к задаче (0.1) для аналитических функций $\Phi^{\pm}(z)$ в плоскости новой переменной $\zeta = R^{\pm}(z)$ с коэффициентами $G_*(t)$, $g_*(t)$, зависящими от преобразований $R^{\pm}$, $J^{\pm}$.

Полученная задача сопряжения аналитических функций $\Phi^{\pm}(\zeta)$ видоизменяется (дается корректная постановка) таким образом, чтобы ее решение было единственным и устойчивым относительно достаточно широкого класса преобразований коэффициентов $G_*(t)$, $g_*(t)$ (и в конечном счете относительно преобразований $R^{\pm}$, $J^{\pm}$) и строится решение этой задачи в виде оператора $\Phi^{\pm}(\zeta) = \Lambda(R^{\pm}, J^{\pm})$.

Затем определяется преобразование

$$(R^{\pm}, J^{\pm}) \to (\rho^{\pm}, j^{\pm}),$$

неподвижная точка которого составляет искомые преобразования $(R^{\pm}, J^{\pm})$, трансформирующие задачу (0.3), (0.5) в соответствующую задачу сопряжения аналитических функций $\Phi^{\pm}(\zeta)$.

Наконец, доказывается существование неподвижной точки построенного преобразования и проверяется, что найденные при этом функции $w^{\pm}(z)$ являются решениями задачи (0.3), (0,5).

Корректная постановка задачи. Центральным местом в реализации этой схемы решения задачи (0.3), (0.5) является корректная постановка задачи сопряжения аналитических функций (0.1), которая заключается в задании конечного числа условий вида

$$N(G;\ g;\ z_m) = 0, \quad m = \overline{1, |\text{æ} + 1|}, \quad z_m \overline{\in} L. \tag{0.6}$$

Здесь в случае $\text{æ} = \operatorname{ind} G(t) \geqslant 0$ соотношения (0.6) определяют функционал $N = \Phi(z_m)$ над искомым решением $\Phi = \Phi^{\pm}(z)$ задачи (0.1), а при $\text{æ} < 0$ они являются необходимыми и достаточными условиями разрешимости задачи (0.1).

Задача с бесконечным индексом. Задачу (0.1) называют задачей с бесконечным индексом, если формально $\text{æ} = \operatorname{ind} G(t) = \pm\infty$. Систематическое изучение подобных задач начинается с основополагающих работ Н. В. Говорова, в которых реализуется метод Ф. Д. Гахова.

Монахов В. Н. и Семенко Е. В. предложили другой подход, заключающийся в построении классов корректности задачи (0.1) за счет задания бесконечного числа условий вида (0.6) ($\text{æ} = \pm\infty$!) с некоторым функционалом N и некоторой последовательностью $Z = \{z_m\}$.

При этом, как и в случае конечного индекса æ, видоизмененная задача (0.1), (0.6) имеет единственное решение, устойчивое относительно широкого класса данных задачи — функций $G(t)$, $g(t)$ и последовательностей Z.

Следует еще отметить, что предложенный авторами подход к изучению задачи (0.1) сопряжения с бесконечным индексом позволил существенно снизить требования на коэффициенты $G(t)$, $g(t)$ и доказать разрешимость задачи (0.1), (0.5) для квазианалитических функций.

Задача сопряжения на римановой поверхности. Задаче сопряжения (0.1) аналитических функций на римановой поверхности D рода $\rho \geqslant 0$ посвящено большое количество работ, библиографию которых можно найти в обзорах Э. И. Зверовича и Л. И. Чибриковой.

Основные результаты развитой в этих работах теории, если не вдаваться в подробности о гладкости контура L и коэффициентов (G, g), заключается в следующем: установлена нетеровость задачи в классе непрерывных по Гельдеру функций $G(t)$, $g(t)$ при $G(t) \neq 0, t \in L$ (класс A); вычислен ее индекс равный $(æ - \rho + 1)$, $æ = \operatorname{ind} G(t)$ и вычислены условия разрешимости в терминах сопряженной задачи; показано, что в особом случае, когда $0 \leqslant æ \leqslant 2\rho - 2$, число решений задачи (0.1) зависит не только от индекса, но и от координат функции $G(t)$, т. е. от ее моментов по абелевым дифференциалам первого рода.

Корректная постановка задачи на римановой поверхности. Вопрос о корректности задачи сопряжения аналитических функций на компактной римановой поверхности при $(G, g) \in A$ изучен в работе В.Н. Монахова и Е.В. Семенко. Авторы предложили алгоритм, который позволяет по заданным коэффициентам $(G, g) \in A$ определить числа l и l^*, функции $\psi_k(t)$, $k = \overline{1, l^*}$ и точки p_j, $j = \overline{1, l}$ такие, что задача

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) = g(t) - \sum_{k=1}^{l^*} c_k \psi_k(t), \tag{0.7}$$

$$\Phi(p_j) = 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad p_j \overline{\in} L,$$

имеет единственное решение в классе ограниченных аналитических функций $\Phi^\pm(z)$, $z \in D^\pm$, решение $\{\Phi^\pm(z), c_k\}$ задачи (0.7) выписано в виде интегрального оператора и показана его устойчивость, как функционала над $\{G, g, \psi_k, p_j\}$.

Применение метода С.Н. Антонцева и В.Н. Монахова для построения решения задачи сопряжения квазианалитических функций на римановой поверхности рода $\rho > 0$ потребовало поставить проблему устойчивости несколько шире. Именно, решение задачи (0.7) и все параметры ее корректной постановки (точки p_j, функции ψ_k) следует рассматривать и как операторы над римановой поверхностью как точкой в пространстве Тейхмюллера. Соответствующие построения (с доказательством их устойчивости) впервые проделаны в работе Д.Б.Верховода и, несколько видоизмененные, приведены в настоящей книге.

Авторами также предложена корректная постановка задачи сопряжения (0.1) аналитических функций на компактной римановой поверхности D в случае бесконечного индекса ($\operatorname{ind} G(t) = \pm\infty$).

Наконец, подход к задаче (0.1) с точки зрения корректности и устойчивости позволяет исследовать и задачи с разрывными, а также обращающимися в нуль или бесконечность коэффициентами $G(t)$.

Приложения. Задачи сопряжения (0.1) и (0.3) и задача Гильберта (0.4) для аналитических и квазианалитических функций на римановых поверхностях имеют большие приложения в гидродинамике.

Например, в теории плоских задач гидродинамики применяется метод моделирования течений жидкости со сложной топологией путем распространения их на многолистные римановы поверхности. Примером является гидродинамическая схема Эфроса, когда след за плохо обтекаемым телом заменяется струей, выходящей на второй лист римановой поверхности.

Широкий класс подобных гидродинамических схем на римановых поверхностях рассмотрен В.М. Шурыгиным. Им для описания сложных пространственных течений жидкости в рамках плоских задач гидродинамики предлагается моделирование дополнительных потоков жидкости (с малым расходом), создаваемых струйными и воздухозаборными устройствами летательных аппаратов, помещением каждого из этих потоков на свой лист римановой поверхности. Такой подход может быть применен и к моделированию слияния или разветвления нескольких потоков жидкости с произвольным расходом, особенно фильтрационных потоков в пористой среде.

Структура изложения. Часть состоит из трех разделов. В первом разделе приводится основной математический аппарат, используемый при решении краевых задач. В частности, здесь излагаются предварительные сведения из теории краевых задач на плоскости и теории римановых поверхностей. При этом авторы ориентировались на читателя, знакомого с теорией краевых задач на плоскости, поэтому в отдельных параграфах (2, 3, 5, 6) подробно изложены алгебраические и топологические основы теории римановых поверхностей. Здесь же (параграфы 4, 5, 6) приводятся некоторые специальные построения, используемые далее. Второй раздел посвящен собственно теории краевых задач линейного сопряжения на римановой поверхности. Наконец, в третьем разделе изложена теория краевых задач с бесконечным индексом на римановой поверхности.

Глава 1
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

§ 1. Краевые задачи на плоскости

1.1. Кривые, функции. Определим некоторые классы кривых и функций на плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{C} = \{z = x + iy\}$.

Дугой будем называть непрерывную связную кривую L без самопересечений. Это означает, что L может быть задана уравнением $z = t(s)$, $s \in [0, s_L]$, $t(s)$ — непрерывна, причем различным значениям параметра s соответствуют различные точки z. Если концы дуги совпадают, $t(0) = t(s_L)$, то такую дугу будем называть *контуром*.

Если в уравнении дуги $x = \operatorname{Re} t(s)$ и $y = \operatorname{Im} t(s)$ обладают непрерывными первыми производными при $s \in [0, s_L]$, то такую дугу назовем *гладкой*. Соответственно, если концы гладкой дуги совпадают и при этом $x'(0) = x'(s_L)$, $y'(0) = y'(s_L)$, т. е. совпадают и касательные, то такую дугу будем называть *гладким контуром*.

Теперь обратимся к функциям, заданным в $\overline{\mathbb{C}}$. Как обычно, окрестность бесконечности мы рассматриваем как окрестность нуля в плоскости отображения $w = 1/z$. Так, для произвольной области $U \subseteq \mathbb{C}$ будем обозначать

$$U_1 = U \cap \{|z| \leqslant 1\}, \quad U_2 = \{\, w \,:\, 1/w \in U \cap \{|z| \geqslant 1\}\}.$$

Пусть U — ограниченная область в $\mathbb{C}$. Комплекснозначная функция $\varphi(z)$ непрерывна по Гельдеру (*гельдерова*) на U, если

$$\|\varphi(z)\|_U^{(\alpha)} = \sup_{(z,z_0)\in U} \left(|\varphi(z)| + \frac{|\varphi(z) - \varphi(z_0)|}{|z - z_0|^\alpha} \right) < \infty.$$

Для произвольной области $U \subseteq \mathbb{C}$ введем пространства Гельдера [8, 29, 6, 19]

$$C^\alpha(U) = \left\{ \varphi(z) \,:\, \|\varphi(z)\|_U^{(\alpha)} = \|\varphi(z)\|_{U_1}^{(\alpha)} + \|\varphi(1/z)\|_{U_2}^{(\alpha)} < \infty \right\}.$$

Аналогично для ограниченной области U стандартным образом введем классы Соболева [30, 6, 19]

$$L_p(U) = \left\{ \varphi(z) \,:\, \|\varphi\|_{p,U} = \left(\int\limits_U |\varphi|^p \, dS \right) 1/p < \infty \right\},$$

$$W_p^1(U) = \{\, \varphi(z) = \varphi(x, y) \in L_p(U) \,:\, \varphi_x, \varphi_y \in L_p(U) \,\},$$

$$\|\varphi\|_{p,U}^{(1)} = \|\varphi\|_{p,U} + \|\varphi_x\|_{p,U} + \|\varphi_y\|_{p,U}$$

и для произвольной $U \subseteq \mathbb{C}$ положим [6]

$$W_p^1(U) = \{\, \varphi(z) \ : \ \varphi(z) \in W_p^1(U_1), \quad \varphi(1/z) \in W_p^1(U_2)\},$$

$$\|\varphi(z)\|_{p,U}^{(1)} = \|\varphi(z)\|_{p,U_1}^{(1)} + \|\varphi(1/z)\|_{p,U_2}^{(1)}.$$

Классы W_p^1 с введенной нормой — банаховы пространства. При этом имеет место компактное вложение $W_p^1(U) \subset C^\alpha(U)$, $\alpha = (p-2)/p$, т. е. если $\varphi(z) \in W_p^1(U)$, то $\varphi(z) \in C^\alpha(U)$ и множество, ограниченное в $W_p^1(U)$, компактно в $C^\alpha(U)$ [30, 6, 19].

Пусть L — дуга. Через $SW_p^1(L)$ будем обозначать класс функций $\varphi(t)$, $t \in L$, имеющих продолжение $\varphi(z) \in W_p^1(\mathbb{C})$. Саму функцию $\varphi(t)$ будем при этом называть *следом* $\varphi(z)$, а класс $SW_p^1(L)$ — соответственно *классом следов*. Отметим, что так как при этом $\varphi(z) \in C^\alpha(\mathbb{C})$, $\alpha > 0$, то $\varphi(z)$ непрерывна и след $\varphi(t)$ мы понимаем в обычном смысле, как значение функции при $t \in L$. Классы следов $SW_p^1(L)$ — банаховы пространства с нормой [30]

$$\|\varphi(t)\|_{p,L}^{(1)} = \inf \|\varphi(z)\|_{p,\mathbb{C}}^{(1)}, \text{ где } \varphi(z) \in W_p^1(\mathbb{C}),$$

$$\varphi(z) = \varphi(t) \text{ при } z = t \in L.$$

Несколько замечаний по поводу обозначения SW_p^1. Вообще говоря, $SW_p^1(L)$ — это класс функций с «дробной» производной [30], поэтому классы SW_p^1 часто называют классами Соболева с дробной производной и обозначают, соответственно, $W_p^{1-1/p}$. Следует, однако, иметь в виду, что такое обозначение может привести к недоразумениям. Так, известно, что если контур L — гладкий, то $SW_p^1(L)$ есть класс функций Бесова $B_p^{1-1/p}(L)$, который не совпадает с классом Соболева $W_p^{1-1/p}(L)$ при $p \neq 2$ [30, с. 380–381]. Во избежание подобных неточностей сохраним за классом следов обозначение книги [19] SW_p^1.

Конечно, классы SW_p^1 задаются не собственно в терминах самой функции $\varphi(t)$ и контура L. Однако, как уже отмечалось, для гладкого контура классы следов есть классы Бесова $B_p^{1-1/p}(L)$, которые задаются уже в «собственных» терминах [30, с. 192–193]. Можно при этом привести и довольно простые достаточные условия, обеспечивающие принадлежность $\varphi(t)$ классу следов. Так, если $\varphi(t) \in C^\alpha(L)$, $\alpha > 1/2$, то $\varphi(t) \in SW_p^1(L)$, $p = p(\alpha) > 2$ [19, с. 267].

Отметим, что для функций $\varphi(t) \in SW_p^1(L)$ продолжение $\varphi(z) \in W_p^1(\mathbb{C})$ можно без ограничения общности считать локальным, отличным от нуля только в окрестности L. Действительно, пусть $L \subset U \subset V$, U, V — открытые множества и функция $\chi(z)$ бесконечно дифференцируема, $\chi(z) \equiv 1$, $z \in U$; $\chi(z) \equiv 0$, $z \overline{\in} V$. Тогда функция $\varphi_0(z) = \varphi(z)\chi(z)$ также будет продолжением $\varphi(t)$ класса $W_p^1(\mathbb{C})$ и при этом $\varphi_0(z) \equiv 0$, $z \overline{\in} V$. Также без ограничения общности для продолжения $\varphi(z)$ всегда можно считать

$$\|\varphi(z)\|_{p,V}^{(1)} \leqslant 2\|\varphi(t)\|_{p,L}^{(1)}.$$

1.2. Эллиптические системы уравнений. Пусть $f(z) = f(x,y) = u + iv$ — комплекснозначная функция на $\mathbb{C}$. Введем операторы дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$$

и, соответственно, будем обозначать

$$f_{\overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}, \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Квазилинейную систему дифференциальных уравнений для вектора (u, v), разрешенную относительно v_x, v_y:

$$\begin{cases} -v_y + a_{11}u_x + a_{12}u_y = h_1, \\ v_x + a_{21}u_x + a_{22}u_y = h_2 \end{cases}$$

можно записать в виде

$$f_{\overline{z}} - \mu_1 f_z - \mu_2 \overline{f}_{\overline{z}} = h,$$

при этом условие эллиптичности системы принимает вид

$$|\mu_1(z)| + |\mu_2(z)| \leqslant \mu_0 < 1.$$

Так, в частности, уравнение $f_{\overline{z}} = 0$ означает выполнение условий Коши — Римана для функции $f(z)$ [19].

Далее будем рассматривать уравнение Бельтрами [6, 19]

$$f_{\overline{z}} - \mu f_z = 0, \quad |\mu(z)| \leqslant \mu_0 < 1. \tag{1.1}$$

Известно локальное представление решений уравнения Бельтрами: $f(z) = \Phi(\xi(z))$, где $\Phi(\xi)$ — аналитическая функция, а $\xi(z)$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1.1) класса W_p^1, $p = p(\mu_0) > 2$ [6, 19].

Гомеоморфизм $\xi(z) \in W_p^1$, являющийся решением уравнения Бельтрами (1.1), назовем *квазиконформным* [19, с. 211]. Соответственно образ гладкой дуги L при квазиконформном гомеоморфизме ξ будем называть *квазиконформной дугой* (*квазиконформным контуром*, если L — гладкий контур). Так как $p > 2$, то квазиконформная дуга непрерывна по Гельдеру с показателем $\alpha = (p-2)/p$, но, вообще говоря, не гладкая и даже не спрямляемая.

Отметим одно важное свойство квазиконформных кривых. Как говорят, квазиконформные дуги стираемы для аналитических функций. Это означает следующее — пусть $L_\xi = \xi(L)$ — квазиконформная дуга,

$t \in L_\xi$, U_t — окрестность точки t, тогда L_ξ разбивает U_t на две части, которые будем обозначать U_t^+ и U_t^-. Пусть в $U^\pm{}_t$ заданы аналитические функции $\Phi^\pm(z)$, непрерывные в $\overline{U}^\pm{}_t = U^\pm{}_t \cup L_t$ соответственно, $L_t = L_\xi \cap U_t$, причем $\Phi^+(s) = \Phi^-(s)$, $s \in L_t$. Тогда функция

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & z \in \overline{U_t^+} \\ \Phi^-(z), & z \in \overline{U_t^-} \end{cases}$$

аналитична в U_t [6, 19].

Рассмотрим изменение классов W_p^1, SW_p^1 при квазиконформной замене переменной.

Теорема 1.1. *Пусть U, U_0 — ограниченные области в $\mathbb{C}$, $\xi : U_0 \to U$ — квазиконформный гомеоморфизм, $\xi(z) \in W_p^1(U_0)$, $p > 2$.*

Тогда:

1. *Если $\varphi(z) \in W_q^1(U)$, $q > 2$, то $\varphi(\xi(z))) \in W_r^1(U_0)$, $r = \dfrac{pq}{p+q-2} > 2$.*
2. *Если дуга $L_0 \subset U_0$, $L = \xi(L_0)$ и $\varphi(t) \in SW_q^1(L)$, $q > 2$, то $\varphi(\xi(t)) \in SW_r^1(L_0)$, $r = \dfrac{pq}{p+q-2} > 2$.*

Доказательство. Пусть $g(z) = \varphi(\xi(z))$. Для доказательства первого утверждения теоремы достаточно показать, что

$$g_z = \varphi_\xi \xi_z + \varphi_{\overline{\xi}} \overline{\xi}_z \in L_r(U_0), \quad g_{\overline{z}} = \varphi_\xi \xi_{\overline{z}} + \varphi_{\overline{\xi}} \overline{\xi}_{\overline{z}} \in L_r(U_0), \tag{1.2}$$

[19, с. 218]. Обозначим J_z — якобиан преобразования $z \to \xi(z)$, $z \in U_0$; J_ξ — якобиан обратного преобразования $\xi \to z(\xi)$, $\xi \in U$. Тогда $J_\xi J_z = 1$ и $|J_z| \geqslant (1-\mu_0^2)|\xi_z|^2$ [19, с. 210, 219]. Для произведения $\varphi_\xi \xi_z$ имеем цепочку неравенств

$$\int\limits_{U_0} |\varphi_\xi(z)\xi_z(z)|^r \, dS_z = \int\limits_U |\varphi_\xi(\xi)|^r |\xi_z(z(\xi))|^r |J_\xi| dS_\xi \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi_\xi\|_{q,U}^r \left(\int\limits_U |\xi_z(z(\xi))|^{\frac{rq}{q-r}} |J_\xi|^{\frac{q}{q-r}} \, dS_\xi \right)^{\frac{q-r}{q}} =$$

$$= \|\varphi_\xi\|_{q,U}^r \left(\int\limits_{U_0} |\xi_z(z)|^{\frac{rq}{q-r}} |J_\xi|^{\frac{q}{q-r}} |J_z| dS_z \right)^{\frac{q-r}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi_\xi\|_{q,U}^r \left(\int\limits_{U_0} |\xi_z(z)|^{\frac{rq}{q-r}} |J_z|^{1-\frac{q}{q-r}} \, dS_z \right)^{\frac{q-r}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant M(\mu_0)\|\varphi_\xi\|^r_{q,U}\left(\int\limits_{U_0}|\xi_z(z)|^{\frac{rq-2r}{q-r}}\,dS_z\right)^{\frac{q-r}{q}} \leqslant M(\mu_0)\|\varphi_\xi\|^r_{q,U}\|\xi_z\|_{p,U_0}^{\frac{p(q-r)}{q}}$$

и аналогичное неравенство для $\varphi_{\overline{\xi}}\overline{\xi}_z$, откуда легко следуют утверждения (1.2).

Второе утверждение теоремы очевидно следует из первого. Теорема доказана.

В следующих двух пунктах рассмотрим интегральные операторы, дающие основной математический аппарат для решения краевых задач.

1.3. Интеграл типа Коши имеет вид

$$S(\varphi|z) = \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt, \quad z\overline{\in}L, \tag{1.3}$$

где L — гладкий контур, $\varphi(t)\in C^\alpha(L)$.

По теореме Жордана L разбивает $\overline{\mathbb{C}}$ на две части D^+ и D^-. Пусть $\infty\in D^-$. Без ограничения общности будем считать, что ориентация L индуцирована с D^+ и, соответственно, положим $\Phi^\pm(z)=\Phi(z)$ при $z\in\in D^\pm$. Как известно [8, с. 33–52], $\Phi^\pm(z)$ — аналитичны в $D^\pm$, имеют предельные значения вплоть до L

$$\Phi^\pm(t) = \lim_{z\to t}\Phi^\pm(z), \quad t\in L, \quad z\in D^\pm,$$

причем

$$\|\Phi^\pm(z)\|^{(\alpha)}_{D^\pm}\leqslant M\|\varphi(t)\|^{(\alpha)}_L, \quad \|\Phi^\pm(t)\|^{(\alpha)}_L\leqslant M\|\varphi(t)\|^{(\alpha)}_L,$$

$$M = M(L,\alpha) = \mathrm{const}\,.$$

Введем сингулярный интеграл

$$S(\varphi|t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(s)}{s-t}\,ds, \quad t\in L. \tag{1.4}$$

Интеграл (1.4) существует в смысле главного значения по Коши и справедливы формулы Сохоцкого [8, с. 37]

$$\Phi^\pm(t) = S^\pm(\varphi|t) = \frac{1}{2}\,S(\varphi|t)\pm\frac{\varphi(t)}{2}, \quad t\in L. \tag{1.5}$$

Из (1.5) и (1.3), в частности, следует, что

$$S(\varphi|t)\in C^\alpha(L), \quad \|S(\varphi|t)\|^{(\alpha)}_L\leqslant M\|\varphi(t)\|^{(\alpha)}_L;$$

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t), \quad t\in L; \quad |\Phi^-(z)| = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \text{ при } |z|\to\infty. \tag{1.6}$$

Функции, удовлетворяющие условиям (1.6), будем называть *решением задачи о скачке* [8]. Отметим, что решение задачи о скачке определяется однозначно. Действительно, если $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$, $t \in L$, то $\Phi(z) = \Phi^{\pm}(z)$, $z \in D^{\pm}$ — целая функция и условие $\Phi(z) \to 0$ при $z \to \infty$ влечет $\Phi(z) = \Phi^{\pm}(z) \equiv 0$.

Подробные сведения об интегралах типа Коши можно найти в монографиях [8, 29, 6, 19, 18].

1.4. Потенциальный интеграл по области. Пусть U — ограниченная область в $\mathbb{C}$, $\varphi(z) \in L_p(U)$. Введем интегральный оператор

$$T\varphi = T(\varphi|z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_U \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dS_t. \tag{1.7}$$

Как известно [6], [19, с. 198–199] интеграл (1.7) сходится,

$$T(\varphi|z) \in W_p^1(\mathbb{C}), \quad \|T(\varphi|z)\|_{p,\mathbb{C}}^{(1)} \leqslant M\|\varphi\|_{p,U},$$

т. е. оператор T действует из $L_p(U)$ в $W_p^1(\mathbb{C})$, $T : L_p \to W_p^1$;
$|T(\varphi|z)| = O(1/|z|)$ при $|z| \to \infty$ и

$$\frac{\partial T(\varphi|z)}{\partial \overline{z}} = \begin{cases} \varphi(z), & z \in U \\ 0, & z \overline{\in} U \end{cases}$$

(теорема Помпею) [6], [19, с. 200].

Рассмотрим задачу о скачке для квазиконформного контура L. Так как L, вообще говоря, не спрямляем, то определить интеграл типа Коши (1.3) невозможно. Пусть $\varphi(t) \in SW_p^1(L)$, $p > 2$. Возьмем продолжение $\varphi(z) \in W_p^1(\mathbb{C})$ и пусть

$$S^{\pm}(f\mid z) = \Phi^{\pm}(z) = \begin{cases} \varphi(z) - T(\varphi_{\overline{z}}|z), & z \in \overline{D}^{+} = D^+ \cup L, \\ -T(\varphi_{\overline{z}}|z), & z \in \overline{D}^{-} = D^- \cup L, \end{cases} \tag{1.8}$$

где

$$T(\varphi|z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{D^+} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dS_t.$$

Тогда:

$\Phi^{\pm}(z) \in W_p^1(D^{\pm}) \subset C^{\alpha}(\overline{D}^{\pm})$, $\alpha = (p-2)/p$;

$\Phi^{\pm}{}_{\overline{z}} \equiv 0$, $z \overline{\in} L$;

так как $T(\varphi|z)$ — непрерывна на L, то

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) - T(\varphi|t) + T(\varphi|t) = \varphi(t), \quad t \in L;$$

$|\Phi^-(z)| = O(1/|z|)$ при $|z| \to \infty$.

Итак, $\Phi^{\pm}(z)$ вида (1.8) — решение задачи о скачке (1.6) для квазиконформного контура L.

Единственность решения задачи о скачке доказывается аналогично предыдущему пункту и следует из того, что L — стираем для аналитических функций. Отсюда, в частности, $\Phi^{\pm}(z)$ не зависит от продолжения $\varphi(z) \in W_p^1$, а только от самой $\varphi(t)$. Если контур L — гладкий, то $S^{\pm}(f \mid z)$ — интеграл типа Коши (1.3). Поэтому для функций вида (1.8) мы вводим то же обозначение $S^{\pm}$, что и для интеграла типа Коши (1.3). Соответственно будем обозначать $S\varphi = S(\varphi|t) = S^+(\varphi|t) + S^-\varphi|t)$.

Теорема 1.2. *Операторы $S^{\pm}$, S ограничены в пространствах следов*

$$S^{\pm}(\varphi|z) : SW_p^1(L) \to W_p^1(D^{\pm}),$$

$$S^{\pm}(\varphi|t), S(\varphi|t) : SW_p^1(L) \to SW_p^1(L).$$

Доказательство. Выберем продолжение $\varphi(z) \in W_p^1(\mathbb{C})$ так, чтобы

$$M_0 = \|\varphi(t)\|_{p,L}^{(1)} \leqslant \|\varphi(z)\|_{p,\mathbb{C}}^{(1)} \leqslant 2\|\varphi(t)\|_{p,L}^{(1)} = 2M_0.$$

Тогда

$$\|\varphi_{\overline{z}}\|_{p,D^+} \leqslant M\, M_0, \quad \|T\varphi_{\overline{z}}\|_{p,\mathbb{C}}^{(1)} \leqslant M\, M_0,$$

$$\|\Phi^+(z)\|_{p,D^+}^{(1)} \leqslant \|\varphi(z)\|_{p,D^+}^{(1)} + \|T\varphi_{\overline{z}}\|_{p,D^+}^{(1)} \leqslant M\, M_0,$$

$$\|\Phi^-(z)\|_{p,D^-}^{(1)} = \|T\varphi_{\overline{z}}\|_{p,D^-}^{(1)} \leqslant M\, M_0,$$

т. е. $S^{\pm}(\varphi|z) : SW_p^1(L) \to W_p^1(D^{\pm})$.

Далее, так как $S^{\pm}(\varphi|t)$ — следы $S^{\pm}(\varphi|z) \in W_p^1(\mathbb{C})$ на L, то $S^{\pm}(\varphi|t) \in \in SW_p^1(L)$, причем

$$\|S^{\pm}(\varphi|t)\|_{p,L}^{(1)} \leqslant \|S^{\pm}(\varphi|z)\|_{p,\mathbb{C}}^{(1)} \leqslant M\, M_0,$$

т. е. $S^{\pm}(\varphi|t) : SW_p^1(L) \to SW_p^1(L)$. Отсюда, очевидно, $S = S^+ + + S^- : SW_P^1(L) \to SW_p^1(L)$. Теорема доказана.

1.5. Задача Римана (задача линейного сопряжения). Пусть L — гладкий контур. *Задача сопряжения* аналитических функций (задача Римана) состоит в нахождении аналитических в $D^{\pm}$ и ограниченных в $\overline{D}^{\pm}$ функций $\Phi^{\pm}(z)$, граничные значения которых $\Phi^{\pm}(t)$, $t \in L$, связаны краевым условием

$$\Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = g(t), \quad t \in L, \tag{1.9}$$

$G(t), g(t) \in C^{\alpha}(L)$; $G(t) \neq 0, t \in L$.

Исследование этой задачи основывается на решении задачи факторизации

$$G(t) = X^+(t)/X^-(t), \quad t \in L, \tag{1.10}$$

где $X^{\pm}(t) \in C^{\alpha}(L)$, $X^{\pm}(t) \neq 0$ — граничные значения мероморфных в $D^{\pm}$ функций $X^{\pm}(z)$.

Введем *индекс Коши* функции $G(t)$:

$$\varkappa = \operatorname{ind} G(t)\Big|_L = \frac{1}{2\pi}\,\Delta \arg G(t)\Big|_L.$$

Очевидно, $\varkappa$ — целое число ($\varkappa \in \mathbb{Z}$ — множеству целых чисел). Выберем произвольно и зафиксируем точки $z_1 \in D^+$, $z_0 \in D^-$ и пусть

$$\psi_0(t) = (t - z_1)/(t - z_0), \quad t \in L; \qquad \psi_0(z) = (z - z_1)/(z - z_0).$$

Очевидно, $\psi_0(t) \in C^{\alpha}(L)$, $\psi_0(t) \neq 0$ и $\operatorname{ind}\psi_0\big|_L = 1$.
Тогда $\operatorname{ind} G(t)\psi_0^{-\varkappa}(t)\big|_L = 0$. Следовательно, $h(t) = \ln\left(G(t)\psi_0^{-\varkappa}(t)\right)$ — однозначная функция на L, $h(t) \in C^{\alpha}(L)$. Пусть

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln\left(G(t)\psi_0^{-\varkappa}(t)\right)}{t - z}\,dt = S(\ln(G\psi_0^{-\varkappa})|z);$$

тогда

$$\chi^+(t) - \chi^-(t) = \ln G(t) - \varkappa \ln \psi_0(t)$$

и решение задачи факторизации (1.10) можно построить в виде

$$X_0^{\pm}(z) = \begin{cases} \exp\{\chi(z)\}, & z \in \overline{D}^+, \\ \psi_0^{-\varkappa}(z)\exp\{\chi(z)\}, & z \in \overline{D}^-. \end{cases}$$

В общем случае решение задачи факторизации (1.10) можно умножить на любую непрерывную на L функцию. Будем использовать решения (1.10) вида

$$X^{\pm}(z) = F(z)X_0^{\pm}(z) = \begin{cases} F(z)\exp\{\chi(z)\}, & z \in \overline{D}^+, \\ F(z)\psi_0^{-\varkappa}(z)\exp\{\chi(z)\}, & z \in \overline{D}^-. \end{cases} \tag{1.11}$$

где

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{P(z)}{(z - z_0)^{\varkappa}}, & \varkappa \geqslant 0, \\[2ex] \dfrac{(z - z_0)^{\varkappa}}{P(z)}, & \varkappa < 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

$P(z)$ — многочлен, не имеющий нулей на L, $\deg P = |\varkappa|$. В случае $\varkappa < 0$ пусть $P(z_0) = 0$, т. е. $X^-(z)$ — имеет полюс в точке z_0. Очевидно,

$$X^{\pm}(t) \in C^{\alpha}(L), \quad (X^{\pm}(t))^{-1} \in C^{\alpha}(L).$$

При $\varkappa \geqslant 0$ $X^{\pm}(z)$ — ограничены в $\overline{D}^{\pm}$, $X^{\pm}(z) \in C^{\alpha}(\overline{D}^{\pm})$ и любое ограниченное (т. е. не имеющее полюсов) решение задачи факторизации (1.10) имеет вид (1.11), (1.12), где $P(z)$ — некоторый многочлен.

Но задача факторизации (1.10) эквивалентна задаче (1.9) при $g(t) \equiv 0$ (*однородной* задаче Римана). Отсюда следует, что при $\varkappa \geqslant 0$ число l ограниченных решений однородной задачи (1.9) или, что то же самое, число l линейно независимых решений задачи (1.9) связано с индексом формулой $l = \varkappa + 1$.

В случае $\varkappa < 0$ любое нетривиальное (отличное от тождественного нуля) решение задачи факторизации обязательно имеет хотя бы один полюс, т. е. ограниченных нетривиальных решений однородной задачи не существует, $l = 0$.

Отметим непрерывную зависимость решения (1.11) $X^{\pm}(z)$ от $G(t)$. Если последовательность $G_m(t) \to G_0(t)$ в $C^{\alpha}(L)$, т. е. $\|G_m(t) - G_0(t)\|_L^{(\alpha)} \to 0$, $m \to \infty$, то для $\chi^{\pm}(z)$ имеем [8, 29, 6, 19]

$$\|\chi^{\pm}{}_m(z) - \chi^{\pm}{}_0(z)\|_{D^{\pm}}^{(\alpha)} \to 0,$$

откуда

$$\|X_m^{\pm}(t) - X_0^{\pm}(t)\|_L^{(\alpha)} + \|(X_m^{\pm}(t))^{-1} - (X_0^{\pm}(t))^{-1}\|_L^{(\alpha)} \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

1.6. Построение решения. Пусть $\varphi(t) \in C^{\alpha}(L)$. Положим

$$S_0(\varphi|z) = S(\varphi|z) - S(\varphi|z_0),$$

т. е.

$$S_0(\varphi|z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-z_0}\,dt.$$

Введем функции

$$\Phi^{\pm}(z) = X^{\pm}(z) S_0^{\pm}\Bigl(\frac{g}{X^+}\Bigm| z\Bigr). \tag{1.13}$$

Из формул Сохоцкого следует, что $\Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = g(t)$, $t \in L$, причем $\Phi^{\pm}(t) \in C^{\alpha}(L)$ и при $\varkappa \geqslant 0$ $\Phi^{\pm}(z)$ — аналитичны в $D^{\pm}$, $\Phi^{\pm}(z) \in C^{\alpha}(\overline{D}^{\pm})$. Таким образом, при $\varkappa \geqslant 0$ задача (1.9) всегда имеет ограниченное решение (*безусловно разрешима*), т. е. число условий разрешимости $l^* = 0$.

При $\varkappa < 0$ пусть многочлен $P(z)$, входящий в определение $F(z)$ в (1.12), имеет только однократные нули. Тогда, с учетом равенства $S_0(\varphi|z_0) = 0$, функции $\Phi^{\pm}(z)$ в форме (1.13) будут ограниченными при выполнении $(|\varkappa| - 1)$ соотношений

$$S_0\Bigl(\frac{g}{X^+}\Bigm| z_k\Bigr) = 0, \quad k = \overline{1, |\varkappa| - 1}, \tag{1.14}$$

где $P(z_k) = 0$, $z_k \neq z_0$.

Условия (1.14) необходимы и достаточны для существования ограниченного решения задачи (1.9) при $\varkappa < 0$ и представляют собой *условия разрешимости* задачи (1.9). Таким образом, число условий разрешимости $l^* = |\varkappa| - 1$ (в частности, $l^* = 0$ при $\varkappa = -1$).

Разность $\varkappa_0 = l - l^*$ будем называть *индексом* краевой задачи. Итак,

$$l = \begin{Bmatrix} \varkappa + 1, & \varkappa \geqslant 0 \\ 0, & \varkappa < 0 \end{Bmatrix}; \quad l^* = \begin{Bmatrix} 0, & \varkappa \geqslant 0 \\ |\varkappa| - 1, & \varkappa < 0 \end{Bmatrix}$$

и во всех случаях индекс краевой задачи $\varkappa_0 = \varkappa + 1$.

При $l > 0$ для выделения единственного решения задачи (1.9) обычно на решение $\Phi^{\pm}(z)$ накладывают дополнительные условия $\Phi^{\pm}(p_j) = 0$, $j = \overline{1, l}$, $p_j \overline{\in} L$ (среди p_j может быть и ∞). При $l^* > 0$ можно спроектировать правую часть $g(t)$ на *образ оператора* краевой задачи

$$J = \left\{ g(t) = \Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t),\ \Phi^{\pm}(z) \text{ аналитичны в } D^{\pm} \right\}$$

(l^* — это коразмерность J в $C^\alpha(L)$). Тогда корректная постановка задачи (1.9) заключается в нахождении функций $\Phi^{\pm}(z)$ и набора коэффициентов c_k, $k = \overline{1, l^*}$, подчиненных условиям

$$\begin{cases} \Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = g(t) - \sum\limits_{k=1}^{l^*} c_k \psi_k(t), & t \in L, \\ \Phi^{\pm}(p_j) = 0, & j = \overline{1, l}, \end{cases} \tag{A}$$

где, как правило, полагают $\psi_k = 1/(t - q_k)$, $q_k \in D^+$.

Ограниченное решение задачи (A) существует, единственно и представляется *оператором Коши*

$$\begin{cases} \Phi^{\pm}(z) = X^{\pm}(z) S_0^{\pm}\left(\dfrac{g(t)}{X^+(t)} \,\Big|\, z \right), & z \in D^{\pm}, \\ c_k = S_0\left(\dfrac{g}{X^+} \Big| q_k \right), & k = \overline{1, l^*}, \end{cases} \tag{B}$$

где

$$p_j,\ j = \overline{1, l} \text{ — нули } P(z) \text{ при } \varkappa \geqslant 0\ (l = \varkappa + 1,\ l^* = 0);$$

$$q_k,\ k = \overline{1, l^*} \text{ — нули } P(z) \text{ (кроме } z_0) \text{ при } \varkappa < 0\ (l = 0,\ l^* = |\varkappa| - 1).$$

Обратимся к непрерывной зависимости решения задачи (1.9) от начальных данных (*устойчивости* решения). Если для последовательности исходных данных задачи (A) $g_m(t)$, $G_m(t)$, $\{p_j^m,\ j = \overline{1, l}\}$, $\{q_k^m,\ k = \overline{1, l^*}\}$, $m = \overline{0, \infty}$, имеем

$$\|g_m(t) - g_0(t)\|_L^{(\alpha)} + \|G_m(t) - G_0(t)\|_L^{(\alpha)} + \sup_{1 \leqslant j \leqslant l} |p_j^m - p_j^0| + \\ + \sup_{1 \leqslant k \leqslant l^*} |q_k^m - q_k^0| \to 0,$$

$m \to \infty$, то для решений задачи (A) $\{\Phi^{\pm}_m(z);\ c^m_k,\ k = \overline{1, l^*}\}$, $m = \overline{0, \infty}$, получим

$$\|\Phi^{\pm}_m(z) - \Phi^{\pm}_0(z)\|^{(\alpha)}_{D^{\pm}} + \sup_{1 \leqslant k \leqslant l^*} |c^m_k - c^0_k| \to 0, \quad m \to \infty,$$

т. е. решение $\{\Phi^{\pm}_m(z);\ c_k,\ k = \overline{1, l^*}\}$ устойчиво в $C^{\alpha}(\overline{D}^{\pm}) \times \mathbb{C}^{l^*}$ как функционал над $\{g(t),\ G(t),\ \{p_j,\ j = \overline{1, l}\},\ \{q_k,\ k = \overline{1, l^*}\}\}$.

Подробнее о задачах линейного сопряжения на плоскости см. монографии [8, 29, 6, 19, 18].

1.7. Задача Римана для квазиконформного контура. На квазиконформном контуре не определен интеграл типа Коши (1.3). Однако в этом случае можно построить решение задачи линейного сопряжения полностью аналогично случаю гладкого контура, заменив интеграл типа Коши на интегральный оператор (1.8).

Лемма 1.1.

1. *Пусть* $\chi(z) \in W^1_p(U)$. *Тогда* $exp(\chi(z)) \in W^1_p(U)$.
2. *Пусть* $G(z) \in W^1_p(U)$, $G(z) \neq 0$ *и индекс* $G(z)$ *по любой замкнутой кривой в* U *равен нулю. Тогда* $\ln G(z) \in W^1_p(U)$.
3. *Пусть* $G(t) \in SW^1_p(L)$, $G(t) \neq 0$ *и индекс* $G(t)$ *по* L *равен нулю. Тогда* $\ln G(t) \in SW^1_p(L)$.

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидно. Для доказательства второго утверждения заметим, что так как $G(z) \neq 0$ и непрерывна в U, то $|G(z)| \geqslant M > 0$. Далее, если индекс $G(z)$ по любой замкнутой кривой в U равен нулю, то однозначно (с точностью до константы) определен $\ln G(z)$, причем

$$\frac{\partial \ln G(z)}{\partial \overline{z}} = \frac{G_{\overline{z}}}{G(z)}, \qquad \frac{\partial \ln G(z)}{\partial z} = \frac{G_z}{G(z)},$$

откуда, очевидно, следует второе утверждение. Третье утверждение леммы легко следует из второго. Лемма доказана.

Теперь пусть L — квазиконформный контур, $g(t), G(t) \in SW^1_p(L)$, $G(t) \neq 0$. В этом случае для построения решения задачи линейного сопряжения (1.9) следует полностью повторить рассуждения двух предыдущих пунктов, понимая под операторами $S^{\pm}$ операторы вида (1.8) (см. п. пункт.4).

1.8. Устойчивость решения задачи Римана для квазиконформного контура. Классические теоремы об устойчивости решения краевой задачи линейного сопряжения для гладкого контура (п. пункт.6.) основываются на ограниченности интеграла типа Коши (1.3) $S^{\pm}$ в пространствах C^{α} [8, 29, 6, 19]. Для квазиконформного контура мы используем вместо интеграла типа Коши интегральный оператор по области (1.8), поэтому требуется уточнить теорему устойчивости. Вначале докажем основную теорему об устойчивости решения задачи о скачке (1.6) в том виде, как она нам понадобиться в дальнейшем. Итак, пусть L — гладкий контур, U — окрестность L, имеется:

(i) последовательность гомеоморфизмов $\xi_k : U \to U_0$, $\xi_k \in W_p^1(U)$, $k = \overline{0, \infty}$; $\xi_k \to \xi_0$ в $W_p^1(U)$ при $k \to \infty$;

(ii) последовательность $\varphi_k(t) \in SW_q^1(L)$, $q > 2$, $k = \overline{0, \infty}$; $\varphi_k \to \varphi_0$ в $SW_q^1(L)$ при $k \to \infty$.

Теорема 1.3. *Пусть $L_k = \xi_k(L)$, $\Phi^\pm{}_k(z)$ — решения задачи о скачке*

$$\Phi_k^+(\xi) - \Phi_k^-(\xi) = \varphi_k(t_k(\xi)), \quad \xi \in L_k,$$

где $t_k : L_k \to L$ — гомеоморфизмы, обратные к $\xi_k : L \to L_k$.

Тогда при выполнении условий (i), (ii) *имеем $\Phi^\pm{}_k(\xi_k(z)) \to \Phi^\pm{}_0(\xi_0(z))$, $k \to \infty$ в $W_r^1(D^\pm) \cap C^\alpha(\overline{D}^\pm)$ $\forall\, r, \alpha$:*

$$2 < r < \frac{p^2 q}{(p-2)^2 + 2q(p-1)}, \quad \alpha = \frac{r-2}{r}.$$

Доказательство. Обозначим $\zeta_k : U_0 \to U$ — гомеоморфизмы, обратные к ξ_k; $\varphi_k(z) \in W_p^1(U)$ — локальные продолжения $\varphi_k(t)$. Из условий (i), (ii) следует, что $\zeta_k(z) \to \zeta_0(z)$ в $W_p^1(U_0)$; $\varphi_k(z) \to \varphi_0(z)$ в $W_q^1(U)$. Тогда в силу теоремы 1.1 $\psi_k(z) = \varphi_k(\zeta_k(z)) \in W_{s_0}^1(U_0)$, $s_0 = \dfrac{pq}{p+q-2} > 2$, аналогично доказательству теоремы 1.1 легко показать, что $\psi_k(z) \to \psi_0(z)$ в $W_{s_0}^1(U_0)$.

Пусть, далее, $D^\pm$ — области, на которые разбивает плоскость гладкий контур L, $\chi(z)$ — характеристическая функция $\overline{D}^+$:

$$\chi(z) = \begin{cases} 1, & z \in \overline{D}^+, \\ 0, & z \in D^-. \end{cases}$$

Тогда $\chi_k(z) = \chi(\zeta_k(z))$ — характеристические функции областей $\overline{D}_k^+$ ($D_k^+ \cup L_k \cup D_k^- = \overline{\mathbb{C}}$). В силу (1.8) имеем

$$\Phi_k(z) = \psi_k(z)\chi_k(z) - T(\chi_k(\psi_k)_{\overline{z}}|z) = \psi_k(z)\chi_k(z) - T_k(z),$$

откуда

$$\Phi_k(\xi_k(z)) = \varphi_k(z)\chi(z) - T(\chi_k(\psi_k)_{\overline{z}}|\xi_k(z)) = \varphi_k(z)\chi(z) - T_k(\xi_k(z)). \tag{1.15}$$

Покажем, что $\chi_k(\psi_k)_{\overline{z}} \to \chi_0(\psi_0)_{\overline{z}}$ в $L_s(U_0)$, $\forall\, s < s_0$. Действительно, из $\zeta_k \to \zeta_0$ в $W_p^1(U_0)$ следует, что $\zeta_k \to \zeta_0$ в $C^\alpha(U_0)$, откуда

$$\|\chi_k(z) - \chi_0(z)\|_{d,U_0} \to 0, \quad \forall\, d \geqslant 1,$$

а тогда

$$\|\chi_k(\psi_k)_{\overline{z}} - \chi_0(\psi_0)_{\overline{z}}\|_{s,U_0} \leqslant \|\chi_k((\psi_k)_{\overline{z}} - (\psi_0)_{\overline{z}})\|_{s,U_0} + \\ + \|(\psi_0)_{\overline{z}}(\chi_k - \chi_0)\|_{s,U_0} \leqslant M\|(\psi_k)_{\overline{z}} - (\psi_0)_{\overline{z}}\|_{r,U_0} + \\ + \|(\psi_0)_{\overline{z}}\|_{r,U_0}\|\chi_k - \chi_0\|^{1/s}_{d_0,U_0} \to 0, \quad d_0 = \frac{p}{p-s}.$$

Так как оператор T ограничен $T : L_s \to W^1_s$, то из $\chi_k(\psi_k)_{\overline{z}} \to$ $\to \chi_0(\psi_0)_{\overline{z}}$ в $L_s(U_0)$ следует, что $T_k(z) \to T_0(z)$ в $W^1_s(U_0)$. Тогда, аналогично доказательству теоремы 1.1, получим, что $T_k(\xi_k(z)) \to T_0(\xi_0(z))$ в $W^1_r(\mathbb{C})$, $2 < r < r_0 = \dfrac{s_0 p}{p + s_0 - 2} = \dfrac{p^2 q}{(p-2)^2 + 2q(p-1)}$. Окончательно из формулы (1.15) с учетом условия (ii) получим $\Phi_k(\xi_k(z)) \to \Phi_0(\xi_0(z))$ в $W^1_r(D^\pm)$, а, следовательно, и в $C^\alpha(\overline{D}^\pm)$, $\alpha = \dfrac{r-2}{r}$. Теорема доказана.

Теперь сформулируем общую теорему об устойчивости решения задачи линейного сопряжения.

Теорема 1.4. *Пусть $L_k = \xi_k(L)$, $\xi_k \to \xi_0$ в $W^1_p(U)$, $p > 2$ при $k \to$ $\to \infty$; $g_k(t), G_k(t) \in SW^1_q(L)$, $q > 2$, $G_k(t) \neq 0$ и $g_k \to g_0(t)$, $G_k(t) \to$ $\to G_0(t)$ в $SW^1_q(L)$ при $k \to \infty$. Рассмотрим задачи (A):*

$$\begin{cases} \Phi^+_k(t) - G_k(t)\Phi^-_k(t) = g_k(t) - \sum\limits_{d=1}^{l^*} c^k_d \psi^k_d(t), & t \in L_k, \\ \Phi^\pm_k(p^k_j) = 0, & j = \overline{1,l}, \end{cases} \tag{1.16}$$

где $\psi^k_d(t) = 1/(t - q^k_d)$, $p^k_j \to p^0_j$, $q^k_d \to q^0_d$ при $k \to \infty$, $j = \overline{1,l}$, $d = \overline{1,l^*}$; $l = \max(0, \varkappa - 1)$, $l^* = l - \varkappa - 1$, $\varkappa = \operatorname{ind} G_0(t)$.

Тогда при $k \to \infty$ $c^k_d \to c^0_d$, $d = \overline{1,l^*}$; $\Phi^\pm_k(\xi_k(z)) \to \Phi^\pm_0(\xi_0(z))$ в $W^1_r(D^\pm) \cap C^\alpha(\overline{D}^\pm)$, $2 < r < \dfrac{p^2 q}{(p-2)^2 + 2q(p-1)}$, $\quad \alpha = \dfrac{r-2}{r}$.

Заметим, что так как $G_k(t) \to G_0(t)$ в $SW^1_q(L)$, то $G_k(t) \to G_0(t)$ в $C^\alpha(L)$, $\alpha > 0$, откуда $\operatorname{ind} G_k(t) = \varkappa = \mathrm{const}$, $k = \overline{0,\infty}$, т. е. задачи (1.16) корректны. Утверждение теоремы легко следует из представления решения (1.16) интегральным оператором Коши (1.11), (1.12), (B) и теоремы 1.3 об устойчивости решения задачи о скачке.

1.9. Решение задачи сопряжения для квазилинейных систем уравнений. Рассмотрим задачу определения функции $w(z)$ по следующим условиям:

$$\begin{cases} w_{\overline{z}} - \mu(z,w)w_z = 0, \quad z\overline{\in}L; \quad |\mu(z,w)| \leqslant \mu_0 < 1; \\ w^+(t) - G(t)w^-(t) = g(t), \quad t \in L. \end{cases} \tag{1.17}$$

Теорема 1.5. *Пусть $\mu(z,w)$ непрерывна по w при почти всех z; L — квазиконформный контур; $g(t), G(t) \in SW^1_q(L)$, $q > 2$, $G(t) \neq 0$. Тогда:*

при $\varkappa \geqslant 0$ *существует решение задачи* (1.17), $w^{\pm}(z) \in W^1_r(D^{\pm})$, $r = r(q, \mu_0) > 2$, *удовлетворяющее дополнительным условиям* $w(p_j) = 0$, $j = \overline{1, \varkappa + 1}$, $p_j \overline{\in} L$;

при $\varkappa < 0$ *решение* (1.17) $w^{\pm}(z) \in W^1_r(D^{\pm})$ *существует при выполнении* $|\varkappa| - 1$ *условий разрешимости.*

Идея построения решения. Задавшись функцией $m(z)$, $|m(z)| \leqslant \mu_0$ стандартным образом построим гомеоморфное решение уравнения Бельтрами

$$\xi_{\overline{z}} - m(z)\xi_z = 0,$$

причем соответствие $m \to \xi$ непрерывно $L_p \to W^1_p$ и вполне непрерывно $L_p \to C^{\alpha}$. Далее, в плоскости отображения ξ на квазиконформном контуре $L_0 = \xi(L)$ построим аналитическое решение задачи Римана (1.9)

$$\Phi^+(t) - G_0(t)\Phi^-(t) = g_0(t), \quad t \in L_0,$$

$$G_0(t) = G(\xi^{-1}(t)), \quad g_0(t) = g(\xi^{-1}(t)),$$

причем при $\varkappa \geqslant 0$ на $\Phi^{\pm}(z)$ наложим дополнительные условия $\Phi^{\pm}(\xi^{-1}(p_j)) = 0$, а при $\varkappa < 0$ потребуем выполнения условий разрешимости вида (1.14). Возвращаясь к исходным переменным, получим $w(z) = \Phi(\xi(z))$ и коэффициент в уравнении Бельтрами $\mu(z, w(z)) = \mu(m|z)$. Искомое решение задачи (1.17) соответствует неподвижной точке отображения $m(z) \to \mu(m|z)$.

Из свойств гомеоморфизма ξ и устойчивости решения задачи Римана (теорема 1.4) следует, что это отображение $m(z) \to \mu(m|z)$ удовлетворяет условиям принципа Шаудера, что и завершает построение решения (1.17) [19, с. 294–295].

В настоящей книге будет подробно проделано аналогичное построение для краевой задачи на римановой поверхности.

1.10. Об устойчивости решений краевых задач. Отметим, что пользуясь устойчивостью краевых задач, можно изучать различные случаи «вырождения» коэффициентов $G(t)$, например, их разрывность, обращение в нуль и т. д. При этом вместо $G(t)$ вводим «регуляризованную» функцию $G_{\varepsilon}(t) \in C^{\alpha}(L)$, $G_{\varepsilon}(t) \neq 0$ так, чтобы $G_{\varepsilon}(t) \to$ $\to G(t)$, $\varepsilon \to 0$ и $\operatorname{ind} G_{\varepsilon}(t) = \varkappa = \mathrm{const}$. Найдя для $G_{\varepsilon}(t)$ решение краевой задачи $\Phi^{\pm}_{\varepsilon}(z)$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим «предельный» класс решений задачи $\Phi^{\pm}(z)$ или «предельный» класс правых частей $g(t)$, для которых существует $\lim \Phi^{\pm}_{\varepsilon}(z) = \Phi^{\pm}(z)$, причем число $\varkappa_0 = \varkappa + 1$ естественно назвать *индексом* краевой задачи в этих предельных классах. При этом, если функция $G(t)$ вырождается локально, в окрестности изолированных множеств $V_j \subset L$ (скажем, в изолированных точках $t_j \in L$, $j = \overline{1, n}$), то проблема перехода к пределу также принимает локальный характер. Поясним сказанное на примерах.

1.11. Регуляризация задачи сопряжения с разрывными коэффициентами (простейший случай). Пусть для простоты

$L = \{|z| = 1\}$, $G(t) \in C^\alpha(|t+1| > 0)$ и $G(-1+0) \neq G(-1-0)$, $G(-1 \pm 0) = \lim\limits_{t \to -1\pm} G(t)$ — пределы «справа» и «слева» в точке $t = -1$ (см. рис. 1, стрелка показывает изменение $G(t)$ при движении t в положительном направлении).

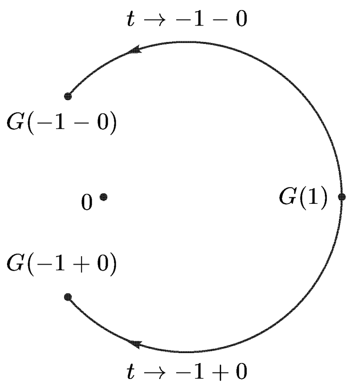

Рис. 1

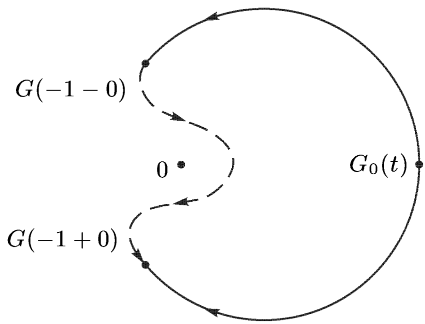

Рис. 2

Соединим точки $G(-1-0)$ и $G(-1+0)$ ляпуновской кривой $G_0(t)$, $\arg t \in [-\pi/2, \pi/2]$, не проходящей через нуль (см. рис. 2) и пусть

$$G_\varepsilon(t) = \begin{cases} G\bigl[t^{1/(1-\varepsilon)}\bigr], & \arg t \in [0, \pi(1-\varepsilon)], \\ G_0\bigl[t^{1/(2\varepsilon)}\, e^{-i\pi/(2\varepsilon)}\bigr], & \arg t \in [\pi(1-\varepsilon), \pi(1+\varepsilon)], \\ G\bigl[t^{1/(1-\varepsilon)}\, e^{-2\pi i\varepsilon/(1-\varepsilon)}\bigr], & \arg t \in [\pi(1+\varepsilon), 2\pi]. \end{cases} \tag{1.18}$$

Тогда $G_\varepsilon(t) \to G(t)$ в $C^\alpha(|t+1| \geqslant \delta)$, $\forall\, \delta > 0$ и $\varkappa = \operatorname{ind} G_\varepsilon(t) \equiv 0$. Отсюда общее решение соответствующей регуляризованной задачи представляется в виде

$$\Phi_\varepsilon^\pm(z) = \frac{X_\varepsilon^\pm(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(t)}{X_\varepsilon^+(t)(t-z)}\, dt + cX_\varepsilon^\pm(z) =$$

$$= X_\varepsilon^\pm S_\varepsilon^\pm\Bigl(\frac{g}{X_\varepsilon^+}\Bigm| z\Bigr) + cX_\varepsilon^\pm(z), \tag{1.19}$$

$$X_\varepsilon^\pm(z) = \exp\Bigl\{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\ln G_\varepsilon(t)}{t-z}\, dt\Bigr\}, \quad c = \mathrm{const}.$$

Используя свойства интеграла типа Коши, легко показать, что при $\varepsilon \to 0$

$$X_\varepsilon^\pm(z) \to X^\pm(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G(t)}{t-z}\,dt\right\}$$

в $C^\alpha(|z+1| \geqslant \delta)$, $\forall\,\delta > 0$, причем ветвь $\ln G(t)$ выбрана в соответствии с $G_\varepsilon(t)$, т. е. при этом

$$\frac{1}{2\pi}\left(\arg G(-1-0) - \arg G(-1+0)\right) \in [0,1)$$

(см. рис. 2). Тогда

$$\begin{cases} X^\pm(z) = X_0^\pm(z)(z+1)^\gamma, \\ \operatorname{Re}\gamma = \dfrac{1}{2\pi}(\arg G(-1-0) - \arg G(-1+0)) \in [0,1), \\ X_0^\pm(z) \in C^\alpha(|z+1| < \delta). \end{cases} \tag{1.20}$$

Используя вновь граничные свойства, устойчивость интеграла типа Коши, и теорему Н. И. Мусхелишвили [29, с. 18], получим $\forall\, g(t) \in C^\alpha(L)$

$$\Phi_\varepsilon^\pm(z) = X_\varepsilon^\pm S^\pm\left(\frac{g}{X_\varepsilon^+}\,\Big|\,z\right) \to X^\pm S^\pm\left(\frac{g}{X^+}\,\Big|\,z\right) = \Phi^\pm(z),$$

$$\Phi^\pm(z) \in C^\beta(\overline{D}^{\,\pm}), \quad \beta = \beta(\alpha,\gamma)$$

и предельный класс в данном случае: $g(t) \in C^\alpha(L)$, $\Phi^\pm(z) \in C^\beta(\overline{D}^{\,\pm})$. Так как индекс $\varkappa = 0$, то общее решение регуляризованной задачи имеет вид

$$\Phi_\varepsilon^\pm(z) + cX_\varepsilon^\pm(z) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \Phi^\pm(z) + cX^\pm(z), \quad c = \text{const},$$

и, следовательно, индекс задачи $\varkappa_0 = 1$.

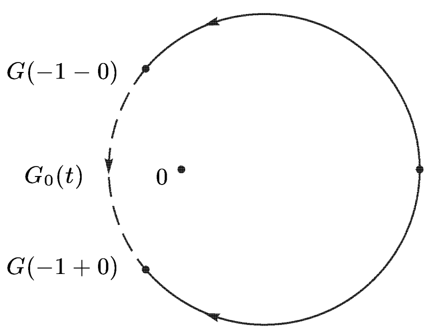

Рис. 3

С другой стороны, можно соединить точки $G(-1 \pm 0)$ и иным способом (см. рис. 3). При этом $\varkappa = \operatorname{ind} G_\varepsilon(t) \equiv 1$,

$$X_\varepsilon^\pm(z) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\ln(G_\varepsilon(t)\,t^{-1})}{t-z}\,dt\right\}, & z \in D^+, \\ \dfrac{1}{z}\exp\left\{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\ln(G_\varepsilon(t)\,t^{-1})}{t-z}\,dt\right\}, & z \in D^-. \end{cases} \tag{1.21}$$

Общее решение

$$\Phi_\varepsilon^\pm(z) + X_\varepsilon^\pm(z)(c_1 + c_2 z), \quad \Phi_\varepsilon^\pm(z) = X_\varepsilon^\pm(z) S\Big(\frac{g}{X_\varepsilon^+}\,\Big|\,z\Big).$$

Опять переходя к пределу, получим

$$X_\varepsilon^\pm(z) \to X^\pm(z) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\ln(G(t)\,t^{-1})}{t-z}\,dt\right\}, & z \in D^+, \\ \dfrac{1}{z}\exp\left\{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\ln(G(t)\,t^{-1})}{t-z}\,dt\right\}, & z \in D^-, \end{cases}$$

в $C^\alpha(|z+1| > \delta)$, $\forall\,\delta > 0$, причем ветвь $\ln G(t)$ выбрана так, что

$$\frac{1}{2\pi}\,[\arg G(-1-0) - \arg G(-1+0)] \in (-1, 0]$$

(см. рис. 3), т. е.

$$X^\pm(z) = X_0^\pm(z)\frac{1}{(z+1)^\gamma}, \quad \operatorname{Re}\gamma \in [0,1), \quad X_0^\pm(z) \in C^\alpha(|z+1| < \delta). \tag{1.22}$$

Отсюда

$$\Phi_\varepsilon^\pm(z) = X_\varepsilon^\pm S^\pm\Big(\frac{g}{X_\varepsilon^+}\,\Big|\,z\Big) \to X^\pm S^\pm\Big(\frac{g}{X^+}\,\Big|\,z\Big) = \Phi^\pm(z)$$

в $C^\alpha(|z+1| > \delta)$, $\forall\,\delta > 0$, причем

$$\Phi^\pm(z) = X^\pm S^\pm\Big(\frac{g}{X^\pm}\,\Big|\,z\Big) = \frac{1}{(z+1)^\gamma}\,\Phi_0(z),$$

$$\Phi_0 \in C^\alpha(|z+1| < \delta), \quad \operatorname{Re}\gamma \in [0,1).$$

Следовательно, получим в пределе решение в весовом классе

$$C^{\alpha,\gamma}(\overline{D}^\pm) = \{\Phi^\pm(z) | \Phi^\pm(z) \in C^\alpha(\overline{D}^\pm \cap \{|z+1| \geqslant \delta\}),$$

$$\Phi^\pm(z)(z+1)^\gamma \in C^\alpha(\overline{D}^\pm \cap \{|z+1| \leqslant \delta\})\}, \quad \operatorname{Re}\gamma \in [0,1).$$

Такой класс решений обычно называют *классом решений с интегрируемой особенностью в точке разрыва* $G(t)$ [8, с. 33]. Итак, при регуляризации, как на рис. 3, предельный класс $g(t) \in C^{\alpha}(L)$, $\Phi^{\pm}(z) \in C^{\alpha,\gamma}(\overline{D}^{\pm})$, индекс задачи $\varkappa_0 = 2$.

Наконец отметим, что можно было соединять $G(-1 \pm 0)$ и иначе (см. рис. 4, 5). При этом для рис. 4 $\varkappa = \operatorname{ind} G_{\varepsilon}(t) = -n < 0$,

$$X_{\varepsilon}^{\pm}(z) \to X^{\pm}(z) = X_0^{\pm}(z)(z+1)^{n+\gamma}, \quad \operatorname{Re}\gamma \in [0,1), \tag{1.23}$$

и для того, чтобы существовал предел $\Phi_{\varepsilon}^{\pm}(z)$, необходима определенная гладкость $g(t)$ в точке $t = -1$, а именно, при $t \to -1$

$$\begin{gathered} g(t) = g_0 + g_1(t+1) + \ldots + g_n(t)(t+1)^n, \\ g_j = \text{const}, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad g_n(t) \in C^{\alpha}(|t+1| \leqslant \delta), \end{gathered} \tag{1.24}$$

и при выполнении условия (1.24)

$$\Phi_{\varepsilon}^{\pm}(z) \to \Phi^{\pm}(z) \in C^{\beta}(\overline{D}_R^{\pm}), \quad \beta = \beta(\alpha, n, \gamma) > 0,$$

$$\overline{D}_R^{\pm} = \overline{D}^{\pm} \cap \{|z| \leqslant R\}.$$

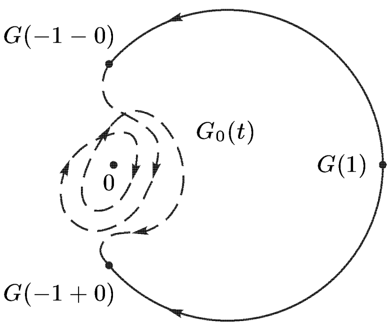

Рис. 4

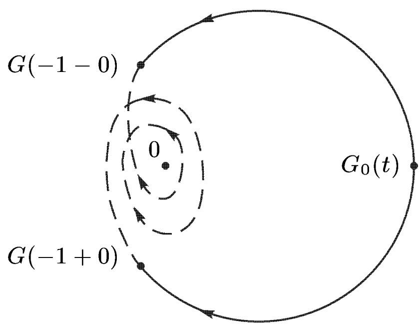

Рис. 5

При этом в силу (1.23) решение регуляризованной задачи единственно и существует тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_L \frac{g(t)}{X_{\varepsilon}^{\pm}(t)}\, t^k\, dt = 0, \quad k = \overline{0, n-1},$$

т. е. $l = 0$, $l^* = n - 1$ и индекс регуляризованной задачи $\varkappa_0 = l - l^* = -n + 1$. Таким образом для регуляризаций, как на рис. 4, предельный класс:

$g(t) \in C^{\alpha}(L)$ и удовлетворяет (1.24),

$\Phi^{\pm}(z) \in C^{\beta}(\overline{D}^{\pm})$, в предельном классе условия разрешимости

$$\int\limits_L \frac{gt^k}{X_\varepsilon^+(t)}\,dt = 0, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{1.25}$$

индекс задачи $\varkappa_0 = -n + 1$.

Для регуляризаций, как на рис. 5, $\varkappa = \operatorname{ind} G_\varepsilon(t) = 1 + n > 1$,

$$\begin{cases} X_\varepsilon^\pm(z) \to X^\pm(z) = X_0^\pm(z)(z+1)^{-n-\gamma}, \quad \operatorname{Re}\gamma \in [0,1), \\ \Phi_\varepsilon^\pm(z) \to \Phi^\pm(z) = \dfrac{\Phi_0^\pm(z)}{(z+1)^{n+\gamma}}; \end{cases} \tag{1.26}$$

$$X_0^\pm(z), \Phi_0^\pm(z) \in C^\alpha(\overline{D}^\pm \cap \{|z+1| < \delta\}), \quad |X_0^\pm(z)\cdot z| \leqslant M, \quad z \to \infty.$$

Тогда общее решение регуляризованной задачи имеет вид $\Phi_\varepsilon^\pm(z) + P(z)X_\varepsilon^\pm(z)$, где $P(z)$ — многочлен, $\deg P = n + 1$. Итак, в этом случае предельный класс:

$g(t) \in C^\alpha(L)$,

$\Phi^\pm(z) \in C^{\alpha, n+\gamma}(\overline{D}^\pm)$;

общее решение задачи содержит $n + 2$ произвольные постоянные, т. е. $l^* = 0$, $l = n + 2$; индекс задачи $\varkappa_0 = n + 2$.

Заметим, что указанные на рис. 2–5 способы исчерпывают все возможности соединить значения $G(-1 \pm 0)$ гладкой кривой с точностью до гомотопии в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ (т. е. чтобы $G_\varepsilon(t) \neq 0$).

1.12. Задача сопряжения с обращением $G(t)$ в нуль или бесконечность (простейший случай). Основная идея регуляризации в данном случае состоит в построении $G_\varepsilon(t)$, «обходящей» нуль (бесконечность) с той или другой стороны (рис. 6).

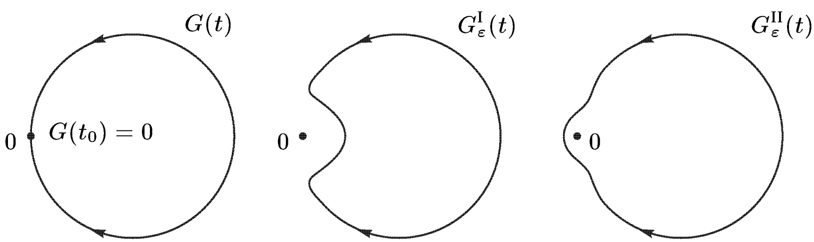

Рис. 6

В общем случае, когда неизвестен характер обращения в нуль (бесконечность) $G(t)$, исследование асимптотического поведения функций $X_\varepsilon^\pm(z)$ при $\varepsilon \to 0$ в окрестности точки вырождения t_0 представляет значительную трудность, а без этого невозможно в приемлемых терминах сформулировать условия сходимости регуляризованных решений

$\Phi_\varepsilon^\pm(z)$ и, следовательно, условия на предельный класс. Однако в частном случае, когда

$$G(t) = \widetilde{G}(t)(t - t_0)^n, \ \widetilde{G}(t) \in C^\alpha(L), \ \widetilde{G}(t) \neq 0, \ t_0 \in L, \tag{1.27}$$

n — целое, соответствующее исследование задачи проводится довольно элементарно.

Итак, пусть для определенности $t_0 = -1$, $G(t)$ имеет вид (1.27), $\operatorname{ind} \widetilde{G}(t) = 0$. Вначале рассмотрим случай $n > 0$. Введем

$$G_\varepsilon(t) = \widetilde{G}(t)(t + 1 + \varepsilon)^{n_2}(t + 1 - \varepsilon)^{n_1}, \quad n_1 + n_2 = n. \tag{1.28}$$

Тогда $\varkappa = \operatorname{ind} G_\varepsilon(t) = n_1$. Построим решение однородной задачи

$$X_\varepsilon^\pm(z) = \begin{cases} \exp\left(\chi_\varepsilon^+(z)\right), & z \in \overline{D}^+, \\ z^{-n_1} \exp\left(\chi_\varepsilon^-(z)\right), & z \in \overline{D}^-, \end{cases}$$

$$\chi_\varepsilon^\pm(z) = S^\pm(\ln(G_\varepsilon\, t^{-n_1}) \mid z);$$

частное решение неоднородной задачи:

$$\Phi_\varepsilon^\pm(z) = X_\varepsilon^\pm(z) S\left(\frac{g}{X^+} \,\Big|\, z\right);$$

общее решение неоднородной задачи:

$$\Psi_\varepsilon^\pm(z) = \Phi_\varepsilon^\pm(z) + P_{n_1}(z) X_\varepsilon^\pm(z),$$

$P_{n_1}(z)$ — многочлен, $\deg P_{n_1} = n_1$.

Легко видеть, что

$$X_\varepsilon^\pm(z) = \widetilde{X}^\pm(z) \cdot \begin{cases} (z + 1 + \varepsilon)^{n_2}, & z \in \overline{D}^+, \\ (z + 1 - \varepsilon)^{-n_1}, & z \in \overline{D}^-, \end{cases}$$

$\widetilde{X}^\pm(z) = \exp\left(S^\pm(\ln \widetilde{G} | z)\right)$, откуда

$$\Phi_\varepsilon^+(z) = \frac{\widetilde{X}^+(z)(z + 1 + \varepsilon)^{n_2}}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(t)}{\widetilde{X}^+(t)(t + 1 + \varepsilon)^{n_2}(t - z)}\, dt,$$

$$\Phi_\varepsilon^-(z) = \frac{\widetilde{X}^-(z)}{(z + 1 - \varepsilon)^{n_1} \cdot 2\pi i} \int\limits_L \frac{g(t)}{\widetilde{X}^+(t)(t + 1 + \varepsilon)^{n_2}(t - z)}\, dt.$$

Пусть $n_2 > 0$, тогда, разлагая $\dfrac{1}{(t - z)(t + 1 + \varepsilon)^{n_2}}$ в сумму простых дробей, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(t)}{\widetilde{X}^+(t)(t + 1 + \varepsilon)^{n_2}(t - z)}\, dt = \frac{I^\pm(z) - Q_{n_2 - 1}^\varepsilon(z)}{(z + 1 + \varepsilon)^{n_2}},$$

где

$$I^{\pm}(z) = S^{\pm}\Big(\frac{g}{\widetilde{X}^+}\,\Big|\,z\Big), \quad Q^{\varepsilon}_{n_2-1}(z) = \sum_{j=0}^{n_2-1} \frac{(I^-(-1-\varepsilon))^{(j)}}{j!}\,(z+1+\varepsilon)^j.$$

Тогда

$$\Phi^+_{\varepsilon}(z) = \widetilde{X}^+(z)[I^+(z) - Q^{\varepsilon}_{n_2-1}(z)], \quad z \in \overline{D}^{\,+},$$

$$\Phi^-_{\varepsilon}(z) = \frac{\widetilde{X}^-(z)}{(z+1-\varepsilon)^{n_1}}\,\frac{[I^-(z) - Q^{\varepsilon}_{n_2-1}(z)]}{(z+1+\varepsilon)^{n_2}}, \quad z \in \overline{D}^{\,-}.$$

Для перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ должен существовать предел $Q^{\varepsilon}_{n_2-1}(z)$. Это означает существование представления

$$S^-\Big(\frac{g}{\widetilde{X}^+}\,\Big|\,z\Big) = Q_{n_2-1}(z) + (z+1)^{n_2} I^-_{n_2}(z), \quad |z+1| < \delta, \tag{1.29}$$

где $Q_{n_2-1}(z)$ — многочлен степени $n_2 - 1$, $I^-_{n_2}(z) \in C^{\alpha}(\overline{D}^{\,-})$. При выполнении (1.29) имеем $Q^{\varepsilon}_{n_2-1}(z) \to Q_{n_2-1}(z)$, $\varepsilon \to 0$, откуда $\Phi^{\pm}_{\varepsilon}(z) \to$ $\to \Phi^{\pm}(z)$,

$$\Phi^+(z) = \widetilde{X}^+(z)[I^+(z) - Q_{n_2-1}(z)], \quad z \in \overline{D}^{\,+},$$

$$\Phi^-(z) = \frac{\widetilde{X}^-(z) I^-_{n_2}(z)}{(z+1)^{n_1}}, \quad z \in \overline{D}^{\,-}.$$

Соответственно общее решение

$$\Psi^{\pm}_{\varepsilon}(z) \to \Psi^{\pm}(z) = \Phi^{\pm}(z) + P_{n_1}(z) \cdot \begin{cases} \widetilde{X}^+(z)(z+1)^{n_2}, & z \in \overline{D}^{\,+}, \\ \widetilde{X}^-(z)(z+1)^{-n_1}, & z \in \overline{D}^{\,-}. \end{cases}$$

Итак, предельный класс: $g(t) \in C^{\alpha}(L)$ и выполнено условие (1.29) (очевидн (1.29), — это локальное условие на $g(t)/\widetilde{X}^+(t)$ в окрестности $t_0 = -1$);

$$\Phi^+(z) \in C^{\alpha}(\overline{D}^{\,+}), \quad \Phi^-(z) \in C^{\alpha}(\overline{D}^{\,-} \backslash \{|z+1| < \delta\}),$$

$$\Phi^-(z)(z+1)^{n_1} \in C^{\alpha}(\overline{D}^{\,-} \cap \{|z+1| \leqslant \delta\}).$$

Число решений в предельном классе $l = n_1 + 1$, условий разрешимости нет $(l^* = 0)$, индекс задачи $\varkappa_0 = n_1 + 1$.

Если $n_2 = 0$, $n_1 = n$, то результат остается тем же, но условие (1.29) в этом случае выполнено автоматически.

Теперь пусть $G(t)$ имеет полюс, $G(t) = \widetilde{G}(t)(t+1)^{-n}$, $n > 0$. Введем

$$G_{\varepsilon}(t) = \widetilde{G}(t)(t+1-\varepsilon)^{-n_1}(t+1+\varepsilon)^{-n_2}, \quad n_1 + n_2 = 0, \tag{1.30}$$

получим $\varkappa = \operatorname{ind} G_\varepsilon(t) = -n_1$ и далее, аналогично предыдущему,

$$X_\varepsilon^\pm(z) = \begin{cases} \widetilde{X}^+(z)(z+1+\varepsilon)^{-n_2}, & z \in \overline{D}^+, \\ \widetilde{X}^-(z)(z+1-\varepsilon)^{n_1}, & z \in \overline{D}^-; \end{cases}$$

$$\Phi_\varepsilon^+(z) = \frac{\widetilde{X}^+(z)}{(z+1+\varepsilon)^{n_2}\cdot 2\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)(t+1+\varepsilon)^{n_2}}{\widetilde{X}^+(t)(t-z)}\,dt, \quad z \in \overline{D}^+,$$

$$\Phi_\varepsilon^-(z) = \frac{\widetilde{X}^-(z)(z+1-\varepsilon)^{n_1}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)(t+1+\varepsilon)^{n_2}}{\widetilde{X}^+(t)(t-z)}\,dt, \quad z \in \overline{D}^-.$$

При этом решение неоднородной задачи единственно и существует при выполнении $n_1 - 1$ условий

$$\int\limits_L \frac{g(t)(t+1+\varepsilon)^{n_2}}{\widetilde{X}^+(t)}\,t^k\,dt = 0, \quad k = \overline{0, n_1-2}$$

(если $n_1 \leqslant 1$, то условий нет). Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\Phi^+(z) = \frac{\widetilde{X}^+(z)}{(z+1)^{n_2}}\,S^+\Big(\frac{g(t)(t+1)^{n_2}}{\widetilde{X}^+(t)}\,\Big|\,z\Big), \quad z \in \overline{D}^+,$$

$$\Phi^-(z) = \widetilde{X}^-(z)(z+1)^{n_1}S^-\Big(\frac{g(t)(t+1)^{n_2}}{\widetilde{X}^+(t)}\,\Big|\,z\Big), \quad z \in \overline{D}^-,$$

условия разрешимости

$$\int\limits_L \frac{g(t)(t+1)^{n_2}}{\widetilde{X}^+(t)}\cdot t^k\,dt = 0, \quad k = \overline{0, n_1-2}. \tag{1.31}$$

Предельный класс:

$g(t) \in C^\alpha(L)$,

$\Phi^+(z)(z+1)^{n_2} \in C^\alpha(\overline{D}^+)$, $\Phi^-(z) \in C^\alpha(\overline{D}^-)$.

Решение в предельном классе единственно ($l = 0$), условия разрешимости имеют вид (1.31) (т. е. $l^* = n_1 - 1$), индекс задачи $\varkappa_0 = 1 - n_1$.

1.13. Анализ общего случая. «Локализация» задачи. Пусть $G(t)$ имеет конечное число особых точек $t_1 \ldots t_n \in L$. Возьмем $\varepsilon_0 > 0$ достаточно малым, чтобы круги $|z - t_j| \leqslant 2\varepsilon_0$ попарно не пересекались. Нетрудно построить «локальные» функции $G_j(t) \in C^\alpha(L)$, $j = \overline{1, n}$ такие, что

$$G_j(t) = \begin{cases} G(t), & |t - t_j| \leqslant \varepsilon_0, \\ 1, & |t - t_j| \geqslant 2\varepsilon_0. \end{cases} \tag{1.32}$$

Пусть

$$\widetilde{G}(t) = G(t) / \prod_{j=1}^{n} G_j(t). \tag{1.33}$$

Тогда $\widetilde{G}(t) \neq 0$, $\widetilde{G}(t) \in C^\alpha(L)$, $\widetilde{G}(t) \equiv 1$ при $|t - t_j| \leqslant \varepsilon_0$, $j = \overline{1, n}$. Обозначим $\widetilde{\varkappa} = \operatorname{ind} \widetilde{G}(t)$.

Функции $G_j(t)$ имеют по одной особой точке t_j. Построим для них регуляризации $G_{j,\varepsilon}(t)$, причем пусть $G_{j,\varepsilon}(t) \equiv 1$ при $|t - t_j| \geqslant 2\varepsilon_0$ (очевидно, этого легко добиться в любом случае), тогда $G_\varepsilon(t) = \widetilde{G}(t) \prod\limits_{j=1}^{n} G_{j,\varepsilon}(t)$ — регуляризация $G(t)$, $\varkappa = \operatorname{ind} G_\varepsilon(t) = \widetilde{\varkappa} + \sum\limits_{j=1}^{n} \varkappa_j$, где $\varkappa_j = \operatorname{ind} G_{j,\varepsilon}(t)$. Для каждой из регуляризаций $G_{j,\varepsilon}(t)$ построим характеристические функции $X^\pm_{j,\varepsilon}(z)$. Отметим, что так как $G_{j,\varepsilon}(t) \equiv 1$ при $|t - t_j| \geqslant 2\varepsilon_0$, то функции $X^\pm_{j,\varepsilon}(z) = X_{j,\varepsilon}(z)$ аналитичны при $|z - t_j| \geqslant 2\varepsilon_0$. Далее, аналогично формулам (1.11), (1.12), пусть

$$\widetilde{X}^\pm(z) = \begin{cases} F(z) \exp(\chi^+(z)), & z \in \overline{D}^+, \\ F(z) \psi_0^{-\varkappa}(z) \exp(\chi^-(z)), & z \in \overline{D}^-; \end{cases} \tag{1.34}$$

$$\chi^\pm(z) = S^\pm(\ln(\widetilde{G} \psi_0^{-\widetilde{\varkappa}}(t)) \mid z);$$

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{P(z)}{(z - z_0)^\varkappa}, & \varkappa \geqslant 0, \\ \dfrac{(z - z_0)^\varkappa}{P(z)}, & \varkappa < 0, \end{cases} \tag{1.35}$$

$P(z)$ — многочлен степени $|\varkappa|$, не имеющий нулей на L, причем при $\varkappa < 0$ $P(z_0) = 0$. Тогда решение регуляризованной задачи факторизации имеет вид

$$X^\pm_\varepsilon(z) = \widetilde{X}^\pm(z) \prod_{j=1}^{n} X^\pm_{j,\varepsilon}(z).$$

Аналогично предыдущему, построим решение задачи (A)

$$\Phi^\pm_\varepsilon(z) = X^\pm_\varepsilon(z) S^\pm_0\Big(\frac{g}{X^+_\varepsilon} \,\Big|\, z\Big) \in C^\alpha(\overline{D}^\pm),\ c^\varepsilon_k = S_0\Big(\frac{g}{X^+_\varepsilon} \,\Big|\, q_k\Big),\ k = \overline{1, l^*}, \tag{1.36}$$

где $l^* = 0$ при $\varkappa \geqslant 0$, $l^* = -1 - \varkappa$ при $\varkappa < 0$. Переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ можно осуществлять локально, в окрестности каждой из точек t_j по отдельности. При этом, если порядок вырождения $X^\pm_{j,\varepsilon}(z)$ в точке t_j конечен, $|\ln|X^\pm_{j,\varepsilon}(z)|| \leqslant M|\ln|z - t_j||$ (как правило, это условие имеет место), то в силу аналитичности $X_{j,\varepsilon}(z)$ а, следовательно, и $X_k(z) =$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0} X_{k,\varepsilon}(z)$ при $|z-t_j| \leqslant \varepsilon_0$, $k \neq j$, достаточно при переходе к пределу рассмотреть только интеграл

$$X^{\pm}_{j,\varepsilon}(z) S^{\pm}\Big(\frac{g}{X^{+}_{j,\varepsilon}}\Big|z\Big),$$

т. е. локально получим тот же предельный класс, что и при рассмотрении только локального (одна точка вырождения t_j) случая. Таким образом, предельный класс решений и правых частей $g(t)$ будет равен пересечению «локальных» предельных классов для всех точек t_j, $j = \overline{1,n}$.

Для иллюстрации рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 1. Функция $G(t)$ имеет конечное число разрывов 1 рода в точках $t_1 \ldots t_n$. Разобьем эти точки на два множества: $I_1 = \{t_{i_1}, \ldots, t_{i_p}\}$ и I_0 — все остальные. Построим $G_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, удовлетворяющие (1.32), $\widetilde{G}(t)$ вида (1.33) и пусть $\widetilde{\varkappa} = \operatorname{ind} \widetilde{G}(t)$. Для функций $G_j(t)$, $t_j \in I_0$ берем регуляризации $G_{j,\varepsilon}(t)$ как на рис. 2, а для $t_j \in I_1$ — как на рис. 3. Тогда

$$\varkappa = \operatorname{ind} G_\varepsilon(t) = \operatorname{ind} \widetilde{G}(t) + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind} G_{j,\varepsilon}(t) = \widetilde{\varkappa} + p.$$

Найдем решения регуляризованной задачи (A) по формулам (1.20)–(1.36), $l = \max(0, \varkappa+1)$, $l^* = \max(0, 1-\varkappa)$. Тогда переход к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом результатов п. 1.9, дает решение $\{\Phi^{\pm}(z), c_k, k = \overline{1,l^*}\}$, имеющее вид (1.11), (1.12), (B) в предельном классе:

$$g(t) \in C^{\alpha}(L), \quad \Phi^{\pm}(z) \in C^{\alpha}(\overline{D}^{\pm} \setminus \bigcup_{t_j \in I_1} \{|z-t_j| < \varepsilon_0\}),$$

$$(z-t_j)^{\gamma_j} \Phi^{\pm}(z) \in C^{\alpha}(\overline{D}^{\pm} \bigcap \{|z-t_j| \leqslant \varepsilon_0\}), \quad t_j \in I_1, \quad \operatorname{Re}\gamma_j \in [0,1)$$

— решение с интегрируемой особенностью в точках $t_j \in I_1$ (так называемое решение в классе $O(t_{i_1}, \ldots, t_{i_p})$ см. [8, с. 32–34]). При этом число решений $l = \max(0, \varkappa+1)$, число условий разрешимости $l^* = \max(0, 1-\varkappa)$, индекс задачи в предельном классе $\varkappa_0 = \varkappa + 1 = \widetilde{\varkappa} + p + 1$.

Пример 2. Пусть

$$G(t) = G_0(t) \prod_{j=1}^{n} (t-t_j)^{n_j}, \quad n_j > 0,$$

$$G_0(t) \neq 0, \quad G_0(t) \in C^{\alpha}(L), \quad \operatorname{ind} G_0(t) = \nu_0.$$

Опять построим $G_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, регуляризации $G_{j,\varepsilon}(t)\in C^\alpha(L)$,

$$G_{j,\varepsilon}(t)=\begin{cases}\Big[G_0(t)\prod\limits_{k\neq j}(t-t_k)^{n_k}\Big]\times\\ \times(t-t_j(1-\varepsilon))^{n_1^j}(t-t_j(1+\varepsilon))^{n_2^j}, & |z-t_j|\leqslant\varepsilon_0,\\ 1, & |z-t_j|\geqslant 2\varepsilon_0,\end{cases}$$

$G_{j,\varepsilon}(t)\neq 0$, $|t-t_j|\geqslant\varepsilon_0$; $n_1^j+n_2^j=n_j$. Пусть $\widetilde{G}(t)$ имеет вид (1.33), $G_\varepsilon(t)=\widetilde{G}(t)\prod\limits_j G_{j,\varepsilon}(t)$, тогда $\varkappa=\operatorname{ind}G_\varepsilon(t)=\nu_0+\sum\limits_j n_1^j$. Формулы (1.20), (1.35) дадут решение задачи факторизации $X_\varepsilon^\pm(z)$, а (1.36) — решение задачи (A) $\{\Phi_\varepsilon^\pm(z),\ c_k^\varepsilon,\ k=\overline{1,l^*}\}$. Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$X_\varepsilon^\pm(z)\to X^\pm(z)=X_0^\pm(z)\cdot\begin{cases}\prod\limits_{j=1}^n(z-t_j)^{n_2^j}, & z\in\overline{D}^+,\\ \prod\limits_{j=1}^n(z-t_j)^{-n_1^j}, & z\in\overline{D}^-,\end{cases}$$

где $X_0^\pm(z)$ имеет вид (1.20), (1.35) с $\widetilde{\varkappa}=\nu_0$, $\widetilde{G}=G_0$. При этом функция $g(t)$ должна удовлетворять локальным условиям гладкости (1.29) в окрестности t_j, т. е. иметь представление

$$S^-\Big(\frac{g}{X_0^+}\,|\,z\Big)=Q^j_{n_2^j-1}(z)+(z-t_j)^{n_2^j}I^-_{n_2^j,j}(z),\quad |z-t_j|\leqslant\varepsilon_0,\tag{1.37}$$

где $Q^j_{n_2^j-1}(z)$ — многочлены степени n_2^j-1, $I^-_{n_2^j,j}(z)\in C^\alpha(\overline{D}^-)$ (нетрудно показать, что выполнение условий (1.37) не зависит как от выбора $F(z)$ в (1.20), так и от деления $g(t)$ на $\prod\limits_{k\neq j}(t-t_k)^{n_2^k}$). Тогда решения задачи (A)

$$\Phi_\varepsilon^\pm(z)\to\Phi^\pm(z)=\begin{cases}X_0^+(z)\Big(S_0^+\Big(\frac{g}{X_0^+}\,\Big|\,z\Big)-Q_0(z)\Big), & z\in\overline{D}^+,\\ \dfrac{X_0^-(z)}{\prod\limits_j(z-t_j)^{n_1^j}}\;\dfrac{S_0^-\Big(\frac{g}{X^+}\,\Big|\,z\Big)-Q_0(z)}{\prod\limits_j(z-t_j)^{n_2^j}}, & z\in\overline{D}^-,\end{cases}\tag{1.38}$$

$$c_k^\varepsilon\to c_k=S_0\Big(\frac{g}{X_0^+}\,\Big|\,q_k\Big)-Q_0(q_k),\quad k=\overline{1,l^*},\tag{1.39}$$

где $Q_0(z)$ — интерполяционный многочлен степени $n_0=\sum n_2^j-1$,

$$\frac{d^k}{dz^k}\,Q_0(t_j)=\frac{d^k}{dz^k}\,Q^j_{n_2^j-1}(t_j),\quad k=\overline{0,n_2^j-1},\quad j=\overline{1,n}$$

(т. е. $Q_0(z) = Q^j_{n^j_2-1}(z) + (z-t_j)^{n^j_2} R_j(z), \quad j=\overline{1,n}$). Итак, в этом случае предельный класс:

$g(t) \in C^\alpha(L)$ и удовлетворяет (1.37),

$$\Phi^+(z) \in C^\alpha\big(\overline{D}^+\big), \quad \Phi^-(z) \in C^\alpha\Big(\overline{D}^- \backslash \bigcup_j \{|z-t_j| < \varepsilon_0\}\Big),$$

$$\Phi^-(z)(z-t_j)^{n^j_1} \in C^\alpha(\overline{D}^- \bigcap \{|z-t_j| \leqslant \varepsilon_0\}).$$

Число решений в предельном классе $l = \max(0, \varkappa+1)$, число условий разрешимости $l^* = \max(0, 1-\varkappa)$, решение корректной задачи (A) имеет вид (1.38), (1.39), индекс задачи $\varkappa_0 = \varkappa + 1 = \nu_0 + \sum\limits_j n^j_1 + 1$.

Пример 3. Пусть

$$G(t) = G_0(t) \prod_{j=1}^{n} (t-t_j)^{-n_j}, \quad n_j > 0,$$

$$G_0(t) \in C^\alpha(L), \quad G_0(t) \neq 0, \quad \nu_0 = \operatorname{ind} G_0(t).$$

Исследование проводится полностью аналогично предыдущему.

Сформулируем окончательный результат:

для регуляризаций

$$G_\varepsilon = G_0 \prod_{j=1}^{n} (t - t_j(1-\varepsilon))^{n^j_1} \prod_{j=1}^{n} (t - t_j(1+\varepsilon))^{n^j_2}$$

имеем предельные классы:

$g(t) \in C^\alpha(L)$,

$\Phi^+(z) \prod\limits_{j=1}^{n} (z-t_j)^{n^j_2} \in C^\alpha(\overline{D}^+)$, $\Phi^-(z) \in C^\alpha(\overline{D}^-)$,

число решений в предельном классе $l = \max(0, \varkappa+1)$,

число условий разрешимости $l^* = \max(0, 1-\varkappa)$, $\varkappa = \nu_0 - \sum\limits_j n^j_1$;

решение корректной в предельном классе задачи (A) имеет вид:

$$\Phi^+(z) = \frac{X^+_0(z)}{\prod\limits_j (z-t_j)^{n^j_2}} S^+_0\Big(\frac{g(t)\prod(t-t_j)^{n^j_2}}{X^+_0(t)}\Big| z\Big), \quad z \in \overline{D}^+,$$

$$\Phi^-(z) = X^-_0(z) \prod_j (z-t_j)^{n^j_1} S^-_0\Big(\frac{g(t)\prod(t-t_j)^{n^j_2}}{X^+_0(t)}\Big| z\Big), \quad z \in \overline{D}^-,$$

$$c_k = S_0\Big(\frac{g(t)\prod(t-t_j)^{n_2^j}}{X_0^+(t)}\,\Big|\,q_k\Big), \quad k=\overline{1,l^*};$$

индекс задачи в предельном классе $\varkappa_0 = \varkappa + 1 = \nu_0 - \sum n_1^j + 1$.

§ 2. Топологические основы теории римановых поверхностей

2.1. Группы. Множество Γ называется *группой*, если на нем задана двухместная операция $*\colon\ \Gamma \to \Gamma$, причем выполнены условия:

$$\text{(i)}\begin{cases} \forall\, a,b,c\in\Gamma \quad (a*b)*c = a*(b*c) & \text{— ассоциативность,}\\ \exists e\in\Gamma\colon\ \forall\, a\in\Gamma \quad a*e=e*a=a & \text{— существование единичного элемента,}\\ \forall\, a\in\Gamma\ \exists\widetilde{a}\in\Gamma\colon\ a*\widetilde{a}=\widetilde{a}*a=e & \text{— существование обратного элемента.}\end{cases}$$

Обычно групповая операция называется умножением и обозначается $a\cdot b$, единичный элемент e называют единицей и обозначают 1_Γ или просто 1, обратный элемент $\widetilde{a}$ обозначают a^{-1}.

Если групповая операция коммутативна, т. е. $\forall\, a,b\quad ab=ba$, то группа называется *коммутативной* или *абелевой*. Для абелевых групп приняты обозначения $a*b=a+b$, $e=0_\Gamma=0$, $\widetilde{a}=-a$. Очевидно, примерами абелевых групп будут

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ — по сложению,

$\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $L^1=\{z\in\mathbb{C}\ \big|\ |z|=1\}$ — по умножению.

Пусть $a_1,\ldots,a_n$ — элементы группы Γ. Говорят, что Γ *порождена* элементами $a_1,\ldots,a_n$, если любой элемент Γ можно представить в виде конечного произведения элементов a_j и a_j^{-1}. В этом случае элементы $a_1,\ldots,a_n$ называют *образующими* группы Γ.

Пусть Γ, $\widetilde{\Gamma}$ — группы, отображение $f\colon\ \Gamma\to\widetilde{\Gamma}$ называется *гомоморфизмом*, если $\forall\, a,b\in\Gamma\quad f(ab)=f(a)\cdot f(b)$. Очевидно, тогда $f(1_\Gamma)=1_{\widetilde{\Gamma}}$, $f(a^{-1})=[f(a)]^{-1}$, для абелевых групп, соответственно, $f(0_\Gamma)=0_{\widetilde{\Gamma}}$, $f(-a)=-f(a)$. Если при этом f — взаимно-однозначное отображение на $\widetilde{\Gamma}$, то f называют *изоморфизмом* групп, а группы Γ и $\widetilde{\Gamma}$ — *изоморфными*. Заметим, что тогда и обратное отображение $f^{-1}\colon\ \widetilde{\Gamma}\to\Gamma$ также изоморфизм и вообще группы Γ и $\widetilde{\Gamma}$ можно считать одинаковыми, отождествив элементы $a\in\Gamma$ и $f(a)\in\widetilde{\Gamma}$.

Далее, подмножество $\Gamma_0\subset\Gamma$ называется *подгруппой*, если:

— $\forall\, a,b\in\Gamma_0\quad a\cdot b\in\Gamma_0$,

— $e_\Gamma\in\Gamma_0$,

— $\forall\, a\in\Gamma_0\quad a^{-1}\in\Gamma_0$.

Подгруппа называется *нормальной* (или *нормальным делителем*), если

$$\forall\, a \in \Gamma \quad a\Gamma_0 a^{-1} = \{b \in \Gamma \,|\, b = aca^{-1}, c \in \Gamma_0\} \subset \Gamma_0.$$

Очевидно, в абелевых группах любая подгруппа будет нормальной.

Пусть Γ_0 — подгруппа Γ, тогда на Γ можно задать отношение эквивалентности $a \sim b \Longleftrightarrow \exists c \in \Gamma_0\colon\; a = bc$, которое разбивает Γ на классы эквивалентности

$$\{a\}_\sim = \{b \in \Gamma \,|\, b \sim a\} = \{b \in \Gamma \,|\, b = ac,\; c \in \Gamma_0\} = a \cdot \Gamma_0.$$

Если Γ_0 — нормальная подгруппа, то для классов эквивалентности можно корректно определить операцию

$$\{a\}_\sim \cdot \{b\}_\sim = (a \cdot \Gamma_0) \cdot (b \cdot \Gamma_0) = a \cdot b \cdot \Gamma_0 = \{ab\}_\sim,$$

которая, очевидно, удовлетворяет всем условиям (i) (роль единицы здесь играет класс $\{1\}_\sim = \Gamma_0$). Полученная таким образом группа классов эквивалентности называется *фактор-группой* и обозначается $\Gamma_1 = \Gamma/\Gamma_0$. Элемент $\{a\}_\sim = a \cdot \Gamma_0$ называется *представителем* $a \in \Gamma$ в фактор-группе Γ_1. Очевидно, имеем гомоморфизм

$$f\colon\; \Gamma \to \Gamma_1; \qquad f(a) = a\Gamma_0 = \{a\}_\sim.$$

Пример фактор-группы: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = L^1$ с соответствующим гомоморфизмом

$$f(t \in \mathbb{R}) = e^{2\pi i t} \in L^1.$$

Пусть имеется гомоморфизм групп $f\colon\; \Gamma \to \widetilde{\Gamma}$. Множество

$$\ker f = \{a \in \Gamma \,|\, f(a) = 1_{\widetilde{\Gamma}}\}$$

называется *ядром* f, а

$$\operatorname{im} f = \{b \in \widetilde{\Gamma} \,|\, b = f(a),\; a \in \Gamma\}$$

— *образом* f. Очевидно $\ker f$ — подгруппа Γ, $\operatorname{im} f$ — подгруппа $\widetilde{\Gamma}$. Нетрудно показать, что $\ker f$ — нормальная подгруппа и при этом отображение

$$f^*\colon\; \Gamma/\ker f \to\; \operatorname{im} f, \quad f^*(a \cdot \ker f) = f(a)$$

определено корректно и является изоморфизмом.

Далее, пусть Γ — подгруппа $\mathbb{R}^n$. Подгруппа Γ называется *дискретной*, если для любой точки $a \in \Gamma$ существует окрестность, не содержащая других точек Γ. Подгруппа Γ называется *решеткой*, если она дискретна и не содержится ни в каком собственном векторном подпространстве $\mathbb{R}^n$. Примеры решеток:

— $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{R}$;

— $\mathbb{Z}^2 = \{(a, b) \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ в $\mathbb{R}^2$.

Фактор-группа $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = L^1 \times L^1 = D^1$ представляет собой *тор*.

Наиболее распространенными примерами групп являются группы преобразований некоторого множества D в себя. Групповая операция в этом случае — композиция преобразований, а роль единичного элемента играет тождественное преобразование, которое будем обозначать id. Пусть $\Gamma = \{ a : D \to D \}$ — группа преобразований D в себя, $x \in \in D$. Множества $[x]_\Gamma = \{ u = a(x), \quad a \in \Gamma \}$ называются *орбитами* группы Γ (на множестве D). Очевидно, отношение

$$u \sim x \quad \iff \quad \exists\, a \in \Gamma : u = a(x)$$

есть отношение эквивалентности и, значит, орбиты — непересекающиеся классы эквивалентности. Множество орбит (фактор-множество) обозначается D/Γ. Отображение $\Pi_\Gamma : D \to D/\Gamma$, ставящее в соответствие элементу $x \in D$ его орбиту $[x]_\Gamma$ будем называть *естественной проекцией* D на фактор-множество D/Γ.

2.2. Основные топологические понятия. Пусть D — множество, $\mathbf{U}_D = \{U_\alpha\}$ — система его подмножеств. Говорят, что $\mathbf{U}_D$ задает *топологию* на D, если

$$\text{(ii)} \qquad \begin{cases} \emptyset \in \mathbf{U}_D, \quad D \in \mathbf{U}_D, \\ \forall \{\alpha\} \quad \bigcup\limits_{(\alpha)} U_\alpha \in \mathbf{U}_D, \\ \forall\, \alpha, \beta \quad U_\alpha \cap U_\beta \in \mathbf{U}_D, \end{cases}$$

при этом D называют *топологическим пространством*, элементы $\mathbf{U}_D$ — *открытыми* подмножествами D. Очевидные примеры топологических пространств дают $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ с обычной системой открытых множеств.

Любое подмножество $D_0 \subset D$ также будет топологическим пространством с системой открытых множеств

$$\mathbf{U}_{D_0} = \{V = U \cap D_0 \,|\, U \in \mathbf{U}_D\}.$$

Пусть точка $p \in D$, открытое множество $U \ni p$ называется *окрестностью* точки p. Очевидно, топология может быть задана системой окрестностей каждой точки $p \in D$.

Пространство D называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств.

Система открытых множеств $\{U_\alpha\}$ такая, что $\bigcup\limits_{(\alpha)} U_\alpha \supset D$ называется *покрытием* D. Пространство D называется *компактным*, если из любого его покрытия можно выделить конечное *подпокрытие*

$$\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}\} \colon \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j} \supset D.$$

Наконец, покрытие $\{U_\alpha\}$ называется *локально конечным*, если $\forall\, p \in D$ $\{U_\alpha \,|\, p \in U_\alpha\}$ — конечно.

Последовательность точек $p_m \in D$ называется сходящейся к $p \in D$, $p_m \to p$, $m \to \infty$, если

$$\forall\, U \in \mathbf{U}_D, \quad U \ni p, \quad \exists N : \forall\, m > N \; p_m \in U.$$

Пусть D, $\widetilde{D}$ — топологические пространства, отображение $f\colon D \to \widetilde{D}$ называется *непрерывным* на D, если

$$\forall\, \widetilde{U} \subset \mathbf{U}_{\widetilde{D}} \quad f^{-1}(\widetilde{U}) = U \in \mathbf{U}_D.$$

Очевидно, если f — непрерывно и $p_m \to p$, $m \to \infty$, то $f(p_m) \to f(p)$, $m \to \infty$ в $\widetilde{D}$.

Пусть f — взаимно-однозначное отображение D на $\widetilde{D}$ и $f : D \to \widetilde{D}$, $f^{-1} : \widetilde{D} \to D$ — непрерывны, тогда f называется *гомеоморфизмом*, а пространства D и $\widetilde{D}$ — *гомеоморфными*. Очевидно, гомеоморфизм устанавливает взаимно-однозначное соответствие между открытыми множествами D и $\widetilde{D}$ и, следовательно, с точки зрения топологии, пространства D и $\widetilde{D}$ можно считать тождественными.

Пусть Γ — группа непрерывных преобразований топологического пространства D в себя. Группа Γ называется *разрывной* (на D), если выполнены следующие условия [16, с. 50–51]:

1. Если $x, x' \in D$ и $a(x) \neq x'$ $\forall\, a \in \Gamma$, то существуют окрестности $U \ni x$, $U' \ni x'$ такие, что $a(U) \cap U' = \emptyset$ $\forall\, a \in \Gamma$.

2. $\forall\, x \in D$ группа $\Gamma_x = \{\, a \in \Gamma \mid a(x) = x \,\}$ — конечна.

3. $\forall\, x \in D$ существует окрестность $U \ni x$ такая, что $a(U) \subseteq U$ $\forall\, a \in \in \Gamma_x$ и $a(U) \cap U = \emptyset$ при $a \overline{\in} \Gamma_x$.

Пусть D — компактное топологическое пространство. D называется *комплексным аналитическим многообразием* (размерности n), если:

$$\text{(iii)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} D = D_0 \cup D_1,\ D_0 \cap D_1 = \emptyset, \text{ причем} \\ -\ \forall\, p \in D_0 \text{ существует окрестность } U_\alpha \ni p \\ \ \text{и гомеоморфизм } z_\alpha\colon \\ \ U_\alpha \to U_1^n = \Big\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \;\Big|\; |z_k| < 1, k = \overline{1, n} \Big\} \\ (z_\alpha(p) = 0); \\ -\ \forall\, q \in D_1 \text{ существует окрестность } U_\alpha \ni q \\ \ \text{и гомеоморфизм } z_\alpha : U_\alpha \to \widetilde{U}_1^n = \Big\{ z \in U_1^n \;\Big|\; \operatorname{Re} z_n \leqslant 0 \Big\} \\ (z_\alpha(q) = 0); \\ -\ \forall\, \alpha, \beta \text{ отображения } z_\alpha \circ z_\beta^{-1}\colon\ \mathbb{C}^n \to U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^n \\ \ \text{аналитичны в соответствующих областях.} \end{array} \right.$$

Окрестности U_α называются *координатными окрестностями*, а гомеоморфизмы z_α — *локальными координатами*. Набор $\{U_\alpha, z_\alpha\}$, где U_α — покрытие D, называется *атласом*. В дальнейшем в качестве окрестностей будем брать только координатные окрестности вместе с заданной локальной координатой и, следовательно, в качестве покрытий — только атласы. Кроме того, выражение «в терминах локальной координаты» будет означать, что некое утверждение формулируется для образа $z_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$.

Множество D_1 (см. (iii)) называется *краем* и обозначается ∂D. Если $\partial D = \emptyset$, то D называется многообразием *без края*.

Как правило, мы будем рассматривать многообразия размерности один. Заметим, что в этом случае многообразие D локально эквивалентно куску комплексной плоскости, и любое замкнутое подмножество D также будет комплексным аналитическим многообразием (размерности один).

Примеры комплексных аналитических многообразий:

— круг $\overline{U}_1 = \{z \,|\, |z| \leqslant 1\}$, $\partial \overline{U}_1 = L^1$;

— $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — риманова сфера, $\partial\overline{\mathbb{C}} = \emptyset$;

— тор $D^1 = L^1 \times L^1$, $\partial D^1 = \emptyset$;

— «половинка» тора (трубка) $D = [0,1] \times L^1$, край ∂D — два экземпляра L_1.

В приведенных примерах построение атласов достаточно очевидно [41, 1, 4].

Пусть D, D_1 — комплексные аналитические многообразия размерностей n и n_1 соответственно. Отображение $f : D \to D_1$ называется *аналитическим* или *голоморфным*, если f аналитична в терминах локального параметра, т. е. для любых координатных окрестностей $U_\alpha \subset D$, $U_\beta \subset D_1$ отображение $z_\beta \circ f \circ (z_\alpha)^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n_1}$ аналитично. Если при этом f — гомеоморфизм, то многообразия D и D_1 назовем *аналитически гомеоморфными* или *конформно эквивалентными*. Далее конформно эквивалентные многообразия мы будем считать тождественными (изоморфными).

Пусть D — комплексное аналитическое многообразие. Непрерывное отображение $\varphi : [0,1] \to D$ задает *кривую* на D, $L = \varphi([0,1])$, направление обхода кривой L будем называть ее *ориентацией*. Кривая L называется *гладкой*, если φ — гладкое в любой точке в терминах локального параметра и *замкнутой*, если $\varphi(0) = \varphi(1)$ (для гладкой кривой и $\varphi'(0) = \varphi'(1)$), в последнем случае будем считать L образом окружности L^1. Аналогично в терминах локального параметра определяются и классы функций на кривой, в частности классы Гельдера $C^\alpha(L)$ (см. далее).

Замкнутую кривую без точек самопересечения (кроме концов) назовем *связным контуром*. Пусть L_k, $k = \overline{0,m}$ — связные контуры, причем $L_k \cap L_j = \emptyset$, $k \neq j$. Тогда $L = \bigcup\limits_{k=0}^{m} L_k$ назовем *контуром*, а L_k — *компонентами связности* контура L. Аналогично определим *гладкий контур* (см., например, п. 1.1).

Пусть D — многообразие размерности один. Из того, что отображение $f_{\alpha\beta} = z_\alpha \circ z_\beta^{-1} :\ \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ аналитично, следует, что его якобиан всюду положителен, используя это можно показать, что край ∂D — контур с естественной ориентацией (соответствующей обходу L^1 в положительном направлении, см. (iii)), которую называют ориентацией, *индуцированной* с D.

Пусть теперь $L_k \subset D$ — связный контур, $L_k \cap \partial D = \emptyset$. Как известно, тогда можно построить окрестность контура $V_k \supset L_k$ с гладким краем ∂V_k, аналитически гомеоморфную кольцу $V^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1/2 < |z| < 3/2\}$ [41, 1, 16]. Будем называть V_k *стандартной окрестностью* L_k, а соответствующий аналитический гомеоморфизм $z_k : V_k \to V^1$ будем считать локальной координатой. Для произвольного контура $L = \bigcup\limits_{k=0}^{m} L_k$ всегда можно считать $V_k \cap V_j = \emptyset$, $k \neq j$; будем соответственно называть $V = \bigcup\limits_{k=0}^{m} V_k$ *стандартной окрестностью* L.

Обозначим $L_k^1 = z_j(L_k) \subset \mathbb{C}$. Очевидно, контур L гладкий тогда и только тогда, когда L_k^1 — гладкие контуры на плоскости. Соответственно класс Гельдера $C^\alpha(L) = \{\, f(t) \,|\, f(z_k^{-1}(s)) \in C^\alpha(L_k^1),\ k = \overline{0, m}\,\}$.

Пусть L — замкнутая кривая и задано непрерывное отображение $\psi : [0,1] \times L^1 \to D$, причем $\psi(0, L^1) = L$. Отображение ψ называют *гомотопией* L, а кривые $L_t = \psi(t, L^1)$, $t \in [0,1]$ — *гомотопными* L.

В частности, с помощью гомотопии можно перенести начало L (т. е. $\psi(0,1)$) в любую наперед заданную точку $p_0 \in D$. Рассмотрим только такие кривые $\widetilde{\pi}(p_0, D) = \{L = \varphi(L^1) \,|\, \varphi(1) = p_0\}$. На множестве $\widetilde{\pi}(p_0, D)$ можно ввести групповую операцию следующим образом. Пусть

$$L_1 = \varphi_1(L^1), \quad L_2 = \varphi_2(L^1),$$

тогда $L = L_1 \cdot L_2$ задается функцией

$$\varphi(e^{it}) = \begin{cases} \varphi_1(e^{2it}), & t \in [0, \pi], \\ \varphi_2(e^{2i(t-\pi)}), & t \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

т. е. кривая L получается последовательным прохождением сначала L_1, затем L_2. Легко видеть, что тогда $\widetilde{\pi}(p_0, D)$ становится группой.

Пусть $\pi_0(p_0, D) \subset \widetilde{\pi}(p_0, D)$ — множество кривых, гомотопных нулю (т. е. в начале гомотопии $\psi(0, L^1) \equiv p_0$), нетрудно показать, что $\pi_0(p_0, D)$ — нормальная подгруппа $\widetilde{\pi}(p_0, D)$.

Фактор-группа $\pi_1(p_0, D) = \widetilde{\pi}(p_0, D)/\pi_0(p_0, D)$ называется *фундаментальной группой* многообразия D. Для кривой $\alpha \in \widetilde{\pi}(p_0, D)$ через $[\alpha]_{p_0}$ будем обозначать ее класс эквивалентности в группе $\pi_1(p_0, D)$.

Покажем, что фундаментальная группа не зависит от выбора точки p_0. Действительно, пусть p_0 и q_0 две различные точки на многообразии D и γ — некоторая кривая с началом p_0 и концом в q_0, тогда можно определить отображение $\omega : \pi_1(p_0, D) \to \pi_1(q_0, D)$, сопоставляющее каждому классу $[\alpha]_{p_0} \in \pi_1(p_0, D)$ класс $[\gamma\alpha\gamma^{-1}]_{q_0} \in \pi_1(q_0, D)$. Не сложно показать, что это отображение — изоморфизм групп, будем называть его *допустимым*. Таким образом, группы $\pi_1(p, D)$ для различных точек $p \in D$ изоморфны и фундаментальную группу можно обозначать просто $\pi_1(D)$.

Если фундаментальная группа $\pi_1(D)$ тривиальна, $\pi_1(D) = \{1\}$, то топологическое пространство D называется *односвязным*.

2.3. Дифференциальные формы. Пусть D — комплексное аналитическое многообразие. *Дифференциальной формой* (или *дифференциалом*) 1 порядка на D называется выражение, имеющее в терминах локальной координаты z_α вид

$$\omega^1 = g_1^\alpha(x_\alpha, y_\alpha)\, dx_\alpha + g_2^\alpha(x_\alpha, y_\alpha)\, dy_\alpha$$

(где $x_\alpha + iy_\alpha = z_\alpha$, $g_{1,2}^\alpha$ — комплекснозначные функции), инвариантное при переходе к другой координатной окрестности, т. е.

$$g_1^\alpha(x_\beta, y_\beta) = g_1^\alpha(x_\alpha, y_\alpha)\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} + g_2^\alpha(x_\alpha, y_\alpha)\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta},$$

$$g_2^\beta(x_\beta, y_\beta) = g_1^\alpha(x_\alpha, y_\alpha)\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta} + g_2^\alpha(x_\alpha, y_\alpha)\frac{\partial y_\alpha}{\partial y_\beta},$$

где $x_\alpha = x_\alpha(x_\beta, y_\beta)$, $y_\alpha = y_\alpha(x_\beta, y_\beta)$, причем

$$x_\alpha + iy_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta + iy_\beta) = z_\alpha \circ z_\beta^{-1}\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Аналогично дифференциальной формой (дифференциалом) 2 порядка на D называется выражение, имеющее в терминах локальной координаты вид $\omega^2 = g^\alpha(x_\alpha, y_\alpha)\, dx_\alpha\, dy_\alpha$, причем

$$g^\beta(x_\beta, y_\beta) = g^\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \cdot \det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} & \dfrac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} \\[2ex] \dfrac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta} & \dfrac{\partial y_\alpha}{\partial y_\beta} \end{vmatrix}.$$

Если ввести комплексные обозначения

$$z = x + iy, \quad dz = dx + i\,dy, \quad d\overline{z} = dx - i\,dy,$$

т. е. $d\overline{z}\, dz = 2i\, dx\, dy$, то выражения $\omega^{1,2}$ примут вид

$$\omega^1 = f_1^\alpha(z_\alpha)\, dz_\alpha + f_2^\alpha(z_\alpha)\, d\overline{z}_\alpha, \quad \omega^2 = f^\alpha(z_\alpha)\, d\overline{z}_\alpha\, dz_\alpha,$$

причем

$$f_1^\beta(z_\beta) = f_1^\alpha(z_\alpha)\frac{dz_\alpha}{dz_\beta}, \quad f_2^\beta(z_\beta) = f_2^\alpha(z_\alpha)\overline{\left(\frac{dz_\alpha}{dz_\beta}\right)},$$

$$f^\beta(z_\beta) = f^\alpha(z_\alpha)\left|\frac{dz_\alpha}{dz_\beta}\right|^2,$$

где $z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta)$, $dz_\alpha/dz_\beta = f'_{\alpha\beta}(z_\beta)$. Заметим, что и выражения $f_1^\alpha(z_\alpha)\, dz_\alpha$, $f_2^\alpha(z_\alpha)\, d\overline{z}_\alpha$ также инвариантны при аналитической замене переменных и, следовательно, являются дифференциалами 1 порядка, они называются соответственно (1,0) и (0,1) дифференциалами. Очевидно, дифференциалы 1 порядка, 2 порядка (1,0), и (0,1) образуют линейные пространства, будем эти пространства обозначать соответственно C_1, C_2, $C_1^{1,0}$, $C_1^{0,1}$. Имеем $C_1 = C_1^{1,0} \oplus C_1^{0,1}$.

Пусть $\omega_1 \in C_1^{1,0}$, $\omega_2 \in C_1^{0,1}$, $\omega_1 = f_1^\alpha(z_\alpha)\,dz_\alpha$, $\omega_2 = f_2^\alpha(z_\alpha)\,d\overline{z}_\alpha$, определим их *внешнее произведение* $\omega = \omega_2 \wedge \omega_1 = f_1^\alpha(z_\alpha) f_2^\alpha(z_\alpha)\,d\overline{z}_\alpha\,dz_\alpha$. Очевидно, ω будет дифференциалом 2 порядка.

Далее, пусть дана функция $f\colon\ D \to \mathbb{C}$, в терминах локальной координаты имеем $f^\alpha = f \circ z_\alpha^{-1}$. Определим операторы дифференцирования

$$d_{1,0} f = \frac{\partial f^\alpha}{\partial z_\alpha}\,dz_\alpha + \frac{\partial f^\alpha}{\partial \overline{z}_\alpha}\,d\overline{z}_\alpha; \qquad \partial f = \frac{\partial f^\alpha}{\partial z_\alpha}\,dz_\alpha; \qquad \overline{\partial} f = \frac{\partial f^\alpha}{\partial \overline{z}_\alpha}\,d\overline{z}_\alpha.$$

Очевидно, $d_{1,0} f \in C_1$, $\partial f \in C_1^{1,0}$, $\overline{\partial} f \in C_1^{0,1}$, $d_{1,0} = \partial \oplus \overline{\partial}$, причем ядро отображения $d_{1,0}$:

$$\ker d_{1,0} = \{f \mid d_{1,0} f = 0\} = \{f = \mathrm{const}\};$$

соответственно, ядра отображений ∂ и $\overline{\partial}$:

$\ker \overline{\partial} = \{f \mid \overline{\partial} f = 0\} = \{f^\alpha(z_\alpha)$ аналитична$\}$;

$\ker \partial = \{f \mid \partial f = 0\} = \{f^\alpha(\overline{z}_\alpha)$ аналитична$\}$.

Образ $\operatorname{im} d_{1,0} = \{\omega \mid \omega = d_{1,0} f\}$ называется пространством *точных* дифференциальных форм, аналогично, $\operatorname{im} \partial = \{\omega \mid \omega = \partial f\}$, $\operatorname{im} \overline{\partial} = \{\omega \mid \omega = \overline{\partial} f\}$ —пространства точных дифференциалов (1,0) и (0,1) соответственно.

Далее, для дифференциалов 1 порядка $\omega = f_1^\alpha\,dz_\alpha + f_2^\alpha\,d\overline{z}_\alpha$ определим оператор дифференцирования

$$d_{2,1}\omega = \left(\frac{\partial f_1^\alpha}{\partial \overline{z}_\alpha} - \frac{\partial f_2^\alpha}{\partial z_\alpha}\right) d\overline{z}_\alpha\,dz_\alpha,$$

очевидно, $d_{2,1}\colon\ C_1 \to C_2$. Пространство $\ker d_{2,1} = \{\omega \mid d_{2,1}\omega = 0\}$ называется пространством *замкнутых* дифференциалов 1 порядка. Легко видеть, что $\operatorname{im} d_{1,0} \subset \ker d_{2,1}$. Ядро отображения $d_{2,1}\colon\ C_1^{1,0} \to C_2$, т.е. $\{\omega \in C_1^{1,0} \mid d_{2,1}\omega = 0\}$ назовем пространством *аналитических* дифференциалов, локально они имеют вид $\omega = f^\alpha(z_\alpha) dz_\alpha$, где $f^\alpha(z_\alpha)$ — аналитическая функция. Соответственно, если $f^\alpha(z_\alpha)$ — мероморфная (т.е. имеющая полюса) функция z_α, то такие дифференциалы будем называть *мероморфными*.

2.4. Интегрирование. Пусть ω — дифференциал 1 порядка на D, L — кривая, $L = \varphi([0,1])$; $g(t)$, $t \in L$ — непрерывная комплекснозначная функция на L.

Пусть далее $\{U_\alpha\}$ — локально конечное покрытие L и в терминах локального параметра $\omega = f_1^\alpha(z_\alpha)\,dz_\alpha + f_2^\alpha(z_\alpha)\,d\overline{z}_\alpha$. Скажем, что система непрерывных функций $\psi_\alpha\colon\ D \to \mathbb{C}$ образует разбиение единицы, подчиненное системе $\{U_\alpha\}$, если:

1. $\operatorname{supp} \psi_\alpha = \{p \mid \psi_\alpha(p) \neq 0\}$ — компактно вложено в U_α, т.е. замыкание $\operatorname{supp} \psi_\alpha$ — компактное подмножество U_α.

2. $\sum\limits_{(\alpha)} \psi_\alpha(p) \equiv 1,\ p \in \bigcup\limits_{(\alpha)} U_\alpha.$

Так как покрытие $\{U_\alpha\}$ локально конечное, то во втором условии при каждом фиксированном p в суммировании участвует только конечное число слагаемых.

Можно доказать, что для любого локально конечного покрытия $\{U_\alpha\}$ разбиение единицы всегда существует [41, 1, 16].

Положим

$$\int\limits_L \psi_\alpha(t)g(t)\omega(t) = \int\limits_0^1 \psi_\alpha(s)g(s)[f_1^\alpha(z_\alpha(s))\,dz_\alpha(s) + f_2^\alpha(z_\alpha(s))\,d\overline{z}_\alpha(s)],$$
$$s \in [0,1],$$

где $\psi_\alpha(s) = \psi_\alpha \circ \varphi$; $g(s) = g \circ \varphi$; $z_\alpha(s) = z_\alpha \circ \varphi$; определение корректно, так как форма $\psi_\alpha(t)\,g(t)\,\omega(t)$ отлична от нуля только при $t \in L \cap U_\alpha$.

Наконец, определим

$$\int\limits_L g(t)\,\omega(t) = \sum_{(\alpha)} \int\limits_L \psi_\alpha(t)\,g(t)\,\omega(t).$$

Теперь обратимся к интегрированию дифференциалов 2 порядка. Пусть ω — дифференциал 2 порядка, $\{U_\alpha\}$ — локально конечное покрытие D, $\{\psi_\alpha\}$ — подчиненное ему разбиение единицы и в терминах локального параметра $\omega = f^\alpha(z_\alpha)\,d\overline{z}_\alpha\,dz_\alpha$, $z_\alpha \in \widetilde{U}_\alpha = z_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}$.

Положим

$$\int\limits_D \psi_\alpha\,\omega = \int\limits_{\widetilde{U}_\alpha} \psi_\alpha(z_\alpha)f^\alpha(z_\alpha)\,d\overline{z}_\alpha\,dz_\alpha,$$

$$\psi_\alpha(z_\alpha) = \psi_\alpha \circ z_\alpha^{-1}\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \int\limits_D \omega = \sum_{(\alpha)} \int\limits_D \psi_\alpha \omega.$$

Нетрудно показать, что определенные таким образом интегралы от дифференциалов 1 и 2 порядка не зависят от выбора $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ и для них имеют место обычные свойства интегралов, в частности, линейность

$$\int \alpha u + \beta v = \alpha \int u + \beta \int v, \quad \alpha, \beta = \mathrm{const}$$

и аддитивность

$$\int\limits_{U_1 \cup U_2} u = \int\limits_{U_1} u + \int\limits_{U_2} u, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Теорема (Стокса).

$$\int\limits_D d_{2,1}\,\omega = \int\limits_{\partial D} \omega,$$

ω — *дифференциал* 1 *порядка* [41].

Следствия.

1. *Если* ω – *точный дифференциал* 2 *порядка, т. е.* $\omega = d_{2,1}\omega_0$ *и* $\partial D = \emptyset$, *то* $\int\limits_D \omega = 0$.

2. *Если* ω — *аналитический дифференциал, то* $\int\limits_{\partial D} \omega = 0$ — *интегральная теорема Коши.*

3. *Если* ω — *аналитический дифференциал, то*

$$\int\limits_D \overline{\partial} f \wedge \omega = \int\limits_{\partial D} f\omega.$$

2.5. Пучки. Пусть D — топологическое пространство, $\mathbf{U}_D$ — система его открытых множеств. *Предпучком* абелевых групп на D называется пара $(\mathcal{M}, \pi)$, где:

- $\mathcal{M} = \{\Gamma(U, \mathcal{M}),\ U \in \mathbf{U}_D\}$ — семейство абелевых групп;
- $\pi = \{\pi_V^U,\ U, V \in \mathbf{U}_D,\ V \subset U\}$ — семейство гомоморфизмов $\pi_V^U\colon\ \Gamma(U, \mathcal{M}) \to \Gamma(V, \mathcal{M})$ со свойствами:

— $\pi_U^U\colon\ \Gamma(U, \mathcal{M}) \to \Gamma(U, \mathcal{M})$ — тождественный $\forall\, U \in \mathbf{U}_D$;

— $\pi_W^V \circ \pi_V^U = \pi_W^U$, $W \subset V \subset U$.

Гомоморфизмы π_V^U называются *гомоморфизмами сужения*, обычно обозначают $\pi_V^U(f) = f\big|_V$, $f \in \Gamma(U, \mathcal{M})$. Когда ясно, о каких сужениях идет речь, предпучок будем обозначать просто $\mathcal{M}$.

Предпучок $(\mathcal{M}, \pi)$ называется пучком, если $\forall\, U \in \mathbf{U}_D$, и для любой системы открытых множеств $\{U_i, i \in I\} \subset \mathbf{U}_D$ таких, что $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, выполнены условия:

- если $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ и $\forall\, i \in I$ $f\big|_{U_i} = g\big|_{U_i}$, то $f = g$;
- если $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{M})$, $i \in I$ и $\forall\, i, j \in I$ $f_j\big|_{U_i \cap U_j} = f_j\big|_{U_i \cap U_j}$, то

$$\exists f \in \Gamma(U, \mathcal{M})\colon\ f\big|_{U_i} = f_i.$$

Элемент $f \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ называют *сечением* пучка $\mathcal{M}$ на U.

Пусть $\Gamma(U, \mathcal{N})$ — подгруппы $\Gamma(U, \mathcal{M})$, $U \in \mathbf{U}_D$, причем:

— $\pi_V^U\colon\ \Gamma(U, \mathcal{N}) \to \Gamma(V, \mathcal{N})$; $\forall\, U \in \mathbf{U}_D$;

— если $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, $f \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ и $\forall\, i \in I$ $f\big|_{U_i} \in \Gamma(U, \mathcal{N})$, то $f \in \Gamma(U, \mathcal{N})$.

Тогда, очевидно, $\mathcal{N} = \{\Gamma(U, \mathcal{N}), U \in \mathbf{U}_D\}$ с отображениями сужения π образует пучок, который называется *подпучком* $\mathcal{M}$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$.

Далее, пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ и $\Gamma(U, \mathcal{R}) = \Gamma(U, \mathcal{M})/\Gamma(U, \mathcal{N})$ — фактор-группы. Тогда отображения сужения π_V^U индуцируют гомоморфизмы фактор-групп $\sigma_V^U\colon\ \Gamma(U, \mathcal{R}) \to \Gamma(V, \mathcal{R})$ и, очевидно, $(\mathcal{R}, \sigma), \mathcal{R} = \{\Gamma(U, \mathcal{R}), U \in \mathbf{U}_D\}$, $\sigma = \{\sigma_V^U,\ U, V \in \mathbf{U}_D, V \subset U\}$ — предпучок. Можно показать, что по $(\mathcal{R}, \sigma)$ строится пучок, который называют *фактор-пучком* $\mathcal{R} = \mathcal{M}/\mathcal{N}$ [41, 1].

Пусть имеются два пучка $(\mathcal{M}, \pi)$ и $(\mathcal{N}, \sigma)$. Семейство гомоморфизмов $\varphi = \{\varphi_U,\ U \in \mathbf{U}_D\}$, $\varphi_U\colon\ \Gamma(U, \mathcal{M}) \to \Gamma(U, \mathcal{N})$ называется *отображением пучков*, если $\forall\, U, V \in \mathbf{U}_D$, $V \subset U$ $\varphi_V \pi_V^U = \sigma_V^U \varphi_U$. Для отображения пучков можно определить *ядро*

$$\ker \varphi = \{f \in \Gamma(U, \mathcal{M}) \,|\, \varphi_U f = 0 \in \Gamma(U, \mathcal{N})\}$$

и *образ*

$$\operatorname{im} \varphi = \{g \in \Gamma(U, \mathcal{N}) \,|\, \exists f \in \Gamma(U, \mathcal{M})\colon\ g = \varphi_U f\}.$$

Очевидно $\ker \varphi$ — подпучок $\mathcal{M}$, $\operatorname{im} \varphi$ — подпучок $\mathcal{N}$.

В частности, имеем каноническое отображение пучка на фактор-пучок $\varphi_0\colon\ (\mathcal{M}, \pi) \to (\mathcal{R}, \sigma)$, $\mathcal{R} = \mathcal{M}/\mathcal{N}$, причем $\ker \varphi_0 = \mathcal{N}$.

§ 3. Аналитические и мероморфные функции и дифференциалы на римановой поверхности. Дивизоры.

3.1. Определения. Для определения римановой поверхности имеются различные подходы: с помощью многозначных аналитических функций [41, 1], факторизацией комплексной плоскости по орбитам фуксовой группы [4] и т. д. Нам достаточно будет общего абстрактного определения: компактная риманова поверхность D — это компактное комплексное аналитическое многообразие (без края) размерности единица.

Голоморфное отображение $f\colon\ U \subset D \to \mathbb{C}$ будем называть *аналитической функцией в* U, а $f\colon\ U \subset D \to \overline{\mathbb{C}}$ — *мероморфной функцией в* U ($f(p) \equiv \infty$ — не считается функцией). Таким образом, для любого открытого множества $U \subset D$ имеем кольцо аналитических $\mathcal{A}_U$ и мероморфных $\mathcal{M}_U$ функций.

Если f мероморфна на U и $f(p) = 0$, $p \in U$ $(f \not\equiv 0)$, то *порядок нуля* $\nu_0(f, p)$ — это порядок нуля аналитической функции $f_\alpha = f \circ z_\alpha^{-1}$ в точке $z_\alpha(p)$, $p \in U_\alpha$. Очевидно, $\nu_0(f, p)$ — не зависит от выбора $\{U_\alpha, z_\alpha\}$. Аналогично определим *порядок полюса* $\nu_\infty(f, q) = \nu_0(1/f, q)$, $f(q) = \infty$.

На компактной римановой поверхности имеет место теорема Лиувилля — если f аналитична на D, то $f \equiv \mathrm{const}$ [41].

3.2. Примеры пучков: ростки аналитических и мероморфных функций. Дивизоры. Пусть $\Gamma(U, \mathcal{M}) = \mathcal{A}_U$ — группа голоморфных в U функций по сложению. Соответствующий пучок с естественными сужениями называют пучком *ростков голоморфных функций* $\mathcal{A}$. Аналогично введем пучок $\mathcal{M}$ *ростков мероморфных функций*, пучки $\mathcal{A}^*$ — ростков голоморфных функций, не равных нулю ни в одной точке и $\mathcal{M}^*$ — ростков мероморфных функций, не равных нулю тождественно, для последних двух пучков групповая операция — умножение. Очевидно, $\mathcal{A}$ — подпучок $\mathcal{M}$, $\mathcal{A}^*$ — подпучок $\mathcal{M}^*$. Фактор-пучок $\Omega = \mathcal{M}^*/\mathcal{A}^*$ называется пучком *ростков дивизоров*. Поскольку локально, с точностью до умножения на голоморфные не равные нулю функции, каждая мероморфная функция определяется только своими нулями и полюсами с учетом кратности, то сечения Ω — это фактически набор $\Delta = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s} q_1^{-m_1} q_2^{-m_2} \ldots q_l^{-m_l}$, где p_j — нули с кратностями, соответственно, n_j, q_k — полюса с кратностями m_k.

Будем записывать сечения Ω в указанном виде и называть *дивизорами*. Очевидно, умножению сечений Ω соответствует естественная операция умножения дивизоров со «сложением или вычитанием степеней при одинаковом основании», при этом выражение вида p^0 из дивизора выпадает. Дивизор без нулей и полюсов будем обозначать 1. Группу дивизоров $\Gamma(D, \Omega)$ будем также обозначать Ω.

Дивизор, не имеющий полюсов, будем называть *положительным* (запись $\Delta \geqslant 1$). Таким образом, любой дивизор $\Delta = P/Q$, $P = p_1^{n_1} \ldots p_s^{n_s} \geqslant 1$, $Q = q_1^{m_1} \ldots q_l^{m_l} \geqslant 1$. Определим степень дивизора

$$\deg \Delta = \sum_{j=1}^{s} n_j - \sum_{k=1}^{l} m_k = \deg P - \deg Q.$$

Очевидно $\deg\colon\ \Omega \to \mathbb{Z}$ — гомоморфизм, т.е. $\deg(\Delta_1 \cdot \Delta_2) = \deg \Delta_1 + \deg \Delta_2$.

Пусть $f \in \Gamma(D, \mathcal{M}^*)$, тогда $d \ln f = \partial \ln f$ — аналитический дифференциал в области, не содержащей нулей и полюсов f. Пусть $f(p) = 0$ и l_p — контур, окружающий p и не содержащий внутри себя других нулей или полюсов f, тогда, переходя к локальному представлению, легко получим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_p} \partial \ln f = \nu_0(f, p).$$

Аналогично, если q — полюс f, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_q} \partial \ln f = -\nu_\infty(f, q).$$

Отсюда, с учетом интегральной теоремы Коши, получим принцип аргумента

$$\int_{\partial U} \partial \ln f = \sum_{p\in U} \nu_0(f,p) - \sum_{q\in U} \nu_\infty(f,q) \tag{3.1}$$

и, в частности, для всей D

$$\sum_{(p)} \nu_0(f,p) - \sum_{(q)} \nu_\infty(f,q) = 0. \tag{3.2}$$

3.3. Линейные расслоения. Пусть $\{U_\alpha\}$ — базис открытых множеств D. *Голоморфное линейное расслоение* ξ задается системой аналитических функций (функций перехода) $\xi_{\alpha\beta}\colon\ U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}$ таких, что

- $\xi_{\alpha\beta} \neq 0, \quad \xi_{\alpha\alpha} \equiv 1;$
- $\xi_{\alpha\beta} \circ \xi_{\beta\gamma} = \xi_{\alpha\gamma}, \quad p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$

Для линейных расслоений естественным образом вводится операция умножения — если расслоение ξ^1 имеет функции перехода $\xi^1_{\alpha\beta}$, то произведение расслоений $\xi\xi^1$ имеет функции перехода $\xi_{\alpha\beta}\xi^1_{\alpha\beta}$.

Расслоения ξ и ξ^1 называются *эквивалентными*, если

$$\forall\, \alpha, \beta \quad \xi^1_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \xi_{\alpha\beta} \varphi_\beta^{-1},$$

φ_α аналитичны в U_α и не обращаются в нуль.

Отождествив эквивалентные расслоения, получим группу линейных расслоений $H^* = H^*(D)$.

Набор аналитических функций $f = \{f_\alpha\}$, $f_\alpha\colon\ U \cap U_\alpha \to \mathbb{C}$ называется *сечением* расслоения ξ, если $f_\alpha(p) = \xi_{\alpha\beta}(p) f_\beta(p)$, $p \in U_\alpha \cap \cap U_\beta, \forall\, \alpha, \beta$. Сечения образуют абелевы группы сечений по сложению, соответствующий этим группам пучок называется пучком *ростков голоморфных сечений расслоения* ξ, обозначим его $\mathcal{A}(\xi)$. Аналогично определяются пучки мероморфных сечений $\mathcal{M}(\xi)$ и, соответственно, пучки $\mathcal{A}^*(\xi)$, $\mathcal{M}^*(\xi)$.

3.4. Абелевы дифференциалы и интегралы. Пусть $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ — атлас D и $\xi^0_{\alpha\beta} = \Big[(d/dz)(z_\alpha \circ z_\beta^{-1})\Big]$, $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Обозначим ξ^0 — расслоение с функциями перехода $\xi^0_{\alpha\beta}$ (далее — *каноническое расслоение*) и $\overline{\xi}^0$ — расслоение с функциями перехода $\overline{\xi}^0_{\alpha\beta}$. Сечениям ξ^0 и $\overline{\xi}^0$ будут канонически соответствовать дифференциалы типа (1,0) или (0,1).

Естественно отождествлять сечения ξ^0, $\overline{\xi}^0$ и соответствующие им дифференциалы. Сечения $w \in \Gamma(D, \mathcal{M}(\xi^0))$ называются *абелевыми дифференциалами*, а $w \in \Gamma(D, \mathcal{A}(\xi^0))$ — абелевыми дифференциалами 1 рода.

Группа $\Gamma(D, \mathcal{A}(\xi^0))$ представляет собой конечномерное линейное пространство, его размерность ρ является топологическим инвариантом D и называется *родом* поверхности D [1]. В частности, род римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$ равен нулю. С точностью до гомеоморфизма поверхность рода $\rho > 0$ представляет собой сферу с ρ ручками, в частности, при $\rho = 1$ получим тор [41]. Отсюда нетрудно сделать вывод, что для компактной римановой поверхности рода $\rho > 0$ фундаментальная группа $\pi_1(D)$ порождена 2ρ элементами — кривыми, «разрезающими» каждую ручку «поперек» α_j и «вдоль» β_j. При этом выполнено соотношение [41, 1, 4]

$$\prod_{j=1}^{\rho} \alpha_j \beta_j^{-1} \alpha_j^{-1} \beta_j = 1.$$

Пусть w — абелев дифференциал, точки $q_0, q \in D$ и $L_{q_0 q}$ — кривая на D, соединяющая q_0 и q. Функция

$$f(q) = \int\limits_{L_{q_0 q}} w = \int\limits_{q_0}^{q} w$$

называется *абелевым интегралом*. Вообще говоря, абелев интеграл — неоднозначная функция, так как она зависит от кривой, соединяющей точки q_0 и q. С другой стороны, $f(q)$ локально аналитична и $\partial f(q) = w$.

3.5. Нули и полюса сечений линейных расслоений. Группа классов дивизоров. Вычеты. Пусть $f \in \Gamma(D, \mathcal{M}^*)$ — мероморфная функция. Представитель f в группе дивизоров Ω назовем дивизором функции f: $\Delta = (f)$ или *главным дивизором*. Главные дивизоры, очевидно, образуют группу, которую обозначим $\widetilde{\Omega}$. Из предыдущего следует (см. п. 3.2), что $\deg \Delta = 0$ при $\Delta \in \widetilde{\Omega}$.

Пусть $\Omega_0 = \{\Delta \in \Omega \mid \deg \Delta = 0\}$, образуем фактор-группы $\Omega_0^* = \Omega_0/\widetilde{\Omega}$, $\Omega^* = \Omega/\widetilde{\Omega}$, $\Omega_1 = \Omega/\Omega_0$. Очевидно, $\Omega_1 \approx \mathbb{Z} = \{\deg \Delta\}$ и $\Omega^* = \Omega_1 \times \Omega_0^*$.

Группы Ω^* и Ω_0^* будем называть, соответственно, *группой классов дивизоров* и *группой классов дивизоров нулевой степени*; дивизоры Δ_1 и Δ_2 назовем *эквивалентными*, если у них один представитель в группе Ω^*, т. е. $\Delta_1/\Delta_2 \in \widetilde{\Omega}$.

Как известно, на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$ любой дивизор степени ноль — главный, т. е. $\Omega_0^* = 1$ и $\Omega^* \approx \mathbb{Z}$. Вообще говоря, на произвольной римановой поверхности $\Omega_0^* \neq 1$ (см. далее).

Пусть $f = \{f_\alpha\}$ — сечение расслоения ξ и $p \in U \cap U_\alpha$ — нуль или полюс f_α. Поскольку $\xi_{\alpha\beta} \neq 0$, то порядок $\nu_0(f_\alpha, p)$ или $\nu_\infty(f_\alpha, p)$ не зависит от α. Отсюда следует, что фактор-пучок $\mathcal{M}^*(\xi)/\mathcal{A}^*(\xi)$ — это все тот же пучок ростков дивизоров Ω и каждому глобальному сечению $f \in \Gamma(D, \mathcal{M}^*(\xi))$ соответствует представитель в Ω, который назовем *дивизором сечения* f: $\Delta = (f)$. Заметим, что если $f_1, f_2 \in \Gamma(D, \mathcal{M}^*(\xi))$, то $f_1/f_2 \in \Gamma(D, \mathcal{M}^*)$ — мероморфная функция и, значит, дивизоры всех мероморфных сечений расслоения эквивалентны. Более того, легко показать, что и дивизоры сечений эквивалентных расслоений также эквивалентны между собой. С другой стороны, справедливо и обратное утверждение, т. е. $\forall\,\Delta \in \Omega^*$ существует расслоение ξ такое, что дивизоры его сечений (f) эквивалентны Δ. Это значит, что группы Ω^* и $H^* = H^*(D)$ изоморфны. В частности, степень дивизоров сечений $\deg\Delta = \varkappa_\xi$ — топологический инвариант ξ и называется *классом Чженя расслоения* ξ [1, 4]. Для тривиального расслоения ξ_1 ($\xi^1_{\alpha\beta} \equiv 1$) $\varkappa_{\xi_1} = 0$.

Пусть $w \in \Gamma(D, \mathcal{M}^*(\xi^0))$ — абелев дифференциал. Аналогично предыдущему определим дивизор абелева дифференциала (w). Отметим, что класс Чженя расслоения ξ^0 $\varkappa_{\xi^0} = 2\rho - 2$, где ρ — род D, т. е. $\deg(w) = 2\rho - 2$ [41].

Пусть q — полюс абелева дифференциала w и l_q — контур, окружающий q и не содержащий внутри себя других полюсов w. Определим *вычет* w в точке q

$$\operatorname{Res} w(q) = \operatorname{Res} w\big|_q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_q} w.$$

Из интегральной теоремы Коши сразу следует, что $\sum\limits_{(q)} \operatorname{Res} w(q) = 0$.

Пусть теперь q — полюс первого порядка, $\operatorname{Res} w(q) = 1$ и U_q — область, ограниченная контуром l_q. Тогда, применяя теорему Стокса, получим как и на комплексной плоскости, что

- если $f \in \Gamma(U_q, \mathcal{A})$, то $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_q} fw = f(q)$ — интегральная формула

Коши [41];

- если $f \in \mathrm{C}_0(U_q)$, то

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{U_q} \overline{\partial} f \wedge w = f(q) \tag{3.3}$$

— теорема Помпею [41];

- если $f \in \mathrm{C}_0(U_q)$, аналитична в окрестности q, а в q имеет полюс первого порядка, w — аналитичен в q, то

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{U_q} \overline{\partial} f \wedge w = \operatorname{Res} fw\big|_q. \tag{3.4}$$

3.6. Теорема Римана–Роха. Пусть f — мероморфная функция, Δ — дивизор. Скажем, что f кратна Δ, $\Delta|(f)$, если $(f)/\Delta \geqslant 1$. Очевидно, множество функций, кратных Δ, образует линейное пространство $L_\Delta = \{f|\ \Delta|(f)\}$ (считается, что $f \equiv 0$ кратна любому дивизору). Обозначим $r[\Delta] = \dim L_\Delta$. В частности, если $\Delta = 1$, то $L_1 = \{f = \mathrm{const}\}$ (теорема Лиувилля) и $r[1] = 1$; при $\deg\Delta > 0$ $r[\Delta] = 0$, так как всегда $\deg(f) = 0$. Аналогично абелев дифференциал w кратен Δ, $\Delta|(w)$, если $(w)/\Delta \geqslant 1$, введем $L^*_\Delta = \{w|\ \Delta|(w)\}$ и $i[\Delta] = \dim L^*_\Delta$. В частности, $L^*_1 = \Gamma(D, \mathcal{A}(\xi^0))$ и $i[1] = \rho$; при $\deg\Delta > 2\rho - 2$ $i[\Delta] = 0$.

Заметим, что если дивизоры Δ_1 и Δ_2 эквивалентны, то пространства L_{Δ_1} и L_{Δ_2} изоморфны, $L_{\Delta_1} = f_0 L_{\Delta_2}$, $(f_0) = \Delta_2/\Delta_1$, f_0 — мероморфная функция. Аналогично изоморфны и $L^*_{\Delta_1}$, $L^*_{\Delta_2}$. Таким образом, характеристики $r[\Delta]$, $i[\Delta]$ определены фактически для класса эквивалентных дивизоров, т. е. на группе Ω^*.

Теорема Римана–Роха. $\forall\,\Delta \quad r[\Delta^{-1}] < \infty,\ i[\Delta] < \infty$ *и* $r[\Delta^{-1}] = i[\Delta] + \deg\Delta - \rho + 1$, ρ — *род* D [41, 1].

3.7. Строение группы Ω^*. Пусть $w_1, \ldots, w_\rho$ — базис абелевых дифференциалов первого рода на поверхности D, $\pi_1(D)$ — фундаментальная группа D. Рассмотрим отображение

$$f\colon\ \pi_1(D) \to \mathbb{C}^\rho = \mathbb{R}^{2\rho},$$

$$f(L) = \left(\int\limits_L w_1, \int\limits_L w_2, \ldots, \int\limits_L w_\rho\right) \in \mathbb{C}^\rho, \quad L \in \pi_1(D).$$

В силу интегральной теоремы Коши, если L — гомотопен нулю и, следовательно, ограничивает на D некую область D^+, то $\int\limits_L w_k = 0$, $k = \overline{1,\rho}$ и, таким образом, отображение f определено корректно и является гомоморфизмом $\pi_1(D)$ в $\mathbb{R}^{2\rho}$. Образ $f(\pi_1(D)) = \mathcal{L}(w)$ образует решетку в $\mathbb{R}^{2\rho}$. Эту решетку называют решеткой периодов, а фактор-группу $\mathbb{R}^{2\rho}/\mathcal{L}(w) = \mathrm{Jac}(D)$ — *группой Якоби поверхности* D. Ясно, что решетка $\mathcal{L}(w)$ зависит от выбора базиса $w_1, \ldots, w_\rho$, но группа $\mathrm{Jac}(D)$ определена с точностью до изоморфизма однозначно.

Пусть $\Delta = p_1 \ldots p_n q_1^{-1} \ldots q_n^{-1}$ — дивизор степени ноль, L_Δ — гладкая кривая на D, соединяющая полюса q_j и нули p_k (см. рис. 7), обозначим

$$\int\limits_\Delta w_k = \int\limits_{L_\Delta} w_k, \quad k = \overline{1,\rho}.$$

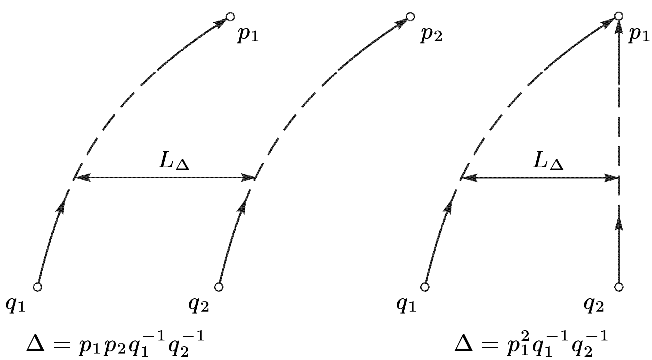

Рис. 7

Ясно, что $\int\limits_{\Delta} w_k$ неоднозначен, так как кривая L_Δ определяется с точностью до группы $\pi_1(D)$. Однако отображение $J\colon\ \Omega_0 \to \mathrm{Jac}(D)$,

$$J(\Delta) = \Bigl(\int\limits_{\Delta} w_1, \int\limits_{\Delta} w_2, \ldots, \int\limits_{\Delta} w_\rho\Bigr)(\mathrm{mod}\,\mathcal{L}) = a \in \mathrm{Jac}(D)$$

определено корректно. Будем записывать

$$a = (a_1, \ldots, a_\rho) = \Bigl(\int\limits_{\Delta} w_1, \ldots, \int\limits_{\Delta} w_\rho\Bigr) = \int\limits_{\Delta} \mathbf{w} \in \mathrm{Jac}(D).$$

Теорема 3.1 (Абеля). $\ker J = \widetilde{\Omega}$.

Это, в частности, означает, что дивизор Δ — главный тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\Delta} \mathbf{w} = 0\ (\mathrm{mod}\,\mathcal{L}). \tag{3.5}$$

Из теоремы 3.1 следует, что J индуцирует взаимно-однозначное отображение $J^*\colon\ \Omega_0^* \to \mathrm{Jac}(D)$.

Теорема 3.2. *J^* — изоморфизм.*

Теоремы 3.1 и 3.2 позволяют задать некую параметризацию группы Ω^*. Именно, пусть $r_0 \in D$ — фиксированная точка, тогда любой дивизор Δ можно однозначно представить в виде

$$\Delta = r_0^{\varkappa}\Delta_0, \quad \varkappa = \deg\Delta, \quad \deg\Delta_0 = \deg(r_0^{-\varkappa}\Delta) = 0,$$

т. е. $\Delta_0 \in \Omega_0$. Отсюда любой класс дивизоров $\Delta \in \Omega^*$ имеет вид $\Delta = r_0^{\varkappa}\Delta_0$, $\varkappa = \deg\Delta$, $\Delta_0 \in \Omega_0^*$, в частности, это представление и реализует изоморфизм $\Omega^* \approx \mathbb{Z} \times \Omega_0^*$, $\mathbb{Z} = \{\deg\Delta\}$.

Следствие (параметризация классов дивизоров).

$$\Omega^* \approx \mathbb{Z} \times \mathrm{Jac}(D).$$

Указанный изоморфизм реализует отображение

$$J(\Delta) = (\deg\Delta, \int\limits_{\Delta\cdot r_0^{-\varkappa}} \mathbf{w}) = (\varkappa, a) \in \mathbb{Z} \times \mathrm{Jac}(D).$$

Понятно, что такое соответствие зависит от выбора точки r_0 и базиса $w_1, \ldots, w_\rho$.

В дальнейшем элемент $(\varkappa, a) \in \mathbb{Z} \times \mathrm{Jac}(D)$, соответствующий дивизору Δ, будем называть *координатами* Δ или координатами соответствующего класса дивизоров. Все характеристики, определяемые для классов дивизоров, зависят, таким образом, только от координат класса $(\varkappa, a)$. В частности, будем обозначать $r[\Delta^{-1}] = l(\varkappa, a)$, $i[\Delta] = l^*(\varkappa, a)$.

В следующем параграфе приведем доказательство указанных классических теорем 3.1 и 3.2. Выбранный нами несколько своеобразный метод их доказательства непосредственно связан с излагаемой далее теорией краевых задач.

§ 4. Дифференциал $K_0(p,q)$

4.1. Построение и свойства. Пусть D^ρ — риманова поверхность рода $\rho > 0$, $w_1, w_2, \dots w_\rho$ — базис абелевых дифференциалов 1 рода на D^ρ, $(r_1, r_2, \dots, r_\rho) \in D^\rho$ — произвольный набор точек. Введем

$$\omega(r_1, r_2, \dots, r_\rho) = \det \begin{vmatrix} w_1(r_1) & w_2(r_1) & \dots & w_\rho(r_1) \\ w_1(r_2) & w_2(r_2) & \dots & w_\rho(r_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1(r_\rho) & w_2(r_\rho) & \dots & w_\rho(r_\rho) \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

— *полилинейный* дифференциал на D^ρ. Условие $\omega(r_1, r_2, \dots, r_\rho) = 0$, очевидно, определяет гиперповерхность в D^ρ комплексной коразмерности единица (при $\rho > 1$), т. е. в любом случае нигде не плотное множество в D^ρ. В частности, в окрестности любой точки $r_0 \in D$ всегда существуют $r_1, \dots, r_\rho$ такие, что $\omega(r_1, \dots, r_\rho) \neq 0$.

Лемма 4.1. *Пусть* $\omega(r_1, \dots, r_\rho) \neq 0$ *и дивизор* $\Delta = r_1 r_2 \dots r_\rho r_0^{-1}$; $r_0 \neq r_j$, $j = \overline{1, \rho}$. *Тогда* $r[\Delta^{-1}] = i[\Delta] = 0$.

Доказательство. Пусть $\Delta \mid (w)$, w — абелев дифференциал. Поскольку r_0 — единственный полюс первого порядка w, а для любого абелева дифференциала сумма вычетов в полюсах равна нулю, то $\operatorname{Res} w(r_0) = 0$, т. е. $r_1 r_2 \dots r_\rho \big| (w)$, w — абелев дифференциал 1 рода. Тогда $w = \sum\limits_{k=1}^{\rho} c_k w_k$, $c_k = \text{const}$ и условие $w(r_1) = \ldots = w(r_\rho) = 0$ означает линейную зависимость столбцов матрицы в (4.1). Но $\omega(r_1, \dots, r_\rho) \neq 0$, значит $c_k = 0$, $k = \overline{1, \rho}$, т. е. $w \equiv 0$ и $i[\Delta] = 0$. Далее, по теореме Римана–Роха $r[\Delta^{-1}] = i[\Delta] + \deg \Delta - \rho + 1 = 0$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть* $\Delta_q = \Delta q^{-1} = r_1 \dots r_\rho r_0^{-1} q^{-1}$, $q \neq r_j$, $j = \overline{0, \rho}$. *Тогда* $i[\Delta_q] = 1$.

Доказательство. Пусть $\Delta^{-1} q \mid (f)$, где f — мероморфная функция. Тогда тем более $\Delta^{-1} \mid (f)$ и так как $r[\Delta^{-1}] = 0$, то $f \equiv 0$, т. е. $r[\Delta^{-1} q] = 0$. Далее, по теореме Римана–Роха, $i[\Delta_q] = r[\Delta^{-1} q] - \deg \Delta_q + \rho - 1 = 1$. Лемма доказана.

Дифференциал, кратный Δ_q, будем обозначать $K_0(p,q)$, $q = \text{const} \in D$, p — переменная. Нормируем его условием $\operatorname{Res} K_0(q,q) = 1$ (это возможно, так как $\operatorname{Res} K_0(q,q) \neq 0$, ибо в противном случае $K_0(p,q)$ кратно Δ, т. е. $K_0(p,q) \equiv 0$, что противоречит лемме 4.2). Тогда с учетом леммы 4.2 $K_0(p,q)$ определен однозначно, в частности $K_0(p,q)$ однозначно зависит от q.

Изучим свойства $K_0(p,q)$ подробнее, для чего выведем его специальное представление. Сначала заметим, что если $\omega(r_1, \dots, r_\rho) \neq 0$, то базис абелевых дифференциалов $w_1, \dots, w_\rho$ можно выбрать так, чтобы $w_j(r_k) = 0$, $k \neq j$, при этом, конечно, $w_j(r_j) \neq 0$. Однако при этом дифференциалы w_j определяются неоднозначно, с точностью до умножения на произвольную константу. Возьмем достаточно малые окрестности U_j точек r_j и зафиксируем для них локальные параметры. В терминах этих локальных параметров $w_j(p) = f_j(p)\,dp$, $p \in U_j$, где $f_j(p)$ аналитичны в U_j, $f_j(r_j) \neq 0$. Потребуем, чтобы $f_j(r_j) = 1$. Теперь базис $w_1, \ldots, w_\rho$ определен однозначно и будем считать его фиксированным.

В дальнейшем, если аналитическая функция $f(p)$ имеет полюс в точке r_j, то будем обозначать

$$\operatorname{Res} f(r_j) = \operatorname{Res} f(p) w_j(p)\Big|_{p=r_j}.$$

Для построения $K_0(p,q)$ нам понадобится *билинейный дифференциал* $\omega(p,q)$ — симметричный (т. е. $\omega(p,q) = \omega(q,p)$), абелев дифференциал по p и q, имеющий единственный двукратный полюс при $p = q$. Такой дифференциал $\omega(p,q)$ существует и определяется, вообще говоря, неоднозначно [41].

С помощью $\omega(p,q)$ построим некоторые вспомогательные функции и дифференциалы.

1. Пусть $\omega_{qr_0}(p) = \int\limits_{r_0}^{q} \omega(p,t)$, где интегрирование ведется по t. Очевидно, $\omega_{qr_0}(p)$ — абелев дифференциал по p, имеющий полюса порядка 1 в точках q и r_0. Как известно [41, 1], $\omega(p,q)$ можно всегда выбрать так, чтобы

$$\operatorname{Res} \omega_{qr_0}(q) = 1 \tag{4.2}$$

(соответственно, $\operatorname{Res} \omega_{qr_0}(r_0) = -1$), при этом по-прежнему $\omega(p,q)$ определен неоднозначно.

Зафиксируем $\omega(p,q)$, подчиненный условию (4.2). Как функция от q $\omega_{qr_0}(p)$ — абелев интеграл, т. е. аналитическая, но, вообще говоря, неоднозначная функция.

2. Пусть $p \in U_j$, тогда в терминах локального параметра по p $\omega(p,q) = \omega_j(p,q)\,dp$, где $\omega_j(p,q)$ — аналитическая функция по $p \in U_j$ и абелев дифференциал по $q \in D$. Тогда $\omega_j(q) = \omega_j(r_j, q)$ — абелев дифференциал, имеющий один двукратный полюс в точке r_j, причем, так как сумма вычетов должна быть равна нулю, то $\operatorname{Res} \omega_j(r_j) = 0$. Введем абелевы интегралы $c_j(q) = \int\limits_{r_0}^{q} \omega_j(t)$. Они имеют простые полюса в точках $q = r_j$.

Лемма 4.3. 1. *Абелев дифференциал* $u_j(p) = \omega_{qr_0}(p) - c_j(q) w_j(p)$, $q = \mathrm{const}$ *имеет нуль в точке* $p = r_j$.
2. *В принятых обозначениях* $\operatorname{Res} c_j(r_j) = -1$.

Доказательство. Пусть $p \in U_j$, в терминах локального параметра $\omega(p,q) = \omega_j(p,q)\,dp$ и значит

$$\omega_{qr_0}(p) = \int\limits_{r_0}^{q} \omega(p,t) = \left[\int\limits_{r_0}^{q} \omega_j(p,t)\right] dp =$$

$$= \left[\int\limits_{r_0}^{q} \big\{\omega_j(r_j,t) + \omega_j(p,t) - \omega_j(r_j,t)\big\}\right] dp =$$

$$= \left[\int\limits_{r_0}^{q} \omega_j(t) + \widetilde{\omega}_j(p)\right] dp = [c_j(q) + \widetilde{\omega}_j(p)]\,dp,$$

причем $\widetilde{\omega}_j(r_j) = 0$. Тогда

$$u_j(p) = \omega_{qr_0}(p) - c_j(q)w_j(p) = [c_j(q) + \widetilde{\omega}_j(p)]\,dp - c_j(q)f_j(p)\,dp =$$
$$= [\widetilde{\omega}_j(p) + c_j(q)(1 - f_j(p))]\,dp$$

и так как $f_j(r_j) = 1$, $\widetilde{\omega}(r_j) = 0$, то $u_j(p) = 0$ при $p = r_j$, $\forall\, q$.

Теперь пусть $q \in U_j$, $r_0 \in U_j$. В терминах локальных параметров по p и q имеем

$$\omega(p,q) = \frac{f(p,q)}{(p-q)^2}\,dp\,dq,$$

$f(p,q)$ аналитична по p и q, $f(p,q) = f(q,p)$ и $f(p,p) \neq 0$. Тогда, соответственно,

$$\omega_j(q) = \omega_j(r_j,q) = \frac{f(r_j,q)}{(r_j-q)^2}\,dq = \frac{f(q,r_j)}{(q-r_j)^2}\,dq$$

и так как $\operatorname{Res}\omega_j(r_j) = 0$, то

$$f(q,r_j) - f(r_j,r_j) = (q-r_j)^2 f_0(q), \tag{4.3}$$

где $f_0(q)$ аналитична в U_j.

Далее

$$\omega_{r_jr_0}(p) = \left[\int\limits_{r_0}^{r_j} \frac{f(p,t)\,dt}{(p-t)^2}\right] dp = \left[\int\limits_{r_0}^{r_j} \frac{f(p,r_j) + f(p,t) - f(p,r_j)}{(p-t)^2}\,dt\right] dp =$$

$$= f(p,r_j)\left[\frac{1}{p-r_j} - \frac{1}{p-r_0}\right] dp + f_1(p)\,dp,$$

причем из (4.3) легко следует, что $f_1(p)$ аналитична в U_j, откуда $\operatorname{Res}\omega_{r_jr_0}(r_j) = f(r_j,r_j)$, т.е. $f(r_j,r_j)=1$. Следовательно,

$$c_j(q) = \int\limits_{r_0}^{q} \omega_j(t) = \int\limits_{r_0}^{q} \frac{f(t,r_j)}{(t-r_j)^2}\,dt = \int\limits_{r_0}^{q} \frac{f(r_j,r_j)+f(t,r_j)-f(r_j,r_j)}{(t-r_j)^2}\,dt =$$

$$= f(r_j,r_j)\Big[\frac{1}{r_j-q} - \frac{1}{r_j-r_0}\Big] + f_2(q),$$

причем, в силу (4.3), $f_2(q)$ аналитична в U_j. Но так как $f(r_j,r_j)=1$, то в принятых обозначениях

$$\operatorname{Res} c_j(r_j) = \operatorname{Res}\frac{1}{r_j-q}\,f_j(q)\,dp\Big|_{r_j} = -1.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.4.

$$K_0(p,q) = \omega_{qr_0}(p) - \sum_{j=1}^{\rho} c_j(q)w_j(p). \tag{4.4}$$

Доказательство. Достаточно проверить свойства правой части (4.4) по переменной p при фиксированном q. Во-первых, это, очевидно, абелев дифференциал, кратный $q^{-1}r_0^{-1}$ (как и $\omega_{qr_0}(p)$), причем $\operatorname{Res}K_0(q,q) = \operatorname{Res}\omega_{qr_0}(q) = 1$ (и, соответственно, $\operatorname{Res}K_0(r_0,q) = -1$). Осталось показать, что $K_0(p,q)$ имеет нули в точках $p = r_1, r_2, \ldots, r_\rho$. Используя первое утверждение леммы 4.3 и условия нормировки $w_j(r_k) \neq 0$, $k \neq j$, получим $\omega_{qr_0}(p) - c_k(q)w_k(p) - \sum\limits_{j\neq k} c_j(q)w_j(p) = 0$, при $p = r_k$, $k = \overline{1,\rho}$. Лемма доказана.

Следствие 1. $K_0(p,q)$ — *однозначная функция по q, аналитическая всюду, кроме точек $q=p$ и $q=r_j$, $j=\overline{1,\rho}$, причем $K_0(p,r_0)\equiv 0$.*

Это утверждение, очевидно следует из (4.4) и определения $\omega_{qr_0}(p)$, $c_j(q)$.

Следствие 2. *Пусть L — гладкая кривая, причем $r_j \overline{\in} L$, $j=\overline{0,\rho}$ и $g(t)\in C^\alpha(L)$. Обозначим*

$$\Phi(z) = \int\limits_L K_0(t,z)\,g(t).$$

Тогда $\Phi(z)$ аналитична всюду, кроме L и точек r_j, $j=\overline{1,\rho}$, причем в точках r_j имеются простые полюса и в принятых обозначениях

$$\operatorname{Res}\Phi(r_k) = \int\limits_L g(t)w_k(t), \qquad k=\overline{1,\rho}$$

и $\Phi(r_0)=0$.

Действительно, аналитичность $\Phi(z)$ и условие $\Phi(r_0) = 0$ следуют из предыдущего утверждения. Далее, из леммы 4.4

$$\Phi(z) = \int\limits_L \omega_{qr_0}(t)\, g(t) - \sum_{j=1}^{\rho} c_j(q) \int\limits_L w_j(t)\, g(t).$$

Но $\omega_{qr_0}(t)$ аналитична по q в точках r_k, а так как $t \in L$, а $r_k \overline{\in} L$, то

$$\operatorname{Res} \int\limits_L \omega_{qr_0}(t)\, g(t)\Big|_{q=r_k} = 0$$

и, аналогично, $\operatorname{Res} c_j(q)\Big|_{q=r_k} = 0$, $k \neq j$. Тогда, с учетом второго утверждения леммы 4.3,

$$\operatorname{Res} \Phi(r_k) = -\int\limits_L w_k(t)\, g(t) \operatorname{Res} c_k(r_k) = \int\limits_L w_k(t)\, g(t).$$

Теорема 4.1. *Пусть L — гладкий контур, $L = \partial D^+$, D^+ — область в D, $f(z)$ аналитична в D^+ и $f^+(t) \in C^\alpha(L)$ — предельные значения $f(z)$ на L. Предположим $r_j \overline{\in} L$, $j = \overline{0, \rho}$. Тогда*

1) $\int\limits_L f^+(t)\, w_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, \rho},$

2) $$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_L f^+(t)\, K_0(t, z), & r_0 \overline{\in} D^+, \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_L f^+(t)\, K_0(t, z) + f(r_0), & r_0 \in D^+. \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, если $f(z)$ аналитична в D^+, то $f \cdot w_k$ — аналитический в D^+ дифференциал и значит

$$\int\limits_L f w_k = 0, \quad k = \overline{1, \rho}.$$

Пусть

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L f^+(t) K_0(t, z).$$

Тогда

$$\operatorname{Res} \Phi(r_j) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L f^+(t) w_j(t) = 0, \quad j = \overline{1, \rho}$$

и, значит, $\Phi(z)$ аналитична в D^+. Пусть l_z, l_{r_0} — малые контуры, окружающие точки z, r_0 соответственно; $l_z, l_{r_0} \subset D^+$ (если $r_0 \overline{\in} D$, то в l_{r_0} нет необходимости). По интегральной теореме Коши

$$\int_L f^+(t)K_0(t,z) - \int_{l_z} f(p)K_0(p,z) - \int_{l_{r_0}} f(p)K_0(p,z) = 0.$$

Используя интегральную формулу Коши, получим

$$\int_{l_z} f(p)K_0(p,z) = 2\pi i f(z), \qquad \int_{l_{r_0}} f(p)K_0(p,z) = -2\pi i f(r_0),$$

откуда и следует второе утверждение теоремы.

Теперь пусть L — гладкая кривая, $r_j \overline{\in} L$, $j = \overline{0,\rho}$, точка $t_0 \in L$ и не является концом L, тогда малую окрестность точки t_0 кривая L разбивает на две части; обозначим D_0^+ ту часть, ориентация которой индуцирует ориентацию L, и D_0^- — другую часть. Пусть $g(t) \in C^\alpha(L)$,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L g(t)K_0(t,z).$$

Лемма 4.5. *Существуют предельные значения*

$$\lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in D_0^\pm}} \Phi^\pm(z) = \Phi^\pm(t_0) \in C^\alpha(L), \quad t_0 \in L,$$

и имеет место соотношение $\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = g(t_0)$.

Доказательство леммы фактически сводится к доказательству обычных формул Сохоцкого на плоскости [8, с. 37, 52].

4.2. Доказательство классических теорем.

Доказательство теоремы 1 п. 3.7. (Абеля). Пусть

$$\Delta = p_1p_2\ldots p_n q_1^{-1}q_2^{-1}\ldots q_n^{-1},$$

L_Δ — кривая, соединяющая нули и полюса Δ (рис. 7 параграфа 3). Пусть l_{ε,q_j}, l_{ε,p_k} — контуры, окружающие q_j, p_k и расположенные в малой окрестности этих точек, $L_{\varepsilon,\Delta}$ — кривая L_Δ, дополненная l_{ε,q_j}, l_{ε,p_k} и $U_{\varepsilon,\Delta}$ — область, ограниченная l_{ε,q_j}, l_{ε,p_k} (рис. 8).

Пусть дивизор Δ — главный, т. е. имеется мероморфная функция $f(z)$ с данным дивизором Δ. Тогда $\ln f(z)$ аналитична и однозначна в области $D\backslash U_{\varepsilon,\Delta}$ и значит

$$\int_{L_{\varepsilon,\Delta}} \ln f(t)w_k(t) = a_k = 0 \pmod{\mathcal{L}}, \quad k = \overline{1,\rho},$$

причем в интеграле каждая дуга, соединяющая p_j и q_j, проходится дважды (рис. 8). Однако, если p_j — однократный нуль Δ, то приращение $\ln f(z)$ вдоль l_{ε,p_j} равно $2\pi i$, т. е. разность предельных значений $\ln f(z)$ «справа» и «слева» от дуги L_Δ, входящей в точку p_j, равна $2\pi i$

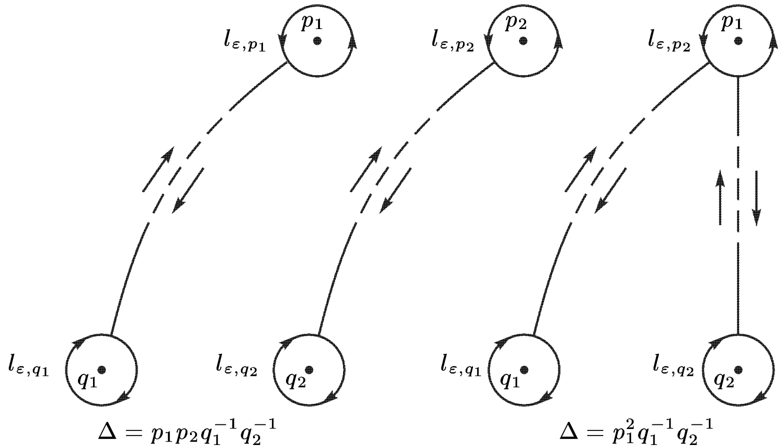

Рис. 8

(рис. 8). Если же p_j — нуль кратности m, то $\Delta \ln f(z)\Big|_{l_{\varepsilon,p_j}} = 2\pi i m$, но в точку p_j входят как раз m дуг L_Δ (рис. 8), т. е. опять на каждой из них разность предельных значений равна $2\pi i$. Поскольку при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{L_{\varepsilon,\Delta}} \ln f \cdot w_k \to \int\limits_{L_\Delta} \ln f \cdot w_k,$$

то

$$\int\limits_{L_\Delta} \ln f \cdot w = 2\pi i \int\limits_{L_\Delta} w = 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{L}).$$

Необходимость условий (3.4) доказана.

Пусть, наоборот,

$$\int\limits_{\Delta} w = 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{L}),$$

тогда точки Δ можно соединить гладкой кривой L_Δ так, что

$$\int\limits_{L_\Delta} w_k = 0, \quad k = \overline{1, \rho} \qquad [41].$$

Выберем $r_0, r_1, \ldots, r_\rho$ так, чтобы $\omega(r_1, r_2, \ldots, r_\rho) \neq 0$, $r_0 \neq r_j$, $j = \overline{1, \rho}$; $r_j \neq q_k, p_s$, $k, s = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, \rho}$. Для дивизора $\Delta_0 = r_1 \ldots r_\rho r_0^{-1}$

построим дифференциал $K_0(p,q)$. Пусть

$$\varphi(z) = \int\limits_{L_\Delta} K_0(t,z).$$

Интеграл, очевидно, сходится, причем в точках p_j, q_k функция $\varphi(z)$ имеет логарифмические особенности, как и у интегралов типа Коши на плоскости [8, с. 66, 67], т. е. в окрестности нуля p_j кратности m в терминах локального параметра имеем

$$\varphi(z) = m \ln(z - p_j) + \Phi_j(z), \quad z \to p_j, \tag{4.5}$$

где $\Phi_j(z)$ аналитична в окрестности p_j, кроме L_Δ. Аналогично в окрестности полюса q_k кратности s

$$\varphi(z) = -s \ln(z - q_k) + \Phi_k(z), \quad z \to q_k, \tag{4.6}$$

где $\Phi_k(z)$ аналитична в окрестности q_k (кроме L_Δ). Кроме того, в принятых обозначениях

$$\operatorname{Res} \varphi(r_k) = \int\limits_{L_\Delta} w_k(t) = 0, \quad k = \overline{1,\rho},$$

т. е. $\varphi(z)$ аналитична всюду, кроме L_Δ; $\varphi(r_0) = 0$ и, если $t \in L_\Delta$, $t \overline{\in} \Delta$, то $\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = 2\pi i$. Пусть $\Phi(z) = \exp(\varphi(z))$. Тогда $\Phi(z)$ однозначна и аналитична в D всюду, кроме точек Δ (так как $\Phi^+(t)/\Phi^-(t) = \exp(2\pi i) = 1$, $t \in L_\Delta$, $t \overline{\in} \Delta$) и из (4.5), (4.6) следует, что $\Phi(z)$ имеет в точках Δ нули и полюса соответствующей кратности, т. е. дивизор $\Phi(z)$ равен Δ и значит Δ — главный дивизор. Теорема 1 п. 3.7. доказана.

Следствие теоремы Абеля. *Если Δ — главный дивизор, то кратные ему мероморфные функции имеют вид*

$$f(z) = c \exp\left\{ \int\limits_{\Delta} K_0(t,z) \right\}, \quad c = \mathrm{const} = f(r_0).$$

Доказательство теоремы 2 п. 3.7. С учетом теоремы Абеля, осталось показать, что

$$\forall\, a \in \operatorname{Jac}(D) \quad \exists \Delta \in \Omega_0 : \int\limits_{\Delta} \mathbf{w} = a.$$

Пусть $\omega(r_1,\ldots,r_\rho) \neq 0$, зададим отображение $f : D^\rho \to \operatorname{Jac}(D)$

$$f(p_1,\ldots,p_\rho) = \sum_{j=1}^{\rho} \int\limits_{r_j}^{p_j} \mathbf{w} = \left(\sum_{j=1}^{\rho} \int\limits_{r_j}^{p_j} w_1, \ldots, \sum_{j=1}^{\rho} \int\limits_{r_j}^{p_j} w_\rho \right) (\operatorname{mod} \mathcal{L}).$$

Тогда $\omega(p_1,\ldots,p_\rho)$ — якобиан отображения f и, так как $\omega(r_1,\ldots,r_\rho) \neq 0$, $f(r_1,\ldots,r_\rho) = 0 \ (\operatorname{mod} \mathcal{L})$, то f взаимно-однозначно отображает окрестность точки $(r_1, \ldots, r_\rho) \in D^\rho$ в окрестность нуля U_0 группы $\mathrm{Jac}(D)$. Пусть $a \in \mathrm{Jac}(D)$, выберем натуральное N, для которого $a/N \in U_0$. Тогда найдутся $p_1, \ldots, p_\rho$ такие, что $f(p_1, \ldots, p_\rho) = a/N$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{\rho} \int_{r_j}^{p_j} w = a/N.$$

Пусть $\Delta = p_1^N p_2^N \ldots p_\rho^N r_1^{-N} r_2^{-N} \ldots r_\rho^{-N}$, тогда

$$\int_{\Delta} w = N \sum_{j=1}^{\rho} \int_{r_j}^{p_j} w = a,$$

что и доказывает теорему.

Следствие теоремы 2 п. 3.7. *Точки дивизора* Δ *можно выбрать в любой окрестности* $r_0 \in D$.

В заключение отметим, что справедливо следующее утверждение, доказательство которого будет дано в следующем параграфе.

Теорема 4.2. *Пусть* $r_1, \ldots, r_\rho \in D$ *— фиксированы, тогда для любого* $a \in \mathrm{Jac}(D)$ *существует точка* $(p_1, \ldots, p_\rho) \in D^\rho$ *такая, что*

$$\sum_{j=1}^{\rho} \int_{r_j}^{p_j} \mathbf{w} = a \pmod{\mathcal{L}}.$$

4.3. Минимальные дивизоры. Дивизор Δ будем называть *минимальным*, если $r[\Delta^{-1}] = i[\Delta] = 0$. Из теоремы Римана–Роха сразу следует, что тогда $\deg \Delta = \rho - 1$. В частности, минимальным был дивизор $r_1 r_2 \ldots r_\rho r_0^{-1}$, где $\omega(r_1, r_2, \ldots, r_0) \neq 0$ (лемма 4.1).

Пусть теперь Δ — произвольный дивизор с координатами $(\varkappa, a)$. Дивизор $P/Q = p_1 \ldots p_l q_1^{-1} \ldots q_{l^*}^{-1}$ назовем *дополнительным* к Δ, если

- $l = \deg P = l(\varkappa, a)$, $l^* = \deg Q = l^*(\varkappa, a)$;
- $\Delta Q P^{-1}$ — минимальный.

Соответственно, P или Q будем называть дополнительными дивизорами *нулей* или *полюсов*.

Лемма 4.6. *Пусть* Δ *— дивизор с координатами* $(\varkappa, a)$,

$$P = p_1 \ldots p_l, \quad Q = q_1 \ldots q_{l^*},$$

причем:

$$l = l(\varkappa, a),\ l^* = l^*(\varkappa, a); \quad p_j \overline{\in} \Delta,\ j = \overline{1, l}; \quad q_k \overline{\in} \Delta,\ k = \overline{1, l^*};$$
$$p_j \neq p_k,\ q_j \neq q_k,\ k \neq j; \quad p_j \neq q_k,\ j = \overline{1, l},\ k = \overline{1, l^*}. \qquad (4.7)$$

Тогда для того, чтобы P/Q *был дополнительным к* Δ, *необходимо и достаточно, чтобы* $r[P\Delta^{-1}]=0$, $i[Q\Delta]=0$.

Доказательство. Пусть P/Q — дополнительный дивизор, тогда $r[PQ^{-1}\Delta^{-1}]=i[P^{-1}Q\Delta]=0$. Но, если $P\Delta^{-1}\,|\,(f)$, f — мероморфная функция, то тем более $PQ^{-1}\Delta^{-1}\,|\,(f)$ и так как $r[PQ^{-1}\Delta^{-1}]=0$, то $f\equiv 0$, т. е. $r[P\Delta^{-1}]=0$. Аналогично получим, что и $i[Q\Delta]=0$.

Пусть, наоборот, $\deg P=l(\varkappa,a)$ и $r[P\Delta^{-1}]=0$; $\deg Q=l^*(\varkappa,a)$ и $i[Q\Delta]=0$. По теореме Римана–Роха

$$i[\Delta P^{-1}]=r[P\Delta^{-1}]-\deg(\Delta P^{-1})+\rho-1=$$

$$=l(\varkappa,a)-\varkappa+\rho-1=l^*(\varkappa,a)=i[\Delta].$$

Отсюда следует, что если абелев дифференциал w кратен ΔP^{-1}, то он автоматически кратен Δ. Пусть теперь w — абелев дифференциал, кратный ΔQP^{-1}, тогда тем более $\Delta P^{-1}\,|\,(w)$, значит $\Delta\,|\,(w)$, но так как $q_k\overline{\in}\Delta$, $q_k\neq p_j$ и $\Delta QP^{-1}\,|\,(w)$, то значит $w(q_k)=0$, $k=\overline{1,l^*}$. Следовательно, w кратен дивизору ΔQ, по условию $i[\Delta Q]=0$, т. е. $w\equiv$ $\equiv 0$ и значит $i[\Delta QP^{-1}]=0$. Затем по теореме Римана–Роха

$$r[PQ^{-1}\Delta^{-1}]=i[\Delta QP^{-1}]+\deg\,(\Delta QP^{-1})-\rho+1=0,$$

т. е. P/Q — дополнительный к Δ, что завершает доказательство леммы.

Следствия.

1. $P=p_1\ldots p_l$ *будет дополнительным дивизором нулей тогда и только тогда, когда* $l=l(\varkappa,a)$ *и* $r[P\Delta^{-1}]=0$.

2. *Аналогично* $Q=q_1\ldots q_{l^*}$ *будет дополнительным дивизором полюсов тогда и только тогда, когда* $l^*=l^*(\varkappa,a)$ и $i[Q\Delta]=0$.

Теорема 4.3. *Для любого дивизора* Δ *всегда существует дополнительный дивизор* P/Q, *причем выполнены условия* (4.7).

Доказательство. Пусть $l=l(\varkappa,a)$. Если $l=0$, то $P=1$ — нулей не требуется. Если $l>0$, пусть $f_1(z),f_2(z),\ldots,f_l(z)$ — система линейно независимых мероморфных функций, кратных Δ^{-1} и

$$F(p_1,p_2,\ldots,p_l)=\det\begin{vmatrix} f_1(p_1) & f_2(p_1) & \ldots & f_l(p_1)\\ f_1(p_2) & f_2(p_2) & \ldots & f_l(p_2)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f_1(p_l) & f_2(p_l) & \ldots & f_l(p_l)\end{vmatrix}. \tag{4.8}$$

$F(p_1,p_2,\ldots,p_l)$ — мероморфная функция в D^l, причем $F\not\equiv 0$, так как $f_j(p)$ — линейно независимы. Тогда условие $F=0$ выделяет в D^l поверхность комплексной коразмерности единица (при $l>1$), т. е. в любом случае нигде не плотное множество. Значит всегда существует точка $(p_1,\ldots,p_l)\in D^l$ такая, что $F(p_1,\ldots,p_l)\neq 0$, причем $p_j\overline{\in}\Delta$, $p_j\neq$ $=p_k$, $j,k=\overline{1,l}$. Покажем, что $r[P\Delta^{-1}]=0$, $P=p_1\ldots p_l$.

Пусть $P\Delta^{-1} \,|\, (f)$, тогда тем более $\Delta^{-1} \,|\, (f)$ и, таким образом,

$$f = \sum_{j=1}^{l} c_j f_j(p),$$

$c_j = \mathrm{const}$. Следовательно, условие $f(p_1) = \ldots = f(p_l) = 0$ означает линейную зависимость столбцов матрицы в (4.8), так как $F(p_1, \ldots, p_l) \neq 0$, то $c_j = 0$, $j = \overline{1, j}$, т. е. $f \equiv 0$ и значит $r[P\Delta^{-1}] = 0$.

Теперь пусть $l^* = l^*(\varkappa, a) > 0$, $\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_{l^*}$ — базис абелевых дифференциалов, кратных Δ и

$$\widetilde{\omega}(q_1, q_2, \ldots, q_{l^*}) = \det \begin{vmatrix} \widetilde{\omega}_1(q_1) & \widetilde{\omega}_1(q_2) & \ldots & \widetilde{\omega}_1(q_{l^*}) \\ \widetilde{\omega}_2(q_1) & \widetilde{\omega}_2(q_2) & \ldots & \widetilde{\omega}_2(q_{l^*}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \widetilde{\omega}_{l^*}(q_1) & \widetilde{\omega}_{l^*}(q_2) & \ldots & \widetilde{\omega}_{l^*}(q_{l^*}) \end{vmatrix}.$$

Уравнение $\widetilde{\omega}(q_1, \ldots, q_{l^*}) = 0$ выделяет в D^{l^*} нигде не плотное множество, дальнейшее построение полностью аналогично предыдущему.

Следствия.

1. *Для любой точки* $(p_1^0, \ldots, p_l^0) \in D^l$, $p_j^0 \overline{\in} \Delta$ *и любой ее окрестности* U_0 *всегда найдется точка* $(p_1, \ldots, p_l) \in U_0$ *такая, что* $P = p_1 \ldots p_l$ *— дополнительный дивизор нулей.*

2. *Аналогично для любой* $(q_1^0, \ldots, q_{l^*}^0) \in D^{l^*}$, $q_k^0 \overline{\in} \Delta$ *в любой ее окрестности найдется точка* $(q_1, \ldots, q_{l^*})$ *такая, что* $Q = q_1 \ldots q_{l^*}$ *— дополнительный дивизор полюсов.*

Теперь установим некоторое представление, связывающее дивизор Δ и его дополнительный P/Q.

Лемма 4.7. *Пусть* Δ *— минимальный дивизор. Тогда*

$$\Delta = \widetilde{\Delta} \cdot r_1 r_2 \ldots r_\rho r_0^{-1},$$

где $\widetilde{\Delta}$ *— главный дивизор,* $\omega(r_1, \ldots, r_\rho) \neq 0$ (см. (4.1)) *и* $r_0 \neq r_j$, $j = \overline{1, \rho}$.

Доказательство. Так как $\deg \Delta = \rho - 1$, то можно представить $\Delta = r_0^{\rho-1} \Delta_1$, где

$$\deg \Delta_1 = \deg(\Delta r_0^{-\rho+1}) = 0.$$

Пусть

$$a = \int_{\Delta_1} \mathbf{w} \,(\mathrm{mod}\, \mathcal{L}).$$

Тогда по теореме 4.2 найдем точки $r_1, \ldots, r_\rho$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{\rho} \int\limits_{r_0}^{r_j} \mathbf{w} = a \,(\mathrm{mod}\,\mathcal{L}),$$

откуда

$$\int\limits_{\Delta_1} \mathbf{w} - \sum_{j=1}^{\rho} \int\limits_{r_0}^{r_j} \mathbf{w} = 0 \ \ (\mathrm{mod}\,\mathcal{L}).$$

Таким образом, дивизор $\widetilde{\Delta} = \Delta_1 r_0^\rho r_1^{-1} \ldots r_\rho^{-1}$ — главный (теорема Абеля) и значит

$$\Delta = r_0^{\rho-1}\Delta_1 = r_0^{\rho-1}\widetilde{\Delta}\frac{r_1 \ldots r_\rho}{r_0^\rho} = \widetilde{\Delta} r_1 \ldots r_\rho r_0^{-1}.$$

Осталось показать, что $\omega(r_1, \ldots, r_\rho) \neq 0$ и $r_0 \neq r_j$, $j = \overline{1,\rho}$. Но поскольку дивизор $\widetilde{\Delta}$ — главный, то $i[\Delta] = i[r_1 \ldots r_\rho \cdot r_0^{-1}] = 0$ (вообще $r_1 \ldots r_\rho r_0^{-1}$ — минимальный, как и Δ). Однако, если $\omega(r_1, \ldots, r_\rho) = 0$, то существует абелев дифференциал первого рода $w \not\equiv 0$ такой, что $w(r_1) = \ldots = w(r_\rho) = 0$ и значит $r_1 \ldots r_\rho r_0^{-1} \,|\, (w)$, т. е. $i[r_1 r_2 \ldots r_\rho r_0^{-1}] > 0$. Аналогичное противоречие получается, если $r_0 = r_j$, $j > 0$.

Следствие. *Произвольный дивизор Δ с координатами $(\varkappa, a)$ всегда можно представить в виде*

$$\Delta = \frac{p_1 \ldots p_l}{q_1 \ldots q_l^*}\,\widetilde{\Delta}\,\frac{r_1 \ldots r_\rho}{r_0} = \frac{P}{Q}\,\widetilde{\Delta}\,\frac{r_1 \ldots r_\rho}{r_0}, \tag{4.9}$$

где P/Q — дополнительный к Δ, $l = l(\varkappa, a)$, $l^* = l^*(\varkappa, a)$, $\widetilde{\Delta}$ — главный дивизор, $\omega(r_1, \ldots, r_\rho) \neq 0$, $p_j \overline{\in} \Delta$, $j = \overline{1,l}$; $q_k \overline{\in} \Delta$, $k = \overline{1,l^*}$; $p_j \neq p_k$, $q_j \neq q_k$, $k \neq j$, $p_j \neq q_k$, $j = \overline{1,l}$, $k = \overline{1,l^*}$; $r_0 \neq r_j$, $j = \overline{1,\rho}$.

Теперь обратимся к некоторым абелевым дифференциалам, связанным с дивизором Δ. Пусть Δ_0 — минимальный дивизор, представленный в виде $\Delta_0 = \widetilde{\Delta} r_1 \ldots r_\rho r_0^{-1}$, $\widetilde{\Delta}$ — главный дивизор, $\widetilde{f}(z)$ — мероморфная функция с дивизором $\widetilde{\Delta}$ и $K_0(p,q)$ — абелев дифференциал, кратный $q^{-1} r_0^{-1} r_1 \ldots r_\rho$. Введем абелев дифференциал

$$K(\Delta_0|p,q) = \frac{\widetilde{f}(p)}{\widetilde{f}(q)}\,K_0(p,q). \tag{4.10}$$

Пусть теперь дивизор Δ представлен в форме (4.9), где P/Q — дополнительный к Δ, обозначим $K_1(p,q) = K(\Delta Q P^{-1}|p,q)$.

Лемма 4.8.

1) *$K_1(p,q)$ — абелев дифференциал по p, кратный $q^{-1}\Delta Q P^{-1}$, причем* $\mathrm{Res}\ K_1(q,q) = 1$.

2) $K_1(p,q)$ — *однозначная мероморфная функция по* q, *кратная* $p^{-1}\Delta^{-1}PQ^{-1}$.

Справедливость утверждений леммы, очевидно, следует из представлений (4.9), (4.10) и свойств $K_0(p,q)$.

Лемма 4.9. *Если* Δ_0 — *минимальный дивизор, то* $\forall\, q\in D$, $q\overline{\in}\Delta_0$ *существует единственный абелев дифференциал* ω, *кратный* $\Delta_0 q^{-1}$ *с условием* $\operatorname{Res}\,\omega(q)=1$.

Лемма доказывается полностью аналогично лемме 4.2 п. 4.1.

Следствие. *Если* $\Delta_0=\Delta Q/P$, *то* $\omega=K_1(p,q)$, *при этом первое условие леммы 4.8 определяет* $K_1(p,q)$ *однозначно.*

Теперь перейдем к построению специального базиса абелевых дифференциалов, кратных Δ.

Лемма 4.10. *Пусть* ΔQP^{-1} — *минимальный дивизор,* $Q=q_1 q_{l^*}$ *и* $Q_j=Qq_j^{-1}$. *Тогда* $i[\Delta Q_j P^{-1}]=i[Q_j\Delta]=1$, *т. е., если абелев дифференциал* w *кратен* $\Delta Q_j P^{-1}$, *то он автоматически кратен* ΔQ_j.

Доказательство. С учетом леммы 4.6

$$i[\Delta QP^{-1}]=i[\Delta Q]=0=r[P\Delta^{-1}]=r[P\Delta^{-1}Q^{-1}].$$

Если мероморфная функция f кратна $P\Delta^{-1}Q_j^{-1}$, то тем более f кратна $P\Delta^{-1}Q^{-1}$ и значит $f\equiv 0$, т. е. $r[P\Delta^{-1}Q_j^{-1}]=0$.

Тогда по теореме Римана–Роха

$$i[\Delta Q_j P^{-1}]=0-\deg(\Delta Q_j P^{-1})+\rho-1=$$
$$=-(\varkappa+l^*-1-l)+\rho-1=l-l^*-\varkappa+\rho-1+1=1.$$

Далее,

$$r[\Delta^{-1}Q^{-1}]=i[\Delta Q]+\deg(\Delta Q)-\rho+1=l^*+\varkappa-\rho+1=l=r[\Delta^{-1}]$$

и, значит, если мероморфная функция f кратна $\Delta^{-1}Q^{-1}$, то автоматически f кратна Δ^{-1}. Тогда, если $\Delta^{-1}Q_j^{-1}\,|\,(f)$, то тем более $\Delta^{-1}Q^{-1}\,|\,(f)$ и значит $\Delta^{-1}\,|\,(f)$, т. е. $r[\Delta^{-1}Q_j^{-1}]=r[\Delta^{-1}]=l$.

С помощью теоремы Римана–Роха находим

$$i[\Delta Q_j]=r[\Delta^{-1}Q_j^{-1}]-\deg(\Delta Q_j)+\rho-1=l-l^*-\varkappa+\rho-1+1=1,$$

чем и завершается доказательство леммы.

Пусть $\Delta_0=r_1^0\ldots r_\rho^0(r_0^0)^{-1}$ — фиксированный минимальный дивизор, причем $r_j^0\neq q_s$, $j=\overline{0,\rho}$, $s=\overline{1,l^*}$ и $K_0^0(p,q)$ — соответствующий абелев дифференциал по p, кратный $q^{-1}(r_0^0)^{-1}r_1^0\ldots r_\rho^0$. Обозначим

$$w_j^{\Delta}(p)=\operatorname{Res}(K(\Delta QP^{-1}|\,p,q)K_0^0(q,r_0))\big|_{q=q_j}. \tag{4.11}$$

Лемма 4.11. $w_j^{\Delta}(p)$ — *базис абелевых дифференциалов, кратных* Δ, *причем* $w_j^{\Delta}(q_k)=0$, $k\neq j$; $w_j^{\Delta}(q_j)\neq 0$ *и*

$$\operatorname{Res}(w_j^{\Delta}(q)K(\Delta QP^{-1}|\,p,q))\big|_{q=q_j}=w_j^{\Delta}(p),\quad j=\overline{1,l^*}.$$

Лемма 4.12. *Пусть $w_0(t,p,q) = K_0(t,p)K_0(p,q)$ — абелев дифференциал по t и p. Тогда*

$$\operatorname{Res} w_0(t,p,q)\big|_{p=q} = \operatorname{Res} K_0(t,p)K_0(p,q)\big|_{p=q} = K_0(t,q).$$

Справедливость утверждений леммы легко следует из того, что $\operatorname{Res} K_0(q,q) = 1$ и $K_0(t,p)$ — мероморфная функция по p.
Доказательство леммы 4.11. По построению

$$\omega = K(\Delta QP^{-1}|p,q)K_0^0(q,r_0)$$

— абелев по q дифференциал, кратный $p^{-1}\Delta^{-1}Q^{-1}Pr_0^{-1}(r_0^0)^{-1}r_1^0\ldots r_\rho^0$ и так как $r_j^0 \neq q_k$, $q_k\overline{\in}\Delta$, то ω имеет полюс первого порядка в точках $q = q_j$, то есть $w_j^\Delta(p) \not\equiv 0$. Очевидно, $w_j^\Delta(p)$ — абелевы дифференциалы. Далее, так как ω — абелев дифференциал по p, кратный $q^{-1}\Delta QP^{-1}$, то абелевы дифференциалы $w_j^\Delta(p)$ кратны $q_j^{-1}\Delta QP^{-1}$. Тогда из леммы 4.10 следует, что $w_j^\Delta(p)$ кратны ΔQ_j, т. е. в частности $w_j^\Delta(p)$ кратны Δ и $w_j^\Delta(q_s) = 0$, $s \neq j$.

Далее, если $w_j^\Delta(q_j) = 0$, то $w_j^\Delta(p)$ кратен ΔQ, а так как $i[\Delta Q] = 0$, то это противоречит условию $w_j^\Delta(p) \not\equiv 0$. Из условий $w_j^\Delta(q_s) = 0$, $j \neq s$; $w_j^\Delta(q_j) \neq 0$ следует, что $w_j^\Delta(p)$ линейно независимы, всего их $l^* = i[\Delta]$, то есть они составляют базис абелевых дифференциалов, кратных Δ.

Последнее утверждение леммы следует с помощью леммы 4.12 из цепочки равенств:

$$\operatorname{Res}(w_j^\Delta(q)K(\Delta QP^{-1}|\, p,q))\big|_{q=q_j} =$$

$$= \operatorname{Res}\left(K(\Delta QP^{-1}|\, p,q)\operatorname{Res}(K(\Delta QP^{-1}|q,\xi)K_0^0(\xi,r_0))\Big|_{\xi=q_j}\right)\Bigg|_{q=q_j} =$$

$$= \operatorname{Res}\left(\frac{\widetilde{f}(p)}{\widetilde{f}(q)}\,K_0(p,q)\operatorname{Res}\left(\frac{\widetilde{f}(q)}{\widetilde{f}(\xi)}\,K_0(q,\xi)K_0^0(\xi,r_0)\right)\Bigg|_{\xi=q_j}\right)\Bigg|_{q=q_j} =$$

$$= \operatorname{Res}\left(\frac{\widetilde{f}(p)}{\widetilde{f}(\xi)}\,K_0^0(\xi,r_0)\operatorname{Res}(K_0(p,q)K_0(q,\xi))\Big|_{q=\xi}\right)\Bigg|_{\xi=q_j} =$$

$$= \operatorname{Res}\left(\frac{\widetilde{f}(p)}{\widetilde{f}(\xi)}\,K_0^0(\xi,r_0)K_0(p,\xi)\right)\Bigg|_{\xi=q_j} = w_j^\Delta(p).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.13. *Пусть $\Delta_0 = r_1\ldots r_\rho r_0^{-1}$ — минимальный дивизор и $K_0(p,q)$ — соответствующий ему абелев дифференциал, кратный $q^{-1}\Delta_0$. Тогда на D существует базис абелевых дифференциалов 1 рода*

$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_\rho)$, *нормированный условием*

$$\operatorname{Res}(K_0(p,q)\omega_j(q))\Big|_{q=r_k} = \begin{cases} \omega_j(p), & k=j \\ 0, & k \neq j. \end{cases} \tag{4.12}$$

Доказательство. Возьмем $\Delta = 1$, дополнительный дивизор $Q = r_1 \ldots r_\rho$, $P = r_0$ и построим по формуле (4.11) дифференциалы $\omega_j(p)$, кратные Qr_j^{-1}, $j = \overline{1,\rho}$. Тогда $\omega_j(p)$ — абелевы дифференциалы 1 рода, очевидно линейно независимые и $\omega_j(r_k) = 0$, $k \neq j$. Так как $K_0(p,q)$ имеет по q при $q = r_k$ полюса первого порядка, то

$$\operatorname{Res}(K_0(p,q)w_j(q))\Big|_{q=r_k} = 0, \quad k \neq j.$$

Формула (4.12) при $k = j$ следует из леммы 4.11. Лемма доказана.

4.4. Устойчивость дивизоров, функций и абелевых дифференциалов. Пусть Δ_m, $m = \overline{0,\infty}$ — последовательность дивизоров с координатами, соответственно, $(\varkappa_m, a_m)$. Будем говорить, что $\Delta_m \xrightarrow{\Omega^*} \Delta_0$ или $(\varkappa_m, a_m) \xrightarrow{\Omega^*} (\varkappa_0, a_0)$, $m \to \infty$, если $\varkappa_m = \varkappa = \mathrm{const}$, $m = \overline{0,\infty}$; $a_m \to a_0$ в $\mathrm{Jac}(D)$, $m \to \infty$; $l_m = l(\varkappa, a_m) = l = \mathrm{const}$, $m = \overline{0,\infty}$. Заметим, что так как $l_m = l(\varkappa, a_m) = \mathrm{const}$ и $\varkappa_m = \varkappa = \mathrm{const}$, то и $l_m^* = l^*(\varkappa, a_m) = l(\varkappa, a_m) - \varkappa + \rho - 1 = \mathrm{const}$.

Теорема 4.4. *Пусть $\Delta_m \xrightarrow{\Omega^*} \Delta_0$, тогда с точностью до эквивалентности дивизоры Δ_m можно представить в виде*

$$\Delta_m = \frac{p_1^m \ldots p_l^m}{q_1^m \ldots q_{l^*}^m}\, \widetilde{\Delta}_m\, \frac{r_1^m \ldots r_\rho^m}{r_0^m}, \quad m = \overline{0,\infty}, \tag{4.13}$$

где p_j^m, $j = \overline{1,l}$; q_k^m, $k = \overline{1,l^*}$; r_s^m, $s = \overline{0,\rho}$; $\widetilde{\Delta}_m = \dfrac{u_1^m \ldots u_n^m}{v_1^m \ldots v_n^m}$, $m = \overline{0,\infty}$ удовлетворяют условиям (4.7) и, кроме того,

$$\begin{gathered} p_j^m \to p_j^0,\ q_k^m \to q_k^0,\ r_s^m \to r_s^0,\ u_t^m \to u_t^0,\ v_t^m \to v_t^0,\ m \to \infty, \\ j = \overline{1,l},\ k = \overline{1,l^*},\ s = \overline{0,\rho},\ t = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{4.14}$$

Доказательство. Так как $a_m \to a_0$, $m \to \infty$, то, используя доказательство теоремы 2 п. 3.7. (см. п. 4.2), дивизоры Δ_m с точностью до эквивалентности можно выбрать в виде

$$\Delta_m = r_0^{\varkappa} \frac{(s_1^m)^N \ldots (s_\rho^m)^N}{r_1^N \ldots r_\rho^N},$$

где $\omega(r_1, \ldots, r_\rho) \neq 0$, точки $r_1, \ldots, r_\rho, s_1^m, \ldots, s_\rho^m$ лежат в малой окрестности U_0 точки r_0, $m = \overline{0,\infty}$, $N = \mathrm{const}$ и $s_j^m \to s_j^0$, $m \to \infty$, $j = \overline{1,\rho}$. Далее, по следствию из теоремы 4.3 всегда можно выбрать дополнительные дивизоры $\Delta_0^m = P_m/Q_m = p_1^m \ldots p_l^m (q_1^m)^{-1} \ldots (q_{l^*}^m)^{-1}$

так, что p_j^m, $q_k^m \overline{\in} U_0$, $m = \overline{0,\infty}$, $j = \overline{1,l}$, $k = \overline{1,l^*}$ и $p_j^m \to p_j^0$, $q_k^m \to q_k^0$, $m \to \infty$, $j = \overline{1,l}$, $k = \overline{1,l^*}$.

Пусть $(l - l^*,\ a_m^0)$ — координаты дивизоров Δ_0^m, тогда так как $p_j^m \to p_j^0$, $q_k^m \to q_k^0$, то по построению координат дивизора, очевидно, получим $a_0^m \to a_0^0$, $m \to \infty$ в $\mathrm{Jac}\,(D)$. Далее, координатами дивизора $\Delta_m Q_m P_m^{-1} = \Delta_m (\Delta_0^m)^{-1}$ будут $(\varkappa, a_m) - (l - l^*, a_m^0) = (\rho - 1, a_m - a_m^0) = (\rho - 1, a_m^1)$ и $a_m^1 \to a_0^1$, $m \to \infty$ в $\mathrm{Jac}(D)$.

Зафиксируем $r_0^0, \widetilde{p}_2, \ldots, \widetilde{p}_\rho$ такие, что $\omega(r_0^0, \widetilde{p}_2, \ldots, \widetilde{p}_\rho) \neq 0$ и

$$\int\limits_{r_0^0}^{r_1^0} \mathbf{w} + \sum_{j=2}^{\rho} \int\limits_{\widetilde{p}_j}^{r_j^0} \mathbf{w} = a_0^1$$

(см. доказательство леммы 4.7).

Тогда $\omega(r_1^0, \ldots, r_\rho^0) \neq 0$, а так как $a_m^1 \to a_0^1$, $m \to \infty$, то при достаточно больших m в окрестности точки $(r_1^0, \ldots, r_\rho^m) \in D^\rho$ всегда найдется единственная точка $(r_1^m, \ldots, r_\rho^m) \in D^\rho$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{\rho} \int\limits_{r_j^q}^{r_j^m} w = a_m^1 - a_0^1$$

(см. доказательство теоремы 2, п. 4.2), причем при $m \to \infty$ $r_j^m \to r_j^0$, $j = \overline{1,\rho}$. Тогда окончательно получаем, что дивизоры

$$\widetilde{\Delta}_m = \Delta_m \frac{Q_m}{P_m} \frac{r_0^0}{r_1^m \ldots r_\rho^m} = r_0^\varkappa \frac{(s_1^m)^N \ldots (s_\rho^m)^N}{r_1^N \ldots r_\rho^N} \frac{q_1^m \ldots q_{l^*}^m}{p_1^m \ldots p_l^m} \frac{r_0^0}{r_1^m \ldots r_\rho^m},$$

$m = \overline{0,\infty}$ — главные и выполнены все утверждения теоремы.

Теорема 4.5 (устойчивость мероморфных функций). *Пусть* Δ_m — *главные дивизоры,*

$$\Delta_m = \frac{p_1^m \ldots p_n^m}{q_1^m \ldots q_n^m}, \quad m = \overline{0,\infty}$$

и $f_m(z)$, $m = \overline{0,\infty}$ — *мероморфные функции с дивизорами* Δ_m $r_0 \overline{\in} \Delta_0$ — *произвольная точка. Тогда, если* $p_j^m \to p_j^0$, $q_k^m \to q_k^0$, $m \to \infty$, $j, k = \overline{1,n}$ *и* $f_m(r_0) \to f_0(r_0)$, $m \to \infty$, *то* $f_m(z) \to f_0(z)$, $m \to \infty$ *равномерно в любой области, не содержащей окрестности точек* Δ_0.

Утверждение теоремы сразу следует из представления (следствие теоремы Абеля, п. 4.2.)

$$f_m(z) = f_m(r_0) \exp\left\{ \int\limits_{\Delta_m} K_0(t,z) \right\}.$$

Теперь определим сходимость абелевых дифференциалов. Пусть $w_m(p)$, $m = \overline{0, \infty}$ — последовательность абелевых дифференциалов, U_α — окрестность точки $p \in D$; p — не является полюсом $w_0(p)$.

Скажем, что $w_m(p) \to w_0(p)$, $m \to \infty$ в U_α, если в терминах локального параметра $w_m(p) = f_m(p)\,dp$, $m = \overline{0, \infty}$, причем последовательность аналитических функций $f_m(p) \to f_0(p)$, $m \to \infty$ равномерно в любом компактном подмножестве U_α. Соответственно, пусть $w_m(p) \to w_0(p), m \to \infty$ на компактном подмножестве $\widetilde{D} \subset D$, если для некоторой системы окрестностей $\{U_\alpha\}$, покрывающей $\widetilde{D}$ $\big(\bigcup\limits_{(\alpha)} U_\alpha \supset \widetilde{D}\big)$

$w_m(p) \to w_0(p), m \to \infty$ в $U_\alpha, \forall\, \alpha$.

Наконец, будем говорить, что $w_m(p) \overset{D}{\to} w_0(p)$, $m \to \infty$, если $w_m(p) \to w_0(p)$ в любом компактном подмножестве D, не содержащем окрестности полюсов $w_0(p)$.

Если дифференциалы $w_m(p, q)$ зависят от параметра $q \in D$, то аналогично определим сходимость $w_m(p, q) \overset{D}{\to} w_0(p, q)$ равномерную по параметру $q \in \widetilde{D} \subset D$.

Лемма 4.14. *Пусть даны дивизоры*

$$\frac{r_1^m \ldots r_\rho^m}{r_0^m}, \quad m = \overline{0, \infty},$$

причем $r_0^m \neq r_j^m$, $j = \overline{1, \rho}$; $\omega(r_1^m, \ldots, r_\rho^m) \neq 0$ *и* $r_j^m \to r_j^0$, $m \to \infty$, $j = \overline{0, \rho}$. *Пусть, далее,* $K_0^m(p, q)$ — *абелевы дифференциалы, кратные* $q^{-1}(r_0^m)^{-1} r_1^m \ldots r_\rho^m$, $m = \overline{0, \infty}$. *Тогда* $K_0^m(p, q) \overset{D}{\to} K_0^0(p, q)$, $m \to \infty$ *равномерно по* q *в области, не содержащей окрестностей точек* r_j^0, $j = \overline{0, \rho}$.

Справедливость утверждений леммы, очевидно, следует из представления $K_0(p, q)$ (4.4) и построения $\omega_{qr_0}(p)$, $c_j(q)$, $w_j(p)$, $j = \overline{1, \rho}$, (см. п. 4.1).

Теорема 4.6. *Пусть дана последовательность дивизоров* Δ_m, $m = \overline{0, \infty}$ *с координатами* $(\varkappa, a_m)$ *и* $\Delta_m \overset{\Omega^*}{\to} \Delta_0$, $m \to \infty$.

Тогда, заменив при необходимости Δ_m *на эквивалентные, можем построить дополнительные к* Δ_m *дивизоры*

$$\frac{P_m}{Q_m} = p_1^m \ldots p_l^m (q_1^m)^{-1} \ldots (q_{l^*}^m)^{-1}$$

и абелевы дифференциалы $K(\Delta_m Q_m P_m^{-1} | p, q) = K_1^m(p, q)$, $m = \overline{0, \infty}$ *так, чтобы*

$$p_j^m \to p_j^0,\ q_k^m \to q_k^0,\ m \to \infty,\ j = \overline{1, l},\ k = \overline{1, l^*};\quad K_1^m(p, q) \overset{D}{\to} K_1^0(p, q)$$

равномерно по q *в области, не содержащей точек* Δ_0 *и дополнительного дивизора* P_0/Q_0. *При этом для соответствующих базисов абелевых* *дифференциалов, кратных* Δ_m $\{w_j^{\Delta_m}(p), j = \overline{1, l^*}\}$ (см. лемму 4.11), *получим* $w_j^{\Delta_m}(p) \xrightarrow{D} w_j^{\Delta_0}(p)$, $m \to \infty$, $j = \overline{1, l^*}$.

Доказательство. Сходимость для дополнительных дивизоров P_m, Q_m, $m \to \infty$ следует из теоремы 4.4. Далее, представим с точностью до эквивалентности Δ_m в виде (4.13), (4.14) и пусть $K_0^m(p,q)$, $m = \overline{0, \infty}$ — абелевы дифференциалы, кратные $q^{-1}(r_0^m)^{-1} r_1^m \ldots r_\rho^m$; $\widetilde{f}^m(z)$ — мероморфные функции с дивизорами $\widetilde{\Delta}_m$. Тогда из устойчивости мероморфных функций следует, что $\widetilde{f}^m(z) \to \widetilde{f}^0(z), m \to \infty$ равномерно в области, не содержащей точек $\widetilde{\Delta}_0$, а из леммы 4.14 $K_0^m(p,q) \xrightarrow{D} K_0^0(p,q)$.

С учетом представления (4.10) получим $K_1^m(p,q) \to K_1^0(p,q)$ равномерно по p и q вне окрестностей точек дивизоров Δ_0, P, Q и r_j^0, $j = \overline{0, \rho}$. Но для $K_1^m(p,q)$ точки r_j^0, $j = \overline{0, \rho}$ не являются полюсами ни по p ни по q, откуда, переходя к локальному представлению по принципу максимума модуля получим, что $K_1^m(p,q) \to K_1^0(p,q)$ и в окрестности r_j^0, $j = \overline{0, m}$, т.е. утверждение теоремы справедливо для $K_1^m(p,q)$. Аналогично из представления 4.11 следует устойчивость $w_j^{\Delta_m}(p)$. Теорема доказана.

§ 5. Дополнительные сведения из теории римановых поверхностей

5.1. Накрытия. Понятие накрытия существенно используется при описании не взаимно однозначных отображений.

Пусть X, D — топологические пространства. Отображение $\pi : X \to D$ называется *накрытием*, если для любой точки $p \in D$ существует окрестность $U \subset D$ такая, что прообраз $\pi^{-1}(U)$ гомеоморфен произведению U на некоторое дискретное (см. п. 2.1) множество E, причем если $h : \pi^{-1}(U) \to U \times E$ — этот гомеоморфизм, то для любого $x \in \pi^{-1}(U)$ $\pi' \circ h(x) = \pi(x)$, где $\pi' : (p, e) \to p$ — обычная проекция, $e \in E$. Пространство X также называют *покрытием* (*над* D) или *покрывающим пространством*, D — *базой*, а π — *проекцией*, прообразы $\pi^{-1}(p)$ точек $p \in D$ называют *слоями*.

Если X и D — комплексно аналитические многообразия, а $\pi : X \to D$ — голоморфное отображение, то накрытие называется *голоморфным*.

Определим теперь понятие универсального накрытия. Пусть $\widetilde{D}$ и D — связные топологические пространства и $\widetilde{\pi} : \widetilde{D} \to D$ — накрытие, оно называется *универсальным*, если $\widetilde{D}$ — односвязное пространство. Всякое связное топологическое пространство обладает единственным, с точностью до изоморфизма, универсальным накрытием [41, 1].

Пусть X и D — топологические пространства и $\pi : X \to D$ — накрытие. Под *накрывающим преобразованием* понимается гомеоморфизм $f : X \to X$ такой, что $\pi \circ f(x) = \pi(x)$ для всех $x \in X$. Множество всех накрывающих преобразований накрытия $\pi : X \to D$ образует группу относительно операции композиции. Для универсального накрытия $\widetilde{\pi} : \widetilde{D} \to D$ эта группа изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(D)$ (см. п. 6.1).

5.2. Расслоения. Понятие расслоения является обобщением понятия накрытия на случай, когда слой является произвольным топологическим пространством.

Рассмотрим систему объектов, состоящую из трех топологических пространств: X — *расслоенного пространства*, D — *базы*, E — *пространства слоя* и непрерывного отображения $\pi : X \to D$, называемого *проекцией*, эта система называется *расслоением*, если для каждой точки $p \in D$ существует окрестность U и гомеоморфизм $\xi : \pi^{-1}(U) \to \to U \times E$ такой, что для любого $x \in \pi^{-1}(U)$ $\pi' \circ \xi(x) = \pi(x)$, где $\pi' : U \times E \to U$ — обычная проекция. Говорят, что X — расслоение *над* D.

Из определения следует, что расслоение X — локально тривиально, то есть в пределах окрестности U оно устроено как произведение $U \times E$. Расслоение называется тривиальным (в целом), если X гомеоморфно произведению $D \times E$ (гомеоморфизм $\xi : D \times E \leftrightarrow X$) и $\pi \circ \xi : D \times E \to D$ — обычная проекция. Не всякое расслоение тривиально [41, 1, 16].

Расслоение $\pi : X \to D$ называется *голоморфным*, если X и D — комплексно аналитические многообразия, а π — голоморфное отображение.

Сечением расслоения $\pi : X \to D$ в области $U \subset D$ называется непрерывное отображение $s : U \to X$ такое, что $\pi \circ s(p) \equiv p$ в U.

Локально сечения всегда существуют. Действительно, возьмем окрестность $U \subset D$, входящую в определение расслоения, зафиксируем элемент $e \in E$ и каждой точке $p \in U$ сопоставим элемент $s_e(p) = = \xi^{-1}(p, e)$, тогда s_e — сечение расслоения в U.

Глобальные (т. е. определенные на всем D) сечения существуют не у всяких расслоений. Однако, если база D голоморфного расслоения $\pi : X \to D$ гомеоморфна шару в $\mathbb{C}^n$, то такое расслоение тривиально и у него есть глобальные сечения [1].

Важнейший класс расслоений составляют *голоморфные векторные расслоения*, пространство слоя которых является конечномерным векторным пространством $\mathbb{C}^n$. Если $\pi : X \to D$ — голоморфное векторное расслоение, тривиальное над областями U_α атласа многообразия D, то отображение $\xi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ при любой фиксированной точке $p \in U_\alpha$ является изоморфизмом линейных пространств $\pi^{-1}(p) \longleftrightarrow \mathbb{C}^n$. Тогда для U_α и U_β с непустым пересечением $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ возникает отображение

$$\xi_{\alpha\beta} = \xi_\beta \circ \xi_\alpha^{-1}, \tag{$*$}$$

которое при фиксированной $p \in U_{\alpha\beta}$ является линейным изоморфизмом пространств $\mathbb{C}^n$. Для фиксированного $p \in U_{\alpha\beta}$ и любого $x \in \pi^{-1}(p)$

преобразование $(*)$ можно записать в виде

$$\xi_\beta = \xi_{\alpha\beta}(p)\xi_\alpha,$$

где $\xi_\alpha = \xi_\alpha(x)$, $\xi_\beta = \xi_\beta(x)$ и $\xi_{\alpha\beta}$ — невырожденная $(n \times n)$ матрица.

При $n = 1$ векторные расслоения называются *линейными* (сравните с п. 3.3.), при этом $\xi_{\alpha\beta}(p)$ будут функциями, определенными в $U_\alpha \cap U_\beta$ и не обращающимися в нуль.

Очевидно, понятие голоморфного линейного расслоения, данное в п. 3.3., полностью удовлетворяет приведенному выше определению.

5.3. Метод поднятия кривых. В дальнейшем для построения сечений расслоения мы будем пользоваться методом поднятия (лифта) кривой с базы в голоморфное расслоение [1, 16]. Именно, пусть на базе D задана кривая $\widehat{\gamma} : [0,1] \to D$, кривая $\gamma : [0,1] \to X$ называется *поднятием* (*лифтом*) $\widehat{\gamma}$ в X, если $\pi \circ \gamma(t) = \widehat{\gamma}(t)$ для всех $t \in [0,1]$, причем точка $\gamma(t)$ голоморфно зависит от точки $\widehat{\gamma}(t) \in D$.

Сформулируем основной результат [1], [16, с. 69–73].

Теорема 5.1. *Для любого голоморфного расслоения можно задать метод, позволяющий по любой кривой $\widehat{\gamma}(t)$ на базе и любой точке $y_0 \in \in X$, $\pi(y_0) = \widehat{\gamma}(0)$, осуществлять однозначное поднятие $\gamma(t)$ кривой $\widehat{\gamma}(t)$ такое, что $\gamma(0) = y_0$. При этом $\gamma(t)$ непрерывно зависит от y_0, $t \in [0,1]$.*

Указанный метод далее для краткости будем называть «метод поднятия кривых».

Замечание. Интуитивно совершенно ясно, что вообще говоря поднятие кривой осуществляется неоднозначно. Однозначность поднятия достигается введеним дополнительного условия, а именно — кривая «поднимается» в соответствии с заданным полем направлений, т. е. как решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Естественно, такое решение единственно при заданном начальном значении y_0. Соответствующее поле направлений должно быть трансверсально (не параллельно) слою в каждой точке, оно называется *связностью*. Мы не будем давать точных определений и углубляться в эту теорию, ограничившись приведенными результатами.

5.4. Теорема Римана–Роха. В п. 3.6 были определены линейные пространства L_Δ и L^*_Δ мероморфных функций и абелевых дифференциалов, кратных дивизору Δ и для их размерностей сформулирована теорема Римана–Роха. Несколько раньше, в п. 3.5., было указано, что группа Ω^* классов дивизоров изоморфна группе H^* голоморфных линейных расслоений. Этот изоморфизм позволяет сформулировать теорему Римана–Роха в терминах пространств голоморфных сечений линейного расслоения.

Дивизору $\Delta \in \Omega^*$ соответствует пучок $\mathcal{M}(\Delta^{-1})$ ростков мероморфных функций, кратных дивизору Δ^{-1}, определенный для любого атласа $\{U_\alpha\} \subset \mathbf{U}_D$ семейством абелевых групп

$$\Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}(\Delta^{-1})) = \{\, f \in \Gamma(U, \mathcal{M}) \mid f \equiv 0 \text{ или } (f)\Delta \geqslant 1 \text{ в } U_\alpha \,\}$$

с обычным гомеоморфизмом сужения. Очевидно, пространство $\Gamma(D, \mathcal{M}(\Delta^{-1}))$ глобальных сечений этого пучка совпадает с пространством $L_{\Delta^{-1}}$ мероморфных функций, кратных дивизору Δ^{-1}.

Далее, если линейному расслоению $\xi \in H^*(D)$ соответствует класс дивизоров с представителем Δ, то группы $\Gamma(D, \mathcal{M}(\Delta^{-1}))$ и $\Gamma(D, \mathcal{A}(\xi))$ изоморфны ($\mathcal{A}(\xi)$ — пучок ростков аналитических сечений расслоения ξ). Действительно, пусть дано $\xi \in H^*$ и $d = \{d_\alpha\}$ — его сечение, то есть $d_\alpha = \xi_{\alpha\beta} d_\beta$. Тогда, по определению изоморфизма между H^* и Ω^*, сечению d соответствует дивизор $\Delta \in \Omega^*$ такой, что $(d_\alpha) = \Delta\big|_{U_\alpha}$, $U_\alpha \in \in \mathbf{U}_D$. Каждому сечению $f \in \Gamma(D, \mathcal{M}(\Delta^{-1}))$ поставим в соответствие сечение $h_\alpha = f d_\alpha$, $h_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}^*)$, тогда $(h_\alpha) = (f)\Delta \geqslant 1$ и, кроме того, $h_\alpha = \xi_{\alpha\beta} h_\beta$, то есть $h = \{h_\alpha\}$ — сечение из $\Gamma(D, \mathcal{A}(\xi))$. Легко проверить, что это соответствие — изоморфизм. Таким образом, существует изоморфизм между $\Gamma(D, \mathcal{A}(\xi))$ и векторным пространством $\Gamma(D, \mathcal{M}(\Delta^{-1})) = L_{\Delta^{-1}}$.

Аналогично пространство L^*_Δ изоморфно $\Gamma(D, \mathcal{A}(\xi^0\xi^{-1}))$ (каноническое расслоение ξ^0 определено в п. 3.4), в частности $r[\Delta^{-1}] = = \dim \Gamma(D, \mathcal{A}(\xi))$ и $i[\Delta] = \dim \Gamma(D, \mathcal{A}(\xi^0\xi^{-1}))$, где ξ — линейное расслоение, соответствующее дивизору Δ.

Дадим теперь две эквивалентные формулировки теоремы Римана–Роха [41, 1]:

- для всякого дивизора $\Delta \in \Omega^*$ $r[\Delta^{-1}] - i[\Delta] = \deg \Delta - \rho + 1$;
- для всякого линейного расслоения $\xi \in H^*$

  $$\dim \Gamma(D, \mathcal{A}(\xi)) - \dim \Gamma(D, \mathcal{A}(\xi^0\xi^{-1})) = \varkappa_\xi - \rho + 1$$

  где $\varkappa_\xi$ — класс Чженя расслоения ξ,

ρ — род D.

5.5. Свойства отображения Якоби. В предыдущем параграфе мы рассматривали отображение Якоби как гомоморфизм групп $J : \Omega^* \to \mathrm{Jac}(D)$. Исследуем теперь его свойства как отображения многообразия точек дивизора на многообразие Якоби.

Для произвольного натурального $n \geqslant 1$ и римановой поверхности D определим *симметрическое произведение* $D^{(n)}$ как фактор — пространство $D^{(n)} = D^n/\sigma_n$ комплексно аналитического многообразия D^n, являющегося прямым произведением n штук римановых поверхностей D, по модулю всех перестановок элементов вектора $\mathbf{Y} \in D^n$. Точками $D^{(n)}$ являются неупорядоченные наборы из n штук точек римановой поверхности D, которые, очевидно, представляют собой положительные дивизоры $\Delta = p_1 \ldots p_n$. Симметрическое произведение поэтому будем называть *многообразием положительных дивизоров* степени n на римановой поверхности D.

Симметрическое произведение $D^{(n)}$ — комплексно аналитическое многообразие размерности n [1], его точки будем обозначать большими латинскими буквами, например $Y \in D^{(n)}$, $Y = y_1 \dots y_n$, в отличие от векторов $\mathbf{Y} \in D^n$, $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$.

Пусть $\Delta_1, \Delta_2 \in D^{(n)}$, $\Delta_1 = p_1 \dots p_n$, $\Delta_2 = q_1 \dots q_n$, определим отображение Якоби

$$J(\Delta_1|\Delta_2) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{p_k}^{q_k} \mathbf{w}(t) \,(\operatorname{mod} \mathcal{L}(w)),$$

где $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), \dots, w_\rho(t))$ и $\mathcal{L}(w)$ — вектор абелевых дифференциалов и решетка периодов, определенные в п. 3.7. В частности, для фиксированной точки $r_0 \in D$ имеем отображение $J(z) = J(r_0^n|z) : D^{(n)} \to \to \mathrm{Jac}(D)$, $z \in D^{(n)}$. Это отображение является голоморфным и для всех $n \geqslant 1$ его образ $W_n = J(D^{(n)})$ является подмножеством многообразия $\mathrm{Jac}(D)$.

В случае $n = 1$ отображение $J : D \to \mathrm{Jac}(D)$ является, как легко проверить, гомеоморфизмом и, значит, W_1 — комплексно аналитическое многообразие. В случае $n \geqslant \rho$ $W_n = \mathrm{Jac}(D)$ (см. далее). При $1 < n < \rho$ множества W_n не являются комплексно аналитическими многообразиями, в теории функций многих комплексных переменных такие множества называют *аналитическими* [1] и говорят, что аналитическое множество W_n имеет размерность n. Заметим, что $J(r_0^n|z_1 \dots z_n) = J(r_0^{n+1}|r_0 z_1 \dots z_n)$, следовательно $W_n \subseteq W_{n+1}$ для всех n. Таким образом, получаем цепочку аналитических множеств

$$D \cong W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_{\rho-1} \subset W_\rho = W_{\rho+1} = \dots = \mathrm{Jac}(D).$$

Из теорем 3.1 (Абеля) и 3.2 п. 3.7. следует, что группа Якоби, определенная как фактор — группа $\mathbb{C}^\rho/\mathcal{L}(w)$, изоморфна группе $\Omega_0^* = \Omega_0/\widetilde{\Omega}$. В свою очередь, из изоморфизма $H^*(D) \cong \Omega^*$ следует, что $\Omega_0^* \cong P(D) = \{\xi \in H^*(D) \,|\, \varkappa_\xi = 0\}$, т. е. $\mathrm{Jac}(D) \cong P(D)$. Группа $P(D)$ называется *группой Пикара.*

Рассматривая аналитические множества W_n как подмножества $P(D)$, заметим, что W_n состоит в точности из тех голоморфных расслоений $\xi \in P(D)$, которые могут быть записаны в виде $\xi = \zeta_{p_1} \dots \zeta_{p_n} \zeta_{r_0}^{-n}$ для некоторых точек $p_1, \dots, p_n \in D$, где ζ_p — расслоение, соответствующее дивизору $\Delta = p$ (дивизор состоит из одного нуля p). Это, в свою очередь, эквивалентно условию, что расслоение $\xi\zeta_{r_0}^n$ имеет нетривиальное голоморфное сечение. Действительно, $\zeta_{p_1} \dots \zeta_{p_n}$ имеет такое сечение (оно совпадает с мероморфным, кратным дивизору $p_1 \dots p_n$). С другой стороны, если $\xi\zeta_{r_0}^n$ имеет нетривиальное голоморфное сечение, то степень дивизора этого сечения равна классу Чженя расслоения $\xi\zeta_{r_0}^n$, т. е. равна n. Пусть дивизор сечения имеет вид $p_1 \dots p_n$, тогда $\xi\zeta_{r_0}^n = \zeta_{p_1} \dots \zeta_{p_n}$.

Введем обозначение $\gamma(\xi) = \dim \Gamma(D, \mathcal{A}(\xi))$ для $\xi \in H^*(D)$, тогда

$$W_n = \{\, \Delta \in \Omega_0^* \,|\, r[\Delta^{-1} r_0^{-n}] \geqslant 1 \,\},$$

или, что то же самое,

$$W_n = \{\, \xi \in P(D) \,|\, \gamma(\xi \zeta_{r_0}^n) \geqslant 1 \,\}.$$

Поскольку для $\xi \in P(D)$ $\varkappa_{\xi\zeta_{r_0}^n} = n$, то из теоремы Римана–Роха следует, что $\gamma(\xi\zeta_{r_0}^n) \geqslant 1$ как только $n \geqslant \rho$ и значит $W_n = P(D)$ или $W_n = \mathrm{Jac}(D)$ если $n \geqslant \rho$. Отсюда, в частности, следует теорема 4.2 п. 4.2.

Теперь естественно ввести следующее семейство подмножеств

$$W_n^\nu = \{\, \xi \in P(D) \,|\, \gamma(\xi\zeta_{r_0}^n) \geqslant \nu \,\}$$

для произвольного целого $\nu \geqslant 1$. Аналитические множества W_n^ν называют подмножествами *специальных положительных дивизоров*, $W_n = W_n^1 \subseteq W_n^2 \subseteq \ldots$ [1].

Пусть, как и ранее, ξ^0 — каноническое расслоение, класс Чженя ξ^0 $\varkappa = 2\rho - 2$, т. е. $\xi^0\zeta_{r_0}^{-(2\rho-2)} \in P(D)$, тогда из теоремы Римана–Роха вытекает следующее интересное тождество [1]:

$$\zeta_{r_0}^{-(2\rho-2)}\xi^0 / W_n^\nu = W_s^\mu,$$

где $s = 2\rho - 2 - n$ и $\mu = \rho - 1 - (n - \nu)$, под делением элемента на множество понимается множество всех частных. Отсюда, в частности, следует, что

$$W_\rho^2 = \xi^0\zeta_{r_0}^{-(2\rho-2)} / W_{\rho-2}. \tag{5.1}$$

Следовательно, W_ρ^2 — аналитическое подмножество $\mathrm{Jac}(D)$ размерности $\rho - 2$.

Вернемся теперь к рассмотрению свойств отображения Якоби $J : D^{(n)} \to \mathrm{Jac}(D)$. Чтобы сформулировать следующий результат, определим новое комплексное многообразие. Для этого на множестве точек из $\mathbb{C}^n$ введем отношение эквивалентности: $z_1 \sim z_2$ если $z_1 = \lambda z_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Множество классов эквивалентности по этому отношению образует комплексно аналитическое многообразие CP^{n-1}, называемое *проективным* [1, 4].

Теорема 5.2. *Для любого дивизора $P = p_1 \ldots p_n \in D^{(n)}$ такого, что $\gamma(\zeta_{p_1} \ldots \zeta_{p_n}) = \nu$ слой $J^{-1}(J(P))$ отображения Якоби $J : D(n) \to \mathrm{Jac}(D)$ является аналитическим подмногообразием в $D^{(n)}$ размерности $\nu - 1$, которое аналитически гомеоморфно проективному пространству $CP^{\nu-1}$.*

Доказательство. Из голоморфности отображения $J : D^{(n)} \to \mathrm{Jac}(D)$ сразу следует, что слой $J^{-1}(J(P))$ является аналитическим множеством в $D^{(n)}$. Покажем, что существует гомеоморфизм $g : CP^{\nu-1} \to D^{(n)}$, образ которого совпадает с $J^{-1}(J(P))$. Из теоремы Абеля (теорема 1 п. 3.7.) следует, что слой $J^{-1}(J(P))$ состоит из положительных дивизоров степени n, эквивалентных данному дивизору P; они также являются дивизорами нетривиальных голоморфных сечений линейного расслоения $\zeta_P = \zeta_{p_1} \dots \zeta_{p_n}$. Пусть $f_1, \dots, f_\nu$ — базис векторного пространства голоморфных сечений расслоения ζ_P, сопоставим каждой точке $(c_1, \dots, c_\nu) \in \mathbb{C}^\nu$, отличной от нуля, дивизор сечения $c_1 f_1 + \dots + c_\nu f_\nu$:

$$g(c_1, \dots, c_\nu) = (c_1 f_1 + \dots + c_\nu f_\nu) \in D^{(n)}$$

и получим отображение, образ которого в точности равен $J^{-1}(J(P))$.

Заметим, что два сечения $f', f'' \in \Gamma(D, \mathcal{A}(\zeta_P))$ имеют один и тот же дивизор тогда и только тогда, когда $f' = \lambda f''$, $\lambda \in \mathbb{C}$, поскольку их отношение f'/f'' есть функция, голоморфная на всей римановой поверхности D, т. е. константа. Таким образом, $g(c_1', \dots, c_\nu') = g(c_1'', \dots, c_\nu'')$ в точности тогда, когда $c_j' = \lambda c_j''$, $j = \overline{1, \nu}$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Следовательно, определено и взаимно однозначно индуцированное отображение $g : CP^{\nu-1} \to D^{(n)}$.

Доказательство голоморфности отображения g см. в книге Р.Г.Ганнинга [1].

Следствие. *Если $n \geqslant 2\rho - 1$, то слой $J^{-1}(a)$ отображения Якоби $J : D^{(n)} \to \mathrm{Jac}(D)$ является комплексно аналитическим подмногообразием в $D^{(n)}$, гомеоморфным $CP^{n-\rho}$ для любой точки $a \in \mathrm{Jac}(D)$.*

Доказательство. Если $n \geqslant 2\rho - 1$, то из теоремы Римана–Роха следует, что $\gamma(\zeta_{p_1} \dots \zeta_{p_n}) = n - \rho + 1$ для любой точки $P = p_1 \dots p_n \in D^{(n)}$, то есть желаемый результат сразу следует из теоремы 5.2.

Данное следствие наталкивает на вопрос: не является ли $D^{(n)}$ при $n \geqslant 2\rho - 1$ расслоением над $\mathrm{Jac}(D)$ со слоем $CP^{n-\rho}$ и проекцией $J : D^{(n)} \to \mathrm{Jac}(D)$? Следующая теорема дает положительный ответ [1].

Теорема 5.3. *Если $n \geqslant 2\rho - 1$, то $D^{(n)}$ — голоморфное расслоение над $\mathrm{Jac}(D)$ с пространством слоя $CP^{n-\rho}$ и проекцией $J : D^{(n)} \to \mathrm{Jac}(D)$.*

В дальнейшем точки $P \in D^{(n)}$ такие, что $\gamma(\zeta_P) > 1$ будем называть *критическими* для отображения Якоби, остальные точки будем называть *регулярными*. В свою очередь, если P критическая (регулярная) точка, то $J(P) \in \mathrm{Jac}(D)$ — *критическое* (*регулярное*) *значение* отображения J. По определению множество критических значений отображения Якоби совпадает с множеством W_n^2, то есть является аналитическим.

Не сложно заметить, что данное определение эквивалентно общепринятому, согласно которому критическими называются точки, в которых вырождается матрица Якоби отображения. В случае $n = \rho$ якобиан отображения $J : D^{(\rho)} \to \mathrm{Jac}(D)$ совпадает с полилинейным дифференциалом $\omega(p_1, \dots, p_\rho)$, определенным в п. 4.1. Таким образом, множество критических точек этого отображения совпадает с множеством

$$\{\, p_1 \dots p_\rho) \in D^{(\rho)} \,|\, \omega(p_1, \dots, p_\rho) = 0 \,\}.$$

Утверждение $W_\rho = \mathrm{Jac}(D)$ означает, что для каждой точки $a \in \in \mathrm{Jac}(D)$ существует ее прообраз (при отображении $J : D^{(\rho)} \to \mathrm{Jac}(D)$). Теорема 5.2 утверждает, что для регулярного значения $a \in \mathrm{Jac}(D)$ это отображение однозначно обратимо. Множество критических значений этого отображения W_ρ^2 является аналитическим размерности $\rho - 2$. Таким образом, отображение $J : D^{(\rho)} \to \mathrm{Jac}(D)$ однозначно обратимо почти всюду на $\mathrm{Jac}(D)$. Если определить подмножество

$$G_n^\nu \subset D^{(n)}, \quad G_n^\nu = \{\, p_1 \ldots p_n \in D^{(n)} \,|\, \gamma(\zeta_{p_1} \ldots \zeta_{p_n}) \geqslant \nu \,\},$$

то из теоремы 5.2 следует, что отображение J гомеоморфно только на сужении:

$$J : D^{(\rho)} \backslash G_\rho^2 \to \mathrm{Jac}(D) \backslash W_\rho^2.$$

Отсюда видно, что не существует непрерывного решения проблемы обращения Якоби, т. е. не существует непрерывного отображения $Z(a) : \mathrm{Jac}(D) \to D^{(\rho)}$ такого, что $J(Z(a)) \equiv a$ для всех $a \in \mathrm{Jac}(D)$. Из теоремы 5.3 следует, что подобное обращение существует для отображения $J : D^{(2\rho)} \to \mathbb{C}^\rho$.

Действительно, пусть $Y_0 = y_1 \ldots y_{2\rho} \in D^{(2\rho)}$ — фиксированная точка, определим отображение $J : D^{(2\rho)} \to \mathrm{Jac}(D)$ формулой $J(Z) = = J(Y_0|Z) \pmod{\mathcal{L}}$, $Z \in D^{(2\rho)}$. Тогда, согласно теореме 5.3, $D^{(2\rho)}$ — расслоение над $\mathrm{Jac}(D)$ с проекцией J.

Для построения обращения J воспользуемся методом поднятия кривых. Именно, зададим на расслоении $D^{(2\rho)}$ над $\mathrm{Jac}(D)$ метод поднятия кривых. Далее, для произвольной точки $a \in \mathbb{C}^\rho$ пусть кривая $\gamma_a^0 : [0,1] \to \mathbb{C}^\rho$ есть отрезок, соединяющий 0 и a в $\mathbb{C}^\rho$, $\gamma_a^0(0) = 0$, $\gamma_a^0(1) = = a$. По кривой $\gamma_a^0(t)$ построим кривую $\widehat{\gamma}_a(t) = \pi(\gamma_a^0(t))$, где $\pi : \mathbb{C}^\rho \to \to \mathrm{Jac}(D)$ — проекция. Очевидно, точки $\widehat{\gamma}_a(t)$ голоморфно зависят от $\gamma_a^0(t)$. В свою очередь, по кривой $\widehat{\gamma}_a(t)$ построим ее поднятие $\gamma_a(t)$ такое, что $\gamma_a(0) = Y_0$ (проекция $\widetilde{J}(Y_0) = 0 = \widehat{\gamma}(0)$). Тогда отображение $a \to Z(a) = \gamma_a(1)$ и будет искомым. Действительно, для всех $a \in \mathbb{C}^\rho$ по построению $\widetilde{J}(Z(a)) = a \pmod{\mathcal{L}}$ и отображение $Z(a) : \mathbb{C}^\rho \to D^{(2\rho)}$ аналитично в силу свойств поднятия (п. 5.3).

Полученный результат сформулируем в виде леммы:

Лемма 5.1. *Для любой точки $Y_0 \in D^{(2\rho)}$ существует голоморфное отображение $Z : \mathbb{C}^\rho \to D^{(2\rho)}$ такое, что для всех $a \in \mathbb{C}^\rho$ $J(Y_0|Z(a)) = = a \pmod{\mathcal{L}}$.*

5.6. Устойчивость дивизоров, функций и абелевых дифференциалов (продолжение). В предыдущем параграфе затрагивалась проблема построения дивизора Δ и дополнительного к нему дивизора P/Q по данным координатам $(\varkappa, a) \in \mathbb{Z} \times \mathrm{Jac}(D)$. Затем в п. 4.4 было введено понятие сходимости дивизоров в $\Omega^* \cong \mathbb{Z} \times \mathrm{Jac}(D)$, в котором, кроме естественного требования сходимости координат ($\varkappa = \mathrm{const}$, $a_m \to a_0$ в $\mathrm{Jac}(D)$) было заложено дополнительное условие $l(\varkappa, a_m) = = \mathrm{const}$. Проанализируем это условие. Пусть $\xi_a \in P(D)$ — расслоение, соответствующее точке $a \in \mathrm{Jac}(D)$ при изоморфизме $P(D) \leftrightarrow \mathrm{Jac}(D)$. Тогда условие $l(\varkappa, a_m) = l = \mathrm{const}$ означает, что $\gamma(\xi_{a_m}\zeta_{r_0}^{\varkappa}) = l$, то есть $\xi_{a_m} \in W_{\varkappa}^{l}$. Отсюда видно, что при $\varkappa \in [0, 2\rho - 2]$ для выполнения условия $l(\varkappa, a_m) = \mathrm{const}$ все a_m должны принадлежать аналитическому множеству $W_{\varkappa}^{l}$ в $\mathrm{Jac}(D)$ размерности $l-1$; понятно, что это условие является достаточно ограничительным.

В данном пункте мы обратимся к задаче построения дивизора $\Delta(\varkappa, a)$ с координатами $(\varkappa, a) \in \mathbb{Z} \times \mathrm{Jac}(D)$ и дополнительного к нему $P(\varkappa, a)/Q(\varkappa, a)$ как непрерывных операторов над $(\varkappa, a)$. Для этого несколько скорректируем постановку задачи, а именно, изменим определение дополнительного дивизора так, чтобы число его нулей $\deg P$ и полюсов $\deg Q$ не зависело от a.

Затем, аналогично параграфу 4, мы построим систему абелевых дифференциалов $K(p,q)$, w_j и докажем их непрерывность как операторов над $(\varkappa, a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^{\rho}$.

Начнем с определения числа нулей и полюсов дополнительного дивизора P/Q. С этой целью обратимся к оценкам Клиффорда [41, 1]:

$$l(\varkappa, a) \leqslant \left[\frac{\varkappa}{2}\right] + 1 = l_0, \quad l^*(\varkappa, a) \leqslant l_0 - \varkappa + \rho - 1, \quad \varkappa \in [0, 2\rho - 2]$$

(здесь $[r]$ — целая часть числа r). Определим числа $l_0 = l_0(\varkappa)$ и $l_0^* = l_0^*(\varkappa)$ следующим образом:

$$l_0 = \begin{cases} 0, & \varkappa < 0 \\ \left[\dfrac{\varkappa}{2}\right] + 1, & 0 \leqslant \varkappa \leqslant 2\rho - 2 \\ \varkappa - \rho + 1, & \varkappa \geqslant 2\rho - 1, \end{cases}$$

$$l_0^* = l_0 - \varkappa + \rho - 1.$$

Очевидно, что при $\varkappa \overline{\in} [0, 2\rho - 2]$ $l_0(\varkappa) = l(\varkappa, a)$ и $l_0^*(\varkappa) = l^*(\varkappa, a)$ для всех $a \in \mathrm{Jac}(D)$.

Пусть Δ — произвольный дивизор степени $\varkappa$, дивизор P/Q, $P = p_1 \ldots p_{l_0}$, $Q = q_1 \ldots q_{l_0^*}$ будем называть *обобщенным дополнительным* к Δ, если $l_0 = l_0(\varkappa)$, $l_0^* = l_0^*(\varkappa)$ и дивизор $\Delta Q/P$ — минимальный. Соответственно будем называть P обобщенным дополнительным дивизором *нулей*, Q — обобщенным дополнительным дивизором *полюсов*.

Лемма 5.2. *Пусть $\varkappa \in \mathbb{Z}$, $r_0 \in D$. Для любого $Y_0 \in D^{(2\rho)}$ можно определить голоморфное отображение $Z(a) : \mathbb{C}^{\rho} \to D^{(2\rho)}$ так, что $\forall\, a \in \mathbb{C}^{\rho}$ дивизор $\Delta(a) = r_0^{\varkappa} Z(a)/Y_0$ имеет координаты $(\varkappa, a)$.*

Замечание. Точка r_0 используется для построения координат дивизора (п. 3.7).

Доказательство. При доказательстве леммы 5.1 построено голоморфное отображение $Z(a) : \mathbb{C}^{\rho} \to D^{(2\rho)}$ такое, что $J(Y_0|Z(a)) = a \pmod{\mathcal{L}}$, $a \in \mathbb{C}^{\rho}$. Но последнее условие означает, что дивизор $Z(a)/Y_0$ имеет координаты $(0, a)$, откуда непосредственно следует, что $\Delta(a) = r_0^{\varkappa} Z(a)/Y_0$ имеет координаты $(\varkappa, a)$. Лемма доказана.

Теорема 5.4. *Пусть $\varkappa \in \mathbb{Z}$, $l_0 = l_0(\varkappa)$, $l_0^* = l_0^*(\varkappa)$, $r_0 \in D$ и $\Delta(a) = r_0^{\varkappa} Z(a)/Y_0$ — построенный в лемме 5.2 дивизор с координатами $(\varkappa, a)$. Тогда существуют голоморфные отображения*

$$P = P(a) = p_1 \dots p_{l_0} : \mathbb{C}^\rho \to D^{(l_0)},$$

$$Q = Q(a) = q_1 \dots q_{l_0^*} : \mathbb{C}^\rho \to D^{(l_0^*)},$$

$$R = R(a) = r_1 \dots r_\rho : \mathbb{C}^\rho \to D^{(\rho)}$$

такие, что $\forall\, a \in \mathbb{C}^\rho$ дивизор $P(a)/Q(a)$ — обобщенный дополнительный к $\Delta(a)$, причем $\Delta(a)Q(a)/P(a) = \widetilde{\Delta}(a)R(a)r_0^{-1}$, где $\widetilde{\Delta}(a)$ — главный дивизор. При этом выполнены условия

$$p_j \neq p_s, \quad q_k \neq q_m, \quad p_j \neq q_k, \quad j \neq s, \quad k \neq m, \quad j, s = \overline{1, l_0}, \quad k, m = \overline{1, l_0^*}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Возьмем дивизоры $P_0 = p_1^0 \dots p_{l_0}^0$, $Q_0 = q_1^0 \dots q_{l_0^*}^0$, удовлетворяющие условиям (5.2). Из определения l_0 и l_0^* следует, что $l_0 + l_0^* \geqslant \rho$. Пусть

$$l = l(\varkappa) = \begin{cases} 0, & \varkappa < 0 \\ \left[\dfrac{\varkappa}{2}\right] + 1, & 0 \leqslant \varkappa \leqslant 2\rho - 2 \\ \rho, & \varkappa \geqslant 2\rho - 1, \end{cases}$$

$$l^* = \rho - l.$$

Тогда заведомо $l_0 \geqslant l$, $l_0^* \geqslant l^*$. Зафиксируем последние $l_0 - l$ точек дивизора P_0 и $l_0^* - l^*$ точек дивизора Q_0 и соответственно будем обозначать

$$P = p_1 \dots p_l p_{l+1}^0 \dots p_{l_0}^0 = P_l\, \widetilde{P}_0, \quad P_0 = P_l^0\, \widetilde{P}_0;$$

$$Q = q_1 \dots q_{l^*} q_{l^*+1}^0 \dots q_{l_0^*}^0 = Q_{l^*}\, \widetilde{Q}_0, \quad Q_0 = Q_{l^*}^0\, \widetilde{Q}_0$$

и $H = P_l Q_{l^*} \in D^{(l)} \times D^{(l^*)}$ ($\widetilde{P}_0 = 1$ при $\varkappa \leqslant 2\rho - 2$, $\widetilde{Q}_0 = 1$ при $\varkappa \geqslant 2\rho - 1$). Очевидно, имеем $\deg H = l + l^* = \rho$.

Выберем дивизоры P_l^0, $Q_{l^*}^0$ и $R_0 = r_1^0 \dots r_\rho^0$ так, чтобы $H_0 = P_l^0 Q_{l^*}^0$ и R_0 не принадлежали G_ρ^2, т. е. дивизоры $H_0 r_0^{-1}$ и $R_0 r_0^{-1}$ были минимальными и при этом для P_0 и Q_0 были по прежнему выполнены условия (5.2).

Введем отображения:

$$F_1(R) = J(R_0 \,|\, R) : D^{(\rho)} \to \operatorname{Jac}(D),$$

$$F_2(a|H) = \begin{cases} J(Y_0 R_0 \widetilde{P}_0 P_l | r_0^{\varkappa+1} Z(a)\, \widetilde{Q}_0 Q_{l^*}), & \varkappa + 1 \geqslant 0, \\ J(r_0^{-\varkappa-1} Y_0 R_0 \widetilde{P}_0 P_l | Z(a)\, \widetilde{Q}_0 Q_{l^*}), & \varkappa + 1 < 0, \end{cases}$$

$$F_2(a|\cdot) : D^{(l)} \times D^{(l^*)} \to \operatorname{Jac}(D).$$

Отметим, что если $\varkappa + 1 \geqslant 0$, то

$$\deg(Y_0 R_0 \widetilde{P}_0 P_l) = 3\rho + l_0(\varkappa) = 2\rho + \varkappa + 1 + l_0^*(\varkappa) = \\ = \deg(r_0^{\varkappa+1} Z(a) \widetilde{Q}_0 Q_{l^*}),$$

а если $\varkappa + 1 < 0$ то, аналогично,

$$\deg(r_0^{-\varkappa-1} Y_0 R_0 \widetilde{P}_0 P_l) = -\varkappa - 1 + 3\rho + l_0(\varkappa) = 2\rho + l_0^*(\varkappa) = \\ = \deg(Z(a) \widetilde{Q}_0 Q_{l^*}),$$

т. е. в любом случае отображение $F_2(a\,|\,\cdot)$ определено корректно.

Якобиан отображения F_1 очевидно равен $\omega(r_1, \ldots, r_\rho)$, а отображения $F_2(a\,|\,\cdot)$ — $(-1)^l \omega(p_1, \ldots, p_l, q_1, \ldots, q_{l^*})$, т. е. R_0 и H_0 — регулярные точки для отображений F_1 и $F_2(a\,|\,\cdot)$ соответственно. Следовательно, $0 = F_1(R_0)$ и $b_0(a) = F_2(a|H_0)$ — регулярные значения отображений. Отметим, что для любого фиксированного H $b(a) = F_2(a|H)$ есть голоморфное сечение тривиального расслоения $\mathrm{Jac}(D) \times \mathbb{C}^\rho$ над $\mathbb{C}^\rho$.

Построим специальное сечение указанного расслоения. Предварительно докажем один вспомогательный результат:

Лемма 5.3. *Пусть H_0 — регулярная точка отображения $F_2(a|\,\cdot\,)$ для любого $a \in \mathbb{C}^\rho$. Тогда существует окрестность H_0, $H_0 \in U \subset D(l) \times D^{(l^*)}$ такая, что $F_2(a\,|\,\cdot)$ регулярно в U для любого $a \in \mathbb{C}^\rho$.*

Доказательство. Предположим противное — существуют последовательности $H_n \to H_0$ и $a_n \in \mathbb{C}^\rho$ такие, что H_n — критические точки отображений $F_2(a_n\,|\,\cdot)$. Так как, очевидно, $Z(a)$, а следовательно и $F_2(a\,|\,\cdot)$, зависят от класса эквивалентности a по модулю периодов $\mathcal{L}$, то можно считать a_n лежащими в компактном множестве, т. е. без ограничения общности $a_n \to a_0$. Тогда H_0 — критическая точка для отображения $F_2(a_0\,|\,\cdot)$, что противоречит условиям леммы. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 5.4. Пусть U — окрестность H_0 в $D^{(l)} \times D^{(l^*)}$ такая, что в U отображение $F_2(a\,|\,\cdot)$ регулярно для любого $a \in \mathbb{C}^\rho$ и при этом $\forall\, H = P_l\, Q_{l^*} \in U$ дивизоры $P = P_l\, \widetilde{P}_0$ и $Q = Q_{l^*}\, \widetilde{Q}_0$ удовлетворяют условиям (5.2). Обозначим $V(a) = F_2(a|U)$ — окрестности $b_0(a)$ в $\mathrm{Jac}(D)$, аналитически гомеоморфные U.

Пусть

$$X = \{\, (a, b) \,|\, a \in \mathbb{C}^\rho, b \in V(a) \,\}$$

— голоморфное расслоение над $\mathbb{C}^\rho$ с естественной проекцией $\pi((a, b)) = a$, аналитически гомеоморфное $\mathbb{C}^\rho \times U$. Размерность X как комплексно аналитического расслоения равна, очевидно, 2ρ. Рассмотрим подмножество

$$X_1 = \{\, (a, b) \in X \,|\, b \in W_\rho^2 \,\}.$$

Очевидно, X_1 — аналитическое подмножество X размерности $2\rho - 2$. Тогда X_1 не разбивает никакой подобласти в X [1, с. 116], т. е. можно построить подмногообразие

$$X_0 = \{\,(a,b)\,|\,a \in \mathbb{C}^\rho, \quad b \in V_0(a) \subset V(a)\,\}$$

так, что $X_0 \cap X_1 = \emptyset$, т. е. $V_0(a) \cap W^2_\rho = \emptyset$, причем X_0 — голоморфное расслоение над $\mathbb{C}^\rho$ [4]. Обращая отображение $F_2(a\,|\,\cdot)$ в $V_0(a)$, получим аналитически гомеоморфное X_0 расслоение

$$\widetilde{X}_0 = \{\,(a,H)\,|\,a \in \mathbb{C}^\rho, H \in F_2^{-1}(a|V_0(a)) \subset U\,\}.$$

Зададим на $\widetilde{X}_0$ метод поднятия кривых и зафиксируем произвольно $\widetilde{H}_0 \in F_2^{-1}(0\,|\,V_0(0))$. Теперь пусть $\widehat{\gamma}_a(t)$ — отрезок, соединяющий 0 и a в $\mathbb{C}^\rho$, $\widehat{\gamma}_a(0) = 0$, $\widehat{\gamma}_a(1) = a$. Тогда существует единственное поднятие $\gamma_a(t)$ кривой $\widehat{\gamma}_a(t)$ в расслоение $\widetilde{X}_0$ такое, что $\gamma_a(0) = (0, \widetilde{H}_0)$. Пусть $\gamma_a(1) = (a, H(a))$, $H(a) = P_l(a)Q_{l^*}(a)$, $b(a) = F_2(a\,|\,H(a))$. Тогда $H(a)$ — сечение расслоения $\widetilde{X}_0$, $b(a)$ — сечение X_0.

Так как $b(a)\overline{\in} W^2_\rho$, $a \in \mathbb{C}^\rho$, то $b(a)$ — регулярное значение отображения $F_1(R) = J(R_0\,|\,R)$. Но поскольку $D^{(\rho)}$ — компактно, то по теореме о неявной функции полный прообраз малой окрестности V точки $b(a)$ при отображении F_1 есть объединение конечного числа непересекающихся связных открытых множеств $F_1^{-1}(V) = U_1 \cup \ldots \cup \cup U_n$, причем имеются голоморфные отображения $\psi_j : V \to U_j$ такие, что $F_1(\psi_j(b)) \equiv b$, $b \in V$. Таким образом, для любого $a \in \mathbb{C}^\rho$ имеем локальные голоморфные отображения $R_j = \psi_j \circ b : \mathbb{C}^\rho \to D^{(\rho)}$, $R_j(a) = \psi_j(b(a))$. Но так как $\mathbb{C}^\rho$ — односвязное комплексно аналитическое многообразие, то по теореме о монодромии отображения $R_j(a)$ продолжаются до глобальных голоморфных отображений $R_j : \mathbb{C}^\rho \to D^{(\rho)}$. Выберем произвольно одно из них, получим голоморфное отображение $R : \mathbb{C}^\rho \to D^{(\rho)}$ такое, что $F_1(R(a)) = J(R_0\,|\,R(a)) = b(a)$, $a \in \mathbb{C}^\rho$.

Покажем, что отображения $P(a) = P_l(a) \cdot \widetilde{P}_0$, $Q(a) = Q_{l^*}(a)\widetilde{Q}_0$ и $R(a)$ — искомые. Действительно, все они аналитичны по $a \in \mathbb{C}^\rho$, причем для $P(a)$ и $Q(a)$ выполнены условия (5.2). Далее, так как $J(R_0\,|\,R(a)) = b(a)\overline{\in} W^2_\rho$, то $R(a)$ — регулярная точка отображения J, откуда следует, что дивизор $\Delta_0(a) = R(a)r_0^{-1}$ — минимальный (см. лемму 1 п. 4.1). Наконец, при $\varkappa + 1 \geqslant 0$ имеем

$$0 = F_2(a|H(a)) - F_1(R(a)) = J\big(Y_0R_0\widetilde{P}_0P_l(a)|r_0^{\varkappa+1}Z(a)\widetilde{Q}_0Q_{l^*}(a)\big) - \\ = J(R_0\,|\,R(a)) = J(Y_0R(a)P(a)|r_0^{\varkappa+1}Z(a)Q(a)),$$

откуда по теореме Абеля следует, что дивизор

$$\widetilde{\Delta}(a) = \frac{r_0^{\varkappa+1}Z(a)Q(a)}{Y_0R(a)P(a)} = \Delta(a)Q(a)/P(a)r_0/R(a)$$

главный, следовательно дивизор $\Delta(a)Q(a)/P(a) = \widetilde{\Delta}(a)\Delta_0(a)$ — тоже минимальный, т. е. $P(a)/Q(a)$ — обобщенный дополнительный к $\Delta(a)$.

Тот же результат, очевидно, получится при $\varkappa + 1 < 0$. Теорема доказана.

Теперь, аналогично параграфу 4 (п. 4.3), построим голоморфно зависящие от $a \in \mathbb{C}^\rho$ дифференциалы $K(p, q)$ и $w_j(p)$, $j = \overline{1, l_0^*}$. Именно, по главному дивизору $\widetilde{\Delta}(a)$ определим мероморфную функцию $f(a \mid z)$ с этим дивизором (следствие теоремы Абеля, п. 4.2.), а по минимальному дивизору $\Delta_0(a) = R(a)r_0^{-1}$ — абелев дифференциал $K_0(a \mid p, q)$, кратный $\Delta_0(a)q^{-1}$. Как и в п. 4.3, введем абелев дифференциал

$$K(\Delta(a)Q(a)P^{-1}(a) \mid p, q) = K(a \mid p, q) = \frac{f(a \mid p)}{f(a \mid q)}\, K_0(a \mid p, q),$$

для него, очевидно, верны леммы 4.8, 4.9 п. 4.3.

Далее, определим систему абелевых дифференциалов $w_j(a \mid p)$, $j = \overline{1, l_0^*}$ по формуле (4.11) (п. 4.3):

$$w_j(a \mid p) = \operatorname{Res}(K(a \mid p, q)K_0^0(q, r_0))\big|_{q=q_j},$$

где $K_0^0(p, q)$ — абелев дифференциал, кратный дивизору $\Delta_0 q^{-1}$, $\Delta_0 = r_1^0 \ldots r_\rho^0 (r_0^0)^{-1}$ — минимальный дивизор такой, что $r_j^0 \neq q_k(a)$, $j = \overline{0, \rho}$, $k = \overline{1, l_0^*}$, где $q_1(a) \ldots q_{l_0^*}(a) = Q(a)$. Последнее условие возможно потому, что по построению $\forall\, a \in \mathbb{C}^\rho$ $Q(a) \in U$ — окрестности фиксированного дивизора Q_0.

Для дифференциалов $w_j(a \mid p)$, очевидно, верна следующая

Лемма 5.4.

1. $w_j(a \mid p)$, $j = \overline{1, l_0^*}$ — *линейно независимые абелевы дифференциалы, кратные* $\Delta(a)Q(a)P^{-1}(a)q_j^{-1}(a)$.

2.
$$\operatorname{Res}(w_j(a \mid q)K(a \mid p, q))\big|_{q=q_j} = w_j(a \mid p), \quad j = \overline{1, l_0^*}.$$

Отметим, что для обобщенного дополнительного дивизора неверна лемма 4.10 п. 4.3, т. е. в данном случае нельзя утверждать, что $w_j(a \mid p)$ кратны $\Delta(a)Q(a)q_j^{-1}(a)$.

Устойчивость функций и дифференциалов, определенных выше, легко следует из теоремы 5.4 и результатов п. 4.4.

Действительно, пусть фиксировано $\varkappa \in \mathbb{Z}$ и точки $Y_0 \in D^{(2\rho)}$ и $r_0 \in D$. Тогда для любой последовательности $\{a_m\} \subset \mathbb{C}^\rho$, $a_m \to a_0$ однозначно определяются:

- последовательность дивизоров $\Delta^m = \Delta(a_m) = r_0^\varkappa Z(a_m)/Y_0$, причем $Z(a_m) \to Z(a_0)$ в $D^{(2\rho)}$;

- последовательность обобщенных дополнительных дивизоров $P^m/Q^m = P(a_m)/Q(a_m)$, причем $P(a_m) \to P(a_0)$ в $D^{(l_0)}$, $Q(a_m) \to Q(a_0)$ в $D^{(l_0^*)}$;

- последовательность минимальных дивизоров $\Delta_0^m = \Delta_0(a_m) = R(a_m)r_0^{-1}$, причем $R(a_m) \to R(a_0)$ в $D^{(\rho)}$.

Отсюда, очевидно, главные дивизоры

$$\widetilde{\Delta}^m = \Delta^m Q^m (P^m)^{-1} (\Delta_0^m)^{-1} \to \widetilde{\Delta}^0 = \Delta^0 Q^0 (P^0)^{-1} (\Delta_0^0)^{-1}$$

в смысле сходимости в D соответствующих нулей и полюсов (теорема 4.5 п. 4.4, условие (4.13)).

Тогда из теоремы 4.5 п. 4.4. сразу следует, что мероморфные функции $f(a_m|q) \to f(a_0|q)$ равномерно в любой области, не содержащей окрестности точек дивизора $\widetilde{\Delta}_0^0$. Аналогично из леммы 4.14 и теоремы 4.6 п. 4.4 следует сходимость абелевых дифференциалов

$$K(a_m\,|\,p,q) \xrightarrow{D} K(a_0|p,q), \quad w_j(a_m\,|\,p) \xrightarrow{D} w_j(a_0\,|\,p), \quad j = \overline{1, l_0^*}$$

равномерно по q в любой области, не содержащей окрестности точек $\Delta^0 Q^0 (P^0)^{-1}$.

§ 6. Пространства Тейхмюллера римановых поверхностей

6.1. Отмеченные римановы поверхности. В данном параграфе мы продемонстрируем другой подход к понятию римановой поверхности. Риманову поверхность будем понимать как фактор-множество единичного круга по фуксовой группе (см. далее). Кроме того, мы определим пространства отмеченных римановых поверхностей — пространства Тейхмюллера. При этом будут приведены только те сведения из теории пространств Тейхмюллера, которые необходимы в дальнейшем. Читателя, который заинтересуется этой замечательной теорией, отсылаем к работам Л. Альфорса и Л.Берса [4].

Пусть U_1 — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, группу Γ дробно — линейных отображений U_1 в себя будем называть *фуксовой*, если она разрывна и для всех $T \in \Gamma$ из утверждения $T \neq id$ следует, что $T(z) \neq z$ для всех $z \in U_1$. Соответственно будем обозначать U_1/Γ — фактор-множество по орбитам группы Γ и $\Pi_\Gamma : U_1 \to U_1/\Gamma$ — естественная проекция (см. п. 2.1, 2.2).

Согласно п. 5.1, риманова поверхность D, как связное топологическое пространство, имеет универсальное накрытие. Теория униформизации утверждает, что универсальным голоморфным накрытием римановой поверхности D рода $\rho > 1$ будет единичный круг U_1. Будем обозначать проекцию этого накрытия $\pi_0 : U_1 \to D$. Как известно [4], группа Γ накрывающих преобразований этого накрытия (см. п. 5.1) будет фуксовой группой дробно линейных отображений U_1 в себя, она называется *фуксовой группой римановой поверхности* D.

Далее в данном параграфе будем предполагать, что $\rho > 1$. Случай $\rho = 1$ является простым, но требует отдельного рассмотрения, так как универсальной накрывающей римановой поверхности рода $\rho = 1$ будет вся плоскость $\mathbb{C}$.

Из условия $\pi_0(T(z)) = \pi_0(z), \forall\, z \in U_1,\ T \in \Gamma$ следует, что $\pi_0 : U_1 \to D$ индуцирует отображение $f : U_1/\Gamma \to D$, причем так как Γ — группа всех накрывающих преобразований, то отображение f взаимно однозначно [41, 1, 16, 4]. Таким образом, каждая компактная риманова поверхность D рода $\rho > 1$ может быть представлена в виде $D = U_1/\Gamma$, где Γ — фуксова группа дробно линейных преобразований U_1 в себя; проекция $\Pi_\Gamma : U_1 \to U_1/\Gamma$ определяет локальный параметр $z(p) = \Pi_\Gamma^{-1}(p)$ в окрестности каждой точки $p \in D$ [4].

Определим теперь соответствие между фуксовой группой Γ и фундаментальной группой римановой поверхности $D = U_1/\Gamma$. Пусть $z_0 \in U_1$ — фиксированная точка, $p_0 = \Pi_\Gamma(z_0) \in D$; для $T \in \Gamma$ пусть α_T означает кривую в U_1, ведущую из z_0 в $T(z_0)$. Положим $\alpha'_T = \Pi_\Gamma(\alpha_T)$ и через Λ_{Γ,z_0} обозначим отображение, сопоставляющее каждому преобразованию $T \in \Gamma$ гомотопический класс кривой α'_T на римановой поверхности D.

Покажем, что $\Lambda_{\Gamma,z_0} : \Gamma \to \pi_1(D, p_0)$ — изоморфизм. Действительно, так как $\Pi_\Gamma(T(z)) = \Pi_\Gamma(z)$, то кривая α'_T — замкнута, $\alpha'_T \in \widetilde{\pi}(p_0, D)$ (см. п. 2.2). Очевидно, композиции преобразований $T_1 \circ T_2$ соответствует произведение кривых $\alpha'_{T_1}\alpha'_{T_2}$ в группе $\widetilde{\pi}(p_0, D)$, т. е. $\Lambda_{\Gamma,z_0} : \Gamma \to \pi_1(D, p_0)$ — гомоморфизм групп. Ядро этого гомоморфизма составляют преобразования T, для которых α'_T гомотопна нулю. Но гомотопия α'_T в D, очевидно, порождает гомотопию α_T в U_1, при этом начало z_0 и конец $T(z_0)$ кривой α_T фиксированы. Это означает, что если α'_T гомотопна нулю, то $z_0 = T(z_0)$, откуда $T = id$. Итак, ядро $\ker \Lambda_{\Gamma,z_0} = \{\, id \,\}$ и, значит, Λ_{Γ,z_0} — изоморфизм групп.

Дробно линейное отображение $T : U_1 \to U_1,\ T \neq id$ называется *неевклидовым переносом*, если оно оставляет неподвижными ровно две точки на единичной окружности. Каждый неевклидов перенос T можно единственным образом записать в следующей форме:

$$\frac{T(z) - \mathrm{e}^{i\sigma}}{T(z) - e^{i\tau}} = \lambda \frac{z - e^{i\sigma}}{z - \mathrm{e}^{i\tau}}, \qquad \lambda > 0.$$

Таким образом, перенос однозначно определяется тремя вещественными параметрами $\sigma = \sigma(T)$, $\tau = \tau(T)$, $\lambda = \lambda(T)$, задающими его неподвижные точки $\mathrm{e}^{i\sigma}$ и $\mathrm{e}^{i\tau}$ и инвариант λ. Фуксова группа, определяющая компактную риманову поверхность, состоит из тождественного преобразования id и неевклидовых переносов [4].

Упорядоченную совокупность $A_1, B_1, \ldots, A_\rho, B_\rho$ неевклидовых переносов будем называть *нормированной*, если:

1. Группа Γ, порожденная $A_1, B_1, \ldots, A_\rho, B_\rho$, является фуксовой, а риманова поверхность $D = U_1/\Gamma$ — компактной.

2. Переносы A_j, B_j связаны соотношением

$$\prod_{j=1}^{\rho} A_j B_j^{-1} A_j^{-1} B_j = id. \tag{6.1}$$

3. $\sigma(A_\rho) = 0$, $\tau(A_\rho) = \pi$, $\sigma(B_\rho) - \tau(B_\rho) = \pi$.

Числа $\sigma(A_1), \tau(A_1), \lambda(A_1), \ldots, \sigma(B_{\rho-1}), \tau(B_{\rho-1}), \lambda(B_{\rho-1})$ называются *координатами* системы $A_1, \ldots, B_\rho$. Известно [4], что нормированная система неевклидовых переносов однозначно определяется своими координатами.

Отмеченной римановой поверхностью будем называть нормированную систему неевклидовых переносов. Используя представление $D = U_1/\Gamma$, можно утверждать (см. [4]), что отмеченная риманова поверхность — это риманова поверхность D с фиксированной (с точностью до допустимого изоморфизма, т. е. до перенесения начальной точки, п. 2.2.) системой $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_\rho, \beta_\rho$ образующих ее фундаментальной группы $\pi_1(D)$, удовлетворяющих соотношению

$$\prod_{j=1}^{\rho} \alpha_j \beta_j^{-1} \alpha_j^{-1} \beta_j = 1$$

(здесь $\alpha_j = \Lambda_{\Gamma, z_0}(A_j)$, $\beta_j = \Lambda_{\Gamma, z_0}(B_j)$).

6.2. Квазиконформные отображения. Пусть D и D' — две римановы поверхности и $f : D \to D'$ — гомеоморфизм «на», определим локальные параметры z и z' в окрестности точек $p \in D$ и $p' \in D'$, $p' = f(p)$. Тогда $z = z(p)$ и $z' = z'(p')$ — конформные гомеоморфизмы и в окрестности точки $z(p) \in \mathbb{C}$ определено отображение $w(z) = z' \circ f \circ z^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Если оно квазиконформно, то будем говорить, что f — *квазиконформный гомеоморфизм* в окрестности точки $p \in D$. Это определение, очевидно, не зависит от выбора локальных параметров. Если отображение квазиконформно в окрестности каждой точки D, то оно называется квазиконформным отображением римановых поверхностей.

Рассмотрим теперь на римановой поверхности $D = U_1/\Gamma$ *дифференциалы типа* $(-1, 1)$, имеющие в терминах локального параметра $z(p)$ вид $\mu(z) d\overline{z}/dz$, где $\mu(z)$ — измеримая функция. Если почти всюду в U_1

$$|\mu(z)| \leqslant k < 1, \tag{6.2}$$

то $\mu(z)$ называется *коэффициентом Бельтрами*, а $m(p) = \mu(z) d\overline{z}/dz$ — *дифференциалом Бельтрами.*

Дифференциалы Бельтрами играют совершенно особую роль, так как существует взаимно однозначное соответствие между ними и квазиконформными гомеоморфизмами D. Действительно, пусть $f : D \to D'$ — квазиконформный гомеоморфизм, тогда функция $w(z) = z' \circ f \circ (z)^{-1}$ удовлетворяет в окрестности точки $z = z(p)$ уравнению Бельтрами [4]:

$$w_{\overline{z}} - \mu(z) w_z = 0. \tag{6.3}$$

Прямой подсчет показывает, что $\mu(z) d\overline{z}/dz$ является дифференциалом типа $(-1, 1)$, $\mu(z)$ называется *коэффициентом Бельтрами* гомеоморфизма f.

Наоборот, пусть $\mu(z)d\overline{z}/dz$ — дифференциал Бельтрами на D. Обозначим через D^μ риманову поверхность, имеющую те же точки и открытые множества, что и D, но локальные параметры которой задаются функцией $\zeta = w(z)$ от локального параметра z на D, удовлетворяющей уравнению (6.3). Тогда тождественное отображение $f^\mu : D \to D^\mu$ является квазиконформным и его коэффициент Бельтрами равен $\mu(z)$. Мы назовем f^μ естественным отображением, индуцированным дифференциалом $\mu(z)d\overline{z}/dz$. Легко видеть, что каждое квазиконформное отображение индуцируется своим дифференциалом [4].

Вернемся теперь к представлению римановой поверхности через фуксову группу $D = U_1/\Gamma$. Каждый дифференциал Бельтрами $m(p)$ в терминах локального параметра $p(z) = \Pi_\Gamma(z)$ имеет вид $m(p(z)) = \mu(z)d\overline{z}/dz$, где $\mu(z)$ — функция в U_1, удовлетворяющая условию (6.2), причем из условия инвариантности $\mu(z)d\overline{z}/dz$ при изменении локального параметра следует, что

$$\mu(T(z)) = \mu(z)T'(z)/\overline{T'(z)}, \tag{6.4}$$

для любого $T(z) \in \Gamma$. Функцию $\mu(z)$, удовлетворяющую условию (6.4) будем называть коэффициентом Бельтрами, *согласованным с группой* Γ. Для каждого такого коэффициента выражение $\mu(z)d\overline{z}/dz$ является дифференциалом Бельтрами на римановой поверхности $D = U_1/\Gamma$. Множество всех коэффициентов Бельтрами, согласованных с Γ и удовлетворяющих условию (6.2) с фиксированным $k < 1$, будем обозначать $M_k(\Gamma)$, а соответствующее множество дифференциалов Бельтрами на U_1/Γ — $M_k(D)$.

Пусть $w : U_1 \to U_1$ — гомеоморфизм, Γ — фуксова группа дробно линейных отображений U_1 в себя. Скажем, что гомеоморфизм w *согласован* с Γ, если $\forall\, T \in \Gamma$ $w \circ T \circ w^{-1}$ — также дробно линейное отображение U_1 в себя.

Лемма 6.1. *Пусть* Γ — *фуксова группа и* $\mu(z)$ — *коэффициент Бельтрами, согласованный с* Γ. *Тогда существует решение уравнения Бельтрами* (6.3) $w(z)$, *которое является квазиконформным гомеоморфизмом* U_1 *в себя. Кроме того,* $w(z)$ *согласовано с группой* Γ, *причем* $\Gamma^\mu = w \circ \Gamma \circ (w)^{-1}$ — *фуксова группа и* $w(z)$ *индуцирует естественное отображение* f^μ *римановой поверхности* U_1/Γ *на риманову поверхность* U_1/Γ^μ.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из соответствующих свойств решений уравнения Бельтрами [19, с. 224].

Пусть далее $\widehat{w}(z) = w(T(z))$ для некоторого $T \in \Gamma$. Прямое вычисление с использованием (6.4) показывает, что $\widehat{w}_{\overline{z}} - \mu(z)\widehat{w}_z = 0$, то есть $\widehat{w}(z)$ — решение того же уравнения (6.3), что и w. Отсюда следует, что $\widehat{w}(z) = A(w(z))$, где $A(w) : U_1 \to U_1$ — дробно линейный гомеоморфизм. Итак, $A(w(z)) = w(T(z))$, т. е. $A = wTw^{-1}$, откуда следует, что отображение $w(z)$ согласовано с Γ.

Покажем теперь, что Γ^μ — фуксова группа. Действительно, она разрывна, так как $w(z)$ — гомеоморфизм. Предположим, что существует $A' \in \Gamma^\mu$ такое, что $A'(\zeta) = \zeta$, $\zeta \in U_1$, тогда $T = w^{-1}Aw \in \Gamma$ и для $z =$

$= w^{-1}(\zeta)$ имеем $T(z) = z$. Следовательно, $T = id$, откуда и $A = id$, т. е. Γ^μ — фуксова группа.

Отображение f^μ поверхности U_1/Γ на U_1/Γ^μ определяется из условия коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{w} & U_1 \\ \downarrow \Pi_\Gamma & & \downarrow \Pi_{\Gamma^\mu} \\ U_1/\Gamma & \xrightarrow{f^\mu} & U_1/\Gamma^\mu \end{array}$$

Лемма доказана.

Отметим, что отображение $w(z)$ неоднозначно определяется по μ, его можно заменить отображением $\widehat{w}(z) = A(w(z))$, где $A(z)$ — дробно линейный гомеоморфизм. Но тогда $\Gamma_0 = \widehat{w}\Gamma\widehat{w}^{-1} = A(w\Gamma w^{-1})A^{-1} = A\Gamma^\mu A^{-1}$, то есть существует аналитический гомеоморфизм $\alpha : U_1/\Gamma^\mu \to U_1/\Gamma_0$, определяемый из условия коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{A} & U_1 \\ \downarrow \Pi_{\Gamma^\mu} & & \downarrow \Pi_{\Gamma_0} \\ U_1/\Gamma^\mu & \xrightarrow{\alpha} & U_1/\Gamma_0 \end{array}$$

и, следовательно, римановы поверхности U_1/Γ^μ и U_1/Γ_0 конформно эквивалентны.

Как известно [4], множество одинаково ориентированных отмеченных римановых поверхностей рода $\rho > 1$ со специальной метрикой образует пространство, называемое пространством Тейхмюллера и обозначаемое T_ρ. Выше было сказано, что всякая отмеченная риманова поверхность однозначно определяется своими координатами, т. е. ей соответствует точка в $\mathbb{R}^{6\rho-6}$. Это соответствие является гомеоморфизмом и отображает T_ρ на внутренность единичного шара в $\mathbb{R}^{6\rho-6}$. Кроме того, пространство T_ρ — комплексно аналитическое многообразие, гомеоморфное шару в $\mathbb{C}^{3\rho-3}$, при этом гомеоморфизме сходимости в $\mathbb{C}^{3\rho-3}$ соответствует сходимость координат в $\mathbb{R}^{6\rho-6}$ [4, с. 94].

С другой стороны, существует соответствие между множеством

$$M(\Gamma) = \bigcup_{k<1} M_k(\Gamma)$$

всех коэффициентов Бельтрами, согласованных с Γ, и пространством T_ρ. Действительно, пусть $\mu(z) \in M(\Gamma)$, положим $\mu(z) \equiv 0$, когда $z \notin U_1$ и рассмотрим гомеоморфизм $\zeta^\mu : U_1 \to U_1$, являющийся обобщенным решением уравнения Бельтрами

$$\zeta^\mu_{\bar z} - \mu(z)\zeta^\mu_z = 0 \tag{6.5}$$

и нормированный условиями

$$\zeta^\mu(0) = 0, \quad \zeta^\mu(1) = 1. \tag{6.6}$$

Такой гомеоморфизм всегда существует, единственен и принадлежит $W_p^1(U_1)$, $p > 2$ [19, с. 213]. Тогда $\Gamma^\mu = \zeta^\mu \Gamma (\zeta^\mu)^{-1}$ — группа, $D^\mu = U_1/\Gamma^\mu$ — риманова поверхность и гомеоморфизм ζ^μ индуцирует квазиконформное отображение $f^\mu : U_1/\Gamma \to U_1/\Gamma^\mu$. Очевидно, что если $A_1, B_1, \ldots, A_\rho, B_\rho$ — нормированная система неевклидовых переносов, порождающая Γ, то система $A_1^\mu, B_1^\mu, \ldots, A_\rho^\mu, B_\rho^\mu$; $A_j^\mu = \zeta^\mu A_j (\zeta^\mu)^{-1}$; $B_j^\mu = \zeta^\mu B_j (\zeta^\mu)^{-1}$ будет порождать группу Γ^μ и удовлетворять соотношению (6.1). Изоморфизм $\Lambda_{\Gamma^\mu, z_0}$ ставит в соответствие системе $A_1^\mu, B_1^\mu, \ldots, A_\rho^\mu, B_\rho^\mu$ систему $\alpha_1^\mu, \ldots, \beta_\rho^\mu$ образующих фундаментальной группы $\pi_1(D^\mu)$. Таким образом, каждому коэффициенту $\mu \in M_k(\Gamma)$ однозначно соответствует точка $(D^\mu, \alpha_1^\mu, \ldots, \beta_\rho^\mu)$ пространства Тейхмюллера T_ρ. В дальнейшем точки пространства T_ρ, как области в $\mathbb{C}^{3\rho-3}$, будем обозначать буквой τ, так же обозначим описанное выше соответствие $\tau : M(\Gamma) \to T_\rho$ и пусть $T_\rho^k = \tau(M_k(\Gamma))$. Отмеченные римановы поверхности, соответствующие точке $\tau \in T_\rho$ будем обозначать $D(\tau)$.

Соответствие $M(\Gamma) \to T_\rho$ является отображением «на», но не является взаимно однозначным [4, с. 45]. Можно, однако, построить и обратное соответствие $T_\rho \to M$. А именно, каждой паре точек $\tau_1, \tau_2 \in T_\rho$ соответствует единственный квазиконформный гомеоморфизм $\xi : D(\tau_1) \to D(\tau_2)$ с минимальным коэффициентом квазиконформности $k = \sup \mu(z)$, где $\mu(z)$ — коэффициент Бельтрами гомеоморфизма ξ. Экстремальный гомеоморфизм ξ называется *отображением Тейхмюллера* [4, с. 28–30, 33–34]. В свою очередь, через минимальный коэффициент квазиконформности выражается метрика в пространстве T_ρ, с помощью которой и осуществляется вложение T_ρ в $\mathbb{R}^{6\rho-6}$ и $\mathbb{C}^{3\rho-3}$ [4]. В частности, из экстремальности отображения Тейхмюллера следует, что T_ρ^k — выпуклые множества в $\mathbb{C}^{3\rho-3}$.

Свойства отображения $\tau : M \to T_\rho$ описывает следующая важная

Лемма 6.2. *Для каждого $k < 1$ существует действительное $q > 2$, $q = q(k)$, такое что $M_k(\Gamma)$ является ограниченным замкнутым выпуклым множеством в $L_q(U_1)$, а отображение $\tau : M_k(\Gamma) \subset L_q(U_1) \to T_\rho$ непрерывно. Кроме того, отображение $\mu \to \zeta^\mu$ является компактным из $L_q(U_1)$ в $C^\alpha(U_1)$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha = \alpha(q)$.*

Доказательство. Определим на множестве функций $\varphi(z) \in L_q(U_1)$, $q > 2$, $\varphi(z) \equiv 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus U_1$ интегральные операторы по области (см. п. 1.1, [6, 19]):

$$T(\varphi|z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{U_1} \frac{\varphi(\zeta)\, dS_\zeta}{\zeta - z}, \qquad \overset{0}{T}(\varphi|z) = T(\varphi|z) - T(\varphi|0),$$

$$S(\varphi|z) = \frac{\partial}{\partial z} T(\varphi|z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{U_1} \frac{\varphi(\zeta)\, dS_\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Всегда можно выбрать $q > 2$ так, что

$$k\|S\|_q \equiv k\Lambda_q < 1,$$

где

$$\|S\|_q = \sup \frac{\|Sf\|_q}{\|f\|_q}$$

— норма оператора $S : L_q(U_1) \to L_q(U_1)$ [19, с. 213].

Построим гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (6.5) в виде $h(z) = z + \overset{0}{T}\,(\varphi|z)$, где функция $\varphi(z)$ является решением уравнения

$$\varphi - \mu S\varphi = \mu.$$

Решение этого уравнения $\varphi(z) \in L_q(U_1)$ — непрерывный оператор от μ: $\varphi(\mu \,|\, z) : L_q(U_1) \to L_q(U_1)$ [19, с. 213], причем

$$\|\varphi\|_q \leqslant \frac{k}{1 - k\Lambda_q}. \tag{6.7}$$

Пусть $U = h(U_1)$, $\Phi : U \to U_1$ — конформное отображение области U на U_1, причем $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(h(1)) = 1$. Обозначим $\zeta^\mu(z) = \Phi(h(z))$. Очевидно, $\zeta^\mu(z)$ — решение уравнения Бельтрами (6.5), гомеоморфно отображающее U_1 в себя и удовлетворяющее условиям нормировки (6.6), причем этими условиями $\zeta^\mu(z)$ определяется однозначно.

Покажем непрерывность соответствия $\mu \to \zeta^\mu : L_q(U_1) \to C^\alpha(U_1)$. Пусть $\{\mu_n\} \subset M_k(\Gamma)$ — сходящаяся в $L_q(U_1)$ последовательность, которой, в силу непрерывности оператора $\varphi(\mu \,|\, z)$, соответствует сходящаяся в $L_q(U_1)$ последовательность $\varphi_n = \varphi(\mu_n|z)$. Тогда гомеоморфизмы $h_n(z) = z + \overset{0}{T}\,(\varphi_n|z)$, а, следовательно, и $\zeta^{\mu_n}(z)$, сходятся в $W_q^1(U_1)$, а значит и в $C^\alpha(U_1)$, $\alpha = (q-2)/q$ [19].

Не сложно показать, что из равномерной сходимости гомеоморфизмов ζ^{μ_n} в U_1 следует сходимость точек $\tau_n = \tau(\mu_n)$. Действительно, пусть $\{\Phi_n\}$ — дробно — линейные гомеоморфизмы U_1 в себя с нормировкой

$$\Phi_n(\zeta^{\mu_n}(1)) = 1, \quad \Phi_n(\zeta^{\mu_n}(-1)) = -1,$$

$$\arg \Phi_n(\zeta^{\mu_n}(\sigma(A_{\rho-1})) - \arg \Phi_n(\zeta^{\mu_n}(\tau(A_{\rho-1})) = \pi$$

и

$$\widetilde{A}_j^{\mu_n} = \widetilde{\zeta}^{\mu_n} A_j (\widetilde{\zeta}^{\mu_n})^{-1}, \quad \widetilde{B}_j^{\mu_n} = \widetilde{\zeta}^{\mu_n} B_j (\widetilde{\zeta}^{\mu_n})^{-1}, \quad \widetilde{\zeta}^{\mu_n} = \Phi_n(\zeta^{\mu_n}).$$

Тогда гомеоморфизмы $\widetilde{\zeta}^{\mu_n}$, $n = \overline{0, \infty}$ отображают U_1 на себя, а системы $\widetilde{A}_1^{\mu_n}, \ldots, \widetilde{B}_\rho^{\mu_n}$ являются нормированными для всех $n = \overline{0, \infty}$. Из сходимости ζ^{μ_n} в $C^\alpha(U_1)$ следует сходимость гомеоморфизмов $\widetilde{\zeta}^{\mu_n}$ в $C^\alpha(U_1)$, а значит и координат систем $\widetilde{A}_1^{\mu_n}, \ldots, \widetilde{B}_\rho^{\mu_n}$, $n \to \infty$. Итак, отображение $\tau : M_k(\Gamma) \subset L_q(U_1) \to T_\rho$ непрерывно.

Для доказательства компактности отображения $\mu \to \zeta^\mu$ из $L_q(U_1)$ в $C^\alpha(U_1)$ достаточно заметить, что любой последовательности $\{\mu_n\} \subset M_k(\Gamma)$ соответствует, согласно неравенству (6.7), равномерно ограниченная в $L_q(U_1)$ последовательность $\varphi_n = \varphi(\mu_n \,|\, z)$. Отсюда последовательность ζ^{μ_n} ограничена в $W_q^1(U_1)$. Компактность ζ^{μ_n} следует из компактности вложения $W_q^1(U_1) \subset C^\alpha(U_1)$ [30, 6, 19].

Очевидны выпуклость и ограниченность $M_k(\Gamma)$ в $L_q(U_1)$. Покажем замкнутость $M_k(\Gamma)$. Пусть $\mu_n \to \mu_0$ — сходящаяся в $L_q(U_1)$ последовательность, $\mu_n \in M_k(\Gamma)$. Очевидно, достаточно показать, что коэффициент $\mu_0(z)$ согласован с Γ. Но из предыдущего следует, что для всех $T \in \Gamma$ последовательность $\{ T^{\mu_n} = \zeta^{\mu_n} T(\zeta^{\mu_n})^{-1} \}$ дробно линейных преобразований плоскости сходится равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$, т. е. предел этой последовательности T^{μ_0} также является дробно линейным преобразованием $\mathbb{C}$. Из равенства $T^{\mu_0}(\zeta^{\mu_0}) = \zeta^{\mu_0}(T)$ вытекает, что

$$0 = (\zeta^{\mu_0}(T(z))_{\overline{z}} - \mu_0(T(z))(\zeta^{\mu_0}(T(z))_z =$$

$$= \zeta_{\overline{z}}^{\mu_0}\overline{T}' - \mu_0(T)\zeta_z^{\mu_0}T' = (\zeta_{\overline{z}}^{\mu_0} - \mu_0(z)\zeta_z^{\mu_0}),$$

откуда следует, что μ_0 согласован с Γ. Лемма доказана.

6.3. Расслоения над T_ρ. Обозначим через $T_\rho^{(n)}$ пространство отмеченных римановых поверхностей рода $\rho > 1$, на каждой из которых выделены и занумерованы n точек, $T_\rho^{(n)} = \{(\tau, \mathbf{Z}) \mid \tau \in T_\rho,\ \mathbf{Z} \in D^n(\tau)\}$. Очевидно, пространство Тейхмюллера $T_\rho^{(n)}$ — расслоенное пространство с базой T_ρ, проекцией — естественным отображением $\pi : T_\rho^{(n)} \to$ $\to T_\rho$, $\pi(\tau, \mathbf{Z}) = \tau$ и пространством слоя — прямым произведением $D^n(\tau)$. Размерность $T_\rho^{(n)}$ как комплексно аналитического многообразия равна $3\rho - 3 + n$.

Далее для удобства изложения вместо пространств дивизоров $D^{(n)}$, как в параграфе 5, будем рассматривать прямые произведения D^n. В частности, будем теперь считать отображение Якоби заданным на векторах

$$J(\mathbf{Y} \mid \mathbf{Z}) = \sum_{j=1}^{n} \int_{y_j}^{z_j} \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_n), \quad \mathbf{Z} = (z_1, \ldots, z_n).$$

Соответственно теперь будем обозначать G_ρ^2 — множество критических точек отображения $J(\mathbf{R}_0 \mid \cdot) : D^\rho \to \mathrm{Jac}(D)$ (G_ρ^2 не зависит от вектора $\mathbf{R}_0 \in D^\rho$).

Очевидно, D^n — накрытие над $D^{(n)}$ с числом элементов в каждом слое n ($n!$-листное накрытие) [41, 1]. Отсюда следует, что по прежнему G_ρ^2 — аналитическое множество в D^ρ размерности $\rho - 2$.

Пусть для каждого $\tau \in T_\rho$ на $D(\tau)$ задана функция $f(p) = f(\tau \mid p)$. Это означает, что $f(\tau \mid p)$ определена на $T_\rho^{(1)}$. Скажем, что $f(\tau \mid p)$ голоморфно (непрерывно) зависит от τ, если $f(\tau \mid p)$ — аналитична (непрерывна) по τ в $T_\rho^{(1)}$. Аналогично определим аналитичность (непрерывность) функций нескольких переменных, т. е. заданных на $T_\rho^{(n)}$, а также дифференциалов на $T_\rho^{(n)}$ от одной или нескольких переменных.

Лемма 6.3. *Для любого $\tau \in T_\rho$ на римановой поверхности $D(\tau)$ существуют:*

1. *голоморфно зависящий от τ абелев дифференциал по p и q $\omega(\tau \,|\, p, q)$, имеющий единственный полюс второго порядка при $p = q$ и удовлетворяющий условию*
$$\operatorname{Res}\left(\int\limits_{q_0}^{q} \omega(\tau \,|\, p, q)\right)\Bigg|_{p=q} = 1;$$
2. *голоморфно зависящий от τ базис абелевых дифференциалов 1 рода $\boldsymbol{\omega}(\tau \,|\, p) = (\omega_1(\tau \,|\, p), \ldots, \omega_\rho(\tau \,|\, p))$;*
3. *система образующих фундаментальной группы $\alpha_k(\tau)$, $\beta_k(\tau)$, $k = \overline{1, \rho}$ такая, что вектора, образующие решетку периодов $\mathcal{L}(\tau, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{L}(\tau)$:*
$$\left\{ \int\limits_{\alpha_k(\tau)} \boldsymbol{\omega}(\tau \,|\, p), \ldots, \int\limits_{\beta_k(\tau)} \boldsymbol{\omega}(\tau \,|\, p), \ k = \overline{1, \rho} \right\}$$
аналитичны по τ.

Эти утверждения доказаны или легко следуют из результатов сборника [4, с. 80–89, 99–103].

Пусть $\mathcal{L}(\tau) \subset \mathbb{C}^\rho$ — голоморфная по τ решетка периодов для римановой поверхности $D(\tau)$, $\mathrm{Jac}(D(\tau)) = \mathbb{C}^\rho / \mathcal{L}(\tau)$, $\tau \in T_\rho$. Введем пространство
$$\mathrm{Jac}_\rho = \big\{ (\tau, a) \,|\, a \in \mathrm{Jac}(D(\tau)) \big\}.$$
Очевидно, Jac_ρ — голоморфное расслоение над T_ρ с естественной проекцией $\pi(\tau, a) = \tau$. Размерность Jac_ρ равна $4\rho - 3$.

Лемма 6.4. *Пусть $\mathbf{Y}_0(\tau)$ — голоморфное сечение $T_\rho^{(2\rho)}$ над T_ρ. Тогда существует голоморфное отображение $(\tau, \mathbf{Z}(\tau, a)) : T_\rho \times \mathbb{C}^\rho \to \to T_\rho^{(2\rho)}$ такое, что $\forall\, \tau \in T_\rho$*
$$J(\mathbf{Y}_0(\tau) \,|\, \mathbf{Z}(\tau, a)) = a (\operatorname{mod} \mathcal{L}(\tau)).$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 5.1 п. 5.5. Пусть $\boldsymbol{\omega}(\tau \,|\, p) = (\omega_1(\tau \,|\, p), \ldots, \omega_\rho(\tau \,|\, p))$ — голоморфный по τ базис абелевых дифференциалов в $D(\tau)$, порождающий решетку $\mathcal{L}(\tau)$, $\mathbf{Y}_0(\tau) = (y_1^0(\tau), \ldots, y_{2\rho}^0(\tau))$. Возьмем отображение Якоби $\widetilde{J} : T_\rho^{(2\rho)} \to \mathrm{Jac}_\rho$:
$$\widetilde{J}(\tau, \mathbf{Z}) = (\tau, J(\mathbf{Y}_0(\tau) \,|\, \mathbf{Z})), \quad \mathbf{Z} = (z_1, \ldots z_{2\rho}) \in D^{2\rho}(\tau).$$

Из теоремы 5.3 п. 5.5 следует, что $T_\rho^{(2\rho)}$ — голоморфное расслоение над Jac_ρ с проекцией $\widetilde{J}$ и слоем — $(2\rho)!$-листным накрытием над CP^ρ. Зададим на $T_\rho^{(2\rho)}$, как расслоении над Jac_ρ, метод поднятия кривых.

Пусть $\gamma_0(t) = (\tau(t), a(t))$ — отрезок, соединяющий точку $(\tau, a) \in \in T_\rho \times \mathbb{C}^\rho \subset \mathbb{C}^{4\rho-3}$ с нулем, $\gamma_0(0) = (0,0)$, $\gamma_0(1) = (\tau, a)$. Тогда $\widehat{\gamma}(t) = = (\tau(t), \widehat{a}(t))$, $\widehat{a}(t) = a(t) \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{L}(\tau))$ — непрерывная кривая в Jac_ρ, причем $\widehat{\gamma}(t)$ голоморфно зависит от $\gamma_0(t)$. По $\widehat{\gamma}(t)$ построим ее поднятие $\gamma(t)$ с начальной точкой $\gamma(0) = (0, \mathbf{Y}_0(0))$ и пусть $\gamma(1) = (\tau, \mathbf{Z})$, тогда $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\tau, a)$ и есть искомое отображение. Действительно, $\mathbf{Z}$ голоморфно зависит от $\widehat{\gamma}(1) = (\tau, \widehat{a})$, а, следовательно, и от (τ, a), при этом $\widetilde{J}(\tau, \mathbf{Z}) = = (\tau, \widehat{a})$, т. е.
$$J(\mathbf{Y}_0(\tau) \,|\, \mathbf{Z}) = a(\mathrm{mod}\, \mathcal{L}(\tau)).$$

Лемма доказана.

Теперь будем рассматривать $T_\rho^{(n)}$ как расслоение над $T_\rho^{(m)}$, $m < n$. Действительно, представление
$$T_\rho^{(n)} = \left\{(\tau, z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n) \,|\, z_k \in D(\tau), k = \overline{1,n}\right\}$$
превращает $T_\rho^{(n)}$ в голоморфное расслоение над $T_\rho^{(m)}$ с естественной проекцией
$$\pi(\tau, z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n) = (\tau, z_1, \ldots, z_m).$$

Пусть $p \in D(\tau)$ и $U(\tau \,|\, p)$ — окрестность p в $D(\tau)$, аналитически гомеоморфная единичному кругу U_1, причем при гомеоморфизме $z : U(\tau \,|\, p) \to U_1$ $z(p) = 0$. Для вектора $\mathbf{P} = (p_1, \ldots, p_n)$ будем обозначать $U(\tau \,|\, \mathbf{P}) = U(\tau \,|\, p_1) \times U(\tau \,|\, p_2) \times \ldots \times U(\tau, p_n)$.

Рассмотрим подмножество $T_\rho^{(2n)}$:
$$X = \{(\tau, \mathbf{P}, \mathbf{Z}) \,|\, \tau \in T_\rho,\ \mathbf{P} \in D^n(\tau),\ \mathbf{Z} \in U(\tau \,|\, \mathbf{P})\}.$$

Нетрудно видеть, что окрестности $U(\tau \,|\, \mathbf{P})$ можно выбрать так, что X будет голоморфным расслоением над $T_\rho^{(n)}$ с естественной проекцией $\pi(\tau, \mathbf{P}, \mathbf{Z}) = (\tau, \mathbf{P})$, аналитически гомеоморфным прямому произведению $T_\rho^{(n)} \times U_1^n$.

Лемма 6.5. *Пусть*
$$G_n^2 = \left\{(\tau, \mathbf{P}, \mathbf{Z}) \in T_\rho^{(2n)} \,|\, \mathbf{Z} \in G_n^2(\tau)\right\}$$
аналитическое подмножество $T_\rho^{(2n)}$ *размерности* $3\rho + 2n - 5$ (*т. е.* $G_n^2(\tau)$ *имеет размерность* $n - 2$). *Тогда существует голоморфное по* τ *и непрерывное по* $\mathbf{P}$ *сечение расслоения* X *над* $T_\rho^{(n)}$: $\mathbf{Z} = b(\tau, \mathbf{P}) \in \in U(\tau \,|\, \mathbf{P})$, $\tau \in T_\rho$, $\mathbf{P} \in D^n(\tau)$, *такое, что* $b(\tau, \mathbf{P}) \overline{\in} G_n^2(\tau)$, $\forall\, (\tau, \mathbf{P}) \in \in T_\rho^{(n)}$.

Доказательство. Так как размерность G_n^2 равна $(3\rho + 2n - 5)$, то, аналогично доказательству теоремы 4 п. 5.6., существует голоморфное расслоение над $T_\rho^{(n)}$ вида

$$X_1 = \{ (\tau, \mathbf{P}, \mathbf{Z}) \in T_\rho^{(2n)} \,|\, \mathbf{Z} \in V(\tau \,|\, \mathbf{P}) \},$$

где $V(\tau \,|\, \mathbf{P}) \subset U(\tau \,|\, \mathbf{P}) \backslash G_n^2(\tau)$, $(\tau, \mathbf{P}) \in T_\rho^{(n)}$ и $V(\tau \,|\, \mathbf{P})$ — аналитически гомеоморфно U_1^n. Пусть $z(\tau, \mathbf{P} \,|\, \cdot\,) : U_1^n \to V(\tau, \mathbf{P})$ — соответствующий гомеоморфизм.

Зададим на расслоении X_1 метод поднятия кривых. Далее, пусть $f(\tau_1, \tau_2| \cdot\,) : D(\tau_1) \to D(\tau_2)$ — отображение Тейхмюллера (п. 6.2.) и $\tau(t)$, $t \in [0, 1]$ — отрезок в $T_\rho \subset \mathbb{C}^{3\rho-3}$, соединяющий 0 и τ, $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = \tau$. Для вектора $\mathbf{P} = (p_1, \ldots, p_n) \in D^n(\tau)$ обозначим $p_k(t) = f(\tau, \tau(t) \,|\, p_k)$, $k = \overline{1, n}$ и $\mathbf{P}(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t)) \in D^n(\tau(t))$.

Пусть $\widehat{\gamma}(t) = \{ \tau(t), \mathbf{P}(t) \} \subset T_\rho^{(n)}$. Очевидно, $\widehat{\gamma}(t)$ — непрерывная кривая в $T_\rho^{(n)}$. Положим $\mathbf{Z}_0 = z(0, \mathbf{P}(0) \,|\, 0) \in V(0 \,|\, \mathbf{P}(0))$ и пусть $\gamma(t)$ — поднятие $\widehat{\gamma}(t)$ в X_1 с начальной точкой $\gamma(0) = (0, \mathbf{P}(0), \mathbf{Z}_0)$. Соответственно будем иметь $\gamma(1) = (\tau, \mathbf{P}, \mathbf{Z})$. Искомое сечение $b(\tau, \mathbf{P}) = \mathbf{Z}$.

Действительно, $\mathbf{Z}$ однозначно зависит от $(\tau, \mathbf{P})$, очевидно голоморфно по τ и непрерывно по $\mathbf{P}$, $\mathbf{Z} \in V(\tau \,|\, \mathbf{P}) \subset U(\tau \,|\, \mathbf{P}) \backslash G_n^2(\tau)$, $\tau \in T_\rho$, $\mathbf{P} \in D^n(\tau)$. Лемма доказана.

Лемма 6.6. *Существует голоморфное по τ и непрерывное по $\mathbf{R}_0$ сечение расслоения $T_\rho^{(2\rho)}$ над $T_\rho^{(\rho)}$ $\mathbf{R}(\tau, \mathbf{R}_0) : T_\rho^{(\rho)} \to D^\rho(\tau)$ такое, что $\mathbf{R}(\tau, \mathbf{R}_0) \in U(\tau \,|\, \mathbf{R}_0)$ и для любого $r_0 \in D(\tau)$, $r_0 \overline{\in} \mathbf{R}(\tau, \mathbf{R}_0)$ дивизор $r_0^{-1} \mathbf{R}(\tau, \mathbf{R}_0)$ — минимальный на $D(\tau)$, $\tau \in T_\rho$.*

Доказательство. Пусть $G_\rho^2(\tau)$ — множество критических точек отображения Якоби

$$J((r_0, \ldots, r_0)|(z_1, \ldots z_\rho)) : D^\rho(\tau) \to \mathrm{Jac}(D(\tau))$$

$(G_\rho^2(\tau)$ не зависит от выбора $r_0 \in D(\tau))$ и

$$G_\rho^2 = \big\{(\tau, \mathbf{R}_0, \mathbf{Z}) \in T_\rho^{(2\rho)} \,|\, \mathbf{Z} \in G_\rho^2(\tau)\big\}.$$

Тогда G_ρ^2 имеет размерность $(5\rho - 5)$ и по лемме 6.5 существует сечение $T_\rho^{(2\rho)}$ над $T_\rho^{(\rho)}$ $\mathbf{R}(\tau, \mathbf{R}_0)$ такое, что

$$\mathbf{R}(\tau, \mathbf{R}_0) \in U(\tau \,|\, \mathbf{R}_0) \quad \text{и} \quad \mathbf{R}(\tau, \mathbf{R}_0) \overline{\in} G_\rho^2(\tau).$$

Но из последнего условия сразу следует, что дивизор $r_0^{-1} \mathbf{R}(\tau, \mathbf{R}_0)$ — минимальный на $D(\tau)$. Лемма доказана.

В заключение обратимся к построению обобщенных дополнительных дивизоров на $D(\tau)$. Введем комплексно — аналитические многообразия

$$X_\rho^{(n)} = \big\{(\tau, a, \mathbf{P}) \,|\, \tau \in T_\rho,\ a \in \mathbb{C}^\rho,\ \mathbf{P} \in D^n(\tau)\big\}.$$

Очевидно, $X_\rho^{(n)}$ — голоморфные расслоения над $T_\rho \times \mathbb{C}^\rho$, а также над $X_\rho^{(m)}$, $m < n$.

Пусть $(\tau, \mathbf{Z}(\tau, a))$ — обратное к отображению Якоби отображение $T_\rho \times \mathbb{C}^\rho \to T_\rho^{(2\rho)}$,

$$J(\mathbf{Y}_0(\tau)|\mathbf{Z}(\tau, a)) = a(\operatorname{mod} \mathcal{L}(\tau)), \quad \tau \in T_\rho,$$

и $r_0 \in D(\tau)$. Будем обозначать Y_0, Z — соответствующие векторам $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}$ дивизоры и $\Delta(\tau, a, r_0) = r_0^\varkappa Z(\tau, a)/Y_0(\tau)$ — дивизор на $D(\tau)$ с координатами $(\varkappa, a)$.

Теорема 6.1. *Пусть $\varkappa$ — целое, $l_0 = l_0(\varkappa)$, $l_0^* = l_0^*(\varkappa)$. Существуют непрерывные сечения расслоений*:

$$X_\rho^{(2l_0+1)} \text{ над } X_\rho^{(l_0+1)}\colon \mathbf{P}(\tau, a, r_0, \mathbf{P}_0) = \mathbf{P} \in D^{l_0}(\tau);$$

$$X_\rho^{(2l_0^*+1)} \text{ над } X_\rho^{(l_0^*+1)}\colon \mathbf{Q}(\tau, a, r_0, \mathbf{Q}_0) = \mathbf{Q} \in D^{l_0^*}(\tau);$$

$$X_\rho^{(\rho+1)} \text{ над } X_\rho^{(1)}\colon \mathbf{R}(\tau, a, r_1) = \mathbf{R} \in D^{\rho}(\tau);$$

где $\tau \in T_\rho$, $a \in \mathbb{C}^\rho$, $r_{0,1} \in D(\tau)$, $\mathbf{P}_0 \in D^{l_0}(\tau)$, $\mathbf{Q}_0 \in D^{l_0^*}(\tau)$, причем $\mathbf{P} \in U(\tau \,|\, \mathbf{P}_0)$, $\mathbf{Q} \in U(\tau \,|\, \mathbf{Q}_0)$, $\mathbf{R} \in U(\tau \,|\, (r_1, \ldots, r_1))$; дивизор P/Q — обобщенный дополнительный к $\Delta(\tau, a, r_0)$ на $D(\tau)$ и

$$\Delta(\tau, a, r_0)\, QP^{-1} = \widetilde{\Delta} R r_0^{-1}$$

где $\widetilde{\Delta}$ — главный дивизор на $D(\tau)$.

Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 5.4 п. 5.6 и леммы 6.5.

Следствие. *Если $\mathbf{P}_0 = (p_1^0, \ldots, p_{l_0}^0)$, $\mathbf{Q}_0 = (q_1^0, \ldots, q_{l_0^*}^0$ и окрестности $U(\tau \,|\, p_j^0)$, $U(\tau \,|\, q_k^0)$ не пересекаются, $j = \overline{1, l_0}$, $k = \overline{1, l_0^*}$, то для точек обобщенного дополнительного дивизора $P(\tau, a, r_0, \mathbf{P}_0) = p_1 \ldots p_{l_0}$ и $Q(\tau, a, r_0, \mathbf{Q}_0) = q_1 \ldots q_{l_0^*}$ выполнено условие*

$$\begin{gathered} p_j \neq p_k, \quad q_s \neq q_m, \quad p_j \neq q_s, \\ j \neq k, \quad s \neq m, \quad k, j = \overline{1, l_0}, \quad s, m = \overline{1, l_0^*}. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Глава 2
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА

§ 7. Задачи сопряжения аналитических функций на гладком контуре

7.1. Основные обозначения. Пусть D — компактная риманова поверхность рода ρ, $L = \bigcup\limits_{j=0}^{m} L_j$ — контур на D, разбивающий ее на две связные части D^+ и D^-, причем ориентация L индуцирована с D^+. Будем обозначать $\overline{D}^{\pm} = D^{\pm} \cup L$. Далее, в соответствии с обозначениями п. 2.2., будем считать $V = \bigcup\limits_{j=0}^{m} V_j$ — фиксированная стандартная окрестность L, где V_j — стандартные окрестности компонент связности контура L_j с локальными координатами $z_j : V_j \to V^1 = \{\, z \mid 1/2 < |z| < 3/2 \,\}$, $L_j^1 = z_j(L_j)$.

Пусть на L задана функция $f(t) \in C^\alpha(L)$, т. е. $f(z_j^{-1}(s)) \in C^\alpha(L_j^1)$, $j = \overline{0, m}$. Введем норму

$$\|f\|_L^{(\alpha)} = \sum_{j=0}^{m} \|f(z_j^{-1}(s))\|_{L_j^1}^{(\alpha)}.$$

Очевидно, $C^\alpha(L)$ — банахово пространство.

Наконец, если $G(t) \in C^\alpha(L)$ и $G(t) \neq 0$, то можно определить индексы

$$\begin{gathered} \varkappa_j = \varkappa_j^G = \operatorname{ind} G(t)\big|_{L_j} = \Delta \arg G(t)\big|_{L_j}; \\ \varkappa = \varkappa_G = \sum_{j=0}^{m} \varkappa_j = \operatorname{ind} G(t)\big|_L. \end{gathered} \tag{7.1}$$

7.2. Постановка задачи. Пусть L — гладкий контур и даны функции $g(t) \in C^\alpha(L)$, $G(t) \in C^\alpha(L)$, $G(t) \neq 0$. Рассмотрим краевую задачу (1.1):

$$\Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = g(t), \quad t \in L, \tag{7.2}$$

где $\Phi^\pm(z)$ аналитичны в $D^\pm$ [14, 44, 3, 5].

Задача 1. В терминах функции $G(t)$ найти: l — число линейно независимых ограниченных решений задачи (7.2), l^* — число условий разрешимости задачи (7.2) в классе ограниченных функций, индекс краевой задачи $\varkappa_0 = l - l^*$.

Задача 2. Дать корректную постановку задачи (7.2), т. е. указать набор функций $\psi_k(t)$, $k=\overline{1,l^*}$ и точек $p_j\in D$, $p_j\overline{\in}L$, $j=\overline{1,l}$ так, чтобы задача (A) (см. параграф 1)

$$\begin{cases} \Phi^+(t)-G(t)\Phi^-(t)=g(t)-\sum\limits_{k=1}^{l^*}c_k\psi_k(t), \\ \Phi^\pm(p_j)=0, \quad j=\overline{1,l} \end{cases} \tag{A}$$

была однозначно разрешимой, т. е. однозначно определялись функции $\Phi^\pm(z)$ и набор коэффициентов c_k, $k=\overline{1,l^*}$.

Задача 3. Представить решение $\{\Phi^\pm(z);\, c_k,\ k=\overline{1,l^*}\}$ задачи (A) интегральным оператором Коши (параграф 1):

$$\begin{cases} \Phi^\pm(z)=\int\limits_L K(t,z)\,g(t)\equiv\Phi(G,g,\psi_k,p_j\,|\,z), \\ c_k=c_k(g,G)=\int\limits_L v_k(t)\,g(t). \end{cases}$$

Задача 4. Исследовать устойчивость решения $\{\Phi^\pm(z);\, c_k,\ k=\overline{1,l^*}\}$ задачи (A) как функционала над $\{g(t),\ G(t),\ l,\ l^*;\ \psi_k,\ k=\overline{1,l^*};\ p_j,\ j=\overline{1,l}\}$.

7.3. Некоторые вспомогательные функции. Выберем и зафиксируем точки $\xi_j\in L_j$, $j=\overline{0,m}$, минимальный дивизор $\Delta^0= r_1^0\ldots r_\rho^0(r_0^0)^{-1}$, причем $r_j^0\in D^-$, $j=\overline{0,\rho}$ и пусть $K_0^0(p,q)$ — соответствующий Δ^0 абелев дифференциал, кратный $q^{-1}\Delta^0$ (параграф 4, п. 4.1).

Пусть $p\in D^+$, $q\in D^-$, $q\neq r_j^0$, $j=\overline{0,m}$ и $\Lambda_j=\Lambda_j(q,p)$ — гладкая кривая, соединяющая q и p и пересекающая L в единственной точке $\xi_j\in L_j$ (это возможно в силу связности $D^\pm$). Введем функции

$$\varphi_j^+(z)=\varphi_j(z)=\varphi_j(q^{-1}p\,|\,z)=\exp\Bigl\{\int\limits_{\Lambda_j}K_0^0(t,z)\Bigr\},\quad z\in\overline{D}^+. \tag{7.3}$$

Лемма 7.1.

1. $\varphi_j(z)$ *— аналитичны в* D^+ *и имеют единственный полюс первого порядка при* $z=p$.

2. $\varphi_j(t)\neq0$, $t\in L$; $\varphi_j(t)\in C^\alpha(L)$, $\forall\,\alpha>0$.

3. $\operatorname{ind}\varphi_j\big|_{L_k}=\delta_{jk}=\begin{cases}1, & j=k,\\ 0, & j\neq k.\end{cases}$

Доказательство. Из свойств абелева дифференциала $K_0^0(t,z)$ следует, что $\ln\varphi_j(z) = \int\limits_{\Lambda_j} K_0^0(t,z)$ аналитичны в D, кроме точек Λ_j, имеют простые полюса в точках $z = r_j^0 \in D^-$, $j = \overline{1,\rho}$ и логарифмические особенности в концах кривой Λ_j — точках q и p. При этом на Λ_j функция $\ln\varphi_j(z)$ имеет скачок (разность предельных значений по обе стороны от кривой) $2\pi i$. Отсюда непосредственно следуют первые два утверждения леммы. Кроме того, тогда $\ln\varphi_j(t)$ непрерывна на L_k, $k \neq j$, а на L_j имеет скачок $2\pi i$ в точке ξ_j, откуда следует последнее утверждение. Лемма доказана.

Установим теперь некоторые дополнительные свойства функций $\varphi_j(z)$, в частности их зависимость от выбора начальной точки q и кривой Λ_j.

Обозначим $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\ldots,\omega_\rho)$ — базис абелевых дифференциалов 1 рода на D, нормированный условием

$$\operatorname{Res}(K_0^0(p,q)\omega_j(q))\Big|_{q=r_k^0} = \begin{cases} \omega_j(p), & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \tag{7.4}$$

(лемма 4.13 п. 4.3) и пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\omega)$ — соответствующая решетка периодов.

Возьмем две точки $q_1, q_2 \in D^-$ и пусть $\Lambda_j^{1,2}$ — кривые, соединяющие $q_{1,2}$ и p и пересекающие L только в точках $\xi_j^{1,2} \in L_j$, $\varphi_j^{1,2}(z)$ — соответствующие функции вида (7.3).

Лемма 7.2.

1. $\int\limits_L \ln(\varphi_j^1(t)/\varphi_j^2(t))\boldsymbol{\omega} = 0 \pmod{\mathcal{L}}$.

2. $\int\limits_L \ln(\varphi_j(t)/\varphi_k(t))\boldsymbol{\omega} = 0 \pmod{\mathcal{L}}$, $k \neq j$.

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение леммы. Соединим точки ξ_j^1 и ξ_j^2 гладкой кривой, целиком лежащей в D^-. Получим

$$\ln\varphi_j^1(z) - \ln\varphi_j^2(z) = \int\limits_{\Lambda_j^1} K_0^0(t,z) - \int\limits_{\Lambda_j^2} K_0^0(t,z) = \int\limits_{q_1}^{\xi_j^1}\ldots + \int\limits_{\xi_j^1}^{p}\ldots + \int\limits_{p}^{\xi_j^2}\ldots +$$

$$+ \int\limits_{\xi_j^2}^{q_2}\ldots = \left(\int\limits_{q_1}^{\xi_j^1}\ldots + \int\limits_{\xi_j^1}^{\xi_j^2}\ldots + \int\limits_{\xi_j^2}^{q_2}\ldots\right) + \left(\int\limits_{\xi_j^1}^{p}\ldots + \int\limits_{p}^{\xi_j^2}\ldots + \int\limits_{\xi_j^2}^{\xi_j^1}\right) =$$

$$= \int\limits_{L^-} K_0^0(t,z) + \int\limits_{L^+} K_0^0(t,z) = f^-(z) + f^+(z).$$

Так как кривая L^- лежит в D^-, то $f^-(z)$ аналитична в D^+, откуда

$$\int\limits_L f^-(z)\omega_k(z) = 0, \quad k = \overline{1,\rho}.$$

Далее, поскольку $r_j^0 \in D^-$, $j = \overline{1,\rho}$ то интеграл по z

$$\int\limits_L K_0^0(t,z)\omega_k(z) = -\sum_{j=1}^{\rho} \operatorname{Res}(K_0^0(t,z)\omega_k(z))\Big|_{z=r_j^0} = -w_k(t),$$

откуда

$$\int\limits_L f^+(z)\omega_k(z) = \int\limits_L \omega_k(z) \int\limits_{L^+} K_0^0(t,z) = \int\limits_{L^+}\Big[\int\limits_L K_0^0(t,z)\omega_k(z)\Big] = -\int\limits_{L^+} \omega_k(t)$$

и так как L^+ — замкнутая кривая, то

$$\int\limits_L f^+(z)\,\boldsymbol{\omega}(z) = -\int\limits_{L^+} \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}.$$

Для доказательства второго утверждения леммы соединим $\xi_j \in L_j$ и $\xi_k \in L_k$ гладкой кривой, лежащей в D^-. Получим

$$\ln\left(\varphi_j(t)/\varphi_k(t)\right) = \Big(\int\limits_q^{\xi_j} \ldots + \int\limits_{\xi_j}^{\xi_k} \ldots + \int\limits_{\xi_k}^{q} \ldots\Big) +$$

$$+\Big(\int\limits_{\xi_j}^{p} \ldots + \int\limits_{p}^{\xi_k} \ldots + \int\limits_{\xi_k}^{\xi_j} \ldots\Big) = \int\limits_{L^-} K_0^0(t,z) + \int\limits_{L^+} K_0^0(t,z) = f^-(z) + f^+(z)$$

и, аналогично предыдущему,

$$\int\limits_L f^-\boldsymbol{\omega} = 0, \quad \int\limits_L f^+\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}.$$

Лемма доказана.

Лемма 7.3 (устойчивости). *Пусть q — фиксирована. Для любой последовательности $p_n \to p$ имеем*

$$\varphi_j(q^{-1}p_n|z) \to \varphi_j(q^{-1}p\,|\,z)$$

равномерно в $\overline{D}^+$ и

$$\|\varphi_j(q^{-1}p_n|t) - \varphi_j(q^{-1}p|t)\|_L^{(\alpha)} \to 0.$$

Утверждения леммы следуют из представления (7.3) и общих теорем об устойчивости сингулярного интеграла типа Коши на контуре [19, с. 10–12].

В дальнейшем, аналогично параграфу 4, п. 4.1, под вычетом функции $f(p)$ в точке r_j^0 будем понимать

$$\operatorname{Res} f(r_j^0) = \operatorname{Res}(f(z)\omega_j(z))\big|_{z=r_j^0}.$$

7.4. Задача факторизации. Параметризация функций $G(t)$. Рассмотрим задачу факторизации

$$G(t) = X^+(t)/X^-(t), \quad t \in L, \tag{A'}$$

где $X^\pm(z)$ — мероморфны в $D^\pm$.

На поверхности рода $\rho = 0$ (гомеморфной римановой сфере) единственным параметром функции $G(t)$, определяющим класс нулей и полюсов решений задачи (A'), является индекс Коши функции $G(t)$ $\varkappa_G$ (7.1). Это значит, что при $\varkappa \geqslant 0$ всегда можно построить функции $X^\pm(z)$, имеющие только нули (число их, в силу принципа аргумента, будет равно $\varkappa$), а при $\varkappa < 0$ — имеющие только полюса (их число равно $|\varkappa|$). Поскольку принцип аргумента справедлив и на римановой поверхности (параграф 3), то разность между числом нулей и полюсов $X^\pm(z)$ по-прежнему равна $\varkappa$, однако нули и полюса $X^\pm(z)$ уже не определяются только индексом Коши. Связано это с тем, что на римановой поверхности рода $\rho > 0$ нетривиальна группа Ω_0^*, т. е. не любой дивизор степени ноль — главный и, следовательно, нельзя, вообще говоря, дивизор $X^\pm(z)$ с помощью умножения на мероморфные на D функции привести к одной точке.

Выберем и зафиксируем точки $r_0 \in D^+$, $q_0 \in D^-$ и функции $\varphi_j(q_0^{-1}r_0\,|\,z) = \varphi_j(z)$ вида (7.3). Точку r_0 будем использовать для построения координат дивизоров (п. 3.7).

Пусть индексы $\varkappa = \varkappa_G$ и $\varkappa_j = \varkappa_j^G$ определяются по формуле (7.1). Определим функцию

$$G_0(t) = G(t)\prod_{j=0}^{m}\varphi_j^{-\varkappa_j}(t), \quad t \in L.$$

Из леммы 7.1 следует, что $G_0(t) \in C^\alpha(L)$, $\operatorname{ind} G_0(t)\big|_{L_j} = 0$, $j = \overline{0,m}$, т. е. $\ln G_0(t)$ непрерывен на L_j, откуда $\ln G_0(t) \in C^\alpha(L)$. Введем вектор

$$a_G = a = (a_1, \ldots, a_\rho) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G_0\,\boldsymbol{\omega}\,(\operatorname{mod}\mathcal{L})$$

и назовем $(\varkappa, a) = (\varkappa_G, a_G) = (\varkappa, a)_G \in \mathbb{Z}\times\operatorname{Jac}(D)$ *координатами* функции $G(t)$.

Из леммы 7.2 следует, что координаты $G(t)$ не зависят от выбора точки q_0 и кривых Λ_j, соединяющих q_0 и r_0 (но, естественно, зависят от $r_0 \in D^+$).

Обозначим $\Theta^\alpha = \{G(t) \in C^\alpha(L) \mid G(t) \neq 0\}$ — группу по умножению и введем ее подгруппы:

$$\widetilde{\Theta} = \{G(t) \in \Theta^\alpha \mid (\varkappa, a)_G = (0,0)\}, \quad \Theta_0 = \{G(t) \in \Theta^\alpha \mid \varkappa_G = 0\}$$

и фактор-группы

$$\Theta_0^* = \Theta_0/\widetilde{\Theta}, \quad \Theta_1 = \Theta^\alpha/\Theta_0, \quad \Theta^* = \Theta^\alpha/\widetilde{\Theta}.$$

Очевидны изоморфизмы

$$\Theta_0^* \cong \mathrm{Jac}(D), \quad \Theta_1 \cong \mathbb{Z} = \{\operatorname{ind} G\}, \quad \Theta^* \cong \Theta_1 \times \Theta_0^* \cong \mathbb{Z} \times \mathrm{Jac}(D) \cong \Omega^*,$$

причем указанные изоморфизмы как раз и реализуют координаты функции $G(t)$.

Дивизоры класса $\Delta \in \Omega^*$ с координатами $(\varkappa, a)_G$ будем называть дивизорами, *соответствующими* функции $G(t)$. Соответственно будем обозначать $l_G = l = l((\varkappa, a)_G)$, $l_G^* = l^* = l^*((\varkappa, a)_G)$. Нетрудно показать, что класс соответствующих дивизоров, т. е. соответствие $\Delta \leftrightarrow G$ при изоморфизме $\Theta^* \cong \Omega^*$ не зависит от выбора точки r_0 и базиса абелевых дифференциалов 1 рода $\boldsymbol{\omega}$.

Лемма 7.4. *$G(t) \in \widetilde{\Theta}$ тогда и только тогда, когда существует решение задачи (A') такое, что $X^\pm(z)$ аналитичны и не имеют нулей в $\overline{D}^\pm$.*

Лемма 7.5. *Пусть $X^\pm(z)$ — аналитичны в $D^\pm$, $X^\pm(z) \neq 0$, $z \in \overline{D}^\pm$ и $X^\pm(t) \in C^\alpha(L)$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \ln (X^\pm(t))\, \boldsymbol{\omega} = 0 \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{L}).$$

Доказательство. Рассмотрим для определенности $X^+(z)$. Пусть $\varkappa_j = \operatorname{ind} X^+(t)\big|_{L_j}$, тогда по принципу аргумента $\sum\limits_{j=0}^m \varkappa_j = 0$, т. е. $\varkappa_0 = -\sum\limits_{j=1}^m \varkappa_j$. Обозначим

$$X_0^+(z) = X^+(z) \prod_{j=0}^m (\varphi_j(z))^{-\varkappa_j} = X^+(z) \prod_{j=1}^m (\varphi_j(z)/\varphi_0(z))^{-\varkappa_j}.$$

Тогда $\operatorname{ind} X_0^+(t)\big|_{L_j} = 0$, т. е. $\ln X_0^+(t) \in C^\alpha(L)$.

Далее, если D^+ неодносвязна и кривые L_j, $j = \overline{0, m}$ не порождают фундаментальную группу $\pi_1(D^+)$, то дополним систему L_j замкнутыми кривыми L_s^+, $s = \overline{1, \rho^+}$ до системы образующих $\pi_1(D^+)$. Разрежем D^+ по кривым L_s^+, у полученной после разрезания области D_0^+ кривые L_j, $j = \overline{0, m}$ порождают фундаментальную группу $\pi_1(D_0^+)$. Тогда индекс $X_0^+(z)$ по любой замкнутой кривой в D_0^+ равен нулю, следовательно в D_0^+ можно определить аналитическую функцию $\ln X_0^+(z)$.

Из аналитичности $\ln X_0^+(z)$ в D_0^+ следует, что

$$\int\limits_{\partial D_0^+} \ln X_0^+(t)\omega_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, \rho}. \tag{7.5}$$

Но граница D_0^+ состоит из контура L и кривых L_s^+, причем на L_s^+ скачок $\ln X_0^+(z)$ равен $2\pi i m_s$, $m_s \in \mathbb{Z}$. Тогда из условия (7.5) следует, что

$$\int\limits_L \ln X_0^+ \omega_k + \sum_{s=1}^{\rho^+} 2\pi i m_s \int\limits_{L_s^+} \omega_k = 0,$$

а так как L_s^+ — замкнутые кривые, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln X_0^+ \boldsymbol{\omega} = -\sum_{s=1}^{\rho^+} m_s \int\limits_{L_s^+} \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}.$$

Далее, по лемме 7.2 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \ln(\varphi_j/\varphi_0)\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}$, откуда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln X^+ \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln X_0^+ \boldsymbol{\omega} + \sum_{j=1}^{m} \varkappa_j \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln(\varphi_j/\varphi_0)\,\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}.$$

Доказательство для $X^-(z)$ совершенно аналогичное.

Доказательство леммы 7.4. Необходимость. Пусть $G(t) \in \widetilde{\Theta}$, т. е. $\varkappa_G = 0$ и $a_G = -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L \ln G_0 \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}$. Следовательно, существует на D замкнутый контур L_a такой, что $\displaystyle\int\limits_{L_a} \boldsymbol{\omega} = a_G$. Положим

$$\chi^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G_0(t) K_0^0(t, z) + \int\limits_{L_a} K_0^0(p, z), \quad z \in D^\pm.$$

В принятых обозначениях

$$\operatorname{Res}\chi^\pm(r_j^0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G_0(t)\left(\operatorname{Res}(K_0^0(t,z)\omega_j(z))\Big|_{z=r_j^0}\right) +$$

$$+ \int\limits_{L_a} \operatorname{Res}(K_0^0(p,z)\omega_k(z))\Big|_{z=r_j^0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G_0(t)\omega_j(t) + \int\limits_{L_a} \omega_j(p) = 0, \quad j = \overline{1, \rho},$$

т. е. функции $\chi^{\pm}(z)$ аналитичны в $D^{\pm}$, кроме точек L_a, где имеют скачок $2\pi i n$ (n — целое) и $\chi^+(t) - \chi^-(t) = \ln G_0(t)$, $t \in L$, $t \overline{\in} L_a$. Следовательно, функции $X_0^{\pm}(z) = \exp(\chi^{\pm}(z))$ аналитичны и не равны нулю в $D^{\pm}$, непрерывны в $\overline{D}^{\pm}$ и $X_0^+(t)/X_0^-(t) = G_0(t)$, $t \in L$. Далее, так как $\varkappa_G = \sum\limits_{j=0}^{m} \varkappa_j = 0$, то $\prod\limits_{j=0}^{m} \varphi_j^{\varkappa_j}(z)$ — аналитично и не равно нулю в D^+ и непрерывно в $\overline{D}^+$, откуда

$$X^{\pm}(z) = \begin{cases} X_0^+(z) \prod\limits_{j=0}^{m} \varphi_j^{\varkappa_j}(z), & z \in D^+ \\ X_0^-(z), & z \in D^- \end{cases}$$

аналитичны и не равны нулю в $D^{\pm}$, непрерывны в $\overline{D}^{\pm}$ и

$$X^+(t)/X^-(t) = G_0(t) \prod_{j=0}^{m} \varphi_j^{\varkappa_j}(t) = G(t), \quad t \in L.$$

Достаточность. Пусть $G(t) = X^+(t)/X^-(t) \in C^{\alpha}(L)$, а функции $X^{\pm}(z)$ аналитичны и не имеют нулей в $D^{\pm}$. Обозначим

$$\varkappa_j^{\pm} = \operatorname{ind} X^{\pm}\big|_{L_j}, \quad \varkappa_j = \operatorname{ind} G\big|_{L_j} = \varkappa_j^+ - \varkappa_j^-.$$

По принципу аргумента $\varkappa^{\pm} = \sum\limits_{j=0}^{m} \varkappa_j^{\pm} = 0$, откуда

$$\varkappa_G = \sum_{j=0}^{m} \varkappa_j = \varkappa^+ - \varkappa^- = 0.$$

Пусть $X_0^-(z) = X^-(z)$, $X_0^+(z) = X^+(z) \prod\limits_{j=0}^{m} (\varphi_j(z))^{-\varkappa_j}$. Тогда $X_0^{\pm}(z)$ — аналитичны и не равны нулю в $D^{\pm}$ и по лемме 7.5

$$a^{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \ln X_0^{\pm}\, \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L},$$

откуда $a_G = -(a^+ - a^-) = 0 \pmod{\mathcal{L}}$, т. е. $G(t) \in \widetilde{\Theta}$. Лемма доказана.

Теорема 7.1. *Класс дивизоров решений задачи (A') совпадает с классом дивизоров Δ, соответствующих $G(t)$. При этом, если дивизор Δ соответствует $G(t)$, то, с точностью до умножения на константу, имеем*

$$X^{\pm}(z) = \begin{cases} \exp(\chi^+(z)) \prod\limits_{j=0}^{m} (\varphi_j^+(z))^{\varkappa_j}, & z \in \overline{D}^+, \\ \exp(\chi^-(z)), & z \in \overline{D}^-, \end{cases} \tag{7.6}$$

где

$$\chi^{\pm}(z) = \int\limits_{\Delta_0} K_0^0(p,z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G_0(t) K_0^0(t,z),$$

$$\varkappa_j = \operatorname{ind} G(t)\big|_{L_j}, \quad \varkappa = \varkappa_G = \sum_{j=0}^{m} \varkappa_j = \operatorname{ind} G(t)\big|_L, \quad \Delta_0 = r_0^{-\varkappa}\Delta,$$

$$G_0(t) = G(t)\prod_{j=0}^{m} (\varphi_j(t))^{-\varkappa_j}.$$

При этом кривая, соединяющая нули и полюса Δ_0, *проведена так, чтобы* $\int\limits_{\Delta_0} \boldsymbol{\omega} = a_G$ (*это всегда можно сделать, так как координатами* Δ_0 *являются* $(0, a_G)$).

Доказательство. Пусть дивизор Δ соответствует $G(t)$. Тогда, как и в доказательстве леммы 7.4,

$$\operatorname{Res}\chi^{\pm}(r_j^0) = \int\limits_{\Delta_0} \omega_j + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G_0\, \omega_j = 0, \quad j = \overline{1,\rho}$$

и, значит, $\chi^{\pm}(z)$ аналитичны в $D^{\pm}$, кроме точек кривой, соединяющей нули и полюса Δ_0, причем $\chi^+(t) - \chi^-(t) = \ln G_0(t)$, $t \in L$. Тогда функции $\varphi^{\pm}(z) = \exp(\chi^{\pm}(z))$ мероморфны в $D^{\pm}$, имеют дивизор Δ_0 и $\varphi^+(t)/\varphi^-(t) = G_0(t)$, $t \in L$, откуда функции $X^{\pm}(z)$ вида (7.6) мероморфны в $D^{\pm}$, имеют дивизор $\Delta_0 r_0^{\varkappa} = \Delta$ и

$$X^+(t)/X^-(t) = G_0(t)\prod_{j=0}^{m} (\varphi_j(t))^{\varkappa_j} = G(t), \quad t \in L.$$

Итак, если дивизор Δ соответствует $G(t)$, то существует решение задачи факторизации (7.6) с дивизором Δ. Если теперь $X^{\pm}{}_1(z)$ — какое либо другое решение задачи факторизации (7.6) с дивизором Δ_1, то $F(z) = X_1^{\pm}(z)/X^{\pm}(z)$ — мероморфная в D функция, а значит дивизор $\widetilde{\Delta} = \Delta_1/\Delta$ — главный, т.е. координаты Δ и Δ_1 совпадают. Теорема доказана.

Замечания.

- Без ограничения общности всегда можно считать $\Delta \cap L = \emptyset$, в частности, точки Δ могут лежать в любой окрестности $\mathbf{U}_0$ точки r_0.
- Так как $G(t) \in C^{\alpha}(L)$, то и $X^{\pm}(t) \in C^{\alpha}(L)$.

Теорема 7.2 (устойчивости). *Пусть* $G_n(t) \in \Theta^{\alpha}$, $n = \overline{0,\infty}$ — *последовательность функций*, Δ_n — *дивизоры, соответствующие* $G_n(t)$, $n = \overline{0,\infty}$ *и* $X_n^{\pm}(z)$ — *решения задачи* (A') *вида* (7.6).

Тогда если $G_n(t) \to G_0(t)$, $n \to \infty$ в $C^\alpha(L)$, то Δ_n можно выбрать так, чтобы $X_n^\pm(z) \to X_0^\pm(z)$, $n \to \infty$ равномерно в любой области, не содержащей окрестности точек Δ_0 и $X_n^\pm(t) \to X_0^\pm(t)$ в $C^\alpha(L)$.

Доказательство. Пусть $(\varkappa_n, a_n)$ — координаты функции $G_n(t)$, $n = \overline{0,\infty}$. Так как $G_n(t) \to G_0(t)$ в $C^\alpha(L)$, то, очевидно,

$$\varkappa_j^n = \operatorname{ind} G_n(t)\big|_{L_j} = \varkappa_j = \mathrm{const}, \quad \varkappa_n = \varkappa = \mathrm{const}, \quad n = \overline{0,\infty};$$

$$G_0^n(t) = G_n(t)\prod_{j=0}^{m}(\varphi_j(t))^{-\varkappa_j} \to G_0^0(t) = G_0(t)\prod_{j=0}^{m}(\varphi_j(t))^{-\varkappa_j}, \quad n \to \infty$$

в $C^\alpha(L)$ и, значит, при $n \to \infty$

$$\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G_0^n\, \boldsymbol{\omega}\right\} \equiv a_G^n \to a_G^0 \equiv \left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G_0^0\, \boldsymbol{\omega}\right\}.$$

Аналогично доказательству теорем 3 п. 4.2. и 4 п. 4.4 дивизор Δ_n выберем в виде

$$\Delta_n = r_0^\varkappa \frac{(s_1^n)^N \ldots (s_\rho^n)^N}{r_1^N \ldots r_\rho^N},$$

$s_j^n, r_j \in \mathbf{U}_0$ — окрестности r_0, $j = \overline{1,\rho}$, $n = \overline{0,\infty}$; $\omega(r_1, \ldots, r_\rho) \neq 0$, $N = \mathrm{const}$ и при $n \to \infty$ $s_j^n \to s_j^0$, $j = \overline{1,\rho}$.

Тогда утверждение теоремы сразу следует из представления (7.6) с учетом непрерывности сингулярного интеграла типа Коши в пространствах Гельдера $C^\alpha(L)$ [19, с. 10–12].

Лемма 7.6. *Общее решение однородной задачи* (7.2) *имеет вид $f^\pm(z) = f(z)X^\pm(z)$, $z \in \overline{D}^\pm$, где $f(z)$ — мероморфная функция, кратная дивизору Δ^{-1}, Δ — дивизор $X^\pm(z)$.*

Лемма доказывается обычным для теории краевых задач способом.

Следствия.

1. *Пусть $f_j(z)$, $j = \overline{1,l}$ — базис пространства мероморфных функций, кратных Δ^{-1}, $l = r[\Delta^{-1}] = l(\varkappa, a)_G$. Можно выбрать точки $p_1, \ldots, p_l$ так, чтобы*

$$\det\begin{vmatrix} f_1(p_1) & f_1(p_2) & \ldots & f_1(p_l) \\ f_2(p_1) & f_2(p_2) & \ldots & f_2(p_l) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_l(p_1) & f_l(p_2) & \ldots & f_l(p_l) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это позволяет нормировать систему $f_j(z)$, $j = \overline{1,l}$:

$$f_j(p_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \qquad (j,k = \overline{1,l}).$$

Тогда общее решение однородной задачи (7.2) *имеет вид*

$$f^{\pm}(z)=\sum_{j=1}^{l} c_j f_j(z)X^{\pm}(z), \quad c_j=\mathrm{const}=\frac{f^{\pm}(p_j)}{X^{\pm}(p_j)}, \quad j=\overline{1,l}.$$

2. *Число линейно независимых решений задачи* (7.2) $l=l_G=$ $=l(\varkappa,a)_G$.

7.5. Решение краевых задач. Оператор Коши. Пусть $G(t)\in$ $\in\Theta^{\alpha}$, Δ — дивизор, соответствующий $G(t)$. Дивизор

$$\frac{P}{Q}=\frac{p_1\dots p_l}{q_1\dots q_{l^*}}$$

назовем *дополнительным* к $G(t)$, если P/Q — дополнительный к Δ (п. 4.3). Соответственно будем называть P дополнительным дивизором *нулей*, а Q — *полюсов.* Очевидно, класс дополнительных дивизоров зависит только от координат $(\varkappa,a)_G$. Без ограничения общности будем считать, что $p_j\overline{\in}L$, $j=\overline{1,l}$ и полюса $q_k\in D^+$, $k=\overline{1,l^*}$. Соответственно дивизорам Δ, P/Q построим абелев дифференциал $K(\Delta QP^{-1}|p,q)=$ $=K_1(p,q)$ (п. 4.3, формула (4.10)).

Пусть $X^{\pm}(z)$ — решение задачи факторизации (A') вида (7.6), Δ — дивизор $X^{\pm}$. Рассмотрим выражение

$$\widetilde{K}(p,q)=\frac{X^{\pm}(q)}{X^{\pm}(p)}\,K_1(p,q), \quad p\in\overline{D}^{\pm}, \quad q\in\overline{D}^{\pm}, \tag{7.7}$$

и пусть

$$\widetilde{K}(t,q)=\frac{X^{\pm}(q)}{X^{+}(t)}\,K_1(t,q), \quad t\in L, \quad q\in\overline{D}^{\pm}. \tag{7.8}$$

Лемма 7.7.

1) $\widetilde{K}(p,q)$ — *мероморфный в* $D^{\pm}$ *дифференциал по переменной* p, *кратный дивизору* $q^{-1}P^{-1}Q$, *причем* $\operatorname{Res}\widetilde{K}(q,q)=1$.

2) $\widetilde{K}(p,q)$ — *мероморфная в* $D^{\pm}$ *функция по переменной* q, *кратная дивизору* $p^{-1}PQ^{-1}$ (*в частности*, $\widetilde{K}(p,p_j)\equiv 0$, $j=\overline{1,l}$).

Справедливость леммы следует из свойств $K(\Delta QP^{-1}|p,q)$ и леммы 4.8 п. 4.3.

Пусть $w_k^{\Delta}(p)$, $k=\overline{1,l^*}$ — базис абелевых дифференциалов, кратных Δ, построенный в п. 4.3 (формула (4.11) и лемма 11), т. е. $w_k^{\Delta}(q_j)=$ $=0$, $k\neq j$ и $w_k^{\Delta}(q_k)\neq 0$, $k,j=\overline{1,l^*}$. Обозначим

$$w_k^{\pm}(p)=\frac{1}{X^{\pm}(p)}\,w_k^{\Delta}(p), \quad k=\overline{1,l^*}, \quad p\in\overline{D}^{\pm}. \tag{7.9}$$

Очевидна справедливость следующего утверждения.

Лемма 7.8. *$w_k^{\pm}(p)$ — аналитические в $D^{\pm}$ дифференциалы, $w_k^{+}(q_j)=0$, $k\neq j$, $w_k^{+}(q_k)\neq 0$; $k,j=\overline{1,l^*}$. Дифференциалы на L $w_k^{\pm}(t)$, $t\in L$, $k=\overline{1,l^*}$ связаны соотношением $w_k^{+}(t)=G^{-1}(t)w_k^{-}(t)$.*

Положим $w_k(t)=w_k^{+}(t)$, $t\in L$, $k=\overline{1,l^*}$. Пусть мероморфная функция $f(z)$ имеет полюс в точке q_k. Аналогично п. 4.3 условимся обозначать

$$\operatorname{Res} f(q_k)=\operatorname{Res} f(z)w_k^{+}(z)\big|_{z=q_k}.$$

Лемма 7.9. *Пусть $g(t)\in C^{\alpha}(L)$ и*

$$\Phi^{\pm}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L K(\Delta QP^{-1}\,|\,t,z)\,g(t),\quad z\in D^{\pm},\quad \Delta\cap L=\emptyset.$$

Тогда существуют предельные значения $\Phi^{\pm}(t)\in C^{\alpha}(L)$, причем

$$\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=g(t),\quad t\in L.$$

Утверждения, очевидно, следуют из определения $K(\Delta QP^{-1}|p,q)$ и леммы 4.5 п. 4.1.

Лемма 7.10. *Пусть $g(t)\in C^{\alpha}(L)$ и*

$$\Phi^{\pm}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \widetilde{K}(t,z)\,g(t),\quad z\in D^{\pm}.$$

Тогда:

1) *$\Phi^{\pm}(z)$ мероморфны в $D^{\pm}$, кратны дивизору PQ^{-1} (в частности $\Phi^{\pm}(p_j)=0$, $j=\overline{1,l}$) и в принятых обозначениях*

$$\operatorname{Res}\Phi^{+}(q_k)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L g(t)\,w_k(t),\quad k=\overline{1,l^*};$$

2) *существуют предельные значения $\Phi^{\pm}(t)\in C^{\alpha}(L)$ и*

$$\Phi^{+}(t)-G(t)\Phi^{-}(t)=g(t),\quad t\in L.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 7.7, теоремы 7.1 и цепочки равенств

$$\operatorname{Res}\Phi^{+}(z)w_k^{+}(z)\Big|_{z=q_k}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{g(t)}{X^{+}(t)}\operatorname{Res}(K(\Delta QP^{-1}\,|\,t,z)w_k^{\Delta}(z))\Big|_{z=q_k}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{g(t)}{X^{+}(t)}\,w_k^{\Delta}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L g(t)w_k(t),$$

второе легко получается обычным в теории краевых задач образом из леммы 7.9 и теоремы 7.1.

Теорема 7.3. *Для того, чтобы существовало ограниченное в* $D^{\pm}$ *решение задачи* (7.2), *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\int\limits_L g(t)\, w_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, l^*}. \tag{7.10}$$

Если (7.10) *справедливо, то частное решение задачи* (7.2) *имеет вид*

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \widetilde{K}(t, z)\, g(t). \tag{7.11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$g(t) = \Phi^+(t) - G(t)\, \Phi^-(t), \quad t \in L.$$

Тогда с учетом леммы 7.8

$$g(t) w_k(t) = \Phi^+(t)\, w_k^+(t) - G(t)\, \Phi^-(t)\, w_k^+(t) =$$
$$= \Phi^+(t)\, w_k^+(t) - \Phi^-(t)\, w_k^-(t), \quad t \in L,$$

и так как $\Phi^{\pm}(z)\, w_k^{\pm}(z)$ — аналитические в $D^{\pm}$ дифференциалы, то

$$\int\limits_L g\, w_k = \int\limits_L \Phi^+\, w_k^+ - \int\limits_L \Phi^-\, w_k^- = 0, \quad k = \overline{1, l^*}.$$

Достаточность. Пусть выполнены условия (7.10) и $\Phi^{\pm}(z)$ имеет вид (7.11). Тогда по лемме 7.10

$$\operatorname{Res} \Phi^{\pm}(q_k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L g(t)\, w_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, l^*},$$

т. е. функции $\Phi^{\pm}(z)$ аналитичны в $D^{\pm}$, выполняется граничное условие (7.2) и $\Phi^{\pm}(t) \in C^{\alpha}(L)$, т. е. $\Phi^{\pm}(z)$ — решение задачи (7.2). Теорема доказана.

Введем функции

$$\psi_k^+(z) = (\varphi_0(r_0^{-1} q_k \,|\, z))^{-1}, \quad z \in \overline{D}^+, \quad k = \overline{1, l^*}$$

и пусть

$$\psi_k(t) = \psi_k^+(t), \quad t \in L, \quad k = \overline{1, l^*}. \tag{7.12}$$

Из леммы 7.8 следует, что $\int\limits_L \psi_k(t) w_j(t) = 0$, $k \neq j$, поскольку в этом случае $[\psi_k^+(z) w_j^+(z)]$ — аналитический в D^+ дифференциал. Далее,

$\int\limits_L \psi_k(t)w_k(t) \neq 0$, так как $\psi_k^+(z)w_k^+(z)$ имеет в D^+ единственный полюс первого порядка в точке q_k. Умножим, в случае необходимости, $\psi_k^\pm(z)$ на константы так, чтобы

$$\int\limits_L \psi_k(t)w_j(t) = \delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, l^*}.$$

Теорема 7.4 (решение задачи 1). *Число l линейно независимых решений задачи (7.2) равно $l(\varkappa, a)_G = l_G$; число l^* условий разрешимости равно $l^*(\varkappa, a)_G = l_G^*$, индекс $\varkappa_0$ краевой задачи равен $l - l^* = \varkappa - \rho + 1$, где $\varkappa = \varkappa_G = \operatorname{ind} G$.*

Действительно, поскольку $\int\limits_L \psi_k w_j = \delta_{kj}$, то функционалы в (7.10) линейно независимы и, значит, число условий разрешимости $l^* = l^*(\varkappa, a)_G$. Все остальные утверждения уже доказаны.

Лемма 7.11. *Пусть*

$$\widetilde{\psi}_k^\pm(z) = \int\limits_L \psi_k(t)\widetilde{K}(t, z), \quad k = \overline{1, l^*}, \quad z \in \overline{D}^\pm.$$

Тогда

- *функции $\widetilde{\psi}_k^\pm(z)$ аналитичны в $D^\pm$ всюду, кроме точек q_k, где имеется простой полюс и, в принятых обозначениях,* $\operatorname{Res} \widetilde{\psi}_k^\pm(q_k) = 1$, $k = \overline{1, l^*}$;
- $\widetilde{\psi}_k^\pm(p_j) = 0$, $j = \overline{1, l}$, $k = \overline{1, l^*}$;
- $\widetilde{\psi}_k^+(t) - G(t)\widetilde{\psi}_k^-(t) = 2\pi i\psi_k(t)$, $t \in L$.

Действительно, по лемме 7.10 функции $\widetilde{\psi}_k^\pm(z)$ мероморфны в $D^\pm$ и кратны PQ^{-1}. В частности, $\widetilde{\psi}_k^\pm(p_j) = 0$, $j = \overline{1, l}$ и, кроме того,

$$\operatorname{Res} \widetilde{\psi}_k^\pm(q_j) = \int\limits_L \psi_k w_j = \delta_{kj},$$

т. е. $\widetilde{\psi}_k^\pm(z)$ аналитична в точках q_j, $k \neq j$ и $\operatorname{Res} \widetilde{\psi}_k^+(q_k) = 1$. Третье утверждение сразу следует из леммы 7.9.

Выражение

$$K(t, z) = \widetilde{K}(t, z) - \sum_{k=1}^{l^*} \widetilde{\psi}_k^\pm(z)w_k(t), \quad t \in L, \quad z \in \overline{D}^\pm$$

назовем *ядром Коши* краевой задачи (A). Ясно, что $K(t, z)$ — функционал над $(G(t), l, l^*, P, Q)$.

Теорема 7.5 (решение задач 2, 3). *Пусть*

$$P/Q = p_1 \dots p_l q_1^{-1} \dots q_{l^*}^{-1}$$

— дивизор, дополнительный к $G(t)$, *причем* $p_j, q_k \overline{\in} L$, $j = \overline{1, l}$, $k = \overline{1, l^*}$; $p_j \neq p_k$, $j \neq k$, $j, k = \overline{1, l}$, $q_j \neq q_k$, $j \neq k$, $j, k = \overline{1, l^*}$; $p_j \neq q_k$, $j = \overline{1, l}$, $k = \overline{1, l^*}$ *и* $\psi_k(t)$ *— функции вида* (7.12).

Тогда ограниченное решение задачи (A) $\{\Phi^{\pm}(z);\ c_k, k = \overline{1, l^*}\}$ *существует и единственно,* $\Phi^{\pm}(t) \in C^{\alpha}(L)$ *и оператор Коши задачи* (A) *имеет вид*

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L K(t, z)\, g(t), \tag{7.13}$$

$$c_k = c_k(g) = \int\limits_L g(t)\, w_k(t), \quad k = \overline{1, l^*}. \tag{7.14}$$

Доказательство. Пусть

$$g_0(t) = g(t) - \sum_{k=1}^{l^*} c_k \psi_k(t).$$

По теореме 7.3 ограниченное решение задачи (A) существует тогда и только тогда, когда $\int\limits_L g_0(t)\, w_k(t) = 0$, $k = \overline{1, l^*}$. Но

$$\int\limits_L g_0\, w_j = \int\limits_L g\, w_j - \sum_{k=1}^{l^*} c_k \int\limits_L \psi_k\, w_j = \int\limits_L g\, w_j - c_j$$

и, значит, коэффициенты c_k, $k = \overline{1, l^*}$ определяются однозначно и имеют вид (7.14). Рассмотрим функцию

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \widetilde{K}(t, z)\, g_0(t).$$

Согласно леммам 7.7, 7.9, 7.11, функция $\Phi^{\pm}(z)$ является решением задачи (A), причем $\Phi^{\pm}(t) \in C^{\alpha}(L)$. Представление (7.13) для $\Phi^{\pm}(z)$ вытекает из цепочки равенств:

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \widetilde{K}(t, z)[g(t) - \sum_{k=1}^{l^*} c_k\, \psi_k(t)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \widetilde{K}(t, z)\, g(t) - \sum_{k=1}^{l^*} c_k \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \widetilde{K}(t, z)\, \psi_k(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\Big[\int_L g(t)\,\widetilde{K}(t,z) - \sum_{k=1}^{l^*} \widetilde{\psi}_k^{\pm}(z) \int_L g(t)\,w_k(t)\Big] = \frac{1}{2\pi i}\int_L g(t)\,K(t,z).$$

Осталось доказать единственность решения задачи (A). Предположим противное, что существуют два различных решения $\Phi_1^{\pm}(z)$, $\Phi_2^{\pm}(z)$ и $\Delta\Phi^{\pm}(z) = \Phi_1^{\pm}(z) - \Phi_2^{\pm}(z)$. Так как коэффициенты $c_k = c_k(g)$ определяются однозначно, то $\Delta\Phi^{+}(t) - G(t)\Delta\Phi^{-}(t) = 0$, $t \in L$ и $\Delta\Phi^{\pm}(p_j) = 0$, $j = \overline{1,l}$. Но тогда по следствию из леммы 7.6

$$\Delta\Phi^{\pm}(z) = \sum_{j=1}^{l} \frac{\Delta\Phi^{\pm}(p_j)}{X^{\pm}(p_j)}\, f_j(z) X^{\pm}(z) \equiv 0.$$

Теорема доказана.

7.6. Устойчивость. Определим сходимость коэффициентов $G(t)$. Как уже отмечалось, если $G_n(t) \to G_0(t)$, $n \to \infty$ в $C^{\alpha}(L)$ и $(\varkappa_n, a_n)$ — их координаты, $n = \overline{0,\infty}$, то $\varkappa_n = \varkappa = \mathrm{const}$, $n = \overline{0,\infty}$; $a_n \to a_0$, $n \to \infty$ в $\mathrm{Jac}(D)$. Однако в этом случае числа $l_n = l(\varkappa, a_n)$ могут, вообще говоря, меняться и, значит, соответствующие $G_n(t)$ дивизоры Δ_n не будут сходиться к дивизору Δ_0, соответствующему $G_0(t)$, в принятом ранее смысле (п. 4.4). Скажем, что последовательность $G_n(t) \overset{\Theta^*}{\to} G_0(t)$, $n \to \infty$, если $G_n(t) \to G_0(t)$ в $C^{\alpha}(L)$ и $l_n = l(\varkappa, a)_n = \mathrm{const} = l$, $n = \overline{0,\infty}$. В этом случае и $l_n^* = l^*(\varkappa, a_n) = l - \varkappa + \rho - 1 = l^* = \mathrm{const}$. Заметим, что условие $l_n = \mathrm{const}$ автоматически выполнено при $\varkappa > 2\rho - 2$ ($l^* = 0$, $l = \varkappa - \rho + 1$) и при $\varkappa < 0$ ($l = 0$, $l^* = \rho - 1 - \varkappa$) и в этих случаях условие $G_n \overset{\Theta^*}{\to} G_0$ означает, что $G_n(t) \to G_0(t)$ в $C^{\alpha}(L)$.

Лемма 7.12. *Пусть $G_n(t) \in C^{\alpha}(L)$, $n = \overline{0,\infty}$ — последовательность функций,*

$$G_n(t) \xrightarrow{Q^*} G_0(t), \quad n \to \infty; \qquad P_n/Q_n = p_1^n \ldots p_l^n (q_1^n)^{-1} \ldots (q_{l^*}^n)^{-1}$$

— дополнительные к $G_n(t)$ дивизоры ($n = \overline{0,\infty}$), выбранные так, что $p_j^n \to p_j^0$, $q_k^n \to q_k^0$, $n \to \infty$, $j = \overline{1,l}$, $k = \overline{1,l^*}$ (теорема 5 п. 4.4.) и $K_n(t,z)$ — соответствующие ядра Коши краевой задачи (A), $n = \overline{0,\infty}$.

Тогда $K_n(t,z) \overset{D}{\to} K_0(t,z)$ равномерно по z в области, не содержащей окрестностей точек q_k^0, $k = \overline{1,l^*}$.

Утверждения леммы следуют из теорем 4.5, 4.6 п. 4.4 и вида $K_n(t,z)$.

Теорема 7.6. *Пусть $G_n(t) \in \Theta^{\alpha}$, $g_n(t) \in C^{\alpha}(L)$, $n = \overline{0,\infty}$, причем $G_n(t) \overset{\Theta^*}{\to} G_0(t)$; $g_n(t) \to g_0(t)$ в $C^{\alpha}(L)$ при $n \to \infty$ и $P_n/Q_n = p_1^n \ldots p_l^n (q_1^n)^{-1} \ldots (q_{l^*}^n)^{-1}$ последовательность дополнительных к $G_n(t)$ дивизоров ($n = \overline{0,\infty}$), выбранная так, что $p_j^n \to p_j$, $q_k^n \to q_k$, $n \to \infty$, $j = \overline{1,l}$, $k = \overline{1,l^*}$.*

Обозначим $\{\Phi_n^{\pm}(z);\ \ c_k^n,\ k=\overline{1,l^*}\}$ *решения соответствующих задач* (A). *Тогда*

$$c_k^n \to c_k^0,\ n\to\infty,\ k=\overline{1,l^*};\ \ \Phi_n^{\pm}(z)\to\Phi_0^{\pm}(z),\ n\to\infty,$$

равномерно в $\overline{D}^{\pm}$ *и* $\Phi_n^{\pm}(t)\to\Phi_0^{\pm}(t)$, $n\to\infty$ *в* $C^{\alpha}(L)$.

Справедливость теоремы следует из теоремы 7.5, леммы 7.12 и обычных теорем устойчивости в пространствах Гельдера сингулярного интеграла типа Коши на контуре [19, с. 10–12].

В заключение пункта специально отметим, что в конечном счете ядро Коши $K(t,z)$ не зависит от дивизора Δ, соответствующего $G(t)$. В частности, при построении ядра Коши, решении задачи (A) и доказательстве устойчивости можно обойтись без условия $\Delta\cap L=\emptyset$.

7.7. Задачи с обобщенным дополнительным дивизором. Дивизор $P/Q=p_1\ldots p_{l_0}q_1^{-1}\ldots q_{l_0^*}^{-1}$ будем называть *обобщенным дополнительным* к функции $G(t)\in\Theta^{\alpha}$, если P/Q — обобщенный дополнительный к дивизору Δ, соответствующему $G(t)$, т. е. $l_0=l_0(\varkappa_G)$, $l_0^*=l_0^*(\varkappa_G)$ и $\Delta Q/P$ — минимальный дивизор (п. 5.6). P и Q будут соответственно обобщенными дополнительными дивизорами *нулей* и *полюсов*. Очевидно, класс обобщенных дополнительных дивизоров зависит только от координат $(\varkappa_G,a_G)$.

Для обобщенных дополнительных дивизоров проведем те же построения п. 4.3 и 7.6, что и для дополнительных дивизоров. Именно:

- по функции $G(t)$ и соответствующему ей дивизору Δ построим решение задачи факторизации (A') $X^{\pm}(z)$ вида (7.6);

- по дивизору Δ и обобщенному дополнительному P/Q найдем минимальный дивизор $\Delta_0=r_1\ldots r_\rho r_0^{-1}$ такой, что $\Delta QP^{-1}\Delta_0^{-1}=$ $=\widetilde{\Delta}$ — главный дивизор (п. 4.3);

- по минимальному дивизору Δ_0 построим абелев дифференциал $K_0(p,q)$, кратный $q^{-1}\Delta_0$, а по главному дивизору $\widetilde{\Delta}$ — кратную ему мероморфную функцию $\widetilde{f}$ и пусть

$$K_1(p,q)=\frac{\widetilde{f}(p)}{\widetilde{f}(q)}\,K_0(p,q)$$

(п. 4.3, формула (4.10));

- по $K_1(p,q)$ построим базис абелевых дифференциалов $w_k^{\Delta}(p)$, $k=$ $=\overline{1,l_0^*}$, кратных $\Delta QP^{-1}q_k^{-1}$ (п. 4.3, формула (4.11));

- построим функции $\psi_k(t)$, $k=\overline{1,l_0^*}$ вида (7.12) и, соответственно,

$$\widetilde{K}(t,z)=\frac{X^{\pm}(z)}{X^{+}(t)}\,K_1(t,z),\quad t\in L,\ z\in\overline{D}^{\pm},$$

$$\widetilde{\psi}_k^{\pm}(z) = \int\limits_L \psi_k(t)\widetilde{K}(t,z), \quad k = \overline{1, l_0^*},\ z \in \overline{D}^{\pm},$$

$$w_k^{\pm}(z) = \frac{1}{X^{\pm}(z)}\, w_k^{\Delta}(z),\ w_k(t) = w_k^{+}(t), \quad k = \overline{1, l_0^*},\ z \in \overline{D}^{\pm},\ t \in L,$$

$$K(t,z) = \widetilde{K}(t,z) - \sum_{k=1}^{l_0^*} \widetilde{\psi}_k^{\pm}(z) w_k(t), \quad t \in L,\ z \in \overline{D}^{\pm}.$$

Теорема 7.7. *Пусть* $P/Q = p_1 \ldots p_{l_0} q_1^{-1} \ldots q_{l_0^*}^{-1}$ — *обобщенный дополнительный к* $G(t)$. *Тогда ограниченное решение задачи* (A) *существует, единственно и представляется оператором Коши* (7.13), (7.14), *причем* $\Phi^{\pm}(t) \in C^{\alpha}(L)$.

Доказательство. Пусть $\Phi^{\pm}(z)$ имеет вид (7.13), а c_k, $k = \overline{1, l_0^*}$ — вид (7.14). Тогда, очевидно,

$$\Phi^{+}(t) - G(t)\Phi^{-}(t) = X^{+}(t)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{1}{X^{+}(s)}\, K_1(s,t)g(s) + \frac{g(t)}{2X^{+}(t)}\right] -$$
$$- G(t)X^{-}(t)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{1}{X^{+}(s)}\, K_1(s,t)g(s) - \frac{g(t)}{2X^{+}(t)}\right] -$$
$$- \sum_{k=1}^{l_0^*} \psi_k(t) \int\limits_L g(s) w_k(s) = g(t) - \sum_{k=1}^{l_0^*} c_k \psi_k(t).$$

Далее, $\Phi^{\pm}(z)$ кратны дивизору PQ^{-1}, причем с учетом леммы 4 п. 5.6.

$$\operatorname{Res}(\Phi^{+}(z) w_k^{+}(z))\Big|_{z=q_k} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)}{X^{+}(t)} \operatorname{Res}\left(X^{+}(z)K_1(t,z)\frac{1}{X^{+}(z)}\, w_k^{\Delta}(z)\right)\Big|_{z=q_k} -$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{l_0^*} \int\limits_L g(t) w_k(t) \operatorname{Res}(\widetilde{\psi}_j^{+}(z) w_j^{+}(z))\Big|_{z=q_k} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L g(t) w_k(t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L g(t) w_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, l_0^*}$$

т. е. $\Phi^{\pm}(z)$ аналитичны в $D^{\pm}$ и $\Phi^{\pm}(p_j) = 0$, $j = \overline{1, l_0}$.

Осталось доказать единственность решения. Пусть ${\Phi^{\pm}}_{1,2}(z)$, $c_k^{1,2}$ — решения задачи (A) и $\Phi^{\pm}(z) = \Phi_1^{\pm}(z) - \Phi_2^{\pm}(z)$, $c_k = c_k^1 - c_k^2$, $k = \overline{1, l_0^*}$. Тогда

$$\begin{cases} \Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = -\sum\limits_{k=1}^{l_0^*} c_k \psi_k(t), \\ \Phi^{\pm}(p_j) = 0, \quad j = \overline{1, l_0}. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $\Phi_0^{\pm}(z) = \Phi^{\pm}(z) + \dfrac{1}{2\pi i} \sum\limits_{k=1}^{l_0^*} c_k {\widetilde{\psi}^{\pm}}_k(z)$. Для нее, очевидно, имееем $\Phi_0^+(t) - G(t)\Phi_0^-(t) = 0$, $t \in L$ и $\Phi_0^{\pm}(z)$ кратна дивизору PQ^{-1}. Наконец, пусть $F^{\pm}(z) = \Phi_0^{\pm}(z)/X^{\pm}(z)$. Тогда $F^+(t) - F^-(t) = 0$, $t \in L$, т.е.

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z), & z \in \overline{D}^+ \\ F^-(z), & z \in \overline{D}^- \end{cases}$$

мероморфная функция на D, кратная дивизору $PQ^{-1}\Delta^{-1}$. Но так как $r[PQ^{-1}\Delta^{-1}] = 0$, то $F(z) \equiv 0$, откуда $\Phi_0^{\pm}(z) = X^{\pm}(z)F(z) \equiv 0$.

Так как $\operatorname{Res}(\Phi_0^+(z)w_k^+(z))\big|_{z=q_k} = c_k$, то $c_k = 0$, $k = \overline{1, l_0^*}$, а значит и $\Phi^{\pm}(z) = \Phi_0^{\pm}(z) - \dfrac{1}{2\pi i} \sum\limits_{k=1}^{l_0^*} c_k \widetilde{\psi}_k^{\pm}(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

Основное отличие задачи (A) с обобщенным дополнительным дивизором состоит в том, что при этом условия

$$c_k = \int\limits_L g(t) w_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, l_0^*}$$

будут достаточными, но, вообще говоря, не необходимыми для разрешимости задачи сопряжения (7.2). Действительно, согласно оценкам Клиффорда [41, 1] $l_0^* - l^* = l_0 - l \geqslant 0$, т.е. мы в правую часть задачи (A) добавляем $l_0^* - l^*$ «лишних» слагаемых. Естественно, решение полученной задачи будет не единственным (с точностью до произвольных коэффициентов при добавленных слагаемых), единственность достигается введением $l_0 - l = l_0^* - l^*$ дополнительных условий на решение $\Phi^{\pm}(p_j) = 0$.

Смысл введения задачи с обобщенным дополнительным дивизором состоит в том, что для нее можно доказать устойчивость без дополнительного условия $l(\varkappa_G, a_G) = \mathrm{const}$. Уточним, что имеется в виду. Как отмечено в п. 5.6, при фиксированном $\varkappa \in [0, 2\rho - 2]$ условие $l(\varkappa, a) = l = \mathrm{const}$ выделяет в $\operatorname{Jac}(D)$ аналитическое подмножество $W_{\varkappa}^l$. Таким образом, оператор Коши решения задачи (A) непрерывен в пределах подмножества $\Theta_{\varkappa}^l = \{\, G(t) \in \Theta^{\alpha} \mid a_G \in W_{\varkappa}^l \,\}$, которое не является естественной компонентой связности Θ^{α}. Задача с обобщенным дополнительным дивизором позволяет установить глобальную теорему устойчивости и, следовательно, задать решение задачи (A) как глобальный непрерывный оператор над $G(t)$.

Итак, пусть $G(t) \in \Theta^\alpha$. Группа Θ^α, очевидно, является объединением непересекающихся связных открытых множеств (компонент связности)

$$\Theta^\alpha(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_m) = \left\{ G(t) \in \Theta^\alpha \,\middle|\, \operatorname{ind} G\big|_{L_j} = \varkappa_j = \mathrm{const},\ j = \overline{0, m} \right\}.$$

Зафиксируем компоненту связности, т. е. набор $(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_m)$.

Отображение $G(t) \to a_G : \Theta^\alpha(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_m) \to \mathbb{C}^\rho$, ставящее в соответствие функции $G(t)$ ее координату

$$a_G = (a_1, \ldots, a_\rho) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \ln G_0(t)\, \boldsymbol{\omega}(t)$$

очевидно непрерывно. Как и в п. 5.6, построим голоморфные отображения:

- $Z(a) : \mathbb{C}^\rho \to D^{(2\rho)}$, $J(Y_0 | Z(a)) \equiv a \pmod{\mathcal{L}}$;
- $\Delta(a) = r_0^\varkappa Z(a)/Y_0$, $\varkappa = \varkappa_G = \sum\limits_{j=0}^{m} \varkappa_j = \mathrm{const}$;
- $P(a) : \mathbb{C}^\rho \to D^{(l_0)}$, $l_0 = l_0(\varkappa) = \mathrm{const}$, $Q(a) : \mathbb{C}^\rho \to D^{(l_0^*)}$, $l_0^* = l_0^*(\varkappa) = \mathrm{const}$ и $R(a) : \mathbb{C}^\rho \to D^{(\rho)}$ так, что $P(a)/Q(a)$ — обобщенный дополнительный к $\Delta(a)$ и $\Delta(a)Q(a)P^{-1}(a)R^{-1}(a)r_0 = \widetilde{\Delta}(a)$ — главный дивизор.

Соответственно пусть $K(a \,|\, p, q)$ и $w_k(a \,|\, p)$, $k = \overline{1, l_0^*}$ — построенные в п. 5.6 абелевы дифференциалы. Тогда имеем определенные и непрерывные на $\Theta^\alpha(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_m)$ отображения:

- $G \to \Delta(G) = \Delta(a_G)$;
- $G \to X^\pm(z) = X^\pm(G \,|\, z)$ вида (7.6) с соответствующим дивизором $\Delta(G)$;
- $G \to P(G) = P(a_G)$, $G \to Q(G) = Q(a_G)$, $G \to R(G) = R(a_G)$;
- $G \to K_0(G \,|\, p, q)$ — абелев дифференциал, кратный $q^{-1} r_0^{-1} R(G)$;
- $G \to \widetilde{f}(G \,|\, z)$ — мероморфная функция, кратная $\widetilde{\Delta}(a_G)$;
- $G \to K_1(G \,|\, p, q)$, $G \to w_k^1(G \,|\, p)$,

$$K_1(G \,|\, p, q) = \frac{\widetilde{f}(G \,|\, p)}{\widetilde{f}(G | q)}\, K_0(G \,|\, p, q);$$

$$w_k^1(G\,|\,p) = \operatorname{Res}(K_1(G\,|\,p,q)K_0^0(q,r_0))\Big|_{q=q_k(G)}, \quad k=\overline{1,l_0^*},$$

где $Q(G) = q_1(G)\dots q_{l_0^*}(G)$;

- $G \to \widetilde{K}(G|t,z)$,

$$\widetilde{K}(G|t,z) = \frac{X^{\pm}(G\,|\,z)}{X^+(G|t)}\,K_1(G|t,z), \quad t\in L, \quad z\in \overline{D}^{\,\pm};$$

- $G \to w_k(G|t)$,

$$w_k(G|t) = \frac{1}{X^+(G|t)}\,w_k^1(G|t), \quad t\in L, \quad k=\overline{1,l_0^*};$$

- $G \to \psi_k(G|t)$,

$$\psi_k(G|t) = (\varphi_0(q_0^{-1}q_k(G)|t))^{-1}, \quad t\in L, \quad k=\overline{1,l_0^*};$$

- $G \to \widetilde{\psi}_k^{\pm}(G\,|\,z)$,

$$\widetilde{\psi}_k^{\pm}(G\,|\,z) = \int\limits_L \widetilde{K}(G|t,z)\psi_k(G|t), \quad z\in\overline{D}^{\,\pm}, \quad k=\overline{1,l_0^*};$$

и, наконец, $G \to K(G|t,z)$,

$$K(G|t,z) = \widetilde{K}(G|t,z) - \sum_{k=1}^{l_0^*}\widetilde{\psi}_k^{\pm}(G\,|\,z)w_k(G|t).$$

Отметим, что так как по построению точка $P(G)\,Q(G)\in D^{(l_0)}\times D^{(l_0^*)}$ лежит в малой окрестности фиксированной точки $P_0Q_0\in D^{(l_0)}\times D^{(l_0^*)}$ (п. 5.6), то во-первых, можно считать $P(G)\cap L = Q(G)\cap L = \emptyset$, а во-вторых, при построении функций $\varphi_0(q_0^{-1}q_k(G)|t)$ и доказательстве их непрерывной зависимости от $G(t)$ (лемма 7.3) не возникает проблем с проведением кривой $\Lambda_0(q_0,q_k(G))$, соединяющей $q_0\in D^-$ и $q_k(G)\in$ $\in D^+$.

Итак, суммарно имеем отображение $G\to K(G|t,z)$, ставящее в соответствие функции $G(t)\in\Theta^{\alpha}(\varkappa_0,\dots,\varkappa_m)$ ядро Коши для решения задачи (A) с обобщенным дополнительным дивизором $P(G)/Q(G)$. Рассмотрим, от каких еще параметров зависит ядро Коши. В случае дополнительного дивизора этими параметрами были точки $P\in D^{(l)}$ и $Q\in D^{(l^*)}$, которые локально должны были удовлетворять единственному условию — на принадлежать некоторой поверхности размерности один (см. построение дополнительного дивизора в п. 4.3). Далее в такой ситуацию мы для краткости будем употреблять выражение «достаточно произвольные точки». В нашем случае точки $P(G)$ и $Q(G)$ однозначно определяются по $G(t)$ (точнее по a_G). Однако в п. 5.6 при построении соответствующих сечений $P(a)$ и $Q(a)$ используются произвольная начальная точка Y_0 (для $\Delta(a)$) и достаточно произвольные начальные точки точки $P_0 \in D^{(l_0)}$ и $Q_0 \in D^{(l_0^*)}$. При этом от дивизора $\Delta(a_G)$, т. е. от начальной точки Y_0, ядро Коши $K(G|t,z)$ в конечном счете не зависит. Итак, ядро Коши зависит от $G(t) \in \Theta^\alpha(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_m)$ и достаточно произвольных параметров $P_0 \in D^{(l_0)}$ и $Q_0 \in D^{(l_0^*)}$. Чтобы подчеркнуть зависимость P, Q от начальных точек, будем обозначать $P(G) = P(G, P_0)$, $Q(G) = Q(G, Q_0)$.

Теорема 7.8. *Пусть даны последовательности функций $G_n(t) \in \Theta^\alpha(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_m)$ и начальных точек $P_n^0 \in D^{(l_0)}$, $Q_n^0 \in D^{(l_0^*)}$, $n = \overline{0, \infty}$ и пусть $K_n(t,z) = K(G_n|t,z)$ — соответствующие ядра Коши для решения задачи (A) с обобщенным дополнительным дивизором $P(G_n, P_n^0)/Q(G_n, Q_n^0)$. Тогда если $G_n(t) \to G_0(t)$ в $C^\alpha(L)$, $P_n^0 \to P_0^0$ в $D^{(l_0)}$, $Q_n^0 \to Q_0^0$ в $D^{(l_0^*)}$, то $K_n(t,z) \xrightarrow{D} K_0(t,z)$ равномерно по z вне полюсов $Q(G_0, Q_0^0)$.*

Теорема очевидно следует из построения ядра Коши $K(G|t,z)$, теорем устойчивости и теоремы о непрерывной зависимости сечений $P(a)$, $Q(a)$ от начальных точек P_0, Q_0 (см. теорему 5.1 п. 5.3 о поднятии кривой).

Теорема 7.9. *Пусть $g_n(t) \in C^\alpha(L)$, $G_n(t) \in \Theta^\alpha(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_m)$, начальные точки $P_n^0 \in D^{(l_0)}$, $Q_n^0 \in D^{(l_0^*)}$ и $\{\Phi^\pm{}_n(z),\ c_k^n,\ k = \overline{1, l_0^*}\}$ — соответствующие решения задачи (A) с обобщенным дополнительным дивизором $P(G_n, P_n^0)/Q(G_n, Q_n^0)$.*

Тогда если $g_n(t) \to g_0(t)$, $G_n(t) \to G_0(t)$ в $C^\alpha(L)$, $P_n^0 Q_n^0 \to P_0^0 Q_0^0$ в $D^{(l_0)} \times D^{(l_0^*)}$, то $c_k^n \to c_k^0$, $k = \overline{1, l_0^*}$; $\Phi^\pm{}_n(z) \to \Phi^\pm{}_0(z)$ равномерно по $z \in D$ и $\Phi^\pm{}_n(t) \to \Phi^\pm{}_0(t)$ в $C^\alpha(L)$.

7.6. Задачи в расслоениях. Рассмотрим задачу сопряжения (7.2), где $\Phi^\pm(z) = \Phi^\pm_\xi(z)$ аналитические в $D^\pm$ сечения одномерного голоморфного расслоения ξ. При этом $g(t) = g_\xi(t)$ — сечение ξ на L, $G(t) \neq 0$ — функция на L.

Зафиксируем точки $r_0^1, r_1^1, \ldots, r_\rho^1 \in D^+$, абелев дифференциал $K_0^1(p,q)$, кратный $q^{-1}(r_0^1)^{-1} r_1^1 \ldots r_\rho^1$, базис абелевых дифференциалов 1 рода $\boldsymbol{\omega}_1 = (\omega_1^1, \ldots, \omega_\rho^1)$, нормированный условием (7.4) для $K_0^1(p,q)$ и r_k^1 и пусть $\psi_k^1(t) = -c_k^1(\varphi_0(q_0^{-1} r_k^1|t))^{-1}$, причем константы c_k^1 выбраны так, что $\int\limits_L \psi_k^1(t)\omega_j^1(t) = \delta_{kj}$.

Как указано в п. 3.5, дивизоры всех мероморфных сечений расслоения ξ эквивалентны, т. е. имеют одинаковые координаты $(\varkappa, a)$, которые будем называть *координатами расслоения* ξ: $(\varkappa_\xi, a_\xi)$ ($\varkappa_\xi$ — класс Чженя расслоения ξ). Пусть $f_\xi \in \Gamma(D, M^*(\xi))$ — фиксированное мероморфное сечение, $\Delta_\xi = (f_\xi)$ — его дивизор;

$$X_\xi^\pm(z) = \begin{cases} \exp(\chi^+(z))\varphi_0^\varkappa(z), & z \in \overline{D}^+ \\ \exp(\chi^-(z)), & z \in \overline{D}^-, \end{cases}$$

где

$$\chi^\pm(z) = \int\limits_{\Delta_0} K_0^1(p,z) + \sum_{k=1}^{\rho} a_k \int\limits_L \psi_k^1(t) K_0^1(t,z), \quad a = (a_1, \ldots, a_\rho) = a_\xi,$$

$$\Delta_0 = r_0^{-\varkappa}\Delta_\xi, \quad \varkappa = \varkappa_\xi = \deg \Delta_\xi.$$

Тогда $X_\xi^\pm(z)$ — мероморфны в $D^\pm$, дивизор $(X_\xi^\pm) = r_0^\varkappa \Delta_0 = \Delta_\xi$ и

$$G_\xi(t) = \frac{X_\xi^+(t)}{X_\xi^-(t)} = \varphi_0^\varkappa(t) \exp\Bigl(\sum_{k=1}^{\rho} a_k \psi_k^1(t)\Bigr) \in C^\alpha(L),$$

$G_\xi(t) \neq 0$, координаты $G_\xi(t)$: $(\varkappa_\xi, a_\xi)$. Пусть, далее,

$$\Phi_0^\pm(z) = \frac{\Phi_\xi^\pm(z) X_\xi^\pm(z)}{f_\xi(z)}, \quad z \in \overline{D}^\pm,$$

где $\Phi_\xi^\pm(z)$ — искомое сечение расслоения ξ. Тогда $\Phi_0^\pm(z)$ — функции в $\overline{D}^\pm$, $\Phi_0^+(t) = G_0(t)\Phi_0^-(t) + g(t)$, $t \in L$, $G_0(t) = G(t)G_\xi(t)$, $g_0(t) = g(t)X_\xi^+(t)/f_\xi(t)$ и соответствие $\Phi_\xi^\pm(z) \leftrightarrow \Phi_0^\pm(z)$ взаимно-однозначно. Таким образом, задача Римана (7.2) в расслоениях сводится к задаче для функций, причем координаты нового коэффициента $G_0(t)$: $(\varkappa_0 = \varkappa + \varkappa_\xi,\ a_0 = a + a_\xi)$, где $(\varkappa, a)$ — координаты исходного коэффициента $G(t)$, $(\varkappa_\xi, a_\xi)$ — координаты расслоения ξ. При этом весь «дополнительный» индекс приходится на L_0, т. е. если $G(t) \in \Theta^\alpha(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_m)$, то $G_0(t) \in \Theta^\alpha(\varkappa_0 + \varkappa_\xi, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_m)$.

7.7. Задачи с особенностями в коэффициентах. Случаи, когда $G(t)$ имеет разрывы 1 рода или обращается в отдельных точках в нуль (бесконечность) можно исследовать методом регуляризации полностью аналогично исследованию таких задач на плоскости (пп. 1.10–1.13).

Именно, пусть в точках $t_n \in L$, $n = \overline{1, N}$ имеется разрыв 1 рода у функции $G(t)$, либо $G(t)$ обращается в нуль (бесконечность), причем в последнем случае в терминах локального параметра имеется представление (1.27)

$$G(t) = (t - t_0)^n \widetilde{G}(t), \quad \widetilde{G}(t) \neq 0 \quad (n \text{ — целое }).$$

Отметим, что тогда $|\ln G(t)|$ интегрируема на L.

Пусть $z_n(p)$: $D \to \mathbb{C}$ — локальные параметры в окрестности t_n, $z_n(t_n) = 0$,

$$U_\varepsilon^n = \Big\{p \in D \,\Big|\, |z_n(p)| < \varepsilon\Big\}, \quad U_{2\varepsilon}^n = \Big\{p \in D \,\Big|\, z_n(p)| < 2\varepsilon\Big\}$$

и множества $U_{2\varepsilon}^n$ попарно не пересекаются, $n = \overline{1, N}$. Построим функции $G_n(t) \neq 0$, $n = \overline{1, N}$ такие, что (см. п. 1.13)

$$G_n(t) = \begin{cases} G(t), & t \in U_\varepsilon^n, \\ 1, & t \overline{\in} U_{2\varepsilon}^n, \end{cases}$$

и пусть $G_{n,\varepsilon}(t) \in C^\alpha(L)$, $G_{n,\varepsilon}(t) \neq 0$ — локальные регуляризации для $G_n(t)$, т. е. $G_{n,\varepsilon}(t) \to G_n(t)$ при $\varepsilon \to 0$, причем $G_{n,\varepsilon}(t) \equiv 1$, $t \overline{\in} U_{2\varepsilon}^n$ и $\varkappa_{n,j} = \operatorname{ind} G_{n,\varepsilon}(t)\big|_{L_j} = \mathrm{const}$ не зависят от ε (напомним, что L_j — компоненты связности контура L). Соответственно и $\varkappa_n = \operatorname{ind} G_{n,\varepsilon}\big|_L = \sum\limits_{j=0}^{m} \varkappa_{n,j}$ не зависит от ε.

Пусть далее

$$\widetilde{G}(t) = \frac{G(t)}{\prod\limits_{n=1}^{N} G_n(t)},$$

очевидно, $\widetilde{G}(t) \in C^\alpha(L)$, $\widetilde{G}(t) \neq 0$. Введем координаты функции $\widetilde{G}(t)$ — $(\widetilde{\varkappa}, \widetilde{a})$ и, соответственно, координаты функции $G_{n,\varepsilon}(t)$ — $(\varkappa_n, a_{n,\varepsilon})$,

$$a_{n,\varepsilon} = (a_1^{n,\varepsilon}, \ldots, a_\rho^{n,\varepsilon}) \in \operatorname{Jac}(D), \qquad n = \overline{1, N}.$$

Так как $G_{n,\varepsilon}(t) \to G_n(t)$, то и

$$G_{n,\varepsilon}(t) \prod_{j=0}^{m} (\varphi_j(t))^{-\varkappa_{n,j}} \equiv G_{n,\varepsilon}^0(t) \to G_n^0(t) \equiv G_n(t) \prod_{j=0}^{m} (\varphi_j(t))^{-\varkappa_{n,j}}.$$

откуда

$$\left\{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \ln G_{n,\varepsilon}^0 \boldsymbol{\omega}\right\} \equiv a^{n,\varepsilon} \to a^n \equiv \left\{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \ln G_n^0 \boldsymbol{\omega}\right\}, \quad k = \overline{1, \rho}.$$

Очевидно, всегда можно построить регуляризации $G_{n,\varepsilon}(t)$ так, что $a_{n,\varepsilon} \equiv a_n = \mathrm{const}$ не зависит от ε.

Наконец, введем регуляризацию $G(t)$:

$$G_\varepsilon(t) = \widetilde{G}(t) \prod_{n=1}^{N} G_{n,\varepsilon}(t).$$

Координаты $G_\varepsilon(t)$ имеют вид

$$\left(\widetilde{\varkappa}+\sum_{n=1}^{N}\varkappa_n,\ \widetilde{a}+\sum_{n=1}^{N}a_n\right)=(\varkappa,a)=\mathrm{const}.$$

Тогда корректная постановка задачи (A) для $G_\varepsilon(t)$ не зависит от ε и, аналогично доказательству теорем устойчивости, получим, что решения регуляризованной задачи (A) $\Phi_\varepsilon^{\pm}(z)$ имеют предел при $\varepsilon\to 0$ всюду, кроме окрестности особых точек t_n, $n=\overline{1,N}$. Локальный переход к пределу в окрестности особых точек в терминах локального параметра ничем не отличается от аналогичной операции на плоскости (пп. 1.11–1.13).

Сформулируем локальные результаты для случая разрыва 1 рода и обращения в нуль конечного порядка. Для сравнения см. пп. 1.11, 1.12.

Теорема 7.10. *Пусть $t_0\in L$ — точка разрыва* 1 *рода функции $G(t)$, U_0 — ее окрестность, $G_\varepsilon(t)$ — локальная регуляризация $G(t)$, имеющая в терминах локального параметра вид* (1.18) *и построенная по способу рис.* 2 *или рис.* 3. *Тогда*

- *если локальная регуляризация построена по способу рис.* 2, *то локальные предельные классы следующие*:

$$g(t)\in C^{\alpha}(L);\qquad \Phi^{\pm}(t)\in C^{\beta}(L),\qquad \beta=\beta(\alpha);$$

- *если локальная регуляризация построена по способу рис.* 3, *то локальные предельные классы следующие*:

$$g(t)\in C^{\alpha}(L);\qquad \Phi^{\pm}(z)(z-t_0)^{\gamma}\in C^{\alpha}(\overline{D}^{\pm}\cap U_0),\qquad \operatorname{Re}\gamma\in[0,1)$$

$(z,\ t\in\mathbb{C}$ — *локальные параметры*$)$.

Теорема 7.11. *Пусть $G(t_0)=0$, $t_0\in L$, U_0 — окрестность t_0, причем в терминах локального параметра $z(t_0)=-1$, $U_0=\{z\,\big|\,|z+1|<\varepsilon\}$, для $G(t)$ в U_0 имеем представление* (1.27). *Пусть локальная регуляризация $G_\varepsilon(t)$ в терминах локального параметра имеет вид* (1.28). *Тогда имеют место локальные предельные классы*:

- *$g(t)\in C^{\alpha}(L)$ и выполняется локальное условие* (1.29);
- $\Phi^{+}(t)\in C^{\alpha}(L)$, $\Phi^{-}(z)(z+1)^{n_1}\in C^{\alpha}(\overline{D}^{-}\cap U_0)$.

Очевидно, выполнение локальных условий не зависит от выбора локального параметра.

§ 8. Задачи сопряжения аналитических функций на квазиконформном контуре.

8.1. Обозначения, постановка задачи, вспомогательные функции. D — компактная риманова поверхность рода ρ, $L=\bigcup\limits_{j=0}^{m}L_j$ — контур на D, разбивающий ее на две связные части D^+ и D^-, ориентация L индуцирована с D^+, $\overline{D}^{\pm}=D^{\pm}\cup L$.

Далее, $V = \bigcup\limits_{j=0}^{m} V_j$ — фиксированная стандартная окрестность L, V_j — стандартные окрестности компонент связности L_j с локальными координатами $z_j : V_j \to V^1 = \{\, z \mid 1/2 < |z| < 3/2 \,\}$, $L_j^1 = z_j(L_j)$. Отметим, что L_j^1 — замкнутые кривые на плоскости, разбивающие ее на две части — внутренюю $\mathbb{C}_j^+$ и внешнюю (содержащую бесконечность) $\mathbb{C}_j^-$. Пусть $V_j^{\pm} = D^{\pm} \cap V_j$. Так как ориентация L индуцирована с D^+, то $z_j(V_j^{\pm}) = \mathbb{C}_j^{\pm} \cap V^1$, причем обход L_j^1 — против часовой стрелки.

Контур L будем называть *квазиконформным*, если $L_j^1 = \xi_j(L_j^0)$, где $\xi : V^1 \to V^1$ — квазиконформный гомеоморфизм класса $W_q^1(V^1)$, $q > 2$, L_j^0 — гладкие контуры, $j = \overline{0, m}$. Очевидно, примером квазиконформного контура будет образ $\xi(L) \subset \widetilde{D}$ гладкого контура $L \subset D$ при квазиконформном отображении римановых поверхностей $\xi : D \to \to \widetilde{D}$. Отметим, что аналогично случаю плоскости квазиконформный контур на римановой поверхности стираем для аналитических функций (п. 1.2).

Обратимся теперь к функциям, заданным на L. Скажем, что функция $f(z) \in W_p^1(V)$ $(z \in V)$, если $f \circ z_j^{-1} \in W_p^1(V^1)$, $j = \overline{0, m}$. Соответственно введем норму

$$\|f\|_{p,V}^{(1)} = \sum_{j=0}^{m} \|f \circ z_j^{-1}\|(1)_{p,V^1}.$$

Пусть теперь $f(z)$ задана на D. Скажем, что $f(z) \in W_{p,\mathrm{loc}}^1$, если $f(z) \in \in W_p^1(V)$ и $f(z) \equiv 0$, $z \overline{\in} V$. Наконец, введем класс следов: $f(t) \in \in SW_p^1(L)$ $(t \in L)$, если существует ее продолжение $f(z) \in W_p^1(V)$. Очевидно, без ограничения общности можно считать продолжение $f(z) \in \in W_{p,\mathrm{loc}}^1$. $SW_p^1(L)$ — банахово пространство с нормой

$$\|f(t)\|_{p,L}^{(1)} = \inf \|f(z)\|_{p,V}^{(1)}, \text{ где } f(z) \text{ — продолжение } f(t).$$

Лемма 8.1.

1. $W_p^1(V) \subset C^{\alpha}(V)$, $SW_p^1(L) \subset C^{\alpha}(L)$, $\alpha = (p-2)/p$.

2. *Если* $f, g \in W_p^1(V)$, *то*

$$fg \in W_p^1(V), \quad \|fg\|_{p,V}^{(1)} \leqslant M\|f\|_{p,V}^{(1)}\|g\|_{p,V}^{(1)}.$$

Аналогично, если $f, g \in SW_p^1(L)$, *то*

$$fg \in SW_p^1(L), \quad \|fg\|_{p,L}^{(1)} \leqslant M\|f\|_{p,L}^{(1)}\|g\|_{p,L}^{(1)}.$$

3. *Пусть* $\xi : D \to \widetilde{D}$ — *квазиконформный гомеоморфизм римановых поверхностей класса* $M_k(D)$ *(п. 6.2) и* $L_1 = \xi(L)$, $V_1 = \xi(V)$, $L \subset V \subset D$. *Тогда если* $f(z) \in W_p^1(V_1)$, *то* $f(\xi(z)) \in W_r^1(V)$, *а если* $f(t) \in SW_p^1(L)$, *то* $f(\xi(t)) \in SW_r^1(L)$, $r = pq/(p+q-2)$, $q = q(k) > 2$.

4. *Если* $f(t) \in SW_p^1(L)$, $f(t) \neq 0$ *и* $\operatorname{ind} f\big|_{L_j} = 0$, $j = \overline{0,m}$, *то* $\ln f(t) \in SW_p^1(L)$.

Утверждения леммы очевидны (см. п. 1.2, п. 6.2).

Аналогично предыдущему параграфу введем группу по умножению

$$S\Theta^p = \big\{G(t) \in SW_p^1(L) \mid G(t) \neq 0\big\}$$

и ее компоненты связности

$$S\Theta^p(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_m) = \big\{G(t) \in S\Theta^p \mid \operatorname{ind} G\big|_{L_j} = \varkappa_j = \mathrm{const}, j = \overline{0,m}\big\}.$$

Далее, как и в п. 7.3, выберем и зафиксируем минимальный дивизор $\Delta^0 = r_1^0 \ldots r_\rho^0 (r_0^0)^{-1}$, $r_j^0 \in D^-$, $r_j^0 \overline{\in} V$, $j = \overline{0,\rho}$, абелев дифференциал $K_0^0(t,z)$, кратный $q^{-1}\Delta^0$ и базис абелевых дифференциалов 1 рода $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_\rho)$, нормированный условием

$$\operatorname{Res}(K_0^0(t,z)\omega_j(z))\big|_{z=r_k^0} = \begin{cases} \omega_j(t), & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \tag{8.1}$$

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\omega)$ — соответствующая решетка периодов. Аналогично п. 7.3, будем обозначать

$$\operatorname{Res} f(r_j^0) = \operatorname{Res}(f(z)\omega_j(z))\big|_{z=r_j^0}, \quad j = \overline{1,\rho}.$$

Определим функции

$$\varphi_j^+(z) = \varphi_j(z) = \varphi_j(q_0^{-1}r_0 \mid z) = \exp\Big\{\int\limits_{\Lambda_j} K_0^0(t,z)\Big\}, \quad z \in \overline{D}^+,$$

где $q_0 \in D^-$, $r_0 \in D^+$ — фиксированные точки, $\Lambda_j = \Lambda_j(q_0, r_0)$ — кривая, соединяющая q_0 и r_0 и пересекающая L в единственной точке $\xi_j \in L_j$.

Пусть $L \subset D$ — квазиконформный контур, $G(t) \in S\Theta^p$, $g(t) \in SW_p^1(L)$, $p > 2$. Для задачи сопряжения аналитических в $D^\pm$ функций

$$\Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = g(t), \quad t \in L \tag{8.2}$$

рассмотрим *задачи 1–4* предыдущего параграфа.

Отметим особенность задачи сопряжения (8.2) для квазиконформного контура. Как уже отмечалось в параграфе 1 (п. 1.2), квазиконформный контур вообще говоря не спрямляем, поэтому невозможно определить контурные интегралы по L, через которые выражалось решение задачи сопряжения для гладкого контура. Поэтому в данном параграфе мы по существу повторим рассуждения предыдущего параграфа, заменяя везде интегралы по L на подходящие двойные интегралы, подобно тому, как это делалось на плоскости (пп.1.7,1.8).

8.2. Оператор $\boldsymbol{S}$. Пусть $f(z) \in W^1_{p,\mathrm{loc}}$. Тогда определен (1,0) дифференциал $\overline{\partial} f$, причем $\overline{\partial} f(z) \equiv 0$ при $z \overline{\in} V$. Пусть Δ — минимальный дивизор, точки которого не лежат в V, $K(t,z) = K(\Delta \,|\, t,z)$ — абелев дифференциал по t, кратный $z^{-1}\Delta$ (п. 4.3, лемма 4.9). Введем оператор

$$T(f \,|\, z) = T_\Delta(f \,|\, z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{D^+} \overline{\partial} f(t)\, K(t,z).$$

Лемма 8.2.

1. $T(f \,|\, z) \in W^1_p(V)$, $T(f|t) \in SW^1_p(L)$,
   $\|T(f \,|\, z)\|^{(1)}_{p,V} + \|T(f|t)\|^{(1)}_{p,L} \leqslant M(\Delta)\|f\|^{(1)}_{p,L}$.

2. $\overline{\partial}\, T(f \,|\, z) = \begin{cases} \overline{\partial} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases}$

3. $T(f \,|\, z)$ — *мероморфная функция вне V, кратная Δ^{-1}.*

4. *Если $w(z)$ — абелев дифференциал, $z_0 \overline{\in} V$, то*

$$\mathrm{Res}(T(f \,|\, z) w(z))\Big|_{z=z_0} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{D^+} \overline{\partial} f\ \mathrm{Res}(K(t,z) w(z))\Big|_{z=z_0}.$$

Доказательство. Так как $f(z) \in W^1_{p,\mathrm{loc}}$, то в V_j в плоскости локального параметра $\overline{\partial} f(z) = \zeta_j(z)\, d\overline{z}$, $\zeta_j(z) \in L_p(V^1)$. Следовательно, определен оператор

$$T(f \,|\, z) = \sum_{j=0}^{m} -\frac{1}{\pi} \int\limits_{V_j^+} \overline{\partial} f(t)\, K(t,z),$$

причем из свойств оператора T на плоскости (п. 1.4) и теоремы Помпею (п. 1.4, 3.5) следуют первые два утверждения леммы. Третье и четвертое утверждения леммы очевидны.

Теперь пусть $f(t) \in SW^1_p(L)$, $f(z) \in W^1_{p,\mathrm{loc}}$ — ее продолжение. Определим оператор

$$S(f \,|\, z) = S^{\pm}(f \,|\, z) = S^{\pm}{}_\Delta(f \,|\, z) = \begin{cases} f(z) - T_\Delta(f \,|\, z), & z \in \overline{D}^+ \\ -T_\Delta(f \,|\, z), & z \in \overline{D}^- \end{cases}$$

Теорема 8.1 (свойства оператора S).

1. $S^+(f \mid z)$ *и* $S^-(f \mid z)$ *принадлежат* $W_p^1(V)$, *причем* $\|S^+(f \mid z)\|_{p,V}^{(1)} + \|S^-(f \mid z)\|_{p,V}^{(1)} \leqslant M(\Delta)\|f\|_{p,L}^{(1)}$.

2. $S^\pm(f|t) \in SW_p^1(L)$, $\|S^\pm(f|t)\|_{p,L}^{(1)} \leqslant M(\Delta)\|f\|_{p,L}^{(1)}$, *причем*
$$S^+(f|t) - S^-(f|t) = f(t), \quad t \in L. \tag{8.3}$$

3. $S^\pm(f \mid z)$ — *мероморфны в* $D^\pm$, *кратны дивизору* Δ^{-1}.

4. *Если* $z_0 \overline{\in} V$ *и* $w(z)$ — *абелев дифференциал, то*
$$\operatorname{Res}(S(f \mid z)w(z))\Big|_{z=z_0} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{D^+} \overline{\partial} f(t)\ \operatorname{Res}(K(t,z)w(z))\Big|_{z=z_0}.$$

5. $S(f \mid z)$ *не зависит от выбора продолжения* $f(z) \in W^1_{p,\mathrm{loc}}$.

Доказательство. Первые четыре утверждения теоремы очевидно следуют из определения S и леммы 8.2. Последнее утверждение следует из того, что мероморфное решение задачи о скачке (8.3), кратное Δ^{-1}, единственно. Действительно, так как L стираем для аналитических функций, то разность решений (8.3) будет мероморфной в D функций, кратной Δ^{-1}, т. е. тождественным нулем (поскольку $r[\Delta^{-1}] = 0$). Теорема доказана.

8.3. Задача факторизации. Параметризация функций $G(t)$. Пусть $G(t) \in S\Theta^p(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_m)$. Рассмотрим задачу факторизации
$$G(t) = X^+(t)/X^-(t), \quad t \in L, \tag{A'}$$
где $X^\pm(z)$ —мероморфны в $D^\pm$.

Определим функцию
$$G_0(t) = G(t)\prod_{j=0}^{m}\varphi_j^{-\varkappa_j}(t), \quad t \in L.$$

Очевидно, $G_0(t) \in SW_p^1(L)$, $\operatorname{ind} G_0(t)\big|_{L_j} = 0$, $j = \overline{0,m}$, т. е. $\ln G_0(t) \in$ $\in SW_p^1(L)$.

Пусть $S_0 = S_{\Delta_0}$ — оператор S, соответствующий абелеву дифференциалу $\Delta_0 = r_1^0 \ldots r_\rho^0 (r_0^0)^{-1}$. Введем вектор
$$a_G = a = (a_1, \ldots, a_\rho) \in \operatorname{Jac}(D), \quad a_j = -\operatorname{Res} S_0(\ln G_0|r_j^0), \quad j = \overline{1,\rho}$$
и назовем $(\varkappa, a) = (\varkappa_G, a_G) = (\varkappa, a)_G \in \mathbb{Z} \times \operatorname{Jac}(D)$ *координатами* функции $G(t)$.

Очевидно, имеем формулу

$$a_G = \frac{1}{\pi} \int\limits_{D^+} \overline{\partial} \ln G_0(z)\, \boldsymbol{\omega}(z)\, (\operatorname{mod} \mathcal{L}),$$

где $\ln G_0(z)$ — продолжение $\ln G_0(t)$ класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}$, но при этом a_G не зависит от выбора продолжения.

Введем подгруппы $S\Theta^p$:

$$\widetilde{S\Theta} = \{G(t) \in S\Theta^p \mid (\varkappa, a)_G = (0,0)\}, \quad S\Theta_0 = \{G(t) \in S\Theta^p \mid \varkappa_G = 0\}$$

и фактор-группы

$$S\Theta_0^* = S\Theta_0/\widetilde{S\Theta}, \quad S\Theta_1 = S\Theta^p/S\Theta_0, \quad S\Theta^* = S\Theta^p/\widetilde{S\Theta}.$$

Координаты $(\varkappa_G, a_G)$ реализуют изоморфизм $S\Theta^* \cong \mathbb{Z} \times \mathrm{Jac}(D)$. В свою очередь $\mathbb{Z} \times \mathrm{Jac}(D) \cong \Omega^*$. Как и ранее, дивизоры Δ с координатами $(\varkappa_G, a_G)$ будем называть соответствующими функции $G(t) \in S\Theta^p$.

Лемма 8.3. *$G(t) \in \widetilde{S\Theta}$ тогда и только тогда, когда существует решение задачи (A') такое, что $X^\pm(z)$ аналитичны и не имеют нулей в $\overline{D}^\pm$.*

Лемма 8.4. *Пусть $X^\pm(z)$ — аналитичны и отличны от нуля в $D^\pm$, непрерывны в $\overline{D}^\pm$, $X^\pm(t) \in SW^1_p(L)$, $X^\pm(t) \neq 0$, $t \in L$ и*

$$\operatorname{ind} X^+\big|_{L_j} = \operatorname{ind} X^-\big|_{L_j}, \quad j = \overline{0, m}.$$

Обозначим $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$. Тогда $\ln G(t) \in SW^1_p(L)$ и если $\ln G(z)$ — продолжение $\ln G(t)$ класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}$, то

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{D^+} \overline{\partial} \ln G(z)\, \boldsymbol{\omega} = 0\, (\operatorname{mod} \mathcal{L}).$$

Доказательство. Из условий леммы сразу следует, что $G(t) \in \in SW^1_p(L)$ и $\operatorname{ind} G(t)\big|_{L_j} = 0$, откуда $\ln G(t) \in SW^1_p(L)$.

Пусть $\ln G(z) \in W^1_{p,\mathrm{loc}}$ — продолжение $\ln G(t)$ и $G(z) = \exp(\ln G(t))$. Тогда $G(z) \in W^1_p(V)$ — продолжение $G(t)$ и $G(z) \equiv 1$, $z \overline{\in} V$. Продолжим $X^\pm(z)$ в $D^\mp$ соответственно по формулам

$$X^-(z) = X^+(z)/G(z), \quad z \in D^+; \qquad X^+(z) = G(z)X^-(z), \quad z \in D^-,$$

тогда $X^\pm(z) \in W^1_p(V)$ и $X^+(z) \equiv G(z)X^-(z)$, $z \in D$.

Пусть $L_0 \subset V$ — гладкий контур. Аналогично доказательству леммы 7.5 п. 7.4 можно определить векторы

$$h^{\pm}(L_0) = \int\limits_{L_0} \ln X^{\pm}(z)\, \boldsymbol{\omega},$$

причем при гомотопии L_0 векторы $h^{\pm}(L_0)$ меняются непрерывно.

Построим гладкие контуры $L^{\pm}(\varepsilon) \subset D^{\pm}$, «близкие» к L. Пусть два контура $L_{1,2} \subset V^1 \subset \mathbb{C}$, положим

$$\rho(L_1, L_2) = \sup_{t_1 \in L_1} \inf_{t_2 \in L_2} |t_1 - t_2|.$$

Возьмем гладкие и непрерывно зависящие от ε контуры $\widetilde{L}^{\pm}{}_j(\varepsilon) \subset V^1 \cap \cap\, \mathbb{C}^{\pm}{}_j$ такие, что

$$\rho(\widetilde{L}^{\pm}{}_j(\varepsilon), L^1_j) < \varepsilon \tag{8.4}$$

и пусть $L^{\pm}{}_j(\varepsilon) = z_j(\widetilde{L}^{\pm}{}_j(\varepsilon))$, $L^{\pm}(\varepsilon) = \bigcup\limits_{j=0}^{m} L^{\pm}{}_j(\varepsilon)$ (см. п. 8.1).

Из леммы 7.5 п. 7.4 следует, что

$$a^{\pm}(\varepsilon) = h^{\pm}(L^{\pm}(\varepsilon)) = \int\limits_{L^{\pm}(\varepsilon)} \ln X^{\pm}\, \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Но так как $\mathcal{L}$ — дискретная группа, а $a^{\pm}(\varepsilon)$ очевидно непрерывно зависят от ε, то $a^{\pm}(\varepsilon) = a^{\pm} = \mathrm{const}$, $a^{\pm} \in \mathcal{L}$. С другой стороны, в силу условия (8.4)

$$h^{-}(L^{+}(\varepsilon)) = \int\limits_{L^{+}(\varepsilon)} \ln X^{-}\, \boldsymbol{\omega} = h^{-}(L^{-}(\varepsilon)) + \alpha(\varepsilon) = a^{-} + \alpha(\varepsilon),$$

где $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{L^{+}(\varepsilon)} \ln G\, \boldsymbol{\omega} = \int\limits_{L^{+}(\varepsilon)} \ln X^{+}\, \boldsymbol{\omega} - \int\limits_{L^{+}(\varepsilon)} \ln X^{-}\, \boldsymbol{\omega} =$$

$$= a^{+} - a^{-} - \alpha(\varepsilon) = a - \alpha(\varepsilon), \quad a \in \mathcal{L}.$$

По теореме Стокса (п. 2.4) имеем

$$\int\limits_{L^{+}(\varepsilon)} \ln G\, \boldsymbol{\omega} = \int\limits_{D^{+}(\varepsilon)} \overline{\partial} \ln G\, \boldsymbol{\omega},$$

где $\partial D^{+}(\varepsilon) = L^{+}(\varepsilon)$, $D^{+}(\varepsilon) \subset D^{+}$. Итак,

$$\int\limits_{D^{+}(\varepsilon)} \overline{\partial} \ln G\, \boldsymbol{\omega} = a - \alpha(\varepsilon), \quad a \in \mathcal{L}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом условия (8.4) получим

$$\int\limits_{D^+} \overline{\partial} \ln G \,\boldsymbol{\omega} = a \in \mathcal{L}.$$

Лемма доказана.

Доказательство леммы 8.3. Необходимость. Пусть $G(t) \in \widetilde{S\Theta}$, т. е. $\varkappa_G = 0$ и $a_G = -\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_{D^+} \overline{\partial} \ln G_0 \,\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}$. Существует на D замкнутый контур L_a такой, что $\displaystyle\int\limits_{L_a} \boldsymbol{\omega} = a_G$. Положим

$$\chi^{\pm}(z) = S_0(\ln G_0 | z) + \int\limits_{L_a} K_0^0(t, z), \quad z \in D^{\pm}.$$

В принятых обозначениях

$$\operatorname{Res} \chi^{\pm}(r_j^0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{D^+} \overline{\partial} \ln G_0 \,\omega_j + \int\limits_{L_a} \omega_j = 0, \quad j = \overline{1, \rho},$$

т. е. функции $\chi^{\pm}(z)$ аналитичны в $D^{\pm}$, кроме точек L_a, где имеют скачок $2\pi i n$ (n — целое) и $\chi^+(t) - \chi^-(t) = \ln G_0(t)$, $t \in L$, $t \overline{\in} L_a$. Следовательно, функции $X_0^{\pm}(z) = \exp(\chi^{\pm}(z))$ аналитичны в $D^{\pm}$, не равны нулю в $\overline{D}^{\pm}$, $X_0^{\pm}(z) \in W_p^1(V)$ и $X_0^+(t)/X_0^-(t) = G_0(t)$, $t \in L$. Далее, так как $\varkappa_G = \sum\limits_{j=0}^{m} \varkappa_j = 0$, то $\prod\limits_{j=0}^{m} \varphi_j^{\varkappa_j}(z)$ — аналитично и не равно нулю в D^+ и непрерывно в $\overline{D}^+$, откуда

$$X^{\pm}(z) = \begin{cases} X_0^+(z) \prod\limits_{j=0}^{m} \varphi_j^{\varkappa_j}(z), & z \in D^+ \\ X_0^-(z), & z \in D^- \end{cases}$$

аналитичны в $D^{\pm}$, не равны нулю в $\overline{D}^{\pm}$, $X^{\pm}(z) \in W_p^1(V)$ и

$$X^+(t)/X^-(t) = G_0(t) \prod_{j=0}^{m} \varphi_j^{\varkappa_j}(t) = G(t), \quad t \in L.$$

Достаточность. Пусть $G(t) = X^+(t)/X^-(t) \in SW_p^1(L)$, а функции $X^{\pm}(z)$ аналитичны и не имеют нулей в $D^{\pm}$. Обозначим

$$\varkappa_j^{\pm} = \operatorname{ind} X^{\pm}\big|_{L_j}, \quad \varkappa_j = \operatorname{ind} G\big|_{L_j} = \varkappa_j^+ - \varkappa_j^-.$$

По принципу аргумента $\varkappa^{\pm} = \sum\limits_{j=0}^{m} \varkappa_j^{\pm} = 0$, откуда

$$\varkappa_G = \sum_{j=0}^{m} \varkappa_j = \varkappa^+ - \varkappa^- = 0.$$

Пусть $X_0^-(z) = X^-(z)$, $X_0^+(z) = X^+(z)\prod\limits_{j=0}^{m}(\varphi_j(z))^{-\varkappa_j}$. Тогда $X_0^{\pm}(z)$ — аналитичны и не равны нулю в $D^{\pm}$ и

$$G_0(t) = G(t)\prod_{j=0}^{m}(\varphi_j(t))^{-\varkappa_j} = X_0^+(t)/X_0^-(t), \quad t \in L,$$

причем

$$\operatorname{ind} X_0^+(t)\big|_{L_j} = \varkappa_j^+ - \varkappa_j = \varkappa_j^- = \operatorname{ind} X_0^-(t)\big|_{L_j}.$$

Тогда из леммы 8.4 следует, что

$$a_G = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{D^+} \overline{\partial} \ln G_0\, \boldsymbol{\omega} = 0 \pmod{\mathcal{L}},$$

т. е. $G(t) \in \widetilde{S\Theta}$. Лемма доказана.

Теорема 8.2. *Класс дивизоров решений задачи (A') совпадает с классом дивизоров Δ, соответствующих $G(t)$. При этом, если дивизор Δ соответствует $G(t)$, то, с точностью до умножения на константу, решение (A') $X^{\pm}(z) \in W_p^1(V)$ и имеет вид*

$$X^{\pm}(z) = \begin{cases} \exp\left(\chi^+(z)\right)\prod\limits_{j=0}^{m}(\varphi_j^+(z))^{\varkappa_j}, & z \in \overline{D}^+, \\ \exp\left(\chi^-(z)\right), & z \in \overline{D}^-, \end{cases} \tag{8.5}$$

где

$$\chi^{\pm}(z) = S_0(\ln G_0|z) + \int\limits_{\Delta_0} K_0^0(t,z),$$

$$\varkappa_j = \operatorname{ind} G(t)\big|_{L_j}, \quad \varkappa = \varkappa_G = \sum_{j=0}^{m}\varkappa_j = \operatorname{ind} G(t)\big|_{L}, \quad \Delta_0 = r_0^{-\varkappa}\Delta,$$

$$G_0(t) = G(t)\prod_{j=0}^{m}(\varphi_j(t))^{-\varkappa_j}.$$

При этом кривая, соединяющая нули и полюса Δ_0, *проведена так, чтобы* $\int\limits_{\Delta_0} \boldsymbol{\omega} = a_G$ (*это всегда можно сделать, так как координатами* Δ_0 *являются* $(0, a_G)$).

Доказательство. Пусть дивизор Δ соответствует $G(t)$. Как и в доказательстве леммы 8.3

$$\operatorname{Res} \chi^{\pm}(r_j^0) = \int\limits_{\Delta_0} \omega_j + \frac{1}{\pi} \int\limits_{D^+} \overline{\partial} \ln G_0\, \omega_j = 0, \quad j = \overline{1, \rho}$$

и, значит, $\chi^{\pm}(z)$ аналитичны в $D^{\pm}$, кроме точек кривой, соединяющей нули и полюса Δ_0, причем $\chi^+(t) - \chi^-(t) = \ln G_0(t)$, $t \in L$. Тогда функции $\varphi^{\pm}(z) = \exp(\chi^{\pm}(z))$ мероморфны в $D^{\pm}$, имеют дивизор Δ_0, $\varphi^{\pm}(z) \in W_p^1(V)$ и $\varphi^+(t)/\varphi^-(t) = G_0(t)$, $t \in L$, откуда функции $X^{\pm}(z)$ вида (8.5) мероморфны в $D^{\pm}$, имеют дивизор $\Delta_0 r_0^{\varkappa} = \Delta$, $X^{\pm}(z) \in W_p^1(V)$ и

$$X^+(t)/X^-(t) = G_0(t) \prod_{j=0}^{m} (\varphi_j(t))^{\varkappa_j} = G(t), \quad t \in L.$$

Итак, если Δ соответствует $G(t)$, то существует решение задачи факторизации $X^{\pm}(z) \in W_p^1(V)$ вида (8.5) с дивизором Δ. Все остальные решения (A') отличаются от $X^{\pm}(z)$ мероморфным на D множителем, т. е. все дивизоры решений (A') имеют одинаковые координаты. Теорема доказана.

Замечание. Без ограничения общности всегда можно считать $\Delta \cap V = \emptyset$, в частности, точки Δ могут лежать в любой окрестности $\mathbf{U}_0$ точки r_0.

Теорема 8.3 (устойчивости). *Пусть* $G_n(t) \in S\Theta^p$, $n = \overline{0, \infty}$ — *последовательность функций*, Δ_n — *дивизоры, соответствующие* $G_n(t)$, $n = \overline{0, \infty}$ *и* $X_n^{\pm}(z)$ — *решения задачи* (A') *вида* (8.5).

Тогда если $G_n(t) \to G_0(t)$, $n \to \infty$ *в* $SW_p^1(L)$, *то* Δ_n *можно выбрать так, чтобы* $X_n^{\pm}(z) \to X_0^{\pm}(z)$, $n \to \infty$ *равномерно в любой области, не содержащей окрестности точек* Δ_0 *и* $X_n^{\pm}(z) \to X_0^{\pm}(z)$ *в* $W_p^1(V)$.

Доказательство теоремы ничем не отличается от доказательства аналогичной теоремы предыдущего параграфа с учетом непрерывности оператора S в $SW_p^1(L)$, $W_p^1(V)$ (теорема 8.1).

Лемма 8.5. *Число линейно независимых решений однородной задачи* (8.2) *равно* $l = l_G = l(\varkappa, a)_G$. *Общее решение ее имеет вид*

$$f^{\pm}(z) = \sum_{j=1}^{l} c_j f_j(z) X^{\pm}(z), \quad c_j = \text{const} = \frac{f^{\pm}(p_j)}{X^{\pm}(p_j)}, \quad j = \overline{1, l},$$

где $f_j(z)$ *— система мероморфных функций, кратных* Δ^{-1}, *нормированная условием*

$$f_j(p_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \qquad j, k = \overline{1, l},$$

$P = p_1 \ldots p_l$ *— дополнительный к* Δ *дивизор полюсов.*

8.4. Решение краевых задач. Оператор Коши. Пусть $G(t) \in \in S\Theta^p$, Δ — дивизор, соответствующий $G(t)$, P/Q — дополнительный к $G(t)$. Будем считать, что $p_j \overline{\in} V$, $j = \overline{1, l}$ и полюса $q_k \in D^+$, $q_k \overline{\in} V$, $k = \overline{1, l^*}$. Возьмем абелев дифференциал $K(\Delta Q P^{-1} \,|\, t, z) = K_1(t, z)$ и соответствующий оператор $S_1 = S_{\Delta_0}$, $\Delta_0 = \Delta Q / P$.

Пусть $X^{\pm}(z)$ — решение задачи факторизации (A') вида (8.5) с дивизором Δ. Введем оператор

$$\widetilde{S}(f \,|\, z) = X^{\pm}(z) S_1(f(t)/X^{+}(t) \,|\, z). \tag{8.6}$$

Далее, как и в п. 7.5, построим систему абелевых в $D^{\pm}$ дифференциалов

$$w_k^{\pm}(z) = \frac{1}{X^{\pm}(z)}\, w_k^{\Delta}(z), \quad k = \overline{1, l^*}, \quad z \in \overline{D}^{\pm}, \tag{8.7}$$

где $w_k^{\Delta}(z)$ — абелевы дифференциалы, кратные $\Delta Q q_k^{-1}$ и положим $w_k(t) = w_k^{+}(t)$, $t \in L$, $k = \overline{1, l^*}$. Условимся обозначать

$$\operatorname{Res} f(q_k) = \operatorname{Res} f(z) w_k^{+}(z)\big|_{z = q_k}.$$

Лемма 8.6. *Пусть* $f(t) \in SW_p^1(L)$, *тогда* $\widetilde{S}(f \,|\, z) \in W_p^1(V)$ *и*

$$\|\widetilde{S}(f \,|\, z)\|_{p,V}^{(1)} \leqslant M(G) \|f\|_{p,L}^{(1)},$$

при этом $\widetilde{S}(f \,|\, z)$ *— мероморфны в* $D^{\pm}$, *кратны дивизору* PQ^{-1}, *причем*

$$\operatorname{Res} \widetilde{S}(f|q_k) = c_k(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{D^+} \overline{\partial} f(z)\, w_j(z), \quad k = \overline{1, l^*},$$

причем $c_k(f)$ *не зависят от выбора продолжения* $f(z) \in W^1_{p,\mathrm{loc}}$.

Справедливость леммы следует из свойств оператора S (теорема 8.1), дифференциалов $w_k(z)$ и теоремы 8.2.

Теорема 8.4. *Для того, чтобы существовало ограниченное в* $D^{\pm}$ *решение задачи* (8.2), *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$c_k(g) = \int\limits_{D^+} g(z)\, w_k(z) = 0, \quad k = \overline{1, l^*}. \tag{8.8}$$

Если (8.8) *справедливо, то частное решение задачи* (8.2) *имеет вид*

$$\Phi^{\pm}(z) = \widetilde{S}(g \,|\, z). \tag{8.9}$$

Доказательство теоремы полностью повторяет доказательство аналогичного утверждения в п. 7.5.

Введем функции

$$\psi_k^+(z) = (\varphi_0(q_0^{-1}q_k \,|\, z))^{-1}, \quad z \in \overline{D}^+, \quad k = \overline{1, l^*},$$
$$\psi_k(t) = \psi_k^+(t), \quad t \in L, \quad k = \overline{1, l^*}. \tag{8.10}$$

Имеем

$$\int\limits_L \psi_k(t) w_j(t) = 0, \quad k \neq j, \quad \int\limits_L \psi_k(t) w_k(t) \neq 0.$$

Умножим, в случае необходимости, $\psi_k^\pm(z)$ на константы так, чтобы

$$\int\limits_L \psi_k(t) w_j(t) = \delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, l^*}.$$

Теперь пусть

$$\widetilde{\psi}_k^\pm(z) = \widetilde{S}(\psi_k(t) \,|\, z), \quad k = \overline{1, l^*}, \quad z \in \overline{D}^\pm.$$

Определим оператор

$$S(g \,|\, z) = S(G, g \,|\, z) = S(G, g, P, Q \,|\, z) = \widetilde{S}(g \,|\, z) - \sum_{k=1}^{l^*} \widetilde{\psi}^\pm{}_k(z) c_k(g).$$

Как отмечалось ранее, $c_k(g)$ не зависят от выбора продолжения $g(z) \in W^1_{p,\mathrm{loc}}$, т. е. оператор $S(g \,|\, z)$ определен корректно на пространстве $SW_p^1(L)$. Ясно, что $S(G, g, P, Q \,|\, z)$ — функционал над $(G(t), g(t), P, Q)$.

Теорема 8.5. *Пусть $P/Q = p_1 \ldots p_l q_1^{-1} \ldots q_{l^*}^{-1}$ — дивизор, дополнительный к $G(t)$, причем $p_j \overline{\in} V$, $j = \overline{1, l}$, $q_k \in D^+ \backslash V$, $k = \overline{1, l^*}$; $p_j \neq p_k$, $j \neq k$, $j, k = \overline{1, l}$, $q_j \neq q_k$, $j \neq k$, $j, k = \overline{1, l^*}$; $p_j \neq q_k$, $j = \overline{1, l}$, $k = \overline{1, l^*}$ и $\psi_k(t)$ — функции вида* (8.10).

Тогда ограниченное решение задачи (A) $\{\Phi^\pm(z);\ c_k, k = \overline{1, l^*}\}$ существует и единственно, $\Phi^\pm(z) \in W_p^1(V)$, $\Phi^\pm(t) \in SW_p^1(L)$ и оператор Коши задачи (A) имеет вид

$$\Phi^\pm(z) = S(G, g, P, Q \,|\, z), \tag{8.11}$$

$$c_k = c_k(g) = \int\limits_{D^+} \overline{\partial} g(z)\, w_k(z), \quad k = \overline{1, l^*}. \tag{8.12}$$

Далее, аналогично п. 7.6, скажем, что последовательность $G_n(t) \overset{S\Theta^*}{\to} G_0(t)$, $n \to \infty$, если $G_n(t) \to G_0(t)$ в $SW_p^1(L)$ и $l_n = l(\varkappa, a)_n = \mathrm{const} = l$, $n = \overline{0, \infty}$.

Теорема 8.6. *Пусть* $G_n(t) \in S\Theta^p$, $g_n(t) \in SW_p^1(L)$, $n = \overline{0,\infty}$, *причем* $G_n(t) \overset{S\Theta^*}{\to} G_0(t)$; $g_n(t) \to g_0(t)$ *в* $SW_p^1(L)$ *при* $n \to \infty$ *и* $P_n/Q_n = p_1^n \dots p_l^n (q_1^n)^{-1} \dots (q_{l^*}^n)^{-1}$ *последовательность дополнительных к* $G_n(t)$ *дивизоров* ($n = \overline{0,\infty}$), *выбранная так, что* $p_j^n \to p_j$, $q_k^n \to q_k$, $n \to \infty$, $j = \overline{1,l}$, $k = \overline{1,l^*}$.

Обозначим $\{\Phi_n^{\pm}(z);\ c_k^n,\ k = \overline{1,l^*}\}$ *решения соответствующих задач* (A). *Тогда*

$$c_k^n \to c_k^0,\ n \to \infty,\ k = \overline{1,l^*};\quad \Phi_n^{\pm}(z) \to \Phi_0^{\pm}(z),\ n \to \infty,$$

равномерно в $\overline{D}^{\pm}$ *и* ${\Phi^{\pm}}_n(z) \to {\Phi^{\pm}}_0(z)$ *в* $W_p^1(V)$, $\Phi_n^{\pm}(t) \to \Phi_0^{\pm}(t)$ *в* $SW_p^1(L)$, $n \to \infty$.

8.5. Задачи с обобщенным дополнительным дивизором. По сравнению с п. 7.7 здесь необходимо только изменить обозначения. Опишем необходимое в дальнейшем построение оператора решения задачи (A), непрерывного по $G(t) \in S\Theta^p(\varkappa_0, \dots, \varkappa_m)$ и $g(t) \in SW_p^1(L)$.

Зададим непрерывные на $S\Theta^p(\varkappa_0, \dots, \varkappa_m)$ отображения:

- $G \to X^{\pm}(z) = X^{\pm}(G \mid z)$ вида (8.5) с соответствующим дивизором $\Delta(G) = r_0^{\varkappa_G} Z(a_G)/Y_0$;
- $G \to P(G, P_0) = P(a_G, P_0)$, $G \to Q(G, Q_0) = Q(a_G, Q_0)$, $G \to K_1(G \mid p, q)$, $G \to w_k^1(G \mid p)$;
- $G \to S_1(f \mid z) = S_{\Delta_0(G)}(f \mid z)$, $\Delta_0(G) = \Delta(G)Q(G)/P(G)$;
- $G \to \widetilde{S}(f \mid z)$, $\widetilde{S}(f \mid z) = X^{\pm}(G \mid z) S_1(f(t)/X^{+}(G|t)|z)$;
- $G \to w_k(G|t)$, $w_k(G|t) = \dfrac{1}{X^{+}(G|t)}\, w_k^1(G|t)$, $\quad t \in L, \quad k = \overline{1, l_0^*}$;
- $G \to \psi_k(G|t)$, $G \to \widetilde{\psi}_k^{\pm}(G \mid z)$;
- $G \to S(G, g, P(G, P_0), Q(G, Q_0)|z) = S(z)$,
$$S(z) = \widetilde{S}(z) - \sum_{k=1}^{l_0^*} \widetilde{\psi}_k^{\pm}(G \mid z) c_k(g).$$

Итак, отображение $(G, g, P_0, Q_0) \to S(z)$ ставит в соответствие $G(t) \in S\Theta^p(\varkappa_0, \dots, \varkappa_m)$, $g(t) \in SW_p^1(L)$ и достаточно произвольным параметрам (начальным точкам) P_0 и Q_0 решение задачи (A) $\Phi^{\pm}(z) = S(z)$ с обобщенным дополнительным дивизором $P(G, P_0)/Q(G, Q_0)$. Это решение устойчиво в $W_p^1(V)$ (а $\Phi^{\pm}(t)$ в $SW_p^1(L)$) по $G(t) \in S\Theta^p(\varkappa_0, \dots, \varkappa_m)$, $g(t) \in SW_p^1(L)$, $P_0 \in D^{(l_0)}$ и $Q_0 \in D^{(l_0^*)}$.

§ 9. Задача сопряжения для решений квазилинейного уравнения Бельтрами

9.1. Постановка задачи. Пусть D — риманова поверхность рода $\rho > 1$, представленная в виде $D = U_1/\Gamma$, где U_1 — единичный круг, Γ — фуксова группа неевклидовых переносов, $\Pi_\Gamma : U_1 \to D$ — естественная проекция (п. 6.1, 6.2). *Квазилинейным дифференциалом Бельтрами* на D будем называть дифференциал по ξ $m(\xi, w)$, $\xi \in D$, $w \in \mathbb{C}$, имеющий в терминах локального параметра $\xi = \Pi_\Gamma(z)$ вид $m(\xi, w) = \mu(z, w)d\overline{z}/dz$, где $\mu(z, w)$ при всех $w \in \mathbb{C}$ является коэффициентом Бельтрами по z, согласованным с группой Γ, и непрерывной по w при почти всех $z \in U_1$ функцией.

Пусть $m(\xi, w) \in M_k(D)$ $\forall\, w \in \mathbb{C}$, $k = \mathrm{const} < 1$. Рассмотрим на D *квазилинейное уравнение Бельтрами*

$$\overline{\partial} w - m(\xi, w)\partial w = 0, \tag{9.1}$$

где $\overline{\partial}$ и ∂ — инвариантные на D операторы дифференцирования по $\overline{z}$ и z (п. 2.3). Не сложно убедиться, что функция $w(\xi)$ на римановой поверхности D будет обобщенным решением уравнения (9.1) тогда и только тогда, когда в терминах локального параметра $\xi = \Pi_\Gamma(z)$ функция $\omega(z) = w(\xi(z))$ будет непрерывным в U_1 решением уравнения Бельтрами

$$\omega_{\overline{z}} - \mu(z, \omega)\omega_z = 0, \tag{9.2}$$

согласованным с группой Γ, т. е. удовлетворяющим условию $\omega(T(z)) = \omega(z)$, $T \in \Gamma$. Действительно, $w(\xi)$ — функция на D тогда и только тогда, когда $\omega(T(z)) = \omega(z)$, $T \in \Gamma$. Далее, $\partial w = \omega_z dz$, $\overline{\partial} w = \omega_{\overline{z}} d\overline{z}$, откуда следует представление (9.2) уравнения (9.1).

Покажем, что уравнение (9.2) не зависит от выбора локального параметра. Пусть $z' = T(z)$ — другой локальный параметр, тогда в силу инвариантности операторов ∂ и $\overline{\partial}$ получим $\omega_z = T'\omega_{z'}$, $\omega_{\overline{z}} = \overline{T}'\omega_{\overline{z}'}$, откуда

$$0 = \omega_{\overline{z}} - \mu(z, \omega)\omega_z = \omega_{\overline{z}'}\overline{T}' - \mu(z, \omega)\omega_{z'}T' = \overline{T}'(\omega_{\overline{z}'} - \mu(z', \omega)\omega_{z'}),$$

так как $\mu(z', \omega) = \mu(z, \omega)T'/\overline{T}'$ в силу условия согласованности $\mu(z, w)$ с группой Γ.

Итак, уравнение (9.1) эквивалентно уравнению (9.2) для согласованных с Γ функций $\omega(z)$. Так же легко убедиться, что если $w(\xi)$ — функция на римановой поверхности D и $\omega(z) = w(\xi(z))$, то $\mu_0(z) \equiv \mu(z, \omega(z))$ — коэффициент Бельтрами, согласованный с Γ.

Пусть $L = \bigcup\limits_{j=0}^{m} L_j$ — квазиконформный контур на D, $G(t), g(t) \in SW_p^1(L)$, $G(t) \neq 0$. Рассмотрим задачу сопряжения на L решений уравнения Бельтрами (9.1):

$$w^+(t) - G(t)w^-(t) = g(t), \quad t \in L. \tag{9.3}$$

Основной целью настоящего параграфа является построение решения задачи (9.1, 9.3). Для этого используем такой же метод, как и для решения аналогичной задачи на плоскости (п. 1.9). Кратко опишем его суть в применении к римановым поверхностям.

В соответствии с леммой 6.2 п. 6.2 $M_k(D) \cong M_k(\Gamma)$ — замкнутое выпуклое ограниченное множество в $L_q(U_1)$, $q = q(k) > 2$. Зададимся коэффициентом Бельтрами $\mu_0(z) \in M_k(\Gamma)$. По $\mu_0(z)$ однозначно строится гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (9.2)

$$\xi^\mu_{\bar z} - \mu_0 \xi^\mu_z = 0, \quad \xi^\mu : U_1 \to U_1, \tag{9.4}$$

(п. 6.2.), индуцирующее квазиконформный гомеоморфизм $f^\mu : D \to D(\tau)$, $\tau = \tau(\mu_0) \in T_\rho$, причем соответствие $\tau(\mu_0) : L_q(U_1) \to T_\rho$ непрерывно. В плоскости гомеоморфизма f^μ на римановой поверхности $D(\tau)$ задача (9.1, 9.3) переходит в задачу сопряжения аналитических функций

$$\begin{gathered} \overline{\partial}\Phi^\pm(\xi) = 0, \quad \xi \in D^\pm(\tau) = f^\mu(D^\pm), \\ \Phi^+(t) - G^\mu(t)\Phi^-(t) = g^\mu(t), \quad t \in L^\mu = f^\mu(L), \end{gathered} \tag{9.5}$$

где $G^\mu(f^\mu(t)) = G(t)$, $g^\mu(f^\mu(t)) = g(t)$, $t \in L$. Здесь L^μ — квазиконформный контур и, как следует из леммы 8.1 п. 8.1, $G^\mu, g^\mu \in SW^1_r(L^\mu)$, $r = pq(k)/(p + q(k) - 2) > 2$.

Задача сопряжения (9.5), вообще говоря, не обязательно разрешима (если $\varkappa_G \leqslant 2\rho - 2$), поставим и решим для (9.5) соответствующую задачу (A) (параграф 8). В результате найдем $w^\pm(\xi) = \Phi^\pm((h^\mu(\xi))$, $h^\mu = (f^\mu)^{-1}$, $\xi \in D^\pm$, $\omega^\pm(z) = w^\pm(\xi(z))$ и $\mu_1(z) = \mu(z, \omega(z))$, $z \in U_1$. Окончательно получим отображение $\mu_0 \to \mu_1 : L_q(U_1) \to L_q(U_1)$. Неподвижным точкам этого отображения и соответствуют решения задачи (9.1, 9.3).

9.2. Абелевы дифференциалы на $D(\tau)$. Пусть $\tau \in T_\rho$, $r_0^0 \in D(\tau)$, $\mathbf{R}_0 = (r_1^0, \ldots, r_\rho^0) \in D^\rho(\tau)$, причем $r_0^0 \overline{\in} U(\tau \mid r_j^0)$, $j = \overline{1, \rho}$. Построим по лемме 6.4 п. 6.3 непрерывное отображение $\mathbf{R}(\tau, \mathbf{R}_0) : T_\rho^{(\rho)} \to D^\rho(\tau)$ такое, что $\mathbf{R} \in U(\tau \mid \mathbf{R}_0) \backslash G^2_\rho(\tau)$. Тогда так как $r_0^0 \overline{\in} U(\tau \mid r_j^0)$, то дивизор $\Delta_0 = (r_0^0)^{-1} R(\tau, \mathbf{R}_0)$ — минимальный. По минимальному дивизору Δ_0 построим абелев по p дифференциал $K_0(p, q)$, кратный $q^{-1}\Delta_0$, $\operatorname{Res} K_0(q, q) = 1$ (п. 4.1). Отметим, что в конечном счете K_0 зависит от $(\tau, r_0^0, \mathbf{R}_0, p, q) \in T_\rho^{(\rho+3)}$, $K_0 = K_0(\tau, r_0^0, \mathbf{R}_0 \mid p, q)$.

Теорема 9.1. *K_0 — непрерывен на $T_\rho^{(\rho+3)}$. В частности, K_0 непрерывно зависит от $(\tau, r_0^0, \mathbf{R}_0) \in T_\rho^{(\rho+1)}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{R}(\tau, \mathbf{R}_0) = \mathbf{R} = (r_1, \ldots, r_\rho)$. Согласно лемме 3 п. 6.3, на $D(\tau)$ существует голоморфный по τ базис абелевых дифференциалов 1 рода $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_\rho)$. Базис $\boldsymbol{\omega}$ можно нормировать условием $\omega_k(r_j) = 0$, $k \neq j$, при этом, очевидно, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\tau, \mathbf{R}_0)$ — непрерывно по $(\tau, \mathbf{R}_0) \in T_\rho^{(\rho)}$ (по τ — голоморфно).

Далее, по той же лемме 6.3 п. 6.3, существует на $D(\tau)$ голоморфный по τ абелев дифференциал по p и q $\omega(\tau\,|\,p,q)$ с единственным полюсом 2 порядка при $p=q$, удовлетворяющий условию

$$\operatorname{Res}\left(\int\limits_{q_0}^{q}\omega(\tau\,|\,p,q)\right)\bigg|_{p=q}=1.$$

Повторив на $D(\tau)$ построение дифференциала $K_0(p,q)$ (п. 4.1.), получим голоморфные по τ и непрерывные по $\mathbf{R}_0$ функции и дифференциалы

$$\omega_{qq_0}(\tau\,|\,p)=\int\limits_{q_0}^{q}\omega(\tau\,|\,p,q),\quad c_j(\tau,\mathbf{R}_0\,|\,q),\ j=\overline{1,\rho}$$

и, наконец,

$$K_0(p,q)=\omega_{qq_0}(\tau\,|\,p)-\sum_{j=1}^{\rho}c_j(\tau,\mathbf{R}_0\,|\,q)\omega_j(\tau,\mathbf{R}_0\,|\,p),$$

откуда, очевидно, следует утверждение теоремы.

Теперь обратимся к мероморфным функциям на $D(\tau)$. Будем говорить, что дивизор $\Delta(\tau,a,r_0)$ непрерывно зависит от $(\tau,a,r_0)\in X_\rho^{(1)}$, если все точки Δ — непрерывные сечения расслоения $X_\rho^{(2)}$ над $X_\rho^{(1)}$.

Лемма 9.1. *Пусть $\widetilde{\Delta}=\widetilde{\Delta}(\tau,a,r_0)$ — главный дивизор на $D(\tau)$, непрерывно зависящий от (τ,a,r_0), $\widetilde{f}(z)$ — мероморфная функция на $D(\tau)$ с дивизором $\widetilde{\Delta}$. Тогда с точностью до умножения на константу $\widetilde{f}(\tau,a,r_0\,|\,z)$ непрерывно зависит от $(\tau,a,r_0)\in X_\rho^{(1)}$.*

Утверждение леммы очевидно следует из представления $\widetilde{f}(z)$ через дивизор $\widetilde{\Delta}$ с помощью $K_0(p,q)$ (следствие теоремы Абеля, п. 4.2.) и предыдущей теоремы.

Теперь пусть $\Delta=\Delta(\tau,a,r_0)=r_0^{\varkappa}Z(\tau,a)/Y_0(\tau)$ — построенный в п. 6.3 дивизор на $D(\tau)$ с координатами $(\varkappa,a)$, $P=P(\tau,a,r_0,\mathbf{P}_0)$, $Q=Q(\tau,a,r_0,\mathbf{Q}_0)=(q_1,\ldots,q_{l_0^*})$ — построенные там же обобщенные дополнительные дивизоры нулей и полюсов к Δ на $D(\tau)$. Тогда на $D(\tau)$ однозначно строится абелев дифференциал

$$K(\Delta QP^{-1}|\,p,q)=K_1(p,q)$$

и система абелевых дифференциалов

$$w_j^{\Delta}(p)=\operatorname{Res}(K_1(p,q)K_0(q,r_0))\big|_{q=q_j},\quad j=\overline{1,l_0^*}. \tag{9.6}$$

Теорема 9.2. *Пусть $\mathbf{P}_0=(p_1^0,\ldots,p_{l_0}^0)$, $\mathbf{Q}_0=(q_1^0,\ldots,q_{l_0^*}^0)$, $\mathbf{R}_0=(r_1^0,\ldots,r_\rho^0)$, причем окрестности $U(\tau\,|\,p_j^0)$, $U(\tau\,|\,q_k^0)$, $U(\tau\,|\,r_s^0)$*

и $U(\tau\,|\,r_0^0)$ *не пересекаются,* $j=\overline{1,l_0}$, $k=\overline{1,l_0^*}$, $s=\overline{1,\rho}$. *Тогда дифференциал*

$$K_1(p,q)=K_1(\tau,a,r_0,\mathbf{P}_0,\mathbf{Q}_0\,|\,p,q)$$

непрерывен по $(\tau,a,r_0,\mathbf{P}_0,\mathbf{Q}_0)\in X_\rho^{(l_0+l_0^*+1)}$, *а абелевы дифференциалы*

$$w_j^\Delta(p)=w_j^\Delta(\tau,a,r_0^0,r_0,\mathbf{R}_0,\mathbf{P}_0,\mathbf{Q}_0\,|\,p)$$

непрерывны по $(\tau,a,r_0^0,r_0,\mathbf{R}_0,\mathbf{P}_0,\mathbf{Q}_0)\in X_\rho^{(\rho+l_0+l_0^*+2)}$, $j=\overline{1,l_0^*}$.

Теорема легко следует из представления $K_1(p,q)$ (формула (4.10) п. 4.3), $w_j^\Delta(p)$ (9.6), теоремы 9.1, леммы 9.1 и теоремы 6.1 п. 6.3.

Аналогично построению $w_j^\Delta(p)$ нетрудно построить голоморфный по τ и непрерывный по $\mathbf{R}_0$ базис абелевых дифференциалов 1 рода на $D(\tau)$ $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}(\tau,\mathbf{R}_0)=(\omega_1,\ldots,\omega_\rho)$, нормированный условием

$$\operatorname{Res}(K_0(\tau,r_0^0,\mathbf{R}_0\,|\,p,q)\omega_k(q))\big|_{q=r_j}=\delta_{jk}\omega_k(p), \tag{9.7}$$

$j,k=\overline{1,\rho}$, где $(r_1,\ldots,r_\rho)=\mathbf{R}(\tau,\mathbf{R}_0)$.

Через $\mathcal{L}(\tau,r_0^0,\mathbf{R}_0)$ будем обозначать соответствующую $\boldsymbol{\omega}(\tau,r_0^0,\mathbf{R}_0)$ решетку периодов для $D(\tau)$.

9.3. Задача (A) на $D(\tau)$. Пусть на $D(\tau)$ заданы:

- квазиконформный контур $L=\bigcup\limits_{j=0}^{m}L_j$, разбивающий $D(\tau)$ на две связные части $D^\pm$;
- функции $g(t)\in SW_p^1(L)$, $G(t)\in S\Theta^p(\varkappa_0,\ldots,\varkappa_m)$;
- точки q_0^0, r_0^0, r_0, $\mathbf{R}_0=(r_1^0,\ldots,r_\rho^0)\in D^\rho(\tau)$, $\mathbf{P}_0=(p_1^0,\ldots,p_{l_0}^0)\in D^{l_0}(\tau)$, $\mathbf{Q}_0=(q_1^0,\ldots,q_{l_0^*}^0)\in D^{l_0^*}(\tau)$, причем

  (i) $q_0^0\in D^-$, $r_0\in D^+$, $r_j^0\in D^-$, $j=\overline{0,\rho}$, $q_k^0\in D^+$, $k=\overline{1,l_0^*}$;

  (ii) окрестности $U(\tau\,|\,q_0^0)$, $U(\tau\,|\,r_0)$, $U(\tau\,|\,r_j^0)$, $U(\tau\,|\,p_s^0)$, $U(\tau\,|\,q_k^0)$ не пересекаются между собой и со стандартной окрестностью V контура L, $j=\overline{0,\rho}$, $s=\overline{1,l_0}$, $k=\overline{1,l_0^*}$.

Построим на $D(\tau)$ минимальный дивизор $(r_0^0)^{-1}R(\tau,\mathbf{R}_0)$, абелев дифференциал $K_0(\tau,r_0^0,\mathbf{R}_0\,|\,p,q)=K_0(p,q)$, базис абелевых дифференциалов 1 рода $\boldsymbol{\omega}\,(\tau,r_0^0,\mathbf{R}_0\,|\,p)=\boldsymbol{\omega}(p)$, нормированный условием (9.7), и соответствующую $\boldsymbol{\omega}$ решетку периодов для $D(\tau)$ $\mathcal{L}(\tau,r_0^0,\mathbf{R}_0)$. Далее, как и в п. 8.1, построим систему функций

$$\varphi_j(t)=\varphi_j(\tau,q_0^0,r_0^0,r_0,\mathbf{R}_0\,|\,t)=\exp\Bigg\{\int\limits_{\Lambda_j(q_0^0,r_0)}K_0(p,t)\Bigg\},\quad j=\overline{1,m},$$

где $\Lambda_j(q_0^0, r_0)$ — кривая, соединяющая $q_0^0 \in D^-$ и $r_0 \in D^+$ и пересекающая L в единственной точке $\xi_j \in L_j$. Очевидно, $\varphi_j(t)$ непрерывно зависят от $(\tau, q_0^0, r_0^0, r_0, \mathbf{R}_0) \in T_\rho^{(\rho+3)}$. По дифференциалу $K_0(p,q)$ построим оператор $S_0 = S_{\Delta_0}$, $\Delta_0 = (r_0^0)^{-1}R(\tau, \mathbf{R}_0)$.

Затем, аналогично п. 8.3, определим координаты $G(t)$:

$$\varkappa_G = \sum_{j=0}^{m} \varkappa_j,\ a_G = (a_1, \ldots, a_\rho) \in \mathrm{Jac}(D),$$

$$a_j = -\operatorname{Res} S_0(\ln G_0 | r_j^0), \quad j = \overline{1, \rho},$$

$$G_0(t) = G(t) \prod_{j=0}^{m} \varphi_j^{-\varkappa_j}(t), \quad t \in L.$$

Наконец, построим обобщенные дополнительные к $G(t)$ дивизоры нулей $P(\tau, a_G, r_0, \mathbf{P}_0) = (p_1, \ldots, p_{l_0})$ и полюсов $Q(\tau, a_G, r_0, \mathbf{Q}_0) = (q_1, \ldots, q_{l_0^*})$, $l_0 = l_0(\varkappa_G)$, $l_0^* = l_0^*(\varkappa_G)$, а по точкам q_k, $k = \overline{1, l_0^*}$ — функции

$$\psi_k^+(z) = (\varphi_0(q_0^0)^{-1} q_k \,|\, z))^{-1}, \quad z \in \overline{D}^+, \quad k = \overline{1, l_0^*},$$

$$\psi_k(t) = \psi_k^+(t), \quad t \in L, \quad k = \overline{1, l_0^*}.$$

Рассмотрим на $D(\tau)$ задачу (A):

$$\begin{cases} \overline{\partial}\Phi^\pm(z) = 0, \quad z \in D^\pm; \\ \Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = g(t) + \sum\limits_{k=1}^{l_0^*} c_k \psi_k(t), \quad t \in L; \\ \Phi^\pm(p_j) = 0, \quad j = \overline{1, l_0}. \end{cases} \tag{A}$$

Пусть $\mathbf{Y}_0(\tau)$ — произвольное голоморфное сечение $T_\rho^{(2\rho)}$ над T_ρ. Пользуясь леммой 6.4 п. 6.3, найдем на $D(\tau)$ дивизор $\Delta = r_0^{\varkappa_G} Z(\tau, a_G)/Y_0(\tau)$, соответствующий $G(t)$. Далее, полностью аналогично параграфу 8 и п. 9.3, построим решение задачи факторизации (A') с дивизором Δ: $X^\pm(z) = X^\pm(\tau, q_0^0, r_0^0, r_0, \mathbf{R}_0, G \,|\, z)$; затем по дифференциалу $K_1(p,q)$ — соответствующий оператор $S_1 = S_{\Delta_1}$, $\Delta_1 = \Delta Q/P$, а по этому оператору, дифференциалам $w_j^\Delta(\tau, a_G, r_0^-, r_0, \mathbf{R}_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0 \,|\, p)$, функциям $\psi_k(t)$ и решению задачи факторизации $X^\pm(z)$ — решение задачи (A) $\Phi^\pm(z)$. Итак, из результатов параграфа 8 непосредственно следует

Теорема 9.3. *Решение задачи (A) существует и единственно.*

Будем обозначать это решение $\Phi^\pm((\tau, \mathbf{H}_0), G, g \,|\, z)$, где $(\tau, \mathbf{H}_0) = (\tau, q_0^0, r_0^0, r_0, \mathbf{R}_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0) = (\tau, h_1^0, \ldots, h_s^0) \in T_\rho^{(\rho+l_0+l_0^*+3)}$, $s = \rho + l_0 + l_0^* + 3$.

Теорема 9.4. *Оператор* $\Phi^{\pm}$ *непрерывен*:

$$\Phi^{\pm}((\tau, \mathbf{H}_0), G, g \,|\, z) : T_\rho^{(\rho+l_0+l_0^*+3)} \times SW_p^1(L) \times SW_p^1(L) \to \\ \to C(\overline{D}^{\pm}) \cap W_p^1(V);$$

$$\Phi^{\pm}((\tau, \mathbf{H}_0), G, g \,|\, t) : T_\rho^{(\rho+l_0+l_0^*+3)} \times SW_p^1(L) \times SW_p^1(L) \to SW_p^1(L).$$

Здесь, как обычно, $C(\overline{D}^{\pm})$ — множество непрерывных на $\overline{D}^{\pm}$ функций с равномерной нормой.

Теорема следует из теоремы устойчивости 8.6 п. 8.4 и непрерывной зависимости всех построений пп. 9.2, 9.3 от $(\tau, \mathbf{H}_0)$.

Теперь сформулируем теорему устойчивости в том виде, как она нам потребуется в дальнейшем.

Теорема 9.5. *Пусть* $\zeta_k : U_1 \to U_1$ *— квазиконформные гомеоморфизмы,* $f_k : D \to D(\tau_k)$ *— индуцированные* ζ_k *квазиконформные гомеоморфизмы римановых поверхностей,* $G_k = G \circ f_k^{-1}$, $g_k = g \circ f_k^{-1}$, $\mathbf{H}_0^k = f_k(\mathbf{H}_0) = (f_k(h_1^0), \ldots, f_k(h_s^0))$, *причем для точек* $\mathbf{H}_0^k$ *выполнены условия* (i–ii) *и* $\Phi_k^{\pm}(z) = \Phi_k^{\pm}((\tau_k, \mathbf{H}_0^k), G_k, g_k \,|\, z)$ *— решения соответствующих задач* (A) *на* $D(\tau_k)$, $k = \overline{0, \infty}$.

Тогда если $\zeta_k \to \zeta_0$ *в* $C^\alpha(U_1)$, $\tau_k \to \tau_0$ *в* T_ρ, *то* $\Phi_k^{\pm}(f_k(z)) \to \Phi_0^{\pm}(f_0(z))$ *равномерно в* $\overline{D}^{\pm}$.

Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству теоремы устойчивости 1.4 п. 1.8 (с учетом теоремы 9.4).

9.4. Оператор задачи. Рассмотрим задачу (9.1, 9.3):

$$\begin{cases} \overline{\partial} w - m_0(z, w)\partial w = 0, & z \in D^{\pm}, \\ w^+(t) - G(t)w^-(t) = g(t), & t \in L, \end{cases} \tag{B}$$

где $m_0(p, w) = \mu_0(z, w)d\overline{z}/dz \in M_k(D)$; $L = \bigcup\limits_{j=0}^{m} L_j$ — квазиконформный контур; $g(t), G(t) \in SW_p^1(L)$, $G(t) \neq 0$, т. е. $G(t) \in S\Theta^p(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_m)$, $\varkappa_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{0, m}$, $\varkappa_G = \varkappa_0 + \ldots + \varkappa_m$.

Как известно [4, с. 15], [19, с. 27], если коэффициент Бельтрами $\mu(z) \in M_k(\Gamma)$, $k < 1$ и $\zeta : U_1 \to U_1$ — гомеоморфное решение соответствующего уравнения Бельтрами (9.4), то

$$|\zeta(z_1) - \zeta(z_2)| \geqslant A(k)|z_1 - z_2|^{\alpha(k)},$$

откуда

$$|z_1 - z_2| > \varepsilon_0 \Longrightarrow |\zeta(z_1) - \zeta(z_2)| > \varepsilon(\varepsilon_0, k) > 0. \tag{9.8}$$

Пусть $p \in D$, U — окрестность p, тогда в плоскости локального параметра

$$\Pi_\Gamma^{-1}(U) = \bigcup_{z_\alpha \in O} U(z_\alpha),$$

где O — орбита групы Γ, соответствующая элементу $p \in D$, $U(z_\alpha) = U_\alpha$ — окрестность $z_\alpha \in O$, $\Pi_\Gamma(z_\alpha) = p$. Величину

$$r(U) = \sup_{z_\alpha \in O} \sup_{z \in U_\alpha} |z - z_\alpha|$$

назовем *радиусом* окрестности U точки p.

Выберем $\varepsilon_0 > 0$ и точки $q_0^0 \in D^-$; $r_0 \in D^+$; $r_j^0 \in D^-$, $j = \overline{0, \rho}$; $p_s^0 \in D$, $s = \overline{1, l_0}$; $q_k^0 \in D^+$, $k = \overline{1, l_0^*}$, где $l_0 = l_0(\varkappa_G)$, $l_0^* = l_0^*(\varkappa_G)$ так, чтобы их окрестности радиуса $2\varepsilon_0$ не пересекались между собой и со стандартной окрестностью V контура L. По прежнему будем обозначать

$$\mathbf{H}_0 = (q_0^0, r_0^0, r_0, r_1^0, \ldots, r_\rho^0, p_1^0, \ldots, p_{l_0}^0, q_1^0, \ldots, q_{l_0^*}^0) =$$
$$= (q_0^0, r_0^0, r_0, \mathbf{R}_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0) = (h_1^0, \ldots, h_l^0),\ l = \rho + l_0 + l_0^* + 3.$$

Лемма 9.2. *Пусть $\zeta : U_1 \to U_1$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (9.4) с коэффициентом $\mu(z) \in M_k(\Gamma)$ и $f : D \to D_1 = U_1/\Gamma_1$ — индуцированный ζ квазиконформный гомеоморфизм римановых поверхностей; $h_k^\mu = f(h_k^0)$, $k = \overline{1, \rho + l_0 + l_0^* + 3}$.*

Тогда окрестности точек h_k^μ радиуса не более $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_0, k)$ не пересекаются между собой и со стандартной окрестностью контура $L^\mu = f(L)$.

Лемма непосредственно следует из определения радиуса окрестности и формулы (9.8).

По лемме 6.2 п. 6.2, $M_k(\Gamma)$ есть замкнутое ограниченное выпуклое подмножество $L_q(U_1)$, $q = q(k) > 2$. Построим оператор задачи (B) $B : L_q(U_1) \to L_q(U_1)$ следующим образом:

1. Пусть $\mu(z) \in M_k(\Gamma)$, найдем решение $\zeta^\mu(z)$ уравнения Бельтрами (9.4), гомеоморфно отображающее U_1 в себя и нормированное условиями
$$\zeta^\mu(0) = 0, \quad \zeta^\mu(1) = 1.$$
Как следует из результатов п. 6.2. (лемма 2), такое решение существует, единственно и отображение $\mu \to \zeta^\mu : L_q(U_1) \to C^\alpha(U_1)$ вполне непрерывно. Гомеоморфизм ζ^μ индуцирует отображение $f^\mu : D \to D(\tau(\mu))$, причем соответствие $\tau(\mu) : L_q(U_1) \to T_\rho$ — непрерывно.

2. Пусть
$$\mathbf{H}_0^\mu = f^\mu(\mathbf{H}_0) = \big(f^\mu(h_1^0), \ldots, f^\mu(h_l^0)\big) =$$
$$= (q_0^{\mu,0}, r_0^{\mu,0}, r_0^\mu, \mathbf{R}_0^\mu, \mathbf{P}_0^\mu, \mathbf{Q}_0^\mu);$$
$$L^\mu = f^\mu(L) = \bigcup_{j=0}^m L_j^\mu, \quad L_j^\mu = f^\mu(L_j); \quad D_\mu^\pm = f^\mu(D^\pm);$$
$$G^\mu(t) = G\circ(f^\mu)^{-1}, \quad g^\mu(t) = g\circ(f^\mu)^{-1}, \quad t \in L^\mu.$$

Очевидно, L^μ — квазиконформный контур, из леммы 1 п. 8.1. следует, что $G^\mu, g^\mu \in SW_r^1(L^\mu)$, $r = pq(k)/(p+q(k)-2) > 2$. Кроме того, очевидно $G^\mu(t) \neq 0$ и $G^\mu \in S\Theta^r(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_m)$. Наконец, из леммы 9.2 следует, что для точек $\mathbf{H}_0^\mu$ выполнены условия (i–ii) п. 9.3. Следовательно, на $D(\tau(\mu))$ существует и единственно решение задачи (A) $\Phi^\pm{}_\mu((\tau, \mathbf{H}_0^\mu), G^\mu, g^\mu \mid z) = \Phi^\pm{}_\mu(z)$, $z \in \overline{D}_\mu^\pm$.

3. Обозначим $w^\mu(p) = \Phi^\pm{}_\mu(f^\mu(p))$, $p \in \overline{D}^\pm$, $\omega^\mu(z) = w^\mu(p(z))$, $z \in U_1$, $p(z) = \Pi_\Gamma(z)$ и положим $B(\mu) = \mu_0(z, \omega^\mu(z)) \in \in M_k(\Gamma) \subset L_q(U_1)$.

Итак, получим оператор

$$B : L_q(U_1) \to L_q(U_1).$$

Лемма 9.3. *Оператор B вполне непрерывен и переводит $M_k(\Gamma)$ в $M_k(\Gamma)$.*

Доказательство. Утверждение $B : M_k(\Gamma) \to M_k(\Gamma)$ очевидно следует из построения оператора B, непрерывность и компактность — из леммы 6.2 п. 6.2 и теоремы 9.5 (устойчивости).

Следствие. *Оператор B имеет неподвижную точку $\mu(z) \in \in M_k(\Gamma)$.*

9.5. Решение исходной задачи. Пусть $\mu(z) \in M_k(\Gamma)$ — неподвижная точка оператора B. Как и в ходе построения оператора B, найдем $\zeta^\mu(z)$, $\tau = \tau(\mu)$, $f^\mu : D \to D(\tau)$, $\Phi^\pm{}_\mu$ и, наконец, $w(z) = = w^\mu(z) = \Phi^\pm{}_\mu(f^\mu(z))$, $z \in \overline{D}^\pm$. Коэффициенту $\mu(z)$ соответствует дифференциал Бельтрами $m(p) \in M_k(D)$. Так как $\mu(z)$ — неподвижная точка оператора B, то $m_0(p, w) = m(p)$. С другой стороны, так как $\overline{\partial}\Phi^\pm{}_\mu = 0$, $z \in D^\pm{}_\mu$, а f^μ — гомеоморфизм, индуцированный решением уравнения Бельтрами (9.4), то, очевидно,

$$\overline{\partial} w - m(p)\partial w = 0, \quad z \in D^\pm,$$

то есть $w(z)$ — решение уравнения (9.1). Далее, имеем

$$\begin{cases} \Phi_\mu^+(t) - G^\mu(t)\Phi_\mu^-(t) = g^\mu(t) - \sum\limits_{k=1}^{l_0^*} c_k \psi_k(t), \quad t \in L^\mu, \\ \Phi^\pm(p_j) = 0, \quad j = \overline{1, l_0}, \end{cases}$$

откуда, окончательно,

$$\begin{cases} \overline{\partial} w - m_0(p, w)\partial w = 0, \quad z \in D^\pm, \\ w^+(t) - G(t)w^-(t) = g(t) - \sum\limits_{k=1}^{l_0^*} c_k \psi_k(f^\mu(t)), \quad t \in L, \\ w(p_j^\mu) = 0, \quad j = \overline{1, l_0}. \end{cases} \tag{9.9}$$

Здесь $c_k = c_k(\mu, G, g)$.

Сформулируем основной результат настоящего параграфа:

Теорема 9.6.

1. *Каждой неподвижной точке оператора B соответствует решение задачи* (9.9).

2. *Для существования решения задачи* (B) *достаточно выполнения* l_0^* *условий* $c_k(\mu, G, g) = 0$, $k = \overline{1, l_0^*}$, *где* $c_k(\mu, G, g)$ — *нелинейные непрерывные функционалы над* $\mu \in L_q(U_1)$, $G \in SW_p^1(L)$, $g \in$ $\in SW_p^1(L)$.

3. *При выполнении этих условий решение* (B)
$$w^{\pm}(z) \in W_s^1(V), \quad s = \frac{rp}{r+p-2} = \frac{p^2 q(k)}{(p-2)(p+2q(k)-2)} > 2.$$

Утверждения теоремы непосредственно следуют из предыдущих рассуждений, теоремы 9.3 и теоремы 1.1 п. 1.2.

Глава 3
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ БЕСКОНЕЧНОГО ИНДЕКСА

§ 10. Задачи с бесконечным индексом на плоскости

10.1. Результаты Н.В. Говорова. Под краевой задачей с бесконечным индексом обычно понимают краевую задачу

$$\Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = g(t), \quad l \in L, \tag{10.1}$$

где, по-прежнему, $\ln|G(t)| \in C^\alpha(L)$, а $G(t) \in C^\alpha(L \backslash t_0)$, причем в точке $t_0 \in L$ $\arg G(t)$ имеет разрыв второго рода, т. е. формально

$$\varkappa = \Delta \arg G(t)\big|_L = \infty.$$

Обычно принимают $t_0 = \infty$ и $L = L^0 = (-\infty, \infty) = \{t \,|\, \operatorname{Im} t = 0\}$, $D^\pm = \{z \,|\, \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ [9, 12, 20–24].

Заметим, что так как $g(t) \in C^\alpha(-\infty, \infty)$, т. е. $g(1/t) \in C^\alpha[-1, 1]$ (см. § 1), то существует предел $g(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} g(t)$, причем без ограничения общности можно считать $g(\infty) = 0$, положив $\widetilde{g}(t) = g(t) - g(\infty)$, $\widetilde{\Phi}^+(z) = \Phi^+(z) - g(\infty)$, $\widetilde{\Phi}^-(z) = \Phi^-(z)$. Соответственно и решения $\Phi^\pm(z)$ можно искать в классе

$$C_0^\alpha(D^\pm) = \left\{\Phi^\pm(z) \in C^\alpha(\overline{D}^\pm) \,|\, \Phi^\pm(\infty) = 0\right\}.$$

Очевидно, условие на класс решений $\Phi^\pm(\infty) = 0$ уменьшает индекс задачи, если он конечен, на единицу.

Рассмотрим ставший своего рода классическим пример задачи с бесконечным индексом

$$G(t) = \exp\{2\pi i\lambda \operatorname{sgn}(t) \cdot |t|^\sigma\}, \quad t \in L,$$

λ, σ — вещественные константы, $\sigma > 0$, $\lambda \neq 0$. Очевидно,

$$\Delta \arg G(t) = \operatorname{sgn}\lambda \cdot (+\infty).$$

Аналогичные примеры, впервые изученные Н.В. Говоровым [9], легли в основу построения теории краевых задач с бесконечным индексом.

В соответствии с классической схемой Ф. Д. Гахова вначале построим решение задачи факторизации:

$$G(t) = X^+(t)/X^-(t), \quad t \in L. \tag{A$'$}$$

Пусть

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\ln G(s)}{s-z}\,ds + \frac{z^q}{2\pi i}\int\limits_{|s|\geqslant 1}\frac{\ln G(s)}{s^q(s-z)}\,ds, \qquad (10.2)$$

$q = [\sigma] + 1$, $[\sigma]$ — целая часть числа σ. Очевидно, несобственный интеграл (10.2) сходится, существуют предельные значения $\chi^{\pm}(t) \in C^{\alpha}[-R, R]$, $\forall R > 0$ и $\chi^{+}(t) - \chi^{-}(t) = \ln G(t)$, $t \in L$, откуда $\exp(\chi(z))$ будет решением задачи факторизации. Однако, вообще говоря, $\exp(\chi^{\pm}(z))$ и $\exp(\chi^{\pm}(t))$ не ограничены ни сверху, ни снизу, когда $z \to \infty$, $t \to \infty$. С другой стороны, любое другое мероморфное в $D^{\pm}$ решение задачи факторизации (A') имеет вид $X^{\pm}(z) = F(z)\exp(\chi(z))$, где $F(z)$ — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, в частности, для аналитических в $D^{\pm}$ решений (A') $F(z)$ — целая функция. Н. В. Говоровым построены функции $F(z)$, которые в известном смысле «уничтожают» особенность $\exp\{\chi(z)\}$, $z \to \infty$.

Возьмем последовательность

$$z_{\pm m} = \pm r_m e^{i r_m^{-\sigma}}, \quad r_m = \left(\frac{m - 1/2}{|\lambda|}\right)^{1/\sigma}, \quad m = \overline{1, \infty} \qquad (10.3)$$

и целую функцию $F_0(z)$ с нулями в точках z_m, $m = \overline{-\infty, \infty}$, $m \neq 0$ [17, 10]:

$$F_0(z) = e^{P(z)}\prod_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_m}\right)\exp\left(\frac{z}{z_m} + \frac{z^2}{2z_m^2} + \ldots \frac{z^{q-1}}{(q-1)z_m^{q-1}}\right), \qquad (10.4)$$

где $P(z)$ — многочлен, выбираемый специальным образом в зависимости от σ, λ; $\deg P(z) = q - 1$ [9, с. 131–135]. В случае $\lambda > 0$ пусть $X^{\pm}(z) = F_0(z)\exp(\chi(z))$, а при $\lambda < 0$ $X^{\pm}(z) = \exp(\chi(z))/F_0(z)$. Дальнейшее исследование основывается на следующих результатах Н. В. Говорова:

Теорема 10.1. *Если целая функция* $F(z)$ *имеет вид* (10.4), *где точки* $\{z_m\}$ — *вида* (10.3) *и функция* $\chi(z)$ — *вида* (10.2), *то* $X^{\pm}(z) = F(z)\exp(\chi(z))$ *обладают свойствами*:

а) $X^{+}(t)/X^{-}(t) = G(t)$, $|\ln|X^{\pm}(t)| \leqslant M$, $t \in L$;

б) $X^{+}(t) \in C^{\alpha}[-2, 2]$, $X^{\pm}(1/t)|t|^q \in C^{\alpha}[-2, 2]$;

в) *или* $|X^{\pm}(z)| \leqslant M$ (*случай «положительного» индекса*) (10.5),

или $|X^{\pm}(z)|^{-1} \geqslant M$ (*случай «отрицательного» индекса*), $z \in \overline{D}^{\pm}$;

г) $\ln|X^{\pm}(z)| \leqslant |z| \cdot o(1)$, $|z| \to \infty$, $|z| \overline{\in} E_0$,

где E_0 — *множество нулевой относительной меры, т. е.* $r^{-1}\mu(E_0 \cap (0, r)) \to 0$ *при* $r \to \infty$.

При этом $|X^{\pm}(z)| \leqslant M$ *для* $\lambda > 0$ *и* $|X^{\pm}(z)| \geqslant M$ *для* $\lambda < 0$.

Теорема 10.2. *Пусть* $X^{\pm}(z)$ *удовлетворяет условиям* (10.5). *Тогда*

— *если* $g(t) \in C^{\alpha}(L)$, $g(\infty) = 0$, *то* $\{g(t)/X^{+}(t)\} \in C^{\beta}(L)$, $\beta = \alpha^2/(q+1) > 0$;

— *если* $\Psi^{\pm}(z) \in C^{\beta}(\overline{D}^{\pm})$, $\Psi^{\pm}(\infty) = 0$ *и функции* $\Phi^{\pm}(z) = \Psi^{\pm}(z)X^{\pm}(z)$ — *аналитичны в* $D^{\pm}$, *то* $\Phi^{\pm}(z) \in C^{\gamma}(\overline{D}^{\pm})$, $\gamma = \alpha\beta/(q+1) > 0$.

Теоремы 10.1, 10.2 позволяют применить к исследованию задачи (10.1) классическую схему Гахова [8], именно:

- если $\lambda > 0$, то число l решений задачи в классе $C_0^{\gamma}(\overline{D}^{\pm})$ равно бесконечности, число l^* условий ее разрешимости равно нулю (см. п. 7.1, задача 1). При этом корректная постановка задачи (10.1) в классе $C_0^{\gamma}(\overline{D}^{\pm})$ и ее оператор Коши (п. 7.1, задачи 2, 3) имеют, соответственно, вид

$$\begin{cases} \Phi^{+}(t) - G(t)\Phi^{-}(t) = g(t), & t \in L \\ \Phi^{\pm}(z_m) = 0, & m = \overline{-\infty, \infty}, \quad m \neq 0; \end{cases} \tag{10.6}$$

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{X^{\pm}(z)}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{g(s)}{X^{+}(s)(s-z)}\, ds; \tag{10.7}$$

- если $\lambda < 0$, то $l = 0$, $l^* = \infty$, а условия разрешимости задачи (10.1) представляются в форме

$$\int\limits_{L} \frac{g(s)}{X^{+}(s)(s-z_m)}\, ds = 0, \quad m = \overline{-\infty, \infty}, \quad m \neq 0. \tag{10.8}$$

При выполнении (10.8) единственное решение задачи имеет вид

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{X^{\pm}(z)}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{g(s)}{X^{+}(s)(s-z)}\, ds.$$

Действительно, если $\lambda > 0$, то $|X^{\pm}(z)| \leqslant M$, z_m — нули $X^{\pm}(z)$ и значит, с учетом теоремы 10.2, функции

$$\Phi_m^{\pm}(z) = \frac{X^{\pm}(z)}{z - z_m} \in C_0^{\gamma}(\overline{D}^{\pm}), \quad m = \overline{-\infty, \infty}, \quad m \neq 0,$$

будут линейно независимыми решениями однородной задачи (10.1), т. е. $l = \infty$. Далее, опять с учетом теорем 10.1, 10.2, $\{g(t)/X^{+}(t)\} \in C^{\beta}(L)$, значит

$$\Psi^{\pm}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{g(s)}{X^{+}(t)(s-z)}\,ds\in C^{\beta}(\overline{D}^{\pm}),\quad \Psi^{\pm}(\infty)=0$$

(см. [19, с. 9–12]), а тогда и $\Phi^{\pm}(z)=X^{\pm}(z)\Psi^{\pm}(z)\in C_0^{\gamma}(\overline{D}^{\pm})$. Очевидно $\Phi^{\pm}(z)$ — решение задачи (10.6). Покажем единственность решения (10.6). Пусть $\Phi^{\pm}(z)$ — решение однородной ($g\equiv 0$) задачи (10.6), $\Phi^{\pm}(z)\in C_0^{\gamma}(\overline{D}^{\pm})$, тогда $F(z)=\Phi^{\pm}(z)/X^{\pm}(z)$ — целая функция [9],

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in L}}F(t)=0$$

и из (10.5) следует, что рост целой функции $F(z)$ не выше первого порядка минимального типа (см. [17]). Но так как $|F(t)|\leqslant M$, $t\in L$, то по принципу Фрагмена–Линделефа [17] $|F(z)|\leqslant M$, т. е. $F(z)=$ $=\mathrm{const}$ и из $F(t)\to 0$, $t\to\infty$ получим $F(z)\equiv 0$, значит и $\Phi^{\pm}(z)=$ $=F(z)X^{\pm}(z)\equiv 0$.

Теперь обратимся к случаю $\lambda<0$. При этом $|X^{\pm}(z)|^{-1}\leqslant M$ и z_m — полюса $X^{\pm}(z)$. Пусть $\Phi^{\pm}(z)\in C_0^{\gamma}(\overline{D}^{\pm})$ — решение однородной задачи (10.1), тогда $\Phi^{\pm}(z)/X^{\pm}(z)=F(z)$ — целая функция и $|F(z)|\leqslant M$, $F(z_m)=0$ откуда очевидно $F(z)\equiv 0$, значит и $\Phi^{\pm}(z)\equiv 0$, т. е. $l=$ $=0$. Далее, очевидна достаточность условий (10.8) для разрешимости (10.1), так как при их выполнении функция $\Phi^{\pm}(z)=X^{\pm}(z)\Psi^{\pm}(z)$ аналитична в $D^{\pm}$ и следовательно (теорема 10.2) $\Phi^{\pm}(z)\in C_0^{\gamma}(\overline{D}^{\pm})$, причем очевидно $\Phi^{\pm}(z)$ — решение (10.1). Покажем необходимость условий (10.8) — пусть существует решение (10.1) $\Phi^{\pm}(z)\in C_0^{\gamma}(\overline{D}^{\pm})$, тогда из теоремы 10.2 $\Psi^{\pm}(z)=\Phi^{\pm}(z)/X^{\pm}(z)\in C_0^{\gamma}(\overline{D}^{\pm})$, кроме того $\Psi^{\pm}(z_m)=$ $=0$ и

$$\Psi^{+}(t)-\Psi^{-}(t)=g(t)/X^{+}(t),\quad t\in L. \tag{10.9}$$

Но решение задачи (10.9) с условием $\Psi^{\pm}(\infty)=0$ единственно [19, с. 29–32],

$$\Psi^{\pm}(z)=S\Big(\frac{g}{X^{+}}\,\Big|\,z\Big)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{g(s)}{X^{+}(s)(s-z)}\,ds,$$

и значит $\Psi^{\pm}(z_m)=S(g/X^{+}\,|\,z_m)=0$, т. е. имеем (10.8).

Итак, в рассмотренном примере индекс оператора краевой задачи бесконечный, т. е. задача не является нетеровой [18, 32, 43], однако условия (10.8) выделяют в $C^{\alpha}(L)$ замкнутое подпространство и, следовательно, краевая задача будет нормально разрешимой, причем ее обобщенным обратным оператором будет оператор Коши (10.7).

Работы Н. В. Говорова определили основное направление развития теории краевых задач с бесконечным индексом. На первый план здесь вышло построение решения задачи факторизации (A') $X^{\pm}(z)$, удовлетворяющего (10.5). Когда это удается, дальнейшее построение решения идет по классической схеме [8, 29, 19, 9]. Случаи же, когда соответствующее решение задачи факторизации построить не удается, пока не поддаются теоретическому исследованию. Впрочем, имеются примеры, когда в подобной ситуации краевая задача не будет нормально разрешимой, хотя $|G(t)| \equiv 1$, т. е. $G(t) \neq 0$.

Рассмотрим краевую задачу с бесконечным индексом с точки зрения классов корректности и, соответственно, устойчивости решения. Это значит, что необходимо описать некоторый класс последовательностей $\{z_m\}$ (зависящий, очевидно, от асимптотики $\arg G(t)$, $t \to \infty$), такой, что краевая задача (10.6) или задача с условиями (10.8) корректны (т. е. имеют единственное ограниченное решение, принадлежащее $C_0^{\gamma}(\overline{D}^{\pm})$). При этом желательно, чтобы введенный класс был достаточно широк, например, инвариантен при действии некоторых гомеоморфизмов плоскости $\mathbb{C}$. Далее, необходимо ввести сходимость в классе последовательностей $\{z_m\}$ и, соответственно, сходимость для функций $G(t)$ и доказать устойчивость решения задачи в $C_0^{\gamma}(\overline{D}^{\pm})$ как функционала над $(G(t), \{z_m\})$ относительно введенных сходимостей. Подобный подход к задачам с бесконечным индексом продемонстрирован в [20, 21, 23], где рассмотрены некоторые классы функций $G(t)$ со специального вида асимптотикой $\arg G(t)$ при $t \to \infty$.

10.2. Случай степенного завихрения порядка $\boldsymbol{\sigma < 1}$. Пусть

$$\ln|G(t)| \in C^{\alpha}(L), \quad \arg G(t) = \lambda^{\pm}|t|^{\sigma} + a(t), \quad \pm t \geqslant 0;$$

$$a(t) \in C^{\alpha}(L), \quad \lambda^{\pm} = \text{const}, \quad \lambda^{+}\lambda^{-} < 0, \quad 0 < \sigma < 1.$$

При этом, очевидно, $\Delta \arg G(t)\big|_L = \pm\infty$ при $\pm\lambda^{+} > 0$. Обозначим $\lambda = (\lambda^{+}, \lambda^{-})$.

10.2.1. Класс последовательностей $\boldsymbol{N_{\nu}(\lambda)}$. Последовательности $\{z_m\}$ будем характеризовать в терминах считающей функции [17]:

$$n(r, \varphi) = \big\{ \text{ число } z_m \in (|z| < r,\ \arg z \in [0, \varphi)) \big\}.$$

Ясно, что последовательность $\{z_m\}$ однозначно определяет свою считающую функцию $n(r, \varphi)$ и наоборот. Обозначим через $N_{\nu}(\lambda)$ класс считающих функций, удовлетворяющих условию

$$\partial n(r, \varphi)/\partial\varphi \equiv 0, \quad |\varphi| \leqslant \delta, \quad |\pi - \varphi| \leqslant \delta, \quad \delta > 0$$

(т. е. $\arg z_m \overline{\in} [-\delta, \delta] \cup [\pi - \delta, \pi + \delta]$) и имеющих представление

$$n(r, \varphi) = \Delta(\varphi) r^{\sigma} + h_1(\varphi) + h_2(r, \varphi),$$

где $\Delta(\varphi)$ — монотонно возрастающая на $[0, 2\pi]$ функция такая, что

$$\int_0^{2\pi} \cos\sigma\psi^{\pm}\, d\Delta(\varphi) = a^{\pm},$$

$$\psi^{+} = \pi - \varphi; \qquad \psi^{-} = \begin{cases} \varphi, & \varphi \in [0, \pi] \\ 2\pi - \varphi, & \varphi \in [\pi, 2\pi], \end{cases} \tag{10.10}$$

$$a^{\pm} = \pm(\lambda^{\pm}\cos\sigma\pi - \lambda^{\pm})/2\pi,$$

а функции $h_1(\varphi)$, $h_2(r, \varphi)$ удовлетворяют условиям:

$$\int_0^{2\pi} |h_1(\varphi)|\, d\varphi \leqslant M < \infty; \quad h_1(\varphi) \equiv 0, \quad |\varphi| \leqslant \delta, \quad |\pi - \varphi| \leqslant \delta; \tag{10.11}$$

$$|h_2(r, \varphi)| \leqslant Mr^{\sigma}, \qquad \int_0^{2\pi} |\Theta(r, R, \varphi)|\, d\varphi \leqslant MR^{-\nu}, \tag{10.12}$$

$$\Theta(r, R, \varphi) = \int_R^r \frac{h_2(s, \varphi)}{s}\, ds, \quad r \geqslant R \geqslant 1, \quad \nu > 0.$$

При $\lambda^{+} > 0$ класс $N_{\nu}(\lambda)$ не пуст, если $\nu \leqslant \sigma$. Действительно, в этом случае существует [20] кусочно-постоянная функция $\Delta(\varphi)$ со скачками $\Delta_j > 0$ в точках $\varphi_j \neq 0, \pi$, $j = \overline{1, p}$, удовлетворяющая (10.10) и, если положить

$$n(r, \varphi) = \sum_{\varphi_j < \varphi} [\Delta_j r^{\sigma} + 1/2],$$

то $n(r, \varphi) \in N_{\sigma}(\lambda) \subset N_{\nu}(\lambda)$, $\nu \leqslant \sigma$ [20].

Если $\lambda^{+} < 0$, то не существует $\Delta(\varphi)$ удовлетворяющей (10.10), т. е. $N_{\nu}(\lambda) = \emptyset$, но при этом, очевидно, $N_{\nu}(-\lambda) \neq \emptyset$, $\nu \leqslant \sigma$.

Определим сходимость в классах функций $G(t)$ и последовательностей $\{z_m\}$ (т. е. считающих функций $n(r, \varphi)$).

Пусть $G_m(t)$ — последовательность функций, $\arg G_m(t) = \lambda^{\pm}|t|^{\sigma} + a_m(t)$, $\pm t \geqslant 0$. Скажем, что $G_m(t) \to G(t)$, $m \to \infty$, если

$$\ln|G_m(t)| \to \ln|G(t)|, \quad a_m(t) \to a(t), \quad m \to \infty \quad \text{в} \quad C^{\alpha}(L). \tag{10.13}$$

В классе $N_{\nu}(\lambda)$ введем характеристики

$$L_1[n;\ R] = \iint\limits_{|z| \leqslant R} n(r, \varphi)\, ds,$$

$$\langle n(r,\varphi)\rangle = \sup_r \frac{n(r,2\pi)}{r^\sigma} + \int_0^{2\pi} |h_1(\varphi)|\,d\varphi + \sup_{r\geqslant R\geqslant 1} R^\nu \int_0^{2\pi} |\Theta(r,R,\varphi)|\,d\varphi$$

и скажем, что последовательность $n_m(r,\varphi)\in N_\nu(\lambda)$ сходится к $n(r,\varphi)$, если

$$\langle n_m(r,\varphi)\rangle \leqslant M = \text{const};\qquad L_1[n_m - n;\ R]\to 0,\quad m\to\infty,\ \ \forall\, R>0. \tag{10.14}$$

В работе [20] доказаны следующие результаты:

- класс $N_\nu(\lambda)$ замкнут относительно указанной сходимости;
- пусть $\xi(z)$, $\xi\,:\,\overline{D}^{\pm}\to\overline{D}^{\pm}$ — гомеоморфизм областей $D^\pm$, удовлетворяющий условию $|\xi(z)/z-1|\leqslant M|z|^{-\nu_0}$; $n(r,\varphi)$ — считающая функция последовательности $\{z_m\}$, а $n_\xi(r,\varphi)$ — считающая функция последовательности $\{\xi_m=\xi(z_m)\}$. Тогда если $n(r,\varphi)\in N_\nu(\lambda)$, то и $n_\xi(r,\varphi)\in N_\nu(\lambda)$ при $\nu_0\geqslant\nu+\sigma$;
- пусть $n(r,\varphi)\in N_\nu(\lambda)$, $\lambda^+>0$ или $n(r,\varphi)\in N_\nu(-\lambda)$, $\lambda^+<0$. Тогда существует (единственное с точностью до постоянного множителя) решение задачи факторизации (A$'$) $X^\pm(z)$, удовлетворяющее (10.5) и имеющее однократные нули ($\lambda^+>0$) или полюса ($\lambda^+<0$) в точках $\{z_m\}$;
- пусть $g_m(t)\to g(t)$ в $C^\alpha(L)$, $G_m(t)\to G(t)$, $n_m(r,\varphi)\to n(r,\varphi)$, $m\to\infty$ и $\Phi_m^\pm(z)$, $\Phi^\pm(z)$ — решения соответствующих задач (10.6) ($\lambda^+>$ >0) или задач с условиями (10.8) ($\lambda^+<0$). Тогда $\Phi_m^\pm(z)\to\Phi^\pm(z)$ в $C_0^\gamma(\overline{D}^{\pm})$, $\gamma=\gamma(\alpha,\sigma)>0$.

10.3. Случай обобщенного завихрения произвольного порядка. Пусть

$$\ln|G(t)|\in C^\alpha(L),\qquad \arg G(t)=2\pi\lambda(t)+a(t), \tag{10.15}$$

где $a(t)\in C^\alpha(L)$; $\lambda(t)$ монотонна, $\lambda(t)\not\equiv 0$ и

$$\underline{M}_k\leqslant|\lambda'(t)||t|^{1-\sigma}\leqslant\overline{M}_k;\qquad kt\geqslant 0,\quad k=\pm1,$$

и если $\underline{M}_k=0$, то и $\overline{M}_k=0$; $\sigma=\text{const}>0$. Смысл последнего условия состоит в том, что либо $\lambda(t)\equiv 0$, $kt\geqslant 0$, $k=\pm1$, либо на знакопостоянную функцию $\lambda'(t)$ имеется ненулевая оценка как сверху, так и снизу. Обозначим $\Lambda_\sigma^\pm=\{G(t)\mid \pm\,\lambda'(t)\geqslant 0\}$, $\Lambda_\sigma=\Lambda_\sigma^+\cup\Lambda_\sigma^-$.

Используя ход доказательств работ Н. В. Говорова [9], можно показать, что все рассмотренные им для неоднородной краевой задачи функции $G(t)$ лежат в классах Λ_σ. С другой стороны, классы Λ_σ существенно шире рассмотренных Н. В. Говоровым и другими авторами [9], в частности, легко привести пример $G(t)\in\Lambda_\sigma$ такой, что

$$\underline{\lim}_{kt\to+\infty}\frac{\ln G(t)}{|t|^\sigma}\neq\overline{\lim}_{kt\to+\infty}\frac{\ln G(t)}{|t|^\sigma},\qquad k=\pm1,$$

т. е. $\ln G(t)$ не имеет вполне регулярного роста при $t \to \infty$ [9, 17, 10]. Так, при $\sigma = 1$ таким примером будет $G(t) = \exp(2\pi i \lambda(t))$, где $\lambda(t)$ — непрерывная функция такая, что

$$\lambda'(t) = \begin{cases} 2, & t \in [2n-1, 2n], \\ 1, & t \in [2n, 2n+1], \end{cases}$$

$n = \overline{1, \infty}$, $t \geqslant 1$; $\lambda(t) \equiv 0$, $t < 1$.

10.3.1. Класс $N(\lambda, \sigma)$. Пусть последовательность $\{z_m\}$, $m = \overline{-\infty, \infty}$ занумерована так, что $\operatorname{Re} z_{m+1} \geqslant \operatorname{Re} z_m$, $m \operatorname{Re} z_m \to +\infty$ при $m \to \pm\infty$. Положим

$$\eta(z) = \arg(kz)\,|z|^{\sigma}, \quad k = \operatorname{sgn} \operatorname{Re} z, \quad \arg z \in [-\pi, \pi]$$

и пусть $\eta_m = \eta(z_m)$. Будем рассматривать последовательности, удовлетворяющие условию

$$0 < \varliminf_{|m| \to \infty} |\eta_m| \leqslant \varlimsup_{|m| \to \infty} |\eta_m| < \infty, \tag{10.16}$$

(т. е. при некоторых $p_0, p_1 = \text{const}$, $0 < p_0 < p_1 < \infty$ имеем $|\eta_m| \in [p_0, p_1]$ при $|z_m| > R_0$, $R_0^{\sigma} = 2p_1/\pi$) и пусть $|\operatorname{Im} z_m| \geqslant \delta_0 > 0$ при $|z_m| \leqslant R_0$, $\delta_0 = R_0 \sin(p_0 R_0^{-\sigma})$ — рис. 9.

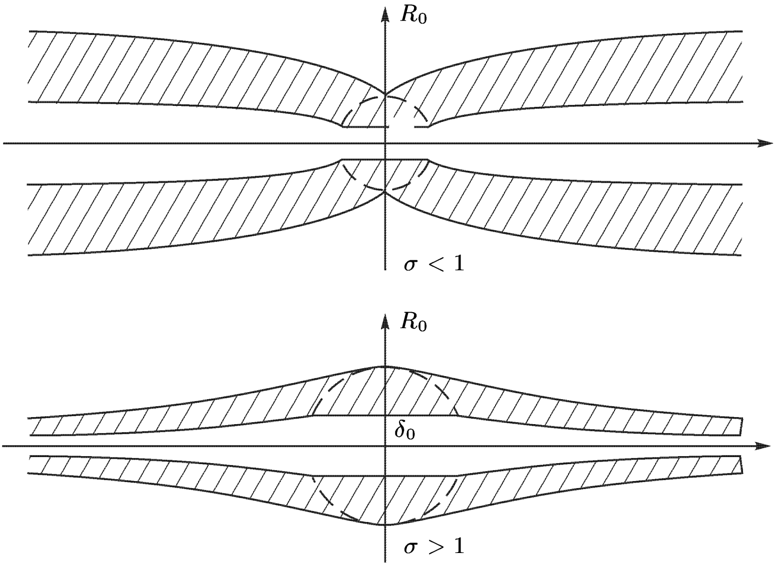

Рис. 9

Заметим, что в определении класса Λ_σ можно без ограничения общности считать, что $\lambda(t) \equiv 0$ при $|t| \leqslant R$, так и примем в дальнейшем.

Представим

$$\{z_n\} = \{z_{-m}\} \cup \{z^1, \ldots, z^l\} \cup \{z_m\}, \quad m = \overline{1, \infty}, \tag{10.17}$$

$$\pm \operatorname{Re} z_{\pm m} > 0, \quad |z_{\pm m}| > R_0; \quad |z^s| \leqslant R_0, \quad s = \overline{1, l}.$$

Последовательности $\{z_{\pm m}\}$ будем характеризовать в терминах считающих функций специального вида:

$$n^{\pm 1}(r, p) = \begin{cases} \text{число } z_{\pm m} \in (|z| < r, \quad \eta(z) \in [0, p)) & \text{при } p \geqslant 0, \\ \text{число } z_{\pm m} \in (|z| < r, \quad \eta(z) \in [p, 0)) & \text{при } p < 0. \end{cases} \tag{10.18}$$

Очевидно, $n^{\pm 1}(r, p) \equiv 0$ при $|p| \leqslant p_0$ и $\dfrac{\partial n^{\pm 1}(r, p)}{\partial p} \equiv 0$ при $|p| > p_1$.

Пусть $\lambda'(t) \geqslant 0$. Обозначим $N(\lambda, \sigma)$ класс последовательностей вида (10.17) таких, что

$$n^{\pm 1}(r, p) = \Delta^{\pm 1}(p)[\pm\lambda(\pm r)] + h_1^{\pm 1}(r, p) + h_2^{\pm 1}(r, p) - l^{\pm 1}\Delta_0(p), \tag{10.19}$$

причем для $\Delta^{\pm 1}(p)$ выполнено:

$$\Delta^{\pm 1}(p) \leqslant \Delta^{\pm 1}(\overline{p}), \quad p \leqslant \overline{p}; \quad \Delta^{\pm 1}(p) \equiv 0,$$

$$|p| < p_0, \quad \Delta^{\pm 1}(p_1) - \Delta^{\pm 1}(-p_1) = 1;$$

$\Delta_0(p) \equiv 1$ при $p > p_0$, $\Delta_0(p) \equiv 0$ при $p \leqslant p_0$, $l^{\pm 1} = \text{const}$, $l^{+1} + l^{-1} = l$ — число z^s, $|z^s| \leqslant R_0$; а $h_1^{\pm 1}(r, p)$ удовлетворяет условиям:

$$|h_1^{\pm 1}(r, p)| + |h_2^{\pm 1}(r, p)| \leqslant M r^{\sigma}; \quad h_1^{\pm 1} \equiv h_2^{\pm 1} \equiv 0, \quad |p| < p_0,$$

$$|\Theta(r, p_1)| + |\Theta(r, -p_1)| + \int\limits_{-p_1}^{p_1} |\Theta(r, p)|\, dp \leqslant M R^{-\sigma}, \tag{10.20}$$

$$\int\limits_{-p_1}^{p_1} |h_1^{\pm 1}(r, p)|\, dp \leqslant M, \quad h_1^{\pm 1}(r, p) = h_1^{\pm 1}(r, -p_1) \equiv 0,$$

где

$$\Theta(r, p) = \int\limits_{r}^{\infty} s^{-1} h_2^{\pm 1}(s, p)\, ds.$$

Будем говорить, что последовательности $\{z_m^k\} \in N(\lambda, \sigma)$ сходятся к $\{z_m\} \in N(\lambda, \sigma)$, если

— $\forall\, m \quad z_m^k \to z_m$, $k \to \infty$,

— в представлении (10.20) константы M, p_0, p_1 — не зависят от k.

10.3.2. Пример последовательности $\{z_m\} \in N(\lambda, \sigma)$, $\lambda' \geqslant 0$. Расположим точки z_m на кривой $\eta(z) = p_0 = \mathrm{const}$. Рассмотрим $\lambda(t)$ при $t \geqslant R_0$. Если $\lambda(t) \equiv 0$, то положим $\{z_{+m}\} = \emptyset$. В противном случае $\lambda(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Пусть $\lambda(t_m) = m$, $t_0 = R_0$, тогда

$$t_{m+1}^\sigma - t_m^\sigma - = \sigma \int\limits_{t_m}^{t_{m+1}} t^{\sigma-1}\,dt \leqslant M \int\limits_{t_m}^{t_{m+1}} \lambda'(t)\,dt \leqslant M = \mathrm{const}\,.$$

Выберем $r_m \in (t_{m-1}, t_m]$ так, чтобы

$$\int\limits_{t_{m-1}}^{t_m} [\lambda(t) - m + 1] t^{\sigma-1}\,dt = \int\limits_{r_m}^{t_m} t^{\sigma-1}\,dt. \tag{10.21}$$

Действительно, пусть $\widetilde{\lambda}(u) = \lambda(u^{1/\sigma}) - m + 1$, $u_m = t_m^\sigma$, тогда $\widetilde{\lambda}(u)$ монотонно возрастает на $[u_{m-1}, u_m]$, $\widetilde{\lambda}(u_{m-1}) = 0$, $\widetilde{\lambda}(u_m) = 1$, т. е. $0 < \int\limits_{u_{m-1}}^{u_m} \widetilde{\lambda}(u)\,du < \int\limits_{u_{m-1}}^{u_m} du$ и, следовательно, существует единственная точка $c_m \in (u_{m-1}, u_m]$ такая, что $\int\limits_{u_{m-1}}^{u_m} \widetilde{\lambda}(u)\,du = \int\limits_{c_m}^{u_m} du$, а это и означает (10.21) при $r_m^\sigma = c_m$. Более того, если обозначить

$$n_m(u) = \begin{cases} 0, & u \leqslant c_m, \\ 1, & u > c_m, \end{cases}$$

то

$$\int\limits_{u_{m-1}}^{u_m} [\widetilde{\lambda}(u) - n_m(u)]\,du = 0,$$

$$\int\limits_{u_{m-1}}^{s} [\widetilde{\lambda}(u) - n_m(u)]\,du \leqslant \int\limits_{u_{m-1}}^{c_m} [\widetilde{\lambda}(u)]\,du \leqslant c_m - u_{m-1} \leqslant M = \mathrm{const} \tag{10.22}$$

при $s \in [u_{m-1}, u_m]$, так как из (10.21) следует $c_m - u_{m-1} \leqslant u_m - u_{m-1} \leqslant M$ — рис. 10.

Заметим, что так как $\underline{M} \leqslant \dfrac{d\widetilde{\lambda}(u)}{du} \leqslant \overline{M}$, то $\underline{K} \leqslant |c_m - c_{m-1}| \leqslant \overline{K} = \mathrm{const}$, и, следовательно,

$$|r_m - r_{m-1}| \geqslant K|r_m|^{1-\sigma}, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad K = \mathrm{const}\,. \tag{10.23}$$

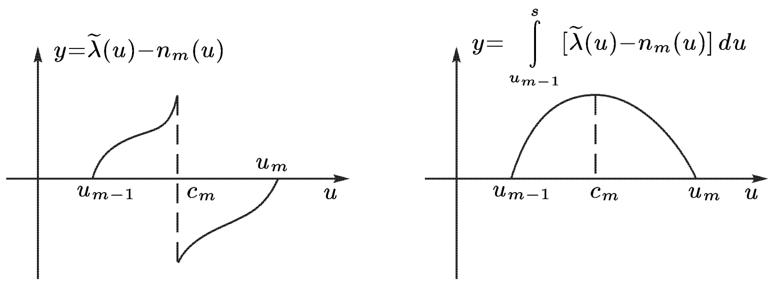

Рис. 10

Теперь положим $|z_m| = r_m$, $\eta_m = p_0$, $m = \overline{1,\infty}$. Аналогично определим $\{z_m\}$ в соответствии с $\lambda(t)$, при $t \leqslant -R_0$. Полученная последовательность $\{z_m\} = \{z_{+m}\} \cup \{z_{-m}\} \in N(\lambda, \sigma)$. Действительно, рассмотрим для определенности только $\{z_{+m}\}$, $m = \overline{1,\infty}$ при $\lambda(t) \not\equiv 0$, $t \geqslant R_0$. По построению имеем $n^{+1}(r,p) = \Delta_0(p) n_0(r)$, где $n_0(r) = \sum\limits_{r_m<r} n_m(r^\sigma)$. Используя (10.22), получим

$$|\Theta(r)| = \Big|\int\limits_{R_0}^{r} [\lambda(s) - n_0(s)]\, s^{\sigma-1}\, ds\Big| =$$

$$= \sigma^{-1}\Big| \sum_{u_j^\sigma<r} \int\limits_{u_{j-1}}^{u_j} [\widetilde{\lambda}(u) - n_j(u)]\, du + \int\limits_{u_{m-1}}^{r^{1/\sigma}} [\widetilde{\lambda}(u) - n_m(u)]\, du\Big| \leqslant M$$

при $r^{1/\sigma} \in [u_{m-1}, u_m]$, откуда

$$\Big|\int\limits_{r}^{\infty} s^{-1}[\lambda(s) - n_0(s)]\, ds\Big| = \Big|\int\limits_{r}^{\infty} s^{-\sigma}\, d\Theta(s)\Big| =$$

$$= \Big|r^{-\sigma}\Theta(r) + \sigma \int\limits_{r}^{\infty} s^{-\sigma-1}\Theta(s)\, ds\Big| \leqslant M r^{-\sigma}.$$

Следовательно, $n^{+1}(r,p) = \Delta_0(p)\lambda(r) + h_2(r,p)$ — имеет вид (10.19), $h_2(r,p) = n^{+1}(r,p) - \Delta_0(p)\lambda(r)$. Аналогично рассматривается последовательность $\{z_{-m}\}$ при $\lambda(t) \not\equiv 0$, $t \leqslant -R_0$. В случае $\lambda(t) \equiv 0$, $\pm t \geqslant R_0$ имеем по построению $n^{\pm1}(r,p) \equiv 0$, т. е. опять-таки выполнено (10.19) ($h_k^{\pm1} \equiv 0$, $k = 1, 2$).

Заметим, что в приведенном примере в силу (10.23) имеем

$$|z_{m\pm l} - z_m| \geqslant K|z_m|^{1-\sigma}, \quad l = \overline{1,\infty}, \quad m = \overline{-\infty,\infty}, \quad K = \text{const}\,. \tag{10.24}$$

10.3.3. Инвариантность класса $N(\lambda, \sigma)$. Из определения класса $N(\lambda, \sigma)$ легко усматривается, что перестановка любого конечного числа членов последовательности $\{z_m\} \in N(\lambda, \sigma)$ не выводит ее из этого класса.

Теорема 10.3. *Пусть $\xi : \overline{D}^{\pm} \to \overline{D}^{\pm}$ — гомеоморфизм, удовлетворяющий условию*

$$|z^{-1}\xi(z) - 1| \leqslant M|z|^{-\nu}, \quad \nu > 2\sigma, \quad |z| \geqslant R. \tag{10.25}$$

Тогда, если $\{z_m\} \in N(\lambda, \sigma)$, то и $\{\xi_m = \xi(z_m)\} \in N(\lambda, \sigma)$.

Доказательство. Во-первых, при $\nu > \sigma$ области $\{z \,|\, |\eta(z)| \in [p_0, p_1]\}$ инвариантны для преобразования (10.25) при достаточно больших $|z|$. Действительно, из (10.25) имеем

$$\Big| |\xi_m|/|z_m| - 1 \Big| \leqslant M|z_m|^{-\nu}, \quad |\eta(\xi_m) - \eta_m| \leqslant M|z_m|^{\sigma-\nu}, \tag{10.26}$$

т. е. $\eta(\xi_m) \in [p_0 - \delta, p_1 + \delta]$ при $|\eta_m| \in [p_0, p_1]$, $|z_m| \to \infty$ $\forall \delta > 0$. Отсюда следует, что, изменив при необходимости конечное число членов последовательности $\{\xi_m\}$, можно считать, что $\{\xi_m\} = \{\xi_{+m}\} \cup \cup \{\xi^1, \ldots, \xi^l\} \cup \{\xi_{-m}\}$, $m = \overline{1, \infty}$, причем $\xi_{\pm m} = \xi(z_{\pm m})$; $\xi^s = \xi(z^s)$, $s = \overline{1, l}$. Рассмотрим последовательность $\{\xi_m\}$, $m = \overline{1, \infty}$ и пусть $n_0(r, p)$ — ее считающая функция (10.18), $n(r, p)$ — считающая функция последовательности $\{z_m\}$. Введем $\xi_m^* = |\xi_m| \exp\{i\eta_m |\xi_m|^{-\sigma}\}$ и пусть $n_*(r, p)$ — считающая функция последовательности $\{\xi_m^*\}$, $f_2(r, p) = n_*(r, p) - n(r, p)$. Тогда из (10.26) получим

$$|f_2(r, p)| \leqslant n(r_+, p) - n(r_-, p), \tag{10.27}$$

$r_{\pm} = r(1 \pm M r^{-\nu})$ (см. рис. 11), так как только за счет точек $\{z_m\}$, расположенных в заштрихованных на рис. 11 областях, и может увеличиваться (или уменьшаться) $n_*(r, p)$ по сравнению с $n(r, p)$.

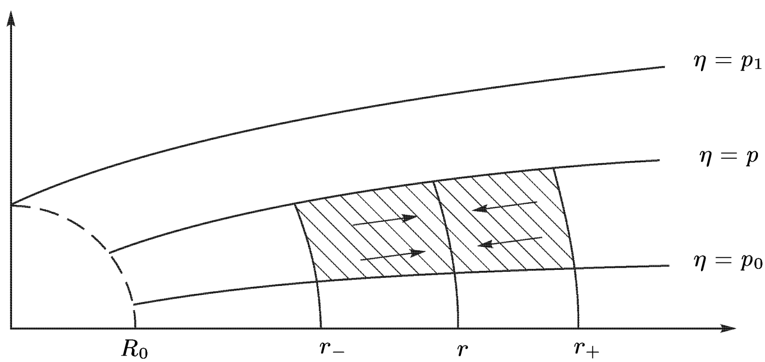

Рис. 11

Деля обе части (10.27) на r, интегрируя, делая замену $r = r_\pm$, соответственно, и, учитывая, что $n(r,p) \leqslant Mr^\sigma$, посредством элементарных преобразований получим

$$\int\limits_r^R \frac{|f_2(s,p)|}{s}\,ds \leqslant \int\limits_{r_+}^{R_+} \frac{n(s,p)}{s}\,ds - \int\limits_{r_-}^{R_-} \frac{n(s,p)}{s}\,ds + O(r^{\sigma-\nu}),\ R \geqslant r,$$

откуда вновь с учетом $n(r,p) \leqslant Mr^\sigma$ находим

$$\int\limits_r^R \frac{|f_2(s,p)|}{s}\,ds \leqslant Mr^{\sigma-\nu} \leqslant Mr^{-\sigma}. \tag{10.28}$$

Теперь пусть $f_1(r,p) = n_0(r,p) - n_*(r,p)$. Так как $|\xi_m^*| = |\xi_m|$, то $f_1(r,p_1) = f_1(r,-p_1) \equiv 0$ и с учетом (10.26)

$$|f_1(R,p) - f_1(R,p)| \leqslant n_*(R,p^+) - n_*(R,p^-), \tag{10.29}$$

$$p^\pm = p \pm Mr^{\sigma-\nu}, \quad R \geqslant r$$

(на рис. 12 заштрихованы области, за счет нулей, расположенных в которых, только и может измениться $n_0(r,p)$ по сравнению с $n_*(r,p)$).

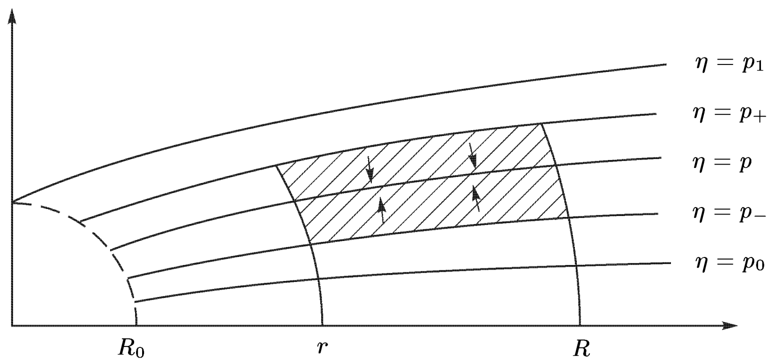

Рис. 12

Поскольку $n_*(r,p) \leqslant Mr^\sigma$, то из (10.29) имеем

$$\int\limits_{-p_1}^{p_1} |f_1(R,p) - f_1(r,p)|\,dp \leqslant \int\limits_{-p_1^+}^{-p_1^-} n_*\,dp + \int\limits_{p_1^-}^{p_1^+} n_*\,dp \leqslant MR^\sigma r^{\sigma-\nu}.$$

Тогда для любого $r > R_0$, выбрав k так, чтобы $2^k R_0 \leqslant r \leqslant 2^{k+1} R_0$, получим

$$\int_{-p_1}^{p_1} |f_1(r,p)|\,dp \leqslant \int_{-p_1}^{p_1} |f_1(R_0,p)|\,dp + \\ + \sum_{j=1}^{k} \int_{-p_1}^{p_1} |f_1(2^j R_0,p) - f_1(2^{j-1}R_0,p)|\,dp + \\ + \int_{-p_1}^{p_1} |f_1(r,p) - f_1(2^k R_0,p)|\,dp \leqslant M + M\sum_{j=0}^{k} 2^{\sigma(j+1)} \cdot 2^{j(\sigma-\nu)} \leqslant M, \tag{10.30}$$

ибо $\nu > 2\sigma$. Из представления $n_0(r,p) = n(r,p) + f_1(r,p) + f_2(r,p)$ и (10.28), (10.30) следует, что для $n_0(r,p)$ имеет место представление (10.19), (10.20), что и доказывает утверждение теоремы для $\{\xi_{+m}\}$. Доказательство для $\{\xi_{-m}\}$ совершенно аналогичное.

Следствие. *Если последовательность гомеоморфизмов* ξ_k, $k = \overline{0,\infty}$ *удовлетворяет* (10.25) *с абсолютными постоянными* M, ν, R, *то для считающих функций* $n_k^{\pm 1}(r,p)$ *условия* (10.19), (10.20), *выполнены с абсолютными постоянными* M, p_0, p_1. *Если вдобавок* $\xi_k(z_m) \to \xi_0(z_m)$, $k \to \infty$, $\forall\, m$, *то последовательность* $\{\xi_k(z_m)\}$ *сходится к* $\{\xi_0(z_m)\}$ *в классе* $N(\lambda,\sigma)$.

Теперь необходимо для функции $G(t) = |G(t)|\exp\{2\pi i\lambda(t) + ia(t)\} \in \Lambda_\sigma$ и последовательности $\{z_m\} \in N(\lambda,\sigma)$ построить решение задачи факторизации (A') $X^\pm(z)$ с нулями (полюсами) в точках $\{z_m\}$, удовлетворяющее условиям (10.5). Проделаем это построение с подробными доказательствами. Для этого нам потребуются некоторые предварительные сведения из теории функций.

10.3.4. Порядок и тип целых функций. Пусть $F(z)$ — целая (т. е. аналитическая в $\mathbb{C}$) функция, $M_F(r) = \max\limits_{|z|\leqslant r} |F(z)|$.

Порядком $F(z)$ называется число

$$\sigma = \sigma_F = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_F(r)}{\ln r}.$$

Будем рассматривать только функции конечного порядка $\sigma_F < \infty$. Следуя [9], любое число $\sigma > \sigma_F$ будем называть *формальным порядком* $F(z)$. Обозначим

$$\delta = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_F(r)}{r^\sigma}, \quad h(\Theta) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|F(re^{i\Theta})|}{r^\sigma}, \quad \Theta \in [-\pi,\pi];$$

δ и $h(\Theta)$ называются соответственно *типом* и *индикатором* $F(z)$ при формальном порядке σ. Если $\delta = h(\Theta) \equiv 0$, то $F(z)$ — функция минимального типа (при порядке σ). Таким образом, при $\sigma > \sigma_F$ $F(z)$ — всегда минимального типа. Если $\sigma = \sigma_F$, то $\delta = \delta_F$ и $h(\Theta) = h_F(\Theta)$ называются соответственно типом и индикатором $F(z)$ [9, 17, 10].

Пусть последовательность $Z = \{z_m\}$, $z_m \to \infty$, при $|m| \to \infty$. Скажем, что Z принадлежит классу сходимости при формальном показателе сходимости ω, если

$$\sum_m |z_m|^{-\omega} < \infty.$$

Вообще, *показателем сходимости* последовательности Z называется число

$$\gamma = \inf\{\omega \mid \sum_m |z_m|^{-\omega} < \infty\} \quad [17].$$

10.3.5. Свойства целых функций.

Свойство 1. Пусть $Z = \{z_m\}$ принадлежит классу сходимости при целом формальном показателе l. Тогда произведение

$$F(z) = \prod_m (1 - z/z_m) \exp P_q(z/z_m), \quad P_q(\zeta) = \sum_{s=1}^{q} s^{-1}\zeta^s, \quad q = l - 1$$

равномерно сходится при $|z| < R$, $\forall\, R > 0$, т. е. $F(z)$ — целая функция, причем $F(z)$ — минимального типа при формальном порядке l [17].

Свойство 2. Если $F(z)$ — минимального типа при формальном порядке ω и $Z = \{z_m\}$ — последовательность ее нулей, то Z принадлежит классу сходимости при показателе ω.

Свойство 3. Если $F_1(z)$, $F_2(z)$ — целые функции формального порядка σ с одинаковыми нулями, то $F_1(z) = F_2(z) \exp[Q(z)]$, где $Q(z)$ — многочлен, $\deg Q \leqslant \sigma$ [17].

Свойство 4. Если в угле $\{z \mid \arg z \in [\alpha, \beta]\}$ нет нулей $F(z)$ и $F(z)$ — минимального типа при формальном порядке σ, то существует предел [9]

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} \ln|F(re^{i\Theta})| \equiv 0, \quad \Theta \in (\alpha, \beta).$$

Пусть теперь функция $F(z)$ аналитична в угле

$$E(\alpha, \beta) = \{z \mid \arg z \in (\alpha, \beta)\}, \quad \beta > \alpha,$$

непрерывна в $\overline{E}(\alpha, \beta) = \{z \mid \arg z \in [\alpha, \beta]\}$ и $\ln|F(z)| \leqslant M|z|^{\mu}$, $z \in \overline{E}(\alpha, \beta)$, при некотором $\mu > 0$, т. е. $F(z)$ — конечного порядка в $\overline{E}(\alpha, \beta)$ [9]. Следуя Н. В. Говорову, назовем *порядком* $F(z)$ число

$$\sigma_F = \inf\{\sigma \mid h(\Theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-\sigma} \ln|F(re^{i\Theta})| \equiv 0, \quad \Theta \in [\alpha, \beta]\}. \qquad (10.31)$$

Любое число $\sigma \geqslant \sigma_F$ назовем *формальным порядком* $F(z)$, а $h(\Theta)$ вида (10.31) — *индикатором* при формальном порядке σ. Скажем, что $F(z)$ — *минимального типа при формальном порядке* σ, если

$$\ln|F(z)| \leqslant o(1)\cdot|z|^{\sigma}, \quad z\to\infty, \quad z\in\overline{E}(\alpha,\beta). \tag{10.32}$$

Свойство 5. Пусть $F(z)$ ограничена в $\overline{D}^{\,+} = E[0,\pi]$, $Z=\{z_m\}$ — ее внутренние нули, т. е. $z_m\in E(0,\pi))$ и $|z_m|\geqslant\delta>0$. Тогда

$$\sum_m r_m^{-1}|\sin\varphi_m| \leqslant M<\infty, \quad z_m = r_m e^{i\varphi_m};$$

$F(z)$ — вполне регулярного роста при формальном порядке $\sigma=1$, т. е. индикатор $h(\Theta)$ в (10.31) определен равенством

$$h(\Theta) = \lim_{\substack{r\to\infty\\ r\overline{\in}E_0}} r^{-1}\ln|F(re^{i\Theta})|, \quad \Theta\in[0,\pi],$$

причем стремление к пределу равномерное относительно Θ, т. е.

$$|\ln|F(re^{i\Theta})|h(\Theta)r| \leqslant o(1)\cdot r,$$

$r\to\infty$, $r\overline{\in}E_0$, $o(1)$ — не зависит от Θ. Здесь E_0 — множество нулевой относительной меры.

Свойство 6. Пусть $z_m\to\infty$ при $m\to\infty$, $z_m\in D^+$ и

$$\sum_m r_m^{-1}|\sin\varphi_m|<\infty, \quad z_m = r_m e^{i\varphi_m}, \tag{10.33}$$

тогда произведение

$$\Pi_0(z) = \prod_m \frac{1-z/z_m}{1-z/\overline{z}_m} \tag{10.34}$$

сходится равномерно при $|z|<R$, $z\in\overline{D}^{\,+}$, $\forall\, R>0$ $|\Pi_0(z)|\leqslant 1$, $z\in\overline{D}^{\,+}$; $|\Pi_0(t)|\equiv 1$, $t\in L$. Эти результаты доказаны в [9, с. 10–70].

Свойство 7. Пусть $Z=\{z_m\}\subset D^+$, выполнено (10.23) и $\Pi_0(z)$ — вида (10.34). Тогда индикатор

$$h(\Theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\ln|\Pi_0(re^{i\Theta})| = \lim_{\substack{r\to\infty\\ r\overline{\in}E_0}} r^{-1}\ln|\Pi_0(re^{i\Theta})| \equiv 0, \quad \Theta\in[0,\pi],$$

т. е.

$$\Big|\ln|\Pi_0(z)|\Big| \leqslant |z|\cdot o(1), \quad |z|\to\infty, \quad |z|\overline{\in}E_0,$$

где E_0 — множество нулевой относительной меры.

Доказательство. Положим

$$h(\Theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\ln|\Pi_0(re^{i\Theta})|, \quad \Theta\in[0,\pi].$$

Так как $|\Pi_0(z)| \leqslant 1$, $z \in \overline{D}^+$ и $|\Pi_0(t)| \equiv 1$, $t \in L$, то $h(\Theta) \leqslant 0$, $h(0) = h(\pi) = 0$. Пусть $\Theta \in [0, \pi]$ — фиксировано, покажем, что $h(\Theta) = 0$. Выберем η, δ, $0 < \eta < \min(0, \pi - \Theta)$, $0 < \delta < 1/4 \sin^2 \eta/2$, и разобьем нули $\Pi_0(z)$ на два множества

$$Z = U \cup V, \quad U = \left\{u_m = r_m e^{i\varphi_m} \,\big|\, |\sin \varphi_m| < \delta\right\},$$

$$V = \left\{v_m = R_m e^{i\Theta_m} \,\big|\, |\sin \Theta_m| \geqslant \delta\right\},$$

и, соответственно, $\Pi_0(z) = \Pi_1(z)\,\Pi_2(z)$, $\Pi_1(U) \equiv 0$, $\Pi_2(V) \equiv 0$. Для V имеем в силу (10.33) $\sum\limits_m R_m^{-1} \leqslant M\delta^{-1}$, т. е. V принадлежит классу сходимости при формальном показателе $\omega = 1$, откуда с помощью свойства 1

$$\Pi_2(z) = \frac{\prod\limits_m (1 - z/v_m)}{\prod\limits_m (1 - z/\overline{v}_m)} = \frac{F_2(z)}{\overline{F}_2(\overline{z})}.$$

При этом целая функция $F_2(z)$ — минимального типа при формальном порядке $\sigma = 1$, т. е.

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln|F_2(re^{i\varphi})| \equiv 0, \quad \varphi \in [0, \pi],$$

и так как $V \subset D^+$, то по свойству 4

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1} \ln|F_2(re^{i\varphi})| \equiv 0, \quad \varphi \in [-\pi, 0],$$

откуда

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln|\Pi_2(re^{i\varphi})| \equiv 0.$$

Для точек $u_m \in U$ при $\eta \leqslant \arg z \leqslant \pi - \eta$ имеем ([9, с. 77])

$$\ln \frac{1 - z/u_m}{1 - z/\overline{u}_m} = \begin{cases} \dfrac{2iz \sin \varphi_m}{r_m - z}\,(1 + \beta(z, u_m)), & \varphi_m < \dfrac{\pi}{4}, \\[2ex] \dfrac{2iz \sin \varphi_m}{r_m + z}\,(1 + \beta(z, u_m)), & \varphi_m > \dfrac{3\pi}{4}, \end{cases}$$

причем $|\beta(z, u_m)| \leqslant 8 \sin \eta/2$, откуда при достаточно малом η и $z = re^{i\Theta}$ получаем

$$\left| \ln\left|\frac{1 - z/u_m}{1 - z/\overline{u}_m}\right| \right| \leqslant Mr\frac{|\sin \varphi_m|}{r + r_m}, \quad M = M(\delta, \eta),$$

т. е.

$$\left| \ln|\Pi_1(re^{i\Theta})| \right| \leqslant Mr \sum_m \frac{|\sin \varphi_m|}{r + r_m} \equiv Mr\varepsilon(r). \tag{10.35}$$

Покажем, что $\varepsilon(r) \to 0$, $r \to \infty$. Именно, пусть константа K такая, что

$$\sum_{|m|>K} r_m^{-1} |\sin \varphi_m| < \varepsilon/2,$$

а при $|m| \leqslant K$ пусть $r > R = R(K)$ так, что $|r_m + r|^{-1} \leqslant \varepsilon/4K$. Тогда при $r > R$

$$\varepsilon(r) \leqslant \sum_{|m|\leqslant K} (r_m + r)^{-1} + \sum_{|m|>K} r_m^{-1} |\sin \varphi_m| \leqslant \varepsilon.$$

Итак, из (10.35) следует

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1} \ln |\Pi_1(re^{i\Theta})| = 0,$$

откуда

$$h(\Theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-1} \ln |\Pi_2(re^{i\Theta})| + \lim_{r\to\infty} r^{-1} \ln |\Pi_1(re^{i\Theta})| = 0.$$

Оставшиеся утверждения следуют из свойства 5.

Замечание. Все перечисленные для $E[0, \pi] = \overline{D}^+$ результаты справедливы и для $D^- = E[-\pi, 0]$.

10.3.6. Некоторые вспомогательные результаты. Пусть $q > 0$ — целое, $r(t) = t(t^2 + 1) \ldots (t^2 + q^2)$. Введем весовые пространства Гельдера

$$C_q^\alpha(L) = \{f(t) \in C(L) \,|\, f(t) \in C^\alpha[-1, 1],$$

$$\varphi(t) \in C^\alpha[-1, 1], \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(t) = f(1/t) r^{-1}(1/t)\}.$$

Соответственно введем весовые нормы Гельдера (п. 1.1):

$$\|f(t)\|^{(\alpha,q)} = \|f(t)\|_{L_1}^{(\alpha)} + \|\varphi(t)\|_{L_1}^{(\alpha)}, \quad L_1 = \{t \mid |t| \leqslant 1\}.$$

Далее пусть

$$D_q^\alpha = \big\{f(t) \in C_q^\alpha(L) \,|\, |f(t)| \leqslant M = \mathrm{const}\big\},$$

$$\langle f \rangle_q^\alpha = \sup_{t\in L} |f(t)| + \|f(t)\|^{(\alpha,q)}$$

и, наконец, обозначим

$$H = H(\alpha, q) = \big\{f(t) \in C_q^\alpha(L) \,|\, \operatorname{Im} f(t) \equiv 0\big\}, \quad H_0 = H \cap D_q^\alpha.$$

В этих терминах теорема 10.2 Н. В. Говорова легко переформулируется следующим образом:

Теорема 10.2′.

1. *Если* $f(t) \in C^\alpha(L)$, $f(\infty) = 0$, $\Psi(t) \in D_q^\gamma$, *то* $\zeta(t) = f(t)\Psi(t) \in$ $\in C^\beta(L)$, $\zeta(\infty) = 0$, $\|\zeta(t)\|^{(\beta)} \leqslant M \|f(t)\|^{(\alpha)} \langle \Psi \rangle_q^\gamma$, $\beta = \alpha\gamma(2q + 1)^{-1} > 0$.

2. *Если* $\Psi^\pm(z) \in C^\alpha(\overline{D}^\pm)$, $\Psi^\pm(\infty) = 0$, $X^\pm(t) \in D_q^\gamma$, $X^\pm(z)$ *удовлетворяет* (10.5) *и* $\Phi^\pm(z) = X^\pm(z)\Psi^\pm(z)$ *аналитична в* $D^\pm$, *то* $\Phi^\pm(z) \in C^\beta(\overline{D}^\pm)$, $\Phi^\pm(\infty) = 0$,

$$\|\Phi^\pm(z)\|^{(\beta)} \leqslant M\|\Psi^\pm(z)\|^{(\alpha)}\langle X^\pm(t)\rangle_q^\gamma, \quad \beta = \alpha\gamma(2q+1)^{-1}.$$

Здесь $\|f(t)\|^{(\alpha)}$, $\|\Psi^\pm(t)\|^{(\alpha)}$ — обычные нормы Гельдера в $C^\alpha(L)$, $C^\alpha(\overline{D}^\pm)$,

$$\|f(t)\|^{(\alpha)} = \|f(t)\|_{L_1}^{(\alpha)} + \|f(1/t)\|_{L_1}^{(\alpha)};$$

$$\|\Psi^\pm(z)\|^{(\alpha)} = \|\Psi^\pm(z)\|_{D_1^\pm}^{(\alpha)} + \|\Psi^\pm(1/z)\|_{D_1^\pm}^{(\alpha)}, \quad D_1^\pm = \{z \in \overline{D}^\pm \mid |z| \leqslant 1\}.$$

Введем операторы

$$\begin{gathered} S_0(\Psi \mid z) = \frac{z}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Psi(s)}{s(s-z)}\,ds, \quad z \in \overline{D}^\pm, \\ S_0\Psi = S_0(\Psi \mid t) = \frac{t}{\pi i}\int\limits_L \frac{\Psi(s)}{s(s-t)}\,ds, \quad t \in L \end{gathered} \tag{10.36}$$

и положим

$$S_0^\pm(\Psi \mid t) = \lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^\pm}} S_0(\Psi \mid z), \quad t \in L.$$

В окрестности точки $z = 0$ интеграл понимается в следующем смысле:

$$z\int\limits_{-1}^{1} \frac{\Psi(s)}{s(s-z)}\,ds = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\Psi(s)}{s-z}\,ds - \int\limits_{-1}^{1} \frac{\Psi(s)}{s}\,ds.$$

Теорема 10.4. *Пусть* $\Psi(t) \in D_q^\alpha$, *тогда*

1. *определены функции* $S_0(\Psi \mid z)$, $S_0(\Psi \mid t) \in C_q^\alpha(L)$ *и*

$$S_0^\pm(\Psi \mid t) = \frac{1}{2}\,S_0(\Psi \mid t) \pm \frac{1}{2}\,\Psi(t); \tag{10.37}$$

2. $|S_0(\Psi \mid z)| \leqslant M\langle\Psi\rangle_q^\alpha |z|^{1-\beta}$, $\beta = \alpha^2(2q+1)^{-1} > 0$;

3. *если* $\Psi \in H_0$, *то* $|\operatorname{Re} S_0(\Psi \mid z)| \leqslant M\langle\Psi\rangle_q^\alpha$, $z \in \overline{D}^\pm$; *если и* $S_0(\Psi \mid t) \in D_q^\alpha$, *то* $S_0^2\Psi = \Psi(t) - \Psi(0)$.

4. $S_0 : C^\alpha(L) \to C^\alpha(L)$; $\|S_0 f\|^{(\alpha)} \leqslant M\|f\|^{(\alpha)}$.

Доказательство. Так как $|\Psi(s)| \leqslant M$ и $\Psi(s) \in C^{\alpha}[-R, R]$, $\forall R > 0$, то несобственные сингулярные интегралы (10.36) сходятся. Далее, так как $\forall R > 0$ функция $\Psi(s)$ в $C^{\alpha}[-R, R]$ имеет оценку $\|\Psi\|_R^{(\alpha)} \leqslant M\langle\Psi\rangle_q^{\alpha} R^{2q+1}$, то с помощью обычных свойств интеграла типа Коши в пространствах Гельдера находим, что $S_0(\Psi \,|\, t) \in C_q^{\alpha}(L)$.

Утверждение (10.37) — это обычные формулы Сохоцкого.

Непосредственно с помощью теоремы 10.2′ получим

$$\frac{1}{z}\, S_0(\Psi \,|\, z) \in C^{\beta}(\overline{D}^{\,\pm}), \quad \frac{1}{z}\, S_0 \cdot S_0(\Psi \,|\, z) \underset{z\to\infty}{\to} 0,$$

$$\left\|\frac{1}{z}\, S_0(\Psi \,|\, z)\right\|^{(\beta)} \leqslant M\langle\Psi\rangle_q^{\alpha},$$

откуда $\|S_0(\Psi \,|\, z)\| \leqslant M\langle\Psi\rangle_q^{\alpha}|z|^{1-\beta}$.

Итак, установлены первые два утверждения теоремы.

Рассмотрим третье утверждение. Если $\operatorname{Im}\Psi \equiv 0$, то $\operatorname{Re} S_0(\Psi \,|\, t) \equiv 0$, значит

$$|\operatorname{Re} S_0^{\pm}(\Psi \,|\, t)| = |\pm \Psi(t)/2| \leqslant M\langle\Psi\rangle_q^{\alpha}.$$

Учитывая, что порядок аналитических в $D^{\pm}$ функций $\exp[\pm S_0(\Psi \,|\, z)]$ меньше единицы, по принципу Фрагмена–Линделефа для полуплоскости [17] получим

$$|\exp(\pm S_0(\Psi \,|\, z))| \leqslant \exp(M\langle\Psi\rangle_q^{\alpha}),$$

и тем самым

$$|\operatorname{Re} S_0(\Psi \,|\, z)| \leqslant M\langle\Psi\rangle_q^{\alpha}.$$

Пусть теперь $\varphi(t) = S_0(\Psi \,|\, t) \in D_q^{\alpha}$. Обозначим $\Phi_1(z) = S_0(\Psi \,|\, z)$, $\Phi_2(z) = S_0(\varphi \,|\, z)$. Заметим, что $\Psi(t) = \Phi_1^{+}(t) - \Phi_1^{-}(t)$, $\varphi(t) = \Phi_2^{+}(t) - \Phi_2^{-}(t) = \Phi_1^{+}(t) + \Phi_1^{-}(t)$; $S_0(\varphi \,|\, t) = \Phi_2^{+}(t) + \Phi_2^{-}(t)$; откуда $\Phi_1^{-}(t) + \Phi_2^{-}(t) = \Phi_2^{+}(t) - \Phi_1^{+}(t) = F(t)$, где

$$F(z) = \begin{cases} \Phi_1^{-}(z) + \Phi_2^{-}(z), & z \in \overline{D}^{\,-}, \\ \Phi_2^{+}(z) - \Phi_1^{+}(z), & z \in \overline{D}^{\,+}. \end{cases}$$

Функция $F(z)$ целая и так как $\Phi_{1,2}^{\pm}(z) \leqslant M|z|^{1-\beta}$, $\beta > 0$, то $F(z) = \text{const}$ [17]. Однако, очевидно, $\Phi_1^{-}(0) = -\dfrac{\Psi(0)}{2}$, $\Phi_2^{-}(0) = -\dfrac{\varphi(0)}{2} = 0$, т. е. имеем

$$\Phi_1^{-}(z) + \Phi_2^{-}(z) = -\frac{\Psi(0)}{2} = \Phi_2^{+}(z) - \Phi_1^{+}(z),$$

откуда

$$S_0\varphi = S_0^2\Psi = \Phi_2^+(t) + \Phi_2^-(t) =$$
$$= \Phi_1^+(t) - \frac{\Psi(0)}{2} - \Phi_1^-(t) - \frac{\Psi(0)}{2} = \Psi(t) - \Psi(0).$$

Третье утверждение теоремы полностью доказано.

Последнее утверждение, очевидно, следует из обычных свойств интеграла типа Коши, если $S_0(\Psi\,|\,t)$ разложить в сумму простых дробей.

Введем в рассмотрение класс функций

$$\chi_0 = \big\{G(t)\mid \ln G(t) = \Psi_1(t) + i\alpha + S_0(\Psi_0\,|\,t), \Psi_j \in H_0, j = 1,2\big\};$$

$\alpha = \mathrm{const}$, т. е. $G(t) \in \chi_0 \Longleftrightarrow \Psi_1 = \ln|G(t)| \in H_0$,

$$\Psi_0(t) = S_0(i\,\arg G(t) - i\,\arg G(0)\,|\,t) \in H_0.$$

Для функций класса χ_0 имеем решение задачи факторизации

$$X^\pm(z) = \exp\{S_0(\Psi_1\,|\,z) \pm i\frac{\alpha}{2} \pm S_0(\Psi_0\,|\,z)\} \equiv \exp\left(\Psi(G\,|\,z)\right), \quad z \in \overline{D}^{\,\pm},$$

причем из теоремы 10.4 следует, что $X^\pm(z)$ ограничены сверху и снизу в $\overline{D}^{\,\pm}$, $X^\pm(t) \in D_q^\alpha$, $[X^\pm(t)]^{-1} \in D_q^\alpha$.

10.3.7. Решение задачи факторизации. Итак, пусть

$$G(t) = |G(t)|\exp\{2\pi i\lambda(t) + ia(t)\} \in \Lambda_\sigma,$$

и последовательность $Z = \{z_m\}$ принадлежит множеству $N(\lambda,\sigma)$. Разобьем последовательность Z на две части $Z = Z_{+1}\cup Z_{-1}$ так, что $Z_{\pm1}\subset D^\pm$. Построим функции

$$\Psi(Z_{\pm1}\,|\,z) = \ln\prod_{z_m\in Z_{\pm1}}\frac{1 - z/z_m}{1 - z/\overline{z}_m}, \quad z \in \overline{D}^{\,\pm},$$

и пусть

$$\Psi_0(Z\,|\,t) = \Psi(Z_{+1}\,|\,t) - \Psi(Z_{-1}\,|\,t).$$

Нашей ближайшей целью будет доказательство представления

$$G(t) = G_0(t)\exp\{\Psi_0(Z\,|\,t)\}, \qquad G_0(t) \in \chi_0, \tag{10.38}$$

которое разобьем на ряд этапов. Пусть в соответствии с определением класса $N(\lambda,\sigma)$ последовательность Z представлена в виде

$$Z = Z^{+1}\cup Z^0\cup Z^{-1}, \quad Z^\pm = \{z_{\pm m}\,|\,|z_{\pm m}| > R_0,\ \pm\mathrm{Re}\, z_{\pm m} > 0\},$$
$$Z^0 = \{z^1\ldots z^l\,|\,|z^s| \leqslant R_0\}.$$

Обозначая $Z_{\pm1}^j = Z^j\cap D^\pm$, $j = \overline{-1,1}$, приходим к разложениям

$$Z_{\pm1} = Z\cap D^\pm = Z_{\pm1}^{+1}\cup Z_{\pm1}^0\cup Z_{\pm1}^{-1}; \qquad Z^{\pm1} = Z_{+1}^{\pm1}\cup Z_{-1}^{\pm1}.$$

Здесь верхний индекс указывает знак вещественной части членов последовательности Z, нижний — мнимой. Положим $s^{\pm} = \{$ число точек $z^s \in Z^0_{\pm 1}\}$.

Лемма 10.1. *Пусть* $Z \in N(\lambda, \sigma)$. *Тогда*

$$\sum_m r_m^{-1} |\sin\varphi_m| \leqslant M < \infty, \quad z_m = r_m \mathrm{e}^{i\varphi_m}; \tag{10.39}$$

$$\Psi(Z_k^j \,|\, jz) = -z \int\limits_{R_0}^{\infty} dr \int\limits_{A_{j\cdot k}} K_0(r,p,z)\, dn^j(r,p) \quad \textit{при} \quad k\cdot j\cdot z \in \overline{D}^{\pm}. \tag{10.40}$$

Здесь $A_{+1} = [p_0, p_1]$, $A_{-1} = [-p_1, -p_0]$,

$$K_0(r,p,z) = \frac{1}{\zeta(\zeta - z)} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{1}{\overline{\zeta}(\overline{\zeta} - z)} \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial r} = K(r,p,z) - \overline{K}(r,p,\overline{z}),$$

$$\zeta = re^{i\psi}, \quad \psi = pr^{-\sigma} \quad (\eta(\zeta) = p); \quad j,k = \pm 1.$$

Доказательство. Отметим, что в силу (10.39) функции $\Psi(Z_{\pm 1} \,|\, z)$ в (10.40) определены корректно. Пусть

$$n(t) = \{\text{ число } z_m \in (|z| < t)\} =$$
$$= n^{+1}(t, p_1) - n^{+1}(t, -p_1) + n^{-1}(t, p_1) - n^{-1}(t, -p_1) + l, \quad t \geqslant R_0.$$

В силу (10.16) имеем $|\sin\varphi_m| \leqslant M r_m^{-\sigma}$, откуда так как $n(t) \leqslant M t^{\sigma}$, то

$$\sum_m |r_m^{-1}| |\sin\varphi_m| \leqslant M \sum_m r_m^{-1-\sigma} = M \int\limits_{\delta_0}^{\infty} t^{-1-\sigma}\, dn(t) =$$
$$= M + M \int\limits_{\delta_0}^{\infty} t^{-\sigma-2} n(t)\, dt \leqslant M.$$

Рассмотрим сначала функцию $\Psi(Z^{+1}_{+1} \,|\, z)$ в области $\overline{D}^{+}$. Имеем

$$K_0(r,p,z) = -2i\, \frac{\sin\psi + \sigma p r^{-\sigma-1}(r\cos\psi - z)}{(re^{i\psi} - z)(re^{-i\psi} - z)},$$

откуда при $|z| < R$ и достаточно больших r $|K_0(r,p,z)| \leqslant M r^{-\sigma-1}$ и так как $|n^{+1}(r,p)| \leqslant M r^{\sigma}$, то интеграл (10.40) сходится. Далее, введем считающую функцию одной точки z_m:

$$n_m(r,p) = \begin{cases} 0, & r \leqslant r_m \quad \text{или} \quad p \leqslant \eta_m, \\ 0, & r > r_m \quad \text{и} \quad p > \eta_m, \end{cases}$$

и непосредственно найдем

$$-z\int\limits_{R_0}^{\infty} dr \int\limits_{p_0}^{p_1} K(r,p,z)\,dn_m(r,p) = \\ = -z\int\limits_{r_m}^{\infty} \frac{1}{\zeta_m(\zeta_m - z)}\,\frac{\partial \zeta_m}{\partial r}\,dr = \ln(1 - z/z_m),$$

$$-z\int\limits_{R_0}^{\infty} dr \int\limits_{p_0}^{p_1} \overline{K}(r,p,\overline{z})\,dn_m(r,p) = \ln(1 - z/\overline{z}_m),$$

откуда, с учетом $n^{+1}(r,p) = \sum\limits_m n_m(r,p)$, $p > 0$, $z_m \in D^+$, следует (10.40) для $\Psi(Z^{+1}_{+1}\,|\,z)$ в $\overline{D}^+$. Аналогично доказывается (10.40) для $\Psi(Z^{+1}_{-1}\,|\,z)$:

$$\Psi(Z^{+1}_{-1}\,|\,z) = -z\int\limits_{R_0}^{\infty} dr \int\limits_{-p_1}^{-p_0} K_0(r,p,z)\;dn^{+1}(r,p), \quad z \in \overline{D}^-.$$

Наконец, заметим, что последовательность $\widetilde{Z}^{+1} = -Z^{-1}$ расположена в правой полуплоскости, имеет считающую функцию $n^{-1}(r,p)$ и $\widetilde{Z}^{+1}_{\pm 1} = -Z^{-1}_{\mp 1}$, следовательно, $\Psi(\widetilde{Z}^{+1}_{\pm 1}\,|\,z) = \Psi(Z^{-1}_{\mp 1}\,|\,-z)$, откуда, с учетом доказанного выше, и получим формулу (10.40).

Лемма 10.2. *Пусть параметры α, β подчинены условиям $\alpha \geqslant 1$, $\beta > 0$ и $\beta > 1$ при $\alpha = 1$. Тогда для функционала*

$$J(z,p,\alpha,\beta) = \int\limits_{R_0}^{\infty} r^{-\beta}\omega^{-\alpha}\,dr, \quad \omega = |\zeta - z|,$$

$$\zeta = r\exp\{ipr^{-\sigma}\} \quad (\eta(\zeta) = p)$$

при $|\eta(z) - p| \geqslant \delta > 0$ имеют место оценки

$$J(z,p,\alpha,\beta) \leqslant M|z|^{-\gamma}, \quad \alpha > 1; \qquad J(z,p,1,\beta) \leqslant M|z|^{-1};$$

$$\gamma = \min(\alpha - 1, \gamma_0), \quad \gamma_0 = \beta - (\alpha - 1)(\sigma - 1).$$

Доказательство. Пусть $z = ve^{i\varphi}$. Очевидно, достаточно доказать лемму 10.2 при $v \geqslant 2R_0$. Представим функционал $J(z, p, \alpha, \beta)$ в форме

$$J(z, p, \alpha, \beta) = \int\limits_{R_0}^{v/2} \ldots + \int\limits_{v/2}^{3v/2} \ldots + \int\limits_{3v/2}^{+\infty} \ldots = J_{-1} + J_0 + J_1.$$

При $|r - v| \geqslant v/2$ имеем $\omega \geqslant M(r + v)$, откуда

$$J_1 \leqslant M \int\limits_{3v/2}^{+\infty} \frac{dr}{r^\beta (r+v)^\alpha} \leqslant M v^{1-\alpha-\beta};$$

$$J_{-1} \leqslant M \int\limits_{R_0}^{v/2} \frac{dr}{r^\beta (r+v)^\alpha} \leqslant M v^{1-\alpha} \int\limits_{0}^{1/2} \frac{du}{(u+1)^\alpha} \leqslant M v^{1-\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

При $\alpha = 1$ по условию леммы $\beta > 1$ и поэтому

$$J_{-1} \leqslant M \int\limits_{R_0}^{v/2} \frac{dr}{r^\beta (r+v)} \leqslant M v^{-1} \int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{r^\beta} \leqslant M v^{-1}.$$

Наконец, в J_0 сделаем замену переменной $t = r/v - 1 \in [-1/2, 1/2]$. Так как $|\Theta| = |\varphi - \psi| \geqslant M v^{-\sigma}$ при $\psi = pr^{-\sigma}$, $|r - v| \leqslant v/2$, то

$$|(t+1) - e^{i\Theta}|^2 = t^2 + 4(t+1)\sin^2 \frac{\Theta}{2} \geqslant t^2 + \Theta_*^2, \quad \Theta_* = M v^{-\sigma},$$

откуда

$$J_0 = v^{1-\alpha-\beta} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{(t+1)^\beta |(t+1) - e^{i\Theta}|^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant M v^{1-\alpha-\beta} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{(t^2 + \Theta_*^2)^{\alpha/2}} \leqslant M v^{1-\alpha-\beta} \Theta_*^{1-\alpha} \int\limits_{(-2\Theta_*)^{-1}}^{(2\Theta_*)^{-1}} \frac{du}{(u^2+1)^{\alpha/2}}.$$

Следовательно, при $\alpha > 1$ имеем $J_0 \leqslant M v^{1-\alpha-\beta} \Theta_*^{1-\alpha} \leqslant M v^{-\gamma_0}$, а при $\alpha = 1$, $\beta > 1$, соответственно, $J_0 \leqslant M v^{-\beta} \ln v \leqslant M v^{-1}$. Лемма доказана.

Лемма 10.3. *Пусть функции* $h_k(r,p)$, $k=1,2$ *удовлетворяют условиям* (10.20) *и*

$$T_{k,0}^{\pm 1}(z) = -z\int\limits_{R_0}^{\infty} dr \int\limits_{A_{\pm 1}} K(r,p,z)\, dh_k(r,p), \quad k=1,2.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|T_{k,0}^{\pm 1}(z)| + \left|\frac{d}{dz}\, T_{k,0}^{\pm 1}(z)\right| |z|^{1-\sigma} \leqslant M$$

при $z \in \Omega_\delta\ \forall\, \delta > 0$,

$$\Omega_\delta = \{z\,|\,|z| \geqslant R_0+\delta, \quad |\eta(z)| \overline{\in}\, [p_0-\delta, p_1+\delta]\}.$$

Доказательство. Для определенности будем рассматривать только $T_{k,0}^{\pm 1}(z) = T_{k,0}(z)$. В случае $k=2$ для $T_{2,0}(z)$ интегрированием по частям с учетом равенства $h_2 = -r\Theta_r$ (10.20), получим

$$T_{2,0}(z) = I(z) - I_1(z) + I_0(z) - I_2(z),$$

$$I(z) = z\int\limits_{R_0}^{\infty} dr \int\limits_{p_0}^{p_1} \Theta(r,p)\frac{\partial}{\partial r}\,[r\frac{\partial}{\partial p}\,K(r,p,z)]\,dp;$$

$$I_j(z) = z\int\limits_{R_0}^{\infty} \Theta(r,p_j)\frac{\partial}{\partial r}\,[rK(r,p_{\text{o}},z)]\,dr -$$

$$- z\Theta(R_0,p_j)K(R_0,p_j,z)R_0, \quad j=0,1;$$

$$I_2(z) = zR_0\int\limits_{p_0}^{p_1} \Theta(R_0,p)\frac{\partial}{\partial p}\,K(R_0,p,z)]\,dp.$$

Непосредственным вычислением производных функции $K(r,p,z)$ приходим к следующим оценкам:

$$\left|\frac{\partial}{\partial p}\,K(r,p,z)\right| \leqslant M(r^{-\sigma-1}\omega^{-1} + r^{-\sigma}\omega^{-2}) \equiv MS_p;$$

$$\left|\left(z\frac{\partial}{\partial p}\,K(r,p,z)\right)_z\right| \leqslant Mr\omega^{-1}S_p;$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\,rK(r,p,z)\right| \leqslant M(r^{-\sigma-1}\omega^{-1} + \omega^{-2}) \equiv MS_r; \tag{10.41}$$

$$\left|\left(z\frac{\partial}{\partial r}\,rK(r,p,z)\right)_z\right| \leqslant Mr\omega^{-1}S_r;$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\,r\frac{\partial}{\partial p}\,K(r,p,z)\right| \leqslant M(r^{-\sigma-1}\omega^{-1}+r^{-\sigma}\omega^{-2}+r^{1-\sigma}\omega^{-3}) \equiv MS_{pr};$$

$$\left|\left(z\frac{\partial}{\partial r}\,r\frac{\partial}{\partial p}\,K(r,p,z)\right)_z\right| \leqslant Mr\omega^{-1}S_{pr},$$

где $\omega=|\zeta-z|$, $\zeta=r\exp{(ipr^{-\sigma})}$.

Из (10.41) непосредственно находим $|I_2(z)|\leqslant M$, $|I_2'(z)|\leqslant M|z|^{-1}$ при $|z|\geqslant R_0+\delta$. Поскольку $z\in\Omega_\delta$, $\delta>0$, то при всех $p\in[p_0,p_1]$ выполнены условия леммы 10.2, и с помощью (10.41) и (10.20) получим

$$|I_j(z)|\leqslant M|z|[J(z,p_j,1,2\sigma+1)+J(z,p_j,2,\sigma)]\leqslant M,$$

$$|I_j'(z)|\leqslant M[J(z,p_j,2,2\sigma)+J(z,p_j,3,\sigma-1)]\leqslant M|z|^{\sigma-1}.$$

С другой стороны, при $z\in\Omega_\delta$ имеем $\omega\geqslant M\cdot\min(\omega_0,\omega_1)$, $\omega_j=|\zeta_j-z|$, $\zeta_j=r\exp{(ip_jr^{-\sigma})}$, $j=0,1$, откуда, подставляя в (10.41) ω_j, находим

$$|I_0(z)|\leqslant M\,\max(S_0,S_1),\quad |I_0'(z)|\leqslant M\,\max(\widetilde{S}_0,\widetilde{S}_1);$$

$$S_j=|z|[J(z,p_j,1,2\sigma+1)+J(z,p_j,2,2\sigma)+J(z,p_j,3,2\sigma-1)],$$

$$\widetilde{S}_j=J(z,p_j,2,2\sigma)+J(z,p_j,3,2\sigma-1)+J(z,p_j,4,2\sigma-2),\quad j=0,1.$$

Теперь с помощью леммы 10.2 приходим к окончательным оценкам $|I_0(z)|\leqslant M$, $|I_0'(z)|\leqslant M|z|^{\sigma-1}$.

Обратимся к $T_{1,0}(z)$. Интегрированием по частям с учетом (10.16) получим представление

$$T_{1,0}(z)=z\int\limits_{R_0}^{\infty}dr\int\limits_{p_0}^{p_1}h_1(r,p)\frac{\partial}{\partial p}\,K(r,p,z)\,dp,$$

из которого, аналогично предыдущему, находим

$$|T_{1,0}(z)|\leqslant M\,\max(S_0,S_1),\quad |T_{1,0}'(z)|\leqslant M\,\max(\widetilde{S}_0,\widetilde{S}_1);$$

$$S_j=|z|[J(z,p_j,1,\sigma+1)+J(z,p_j,2,\sigma)],$$

$$\widetilde{S}_j=J(z,p_j,2,\sigma)+J(z,p_j,3,\sigma-1),$$

$j=0,1$. Тогда из леммы 10.2 следуют требуемые неравенства

$$|T_{1,0}(z)|\leqslant M,\quad |T_{1,0}'(z)|\leqslant M|z|^{\sigma-1}.$$

Доказательство леммы для $T_{k,0}^{-1}(z)$ совершенно аналогично.

Лемма 10.4. *Пусть* $T_k^{\pm1}(t)=T_{k,0}^{\pm1}(t)-\overline{T}_{k,0}^{\pm1}(t)$, $t\in L$, $k=1,2$. *Тогда* $T_k^{\pm1}(t)=S_0(\Psi_k^{\pm1}\,|\,t)$, $\Psi_k^{\pm1}\in H_0$, $k=1,2$.

Доказательство. Рассмотрим только $T_k^{+1}(t) = T_k(t)$. Из леммы 10.3 следует, что $T_k(t) \in C_q^\alpha(L)$, $2q+1 \geqslant \sigma+\alpha$ и $|T_k(t)| \leqslant M$, т.е. $T_k \in D_q^\alpha$. Обозначим $\Psi_k(t) = S_0(T_0 \mid t)$, так как $\operatorname{Re} T_k(t) \equiv 0$, то $\operatorname{Im}\Psi_k(t) \equiv 0$. Поскольку интегралы $T_{k,0}(t)$ сходятся абсолютно при $t \in L$, то можно поменять порядок интегрирования в их интегральном представлении. Тогда с учетом формулы

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{ds}{(s-t)(\zeta-s)} = \mp\frac{1}{\zeta-t}, \quad \zeta \in D^\pm, \tag{10.42}$$

имеем

$$\Psi_k = S_0 T_k = t\int\limits_{R_0}^{\infty} dr \int\limits_{A_{+1}} [K(r,p,t) + \overline{K}(r,p,t)]\, dh_k(r,p),$$

и из леммы 10.3 следует $\Psi_k(t) \in D_q^\alpha$, $2q+1 \geqslant \sigma+\alpha$. Поскольку $\operatorname{Im}\Psi_k \equiv \equiv 0$, то $\Psi_k \in H_0$. Ввиду $T_k(0) = 0$ имеет место представление

$$T_k(t) = T_k(t) - T_k(0) = S_0^2 T_k = S_0\Psi_k,\ \Psi_k \in H_0.$$

Замечание. В лемме 10.4 $\langle\Psi_k\rangle_q^\alpha$ зависит от констант M, p_0, p_1 в (10.20).

Лемма 10.5. *Пусть* $b(R_0) = 0$, $|b'(r)| \leqslant Kr^{\sigma-1}$, $K = \mathrm{const}$ *и*

$$Q(z,p) = -z\int\limits_{R_0}^{\infty} b(r)[K(r,p,z) - K(r,0,z)]\, dr.$$

Тогда интеграл $Q(z,p)$ *сходится равномерно по* p, $|p| \in [p_0,p_1]$, *и* z, $|z| \leqslant R$, $\forall\, R > 0$, *причем имеет место неравенство*

$$\sup_{z,p}|\operatorname{Re} Q(z,p)| + \|Q(t,p)\|^{(\alpha,q)} \leqslant M\cdot K, \quad |p| \in [p_0,p_1],$$

$$2q+1 \geqslant \sigma+\alpha.$$

Доказательство. Из тождества

$$z[K(r,p,z) - K(r,0,z)] = \frac{i\sigma\psi z}{r(re^{i\psi}-z)} - \frac{z(1-e^{i\psi})}{(re^{i\psi}-z)(r-z)} = S_0 + S_1$$

при $\psi = pr^{-\sigma}$, $|z| \leqslant R$, $r \geqslant 2R$, получим

$$|S_0| + |S_1| \leqslant M|z|\frac{r^{-\sigma}}{(r+|z|)^2}, \quad \left|\frac{dS_0}{dz}\right| + \left|\frac{dS_1}{dz}\right| \leqslant M\frac{r^{-\sigma}}{(r+|z|)^2},$$

поскольку $|b(r)| \leqslant Kr^{\sigma}$, то

$$|Q_R(z,p)| = |\int\limits_{2R}^{\infty}(S_0+S_1)b(r)\,dr| \leqslant MK, \quad \left|\frac{dQ_R}{dz}\right| \leqslant MK. \qquad (10.43)$$

Во-первых, из (10.43) следует равномерная сходимость интеграла $Q(z,p)$ при $|p| \in [p_0, p_1]$ и $|z| \leqslant R$, при этом в случае $z \in L$ или $\eta(z) = p$ интеграл понимается в смысле главного значения. Кроме того, из (10.43) следует, что $\|Q_R(z,p)\|_R^{(\alpha)} \leqslant MK$, но так как $|b'(r)| \leqslant Kr^{\sigma-1}$, и, следовательно, $\|b(r)\|_R^{(\alpha)} \leqslant KR^{\sigma-\alpha}$, то в силу непрерывности интеграла типа Коши в пространствах Гельдера имеем $\|Q(t,p) - Q_R(t,p)\|_R^{(\alpha)} \leqslant \leqslant MKR^{\sigma-\alpha}$, т.е. $\|Q(t,p)\|_R^{(\alpha)} \leqslant MKR^{\sigma-\alpha}$.

Отсюда следует $Q(t,p) \in C_q^{\alpha}(L)$, $2q+1 \geqslant \sigma+\alpha$, $\|Q(t,p)\|^{(\alpha,q)} \leqslant \leqslant MK$. Из этих же рассуждений получим, что $|Q(z,p)| \leqslant MK|z|^{\sigma}$. Осталось доказать оценку для $|\operatorname{Re} Q(z,p)|$, при этом достаточно рассмотреть случай $|z| \geqslant 2R_0$. Введем обозначения:

$$l_j = \operatorname{Re} S_j,\ P_j = \int\limits_{R_0}^{\infty} b(r) l_j\,dr, \quad j = 0,1, \quad l_0 = -\sigma\psi v \sin\Theta\omega_1^{-2},$$

$$l_1 = -2(r^2 - v^2)v\sin\frac{\psi}{2}\sin\overline{\Theta}\omega_1^{-2}\omega_2^{-2},$$

где $z = ve^{i\varphi}$, $\Theta = \varphi - \psi$, $\overline{\Theta} = \psi/2 - \varphi$, $\omega_1 = |re^{i\psi} - z|$, $\omega_2 = |r - z|$. Пусть $|\varphi| \geqslant \varepsilon$, тогда при $z \to \infty$ имеем $\omega_2 \geqslant M(r+v)$, $k = 1,2$, откуда $|b(r)l_j| \leqslant MKv(r+v)^2$. Таким образом, $|P_j| \leqslant MK$, $M = M(\varepsilon) = = \mathrm{const}$, $j = 0,1$. Предположим теперь, что $|\eta(z)| \leqslant M_0 = \mathrm{const}$, $M_0 > > p_1$ и $\operatorname{Re} z > 0$. Пусть сначала $|\eta(z) - p| \geqslant \delta > 0$. Представим

$$P_j = \int\limits_{R_0}^{\infty} b(r) l_j\,dr$$

в форме

$$P_j = \int\limits_{R_0}^{v/2} \ldots + \int\limits_{v/2}^{3v/2} \ldots + \int\limits_{3v/2}^{+\infty} \ldots = I_j^{(-1)} + I_j^{(0)} + I_j^{(+1)}, \quad j = 0,1.$$

При $|r-v| \geqslant v/2$ вновь $\omega_k \geqslant M(r+v)$, $k=1,2$, откуда аналогично предыдущему $|I_j^{(\pm 1)}| \leqslant MK$, $j=0,1$. Из тождества

$$I_0^{(0)} + I_1^{(0)} = \int\limits_{v/2}^{3v/2} [b(r)-b(v)][l_0+l_1]\,dr + b(v)\int\limits_{v/2}^{3v/2} (l_0+l_1)\,dr = I_3 + I_4,$$

в силу неравенства $|b(r)-b(v)| \leqslant MKr^{\sigma-1}|r-v|$ и $|\psi| + |\Theta| + |\overline{\Theta}| \leqslant Mr^{-\sigma}$ при $|r-v| \leqslant v/2$, с учетом $\omega_2 \geqslant |r-v|$, получим $[b(r)-b(v)](l_0+l_1)| \leqslant MKr^{1-\sigma}\omega_1^{-2}$. Таким образом $|I_3| \leqslant MKJ(z,p,2,\sigma-1) \leqslant MK$. С другой стороны, имеем

$$\Bigl|\int\limits_{v/2}^{3v/2} (l_0+l_1)\,dr\Bigr| = \Bigl|\operatorname{Re}\ln\frac{\zeta-z}{r-z}\Bigr|_{v/2}^{3v/2}\Bigr| \leqslant Mv^{-\sigma}$$

(так как $|\eta(z)| \leqslant M_0$), что с учетом $|b(v)| \leqslant Kv^{\sigma}$, приводит к оценке $|I_4| \leqslant MK$. Итак, при $|\eta(z)| \leqslant M_0$, $|\eta(z)-p| \geqslant \delta > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$ находим $|\operatorname{Re} Q(z,p)| \leqslant |P_0| + |P_1| \leqslant MK$. Совершенно аналогично оценивается $|\operatorname{Re} Q(z,p)|$, если $|\eta(z)| \geqslant \delta > 0$. Итак, $|\operatorname{Re} Q(z,p)| \leqslant MK$ при $|\eta(z)| \leqslant M_0$ или $|\arg z| \geqslant \varepsilon > 0$. В области $|\arg z| \leqslant \varepsilon$, $|\eta(z)| \geqslant M_0$ функция $Q(z,p)$ аналитична по z и $|Q(z,p)| \leqslant M|z|^{\sigma}$. Тогда, выбрав ε достаточно малым ($\varepsilon < \pi/\sigma$), для $F^{\pm 1}(z) = \exp\{\pm Q(z,p)\}$ получим по принципу Фрагмена–Линделефа [17] $|F^{\pm 1}(z)| \leqslant e^{MK}$, откуда $|\operatorname{Re} Q(z,p)| \leqslant MK$. Лемма доказана.

Лемма 10.6. *Пусть для* $\lambda(t)$ *выполнено* (10.15), $\lambda(t) \equiv 0$ *при* $t \leqslant R_0$ *и*

$$Q_0(t,p) = -t\int\limits_{R_0}^{\infty} \lambda(r)K_0(r,p,t)\,dt, \quad p > 0.$$

Тогда $Q_0(t,p) - 2\pi i\lambda(t) = S_0(\Psi_0\,|\,t)$, *где*

$$\Psi_0(t,p) = Q(t,p) + \overline{Q}(t,p) \in H_0,$$

$$Q(t,p) = t\int\limits_{R_0}^{\infty} \lambda(r)[K(r,p,t) - K(r,0,t)]\,dt.$$

Доказательство. Во-первых, из леммы 10.4 следует, что интеграл $Q_0(t,p) = -Q(t,p) + \overline{Q}(t,p)$ сходится и, кроме того, $\Psi_0(t,p) =$

$= 2\,\mathrm{Re}\,Q(t,p) \in H_0$. При $R > R_0$ введем функцию

$$\lambda^R(t) = \begin{cases} \lambda(t), & t < R, \\ \dfrac{\lambda(R)}{R}\,(2R - t), & t \in [R, 2R], \\ 0, & t > 2R, \end{cases}$$

и положим

$$Q^R(t,p) = t \int\limits_{R_0}^{\infty} \lambda^R(r)[K(r,p,t) - K(r,0,t)]\,dr,$$

$$Q_0^R(t,p) = -Q^R(t,p) + \overline{Q}^R(t,p).$$

Так как $|\lambda^R(t)| \leqslant M|t|^\sigma$, M не зависит от R, то интегралы $Q^R(t,p)$ сходятся равномерно по R, p и t, $|t| \leqslant K = \mathrm{const}$. Следовательно,

$$\|\lambda^R(t) - \lambda(t)\|_K^{(\alpha)} + \|Q^R(t,p) - Q(t,p)\|_K^{(\alpha)} + \\ + \|Q_0^R(t,p) - Q_0(t,p)\|_K^{(\alpha)} \to 0, \quad (10.44)$$

$R \to \infty$, $\forall\, K > 0$. Кроме того, поскольку $|d\lambda^R(t)/dt| \leqslant M|t|^{\sigma-1}$ и постоянная M не зависит от R, то с помощью лемм 10.4, 10.5 получим $\langle \Psi_0^R \rangle_q^\alpha \leqslant M = \mathrm{const}$ (M не зависит от R), $\Psi_0^R = 2\,\mathrm{Re}\,Q^R$. Тогда из (10.44) находим

$$\|S_0(\Psi_0 \,|\, t) - S_0(\Psi_0^R \,|\, t)\|_K^{(\alpha)} \to 0, \quad R \to \infty, \quad \forall\, K > 0.$$

С учетом (10.37) для функции

$$f^R(t,p) = t \int\limits_{R_0}^{\infty} \lambda^R(r) K(r,p,t)\,dr$$

имеем

$$S_0(f^R(t,p) \,|\, t) = -t \int\limits_{R_0}^{\infty} \lambda^R(r) K(r,p,t)\,dr,$$

$$S_0(\overline{f}^R(t,p) \,|\, t) = t \int\limits_{R_0}^{\infty} \lambda^R(r) K(r,p,t)\,dr, \quad p > 0.$$

Вследствие равенств $f^R(t,0) = \pi i S_0(\lambda^R \,|\, t)$ и $\lambda^R(0) = 0$, приходим к тождеству $S_0(f^R(t,0) \,|\, t) = \pi i \lambda^R(t)$. Наконец, поскольку $\Psi_0^R(t,p) = f^R(t,p) + \overline{f}^R(t,p) - 2f^R(t,0)$, то $S_0(\Psi^R \,|\, t) = Q_0^R(t,p) - 2\pi i \lambda^R(t)$

и, следовательно, при $R \to \infty$ получим $S_0(\Psi_0 \,|\, t) = Q_0(t,p) - 2\pi i \lambda(t)$. Лемма доказана.

Следствие. *В случае* $p < 0$ *в обозначениях леммы* 10.6 *имеем*

$$Q_0(t,p) - 2\pi i\lambda(t) = S_0(\Psi_0 \,|\, t), \quad \Psi_0 = Q(t,p) + \overline{Q}(t,p) \in H_0.$$

Теперь, наконец, приступим к доказательству основного результата.

Теорема 10.5. *Пусть* $G(t) = |G(t)| \exp\{2\pi i\lambda(t) + ia(t)\} \in \Lambda_\sigma$, $Z = \{z_m\} \in N(\lambda, \sigma)$. *Тогда имеет место представление* (10.38)

$$G(t) = G_0(t) \exp\{\Psi_0(Z \,|\, t)\}, \quad G_0(t) \in \chi_0.$$

Доказательство. Пусть $Z \in N(\lambda,\sigma)$, $Z = \bigcup\limits_{j,k} Z_k^j$, $k = \pm 1$, $j = \overline{-1, 1}$.

Из представления (10.19) и леммы 10.1 находим

$$\Psi(Z_k^j \,|\, jt) = S_k^j(t) + T_k^j(t) + T_{2k}^j(t) - P_k^j(t), \quad j,k = \pm 1. \tag{10.45}$$

Здесь использованы обозначения лемм 10.2–10.6:

$$S_k^j(t) = \int\limits_{A_{j\cdot k}} Q_0^j(t,p)\, d\Delta^j(p),$$

$$Q_0^j(t,p) = -t \int\limits_{R_0}^{\infty} j\lambda(jr) K_0(r,p,t)\, dr = -Q^j(t,p) + \overline{Q}^j(t,p),$$

$$Q^j(t,p) = t \int\limits_{R_0}^{\infty} j\lambda(jr)[K(r,p,t) - K(r,0,t)]\, dr,$$

$$T_{sk}^j(t,p) = -t \int\limits_{R_0}^{\infty} dr \int\limits_{A_{j\cdot k}} K_0(r,p,t)\, dh_s^j(r,p), \quad s = 1,2;$$

$$P_k^j(t) = l^k[\ln(1 - t/z_0) - \ln(1 - t/\overline{z}_0)], \quad j = k; \quad P_k^j(t) \equiv 0,$$

$$j \neq k; \quad j,k = \pm 1, \quad z_0 = R_0 \exp\{ip_0 R_0^{-\sigma}\} \in D^+.$$

При этом

$$\Psi(Z_k^0 \,|\, t) = \sum_{s=1}^{s^k} [\ln(1 - t/z^s) - \ln(1 - t/\overline{z}^s)],$$

$$|z^s| \leqslant R_0; \quad z^s \in D^\pm, \quad k = \pm 1.$$

Поскольку

$$P_k(t) = -P_k^{+1}(t) - P_k^{-1}(-t) + \Psi(Z_k^0 \,|\, t) \in C_q^\alpha(L), \quad q \geqslant 0,\ k = \pm 1,$$

то из лемм 10.3, 10.5 следуют включения

$$S_k^j(t) \in C_q^\alpha(L), \quad T_{sk}^j(t) \in C_q^\alpha(L),$$

$$2q+1 \geqslant \sigma + \alpha, \quad j, k = \pm 1, \quad s = 1, 2.$$

Используя теперь (10.45), получим

$$\Psi(Z_k \,|\, t) = \Psi(Z_k^{+1} \,|\, t) + \Psi(Z_k^0 \,|\, t) + \Psi(Z_k^{-1} \,|\, t) \in C_q^\alpha(L),$$

$2q+1 \geqslant \sigma + \alpha$, $k = \pm 1$. Для доказательства теоремы осталось установить соотношение

$$\Psi_0(Z \,|\, t) - 2\pi i \lambda(t) = S_0(\Psi_0 \,|\, t), \quad \Psi_0 \in H_0.$$

Прежде всего в силу равенств $l^{+1} + l^{-1} = s^{+1} + s^{-1} = l$, имеем

$$P(t) = P_{+1}(t) - P_{-1}(t) = \Psi(t) \in C^\alpha(L), \quad \Psi(0) = 0$$

и тем самым

$$P(t) = S_0(\widetilde{\Psi} \,|\, t), \quad \widetilde{\Psi} = S_0 \Psi \in C^\alpha \subset D_q^\alpha.$$

Далее, из леммы 10.4 следует представление

$$T_{sk}^j(t) = S_0(\Psi_{sk}^j \,|\, t), \quad \Psi_{sk}^j \in H_0, \quad j, k = \pm 1, \quad s = 1, 2. \tag{10.46}$$

Наконец, положим $\lambda(t) = \lambda^{+1}(t) - \lambda^{-1}(-t)$, где $\lambda^{\pm 1}(t) \equiv 0$ при $t \leqslant R_0$ (т. е. $\lambda^{\pm 1}(t) = \pm\lambda(\pm t)$ при $\pm t \geqslant R_0$). Используя лемму 10.6 и следствие из нее, получим

$$S_{+1}^{+1}(t) - S_{-1}^{+1}(t) - 2\pi i \lambda^{+1}(t) = \int\limits_{p_0}^{p_1} [Q_0^{+1}(t, p) - 2\pi i \lambda^{+1}(t)]\, d\Delta^{+1}(p) +$$

$$+ \int\limits_{-p_1}^{-p_0} [-Q_0^{+1}(t, p) - 2\pi i \lambda^{+1}(t)]\ d\Delta^{+1}(p) = S_0(\Psi_0^{+1} \,|\, t),$$

$$\Psi_0^{+1}(t) = \int\limits_{-p_1}^{p_1} 2 \operatorname{Re} Q^{+1}(t, p)\ d\Delta^{+1}(p) \in H_0.$$

Аналогично находим

$$S_{+1}^{-1}(t) - S_{-1}^{-1}(t) - 2\pi i\lambda^{-1}(t) = \int\limits_{p_0}^{p_1}[Q_0^{-1}(t,p) - 2\pi i\lambda^{-1}(t)]\,d\Delta^{-1}(p) +$$

$$+\int\limits_{-p_1}^{-p_0}[-Q_0^{-1}(t,p) - 2\pi i\lambda^{-1}(t)]\;d\Delta^{-1}(p) = S_0(\Psi_0^{-1}\,|\,t),$$

$$\Psi_0^{-1}(t) = \int\limits_{-p_1}^{p_1} 2\,\mathrm{Re}\,Q^{-1}(t,p)\;d\Delta^{-1}(p) \in H_0.$$

Следовательно,

$$S_{+1}^{+1}(t) + S_{+1}^{-1}(-t) - S_{-1}^{+1}(t) - S_{-1}^{-1}(-t) - 2\pi i\lambda(t) = S_0(\Psi_0\,|\,t), \quad (10.47)$$

$\Psi_0 = \Psi_0^{+1}(t) - \Psi_0^{-1}(-t) \in H_0$. Итак, подставляя (10.46), (10.47) в (10.45) и учитывая (10.19), (10.20), получим $\Psi_0(Z\,|\,t) - 2\pi i\lambda(t) = S_0(\Psi_0\,|\,t)$, $\Psi_0 \in H_0$, чем и завершается доказательство теоремы.

Представление (10.38) дает возможность построить требуемое решение задачи факторизации (A').

Теорема 10.6. *Пусть* $G(t) = |G(t)|\exp\{2\pi i\lambda(t) + ia(t)\} \in \Lambda_\sigma$, $\lambda'(t) \geqslant 0$ *и* $Z = \{z_m\} \in N(\lambda,\sigma)$, *т. е. имеет место* (10.38) $G(t) = G_0(t)\exp\{\Psi_0(Z\,|\,t)\}$, $G_0 \in \chi_0$.

Тогда решение $X^\pm(z)$ *задачи факторизации* (A') *представляется в виде*

$$X^\pm(z) = \exp\{\Psi(G_0\,|\,z) + \Psi(Z_{\pm1}\,|\,z)\}, \quad z \in \overline{D}^{\,\pm}, \quad (10.48)$$

имеет однократные нули в точках z_m *и удовлетворяет условиям* (10.5).

Доказательство. То, что $X^\pm(z)$ — решение задачи (A') с нулями z_m, непосредственно следует из (10.48), определения класса χ_0, функций $\Psi(G_0\,|\,z)$ и $\Psi(Z_{\pm1}\,|\,z)$. Условия (10.5) следуют из свойства 7, (10.45)–(10.47) и теоремы 10.5.

Следствие. *Пусть* $G(t) = |G(t)\exp\{2\pi i\lambda(t) + ia(t)\} \in \Lambda_\sigma$, $\lambda'(t) \leqslant 0$ *и* $Z = \{z_m\} \in N(-\lambda,\sigma)$. *Тогда существует решение задачи факторизации* (A'), *имеющее однократные полюса в точках* z_m *и удовлетворяющее* (10.5).

Теорема 10.7. *Пусть*

$$g_k(t) \in C^\alpha(L), \quad G_k(t) = |G_k(t)|\exp\{2\pi i\lambda(t) + ia(t)\} \in \Lambda_\sigma,$$

$Z_k = \{z_m^k\} \in N(\pm\lambda,\sigma)$, $\pm\lambda' \geqslant 0$ *и* $\Phi^\pm{}_k(z) \in C^\gamma(\overline{D}^{\,\pm})$ — *соответствующие решения краевых задач*, $k = \overline{0,\infty}$.

Тогда если $g_k(t) \to g_0(t)$ *в* $C^\alpha(L)$, $G_k(t) \to G_0(t)$ *в* Λ_σ, $Z_k \to Z_0$ *в* $N(\pm\lambda, \sigma)$, *то* ${\Phi^\pm}_k(z) \to {\Phi^\pm}_0(z)$ *в* $C^\gamma(\overline{D}^{\pm})$.

Утверждения теоремы следуют из доказательства теоремы 10.6, представлений (10.45)–(10.47) и общих теорем об устойчивости интеграла типа Коши в пространствах Гельдера [19, с. 10–12].

§ 11. Аксиоматический подход к задачам с бесконечным индексом

Как уже указывалось, основная идея в теории краевых задач с бесконечным индексом, принадлежащая Н. В. Говорову, состоит в построении решения задачи факторизации (A'), удовлетворяющего условиям (10.5), так как с помощью такого решения можно стандартным образом отыскивать решения исходной неоднородной краевой задачи (см. далее п. 11.4). Нами аксиоматизируется подобный подход: существование решения $(A)'$ вида (10.5) кладется в основу определения класса функций $G(t)$, а соответствующие последовательности нулей (полюсов) $X^\pm(z)$ определяют класс последовательностей $Z = \{z_m\}$, обеспечивающих корректную постановку краевой задачи (класс корректности). Такой подход к теории краевых задач продемонстрирован в [23]. Ясно, что уже по самому определению все рассмотренные ранее классы $G(t)$, Z вкладываются в аксиоматически построенные по этому принципу классы.

Забегая несколько вперед, отметим, что в основе соответствия $G(t) \leftrightarrow Z = \{z_m\}$ будет лежать уже встречавшееся представление (10.38), которое связывает функцию $G(t)$ и функцию $\Psi_0(Z \mid t)$, построенную непосредственно в терминах последовательности Z, а решение $X^\pm(z)$ будет, естественно, иметь вид (10.48).

11.1. Оператор S_q. Некоторые вспомогательные результаты. В пространствах $C_q^\alpha(L)$ введем сингулярный оператор

$$\begin{cases} S_q(f \mid z) = \dfrac{r(z)}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_L \dfrac{f(s)}{r(s)(s-z)}\, ds, & \begin{array}{c} z \in \overline{D}^{\pm}, \\ r(z) = z(z^2+1)\ldots(z^2+q^2); \end{array} \\ S_q f = S_q(f \mid t) = \dfrac{r(t)}{\pi i} \displaystyle\int\limits_L \dfrac{f(s)}{r(s)(s-t)}\, dt = S_q^+(f \mid t) + S_q^-(f \mid t), & t \in L. \end{cases} \tag{11.1}$$

При этом в окрестности точки $z = 0$ интеграл $S_q(f \mid z)$ понимается в смысле разложения в сумму простых дробей, аналогично оператору $S_0 f$ в теореме 10.2.

Теорема 11.1 (свойства оператора S_q).

1. S_q: $C_q^\alpha(L) \to C_q^\alpha(L)$, $\|S_q f\|^{(\alpha,q)} \leqslant M\|f\|^{(\alpha,q)}$, $|S_q(f \mid z)| \leqslant \leqslant M\|f\|^{(\alpha,q)}|z|^{2q+1-\alpha}$;

2. $\operatorname{Re} S_q(f\,|\,t) \equiv 0, \quad \overline{S}_q(f\,|\,t) = -S_q(f\,|\,t)$, *при* $\operatorname{Im} f \equiv 0,\ t \in L$;

3. $S_q(P\,|\,z) = \pm P(z)/2 + Q(z)/2,\ z \in \overline{D}^{\pm}$; $Q(t) = S_q(P\,|\,t)$, *где* P, Q — *многочлены*, $\deg(P, Q) \leqslant 2q$;

4. $S_q(f_1\,|\,z) = \pm S_q(f\,|\,z),\ z \in \overline{D}^{\pm}$ *при* $f_1 = S_q f,\ f \in C_q^{\alpha}(L)$;

5. $S_q^2 f = f(t) - f(0),\ f \in C_q^{\alpha}(L)$;

6. $S_q(\Psi\,|\,t) = S_0(\Psi\,|\,t) + P(t),\ \Psi \in D_q^{\alpha}$, *где* $P(t)$ — *многочлен*, $\deg P \leqslant 2q$.

Действительно, утверждение 1 следует из ограниченности интеграла типа Коши в пространствах Гельдера [19, с. 10–12], утверждения 2, 3 очевидны, 4, 5 доказываются аналогично теореме 10.4, утверждение 6 получается разложением интеграла S_q в сумму простых дробей.

11.2. Классы Λ, Σ. Введем класс Λ^+ функций $G(t)$, которые можно представить в виде $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$, где $X^{\pm}(z)$ аналитичны в $D^{\pm}$, непрерывны и ограничены в $\overline{D}^{\pm}$ и $X^{\pm}(t) \in D_q^{\alpha}$, $[X^{\pm}(t)]^{-1} \in D_q^{\alpha}$, $t \in L$. Положим $\Lambda^- = \{G(t)\,|\,G^{-1}(t) \in \Lambda^+\}$ и $\Lambda = \Lambda^+ \cup \Lambda^-$. Очевидно, условия на $X^{\pm}(z)$ эквивалентны условиям (10.5) (когда $X^{\pm}(z)$ ограничена) и, следовательно, класс Λ — это и есть класс функций $G(t)$, для которых существует решение задачи факторизации $(A)'$, удовлетворяющее условиям (10.5). Как выяснится впоследствии, последнее условие (г) в (10.5) ($\ln|X| \leqslant o(1)|z|$) является лишним.

Отметим, что условия на $X^{\pm}(z)$ эквивалентны следующим:

$$\text{(i)} \quad \ln X^{\pm}(t) \in C_q^{\alpha}(L), \quad \ln|X^{\pm}(t)| \in D_q^{\alpha}, \quad t \in L;$$

$$\text{(ii)} \quad \pm\ln|X(z)| \leqslant M, \quad G \in \Lambda^{\pm}.$$

Пусть $Z = \{z_m\}$, $z_m \to \infty$, $m \to \infty$, $z_m \overline{\in} L$. Рассмотрим, как и ранее, последовательности и функции

$$Z_{\pm 1} = Z \cap D^{\pm};$$

$$\Psi(Z_{\pm 1}) = \Psi(Z_{\pm 1}\,|\,z) = \sum_{z_m \in Z_{\pm 1}} \ln\frac{1 - z/z_m}{1 - z\overline{z}_m}, \quad z \in \overline{D}^{\pm};$$

$$\Psi_0(Z) = \Psi_0(Z\,|\,t) = \Psi(Z_{+1}\,|\,t) - \Psi(Z_{-1}\,|\,t), \quad t \in L.$$

Пусть Σ — класс последовательностей Z таких, что выполнены условия

$$\text{(j)} \quad \sum_m r_m^{-1}|\sin\varphi_m| \leqslant M < \infty, \quad z_m = r_m e^{i\varphi_m};$$

$$\text{(jj)} \quad \Psi(Z_{\pm 1}\,|\,t) \in C_q^{\alpha}(L), \quad q < \infty, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Очевидно, условие (j) обеспечивает корректность определения класса Σ (см. (10.33), (10.34), (10.39)).

Для последовательностей $Z \in \Sigma$ введем характеристику

$$\langle Z\rangle_q^\alpha = \sum_m r_m^{-1}|\sin\varphi_m| + \|\Psi(Z_{+1})\|^{(\alpha,q)} + \|\Psi(Z_{-1})\|^{(\alpha,q)}$$

и в дальнейшем будем считать, что условие $\langle Z\rangle_q^\alpha \leqslant M$ при $Z \in \{Z\}$, где M — абсолютная постоянная автоматически означает, что ряды (j) сходятся равномерно по $Z \in \{Z\}$.

Лемма 11.1. *Функция*

$$\Pi(z) = \exp\{\Psi(Z_{\pm 1}\,|\,z) - S_q(\Psi_0(Z)\,|\,z)\}, \quad z \in \overline{D}^{\pm}, \tag{11.2}$$

является целой с последовательностью нулей Z, причем порядок $\Pi(z)$ меньше $2q+1$ и

$$\ln|\Pi(t)| = -\frac{1}{2}\,S_q(\Psi_0(Z)\,|\,t) \in C_q^\alpha(L).$$

Действительно, очевидно $\Pi^+(t)/\Pi^-(t) \equiv 1$, $t \in L$, т. е. $\Pi(z)$ — целая функция, нули которой совпадают с последовательностью Z, тогда из теоремы 11.1 $\ln|\Pi(z)| \leqslant M|z|^{2q+1-\alpha}$, т. е. порядок $\Pi(z)$ меньше $2q+1$. Поскольку $\operatorname{Re}\Psi(Z_{\pm 1}\,|\,t) \equiv 0$, $t \in L$, то, с учетом теоремы 11.1,

$$\ln|\Pi(t)| = \operatorname{Re}\,\ln\Pi(t) = -\frac{1}{2}\,S_q(\Psi_0(Z)\,|\,t).$$

Следствие. *Показатель сходимости последовательности $Z \in \Sigma$ всегда конечен (меньше $2q+1$ при данном q).*

В заключение заметим, что условие (jj) фактически означает, что точки $z_m \in Z$ не должны подходить слишком близко к L.

Теорема 11.2. *Если для $Z = \{z_m\}$ выполнено* (j) *и*

$$|\sin\varphi_m|r_m^\eta \geqslant K = \text{const}, \quad z_m = r_m e^{i\varphi_m}, \quad 0 \leqslant \eta < \infty,$$

то $Z \in \Sigma$.

Доказательство. В силу очевидного равенства

$$\frac{d}{dz}\left[\ln\left(1 - \frac{z}{z_m}\right) - \ln\left(1 - \frac{z}{\overline{z}_m}\right)\right] = \frac{z_m - \overline{z}_m}{(z - z_m)(z - \overline{z}_m)},$$

функция $\Psi(Z_{\pm 1})$ допускает оценку

$$\left|\frac{d}{dt}\,\Psi(Z_{\pm 1}\,|\,t)\right| \leqslant M\sum_m \frac{r_m|\sin\varphi_m|}{|t - z_m|^2}, \quad t \in L.$$

Представим правую часть полученного неравенства в виде

$$\sum_m \frac{r_m|\sin\varphi_m|}{|t - z_m|^2} = \sum_{|t - z_m| > |t|/2} \ldots + \sum_{|t - z_m| \leqslant |t|/2} \ldots = I_1 + I_2.$$

При $|t-z_m|>|t|/2$ имеем $|t-z_m|\geqslant M(|t|+|z_m|)$, откуда

$$I_1\leqslant M\sum_m \frac{r_m|\sin\varphi_m|}{|t|^2+|r_m|^2}\leqslant M.$$

В силу неравенства $|t-z_m|^2=(t-r_m)^2+2tr_m(1-\cos\varphi_m)\geqslant \geqslant M|t|r_m^{1-2\eta}$, находим

$$I_2\leqslant M\sum_{|t-z_m|\leqslant|t|/2}\frac{r_m|\sin\varphi_m|}{|t|r_m^{1-2\eta}}\leqslant M|t|^{2\eta}\sum_m\frac{|\sin\varphi_m|}{r_m}\leqslant M|t|^{2\eta}.$$

Итак, имеем $|d\Psi(Z_{\pm1}\,|\,t)/dt|\leqslant M|t|^{2\eta}$ и, следовательно, $\Psi(Z_{\pm1}\,|\,t)\in \in C_q^\alpha(L)$, $q\geqslant\eta+1/2$.

11.3. Соответствие классов Λ и Σ. Классы корректности, решение задачи факторизации. Снова обратимся к классу

$$\chi_0=\Big\{G(t)\,|\,\ln G(t)=\psi_1(t)+ \\ +S_0(\psi_0\,|\,t)+i\alpha,\ \alpha=\mathrm{const},\ \psi_j\in H_0,\ j=0,1\Big\}$$

и функциям

$$\Psi(G\,|\,z)=S_0(\psi_1\,|\,z)\pm S_0(\psi_0\,|\,z)\pm i\alpha/2,\quad z\in\overline{D}^{\pm},\quad G\in\chi_0.$$

Заметим, что если положить $X^\pm(z)=\exp\left(\Psi(G|z)\right)$, то для $G(t)= =X^+(t)/X^-(t)$ выполнено условие (i) и $X^\pm(z)$ ограничены и сверху и снизу в $\overline{D}^{\pm}$. Отсюда, в частности, следует, что $\chi_0\subset\Lambda^+\cap\Lambda^-$.

Теорема 11.3.

1. *Если* $Z\in\Sigma$, *то* $G(t)=\exp\{\Psi_0(Z\,|\,t)\}\in\Lambda^+$.

2. *Если* $G(t)\in\Lambda^+$ *и* $X^\pm(z)$ — *соответствующее решение задачи факторизации* (A$'$), *то последовательность* Z *нулей функций* $X^\pm(z)$ Z *принадлежит* Σ *и имеет место представление*

$$G(t)=G_0(t)\exp\{\Psi_0(Z\,|\,t)+i\eta t\},\quad G_0\in\chi_0,\tag{11.3}$$

где $\eta=\mathrm{const}$, $\mathrm{Im}\,\eta=0$, $\eta\geqslant0$; *при этом* $X^\pm(z)$ *имеют вид*

$$X^\pm(z)=\exp\{\Psi(G_0\,|\,z)+\Psi(Z_{\pm1}\,|\,z)+ia_{\pm1}z\}\cdot K,$$

$$z\in\overline{D}^{\pm},\quad a_{\pm1}=\mathrm{const};\quad \mathrm{Im}\,a_{\pm1}=0,\tag{11.4}$$

$$\pm a_{\pm1}\geqslant0,\quad a_{+1}-a_{-1}=\eta;\quad K=\mathrm{const}.$$

Доказательство. Если $Z\in\Sigma$ и $G(t)=\exp\{\Psi_0(Z|t)\}$, то $G(t)= =X^+(t)/X^-(t)$, где $X^\pm(z)=\exp\{\Psi_{\pm1}(Z\,|\,z)\}$, $z\in\overline{D}^{\pm}$ и из (jj) следует выполнение для $X^\pm(z)$ условий (i)–(ii), т. е. $G(t)\in\Lambda^+$.

Далее, пусть $G(t)\in\Lambda^+$ и $Z=\{z_m\}$ — последовательность нулей функции $X^\pm(z)$ ($z_m\overline{\in}L$, так как $|X^\pm(t)|\geqslant M=\mathrm{const}$, $t\in \in L$). Без ограничения общности будем считать $\ln G(0)=\ln X^\pm(0)=$

$= 0$. Из ограниченности $X^{\pm}(z)$ следует, что для Z выполнено (j) (см. п. 10.3.5, свойства 5–7). Далее, в силу (i) имеем

$$\ln G(t) = \ln X^{+}(t) - \ln X^{-}(t) = \psi_1(t) + if(t),$$

где $\psi_1(t) = \ln|G(t)| \in H_0$, $f(t) = \arg G(t) \in C_q^{\alpha}(L)$, $\operatorname{Im} f \equiv 0$. Умножим $X(z)$ на $\exp\{-S_0(\psi_1\,|\,z)\}$, тогда произведение (снова обозначим его $X(z)$) удовлетворяет условиям (i), (ii) и

$$\ln X^{+}(t) - \ln X^{-}(t) = i\arg G(t), \quad t \in L. \tag{11.5}$$

Любое ограниченное в конечной части плоскости $\mathbb{C}$ решение задачи (11.5) имеет вид:

$$X^{\pm}(z) = F(z)\exp\{iS_q(\arg G\,|\,z)\}, \quad z \in \overline{D}^{\pm},$$

где $F(z)$ — некоторая целая функция, причем в силу (ii) и с учетом теоремы 11.1 имеет место оценка $\ln|F(z)| \leqslant M|z|^{2q+1-\alpha}$. Очевидно, нули $F(z)$ совпадают с нулями $X^{\pm}(z)$, откуда, с учетом леммы 11.1 и свойств 1, 3 (п. 10.3.5) получим:

$$\ln X^{\pm}(z) = Q_0(z) + \ln \Pi(z) + iS_q(\arg G\,|\,z), \tag{11.6}$$

где $\Pi(z)$ — целая функция вида (11.2), $Q_0(z)$ — многочлен, $\deg Q_0 \leqslant 2q$. Поскольку $\ln|X^{\pm}(t)| = \Psi_0 \in H_0$, то, отделяя в (11.6) вещественную часть, находим

$$R(t) + \ln|\Pi(t)| + \frac{i}{2}\,S_q(\arg G\,|\,t) = \psi_0(t), \tag{11.7}$$

где $R(t)$ — многочлен, $\deg R \leqslant 2q$.

Применяя оператор S_q к обеим частям (11.7) и пользуясь леммой 11.1 и теоремой 11.1, приходим к представлению

$$i\arg G(t) = \Psi_0(Z\,|\,t) + S_0(\psi_0\,|\,t) + P(t), \tag{11.8}$$

где $R(t)$ — многочлен, $\deg P \leqslant 2q$. Вновь подставляя (11.8) в (11.6), учитывая формулу (11.5) и теорему 11.1, получим

$$\ln X^{\pm}(z) = \Psi(Z_{\pm 1}\,|\,z) \pm S_0(\psi_0\,|\,z) + Q_{\pm 1}(z), \quad z \in \overline{D}^{\pm}, \tag{11.9}$$

где $Q_{\pm 1}(z)$ — многочлены, $\deg Q_{\pm 1} \leqslant 2q$. В силу того, что $\ln|X^{\pm}(z)| \leqslant$ $\leqslant M$, с учетом теоремы 11.1 и равенства (11.9) находим $\deg Q_{\pm 1}(z) \leqslant 1$, $\operatorname{Re} Q_{\pm 1}(z) \leqslant M$, $z \in \overline{D}^{\pm}$. Учитывая, что $\ln X^{\pm}(0) = 0$, имеем $Q_{\pm 1}(z) =$ $= ia_{\pm 1}z$, $a_{\pm 1} = \mathrm{const}$, $\operatorname{Im} a_{\pm 1} = 0$, $\pm a_{\pm 1} \geqslant 0$. Тогда

$$\Psi(Z_{\pm 1}\,|\,t) = \ln X^{\pm}(t) \mp S_0(\psi_0\,|\,t) - ia_{\pm 1}t \in C_q^{\alpha}(L),$$

т. е. выполнено (jj) и

$$i\ \arg G(t) = \ln X^{+}(t) - \ln X^{-}(t) = \Psi_0(Z\,|\,t) + S_0(\psi_0\,|\,t) + i\eta t,$$

$\eta = a_{+1} - a_{-1} \geqslant 0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если функция $G(t) \in \Lambda^+$, то ее можно представить в виде $G(t) = G_0(t)\exp\{\Psi_0(Z\,|\,t)\}$, $Z \in \Sigma$, и соответственно этому справедливо равенство $X^{\pm}(z) = \exp\{\Psi(G_0\,|\,z) + \Psi(Z_{\pm 1}\,|\,z)\}$, $z \in \overline{D}^{\pm}$, т. е. имеют место представления* (10.38) *и* (10.48).

Действительно, для функции $G(t) = \exp(2i\eta t)$, $\eta \geqslant 1$ всегда существует решение задачи факторизации $X^{\pm}(z)$ такое, что

$$\Big|\ln|X^{\pm}(z)|\Big| \leqslant M, \quad |\operatorname{Im} z| \geqslant K = \text{const} \tag{11.10}$$

(например, $X^{\pm}(z) = \sin\eta(z+i)\exp\{\pm i\eta z\}$, $z \in \overline{D}^{\pm}$), а из (11.10) и свойства 7 п. 10.3.5 очевидно следует, что для $X(z)$ в (11.4) $a_{\pm 1} = 0$.

Следствие 2. $\chi_0 = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$.

Действительно, если $G(t) \in \Lambda^+ \cap \Lambda^-$, то, очевидно,

$$G(t) = G_1(t)\exp(\Psi_0(Z^1\,|\,t)) = G_2(t)\exp(-\Psi_0(Z^2\,|\,t)),$$

$$G_{1,2} \in \chi_0, \quad Z^{1,2} \in \Sigma,$$

откуда $\Psi_0(Z\,|\,t) = S_0(\Psi_0\,|\,t)$, $Z = Z^1 \cup Z^2$, $\psi_0 \in H_0$ и можно считать $Z \subset D^+$ (при необходимости перенеся точки Z^1, Z^2 симметрично в D^+). Пусть

$$F(z) = \begin{cases} \Psi(Z\,|\,z) - S_0(\psi_0\,|\,z), & z \in \overline{D}^+, \\ S_0(\psi_0\,|\,z), & z \in \overline{D}^-, \end{cases}$$

тогда $F(z)$ — целая функция и $|F(z)| \leqslant M$, т. е. $F \equiv \text{const}$, откуда следует, что $\Psi(Z^{1,2}\,|\,z) \equiv 0$ (нулей нет) и значит $G = G_1 = G_2 \in \chi_0$.

Функции $G(t) \in \Lambda^{\pm}$ и последовательности $Z \in \Sigma$ будем называть *соответствующими* ($G \leftrightarrow Z$), если имеет место представление (10.38):

$$G(t) = G_0(t)\exp\{\pm\Psi_0(Z\,|\,t)\}, \quad G \in \Lambda^{\pm}.$$

При этом можно построить функции $X^{\pm}(z)$, а тем самым и решение задачи факторизации:

$$X^+(t)/X^-(t) = G(t); \quad [X(Z)]^{\pm 1} \equiv 0, \quad G \in \Lambda^{\pm},$$

вида (10.48) $X^{\pm}(z) = \exp(\Psi(G_0\,|\,z) \pm \Psi(Z_{\pm 1}\,|\,z))$, которое назовем *каноническим*. В силу свойства 7 п. 10.3.5 для канонического решения выполнены все условия (10.5), в том числе и последнее.

Соответствие $G \leftrightarrow Z$ разбивает $\Lambda^{\pm}$ и Σ на классы эквивалентности

$$\chi = \chi(G) = \chi(Z) = \{\widetilde{G}\,|\,\widetilde{G} \leftrightarrow Z\} = \{\widetilde{G}\,|\,\widetilde{G}/G \in \chi_0\} = G\chi_0,$$

$$N = N(\chi) = N(G) = N(Z) = \{\widetilde{Z}\,|\,\widetilde{Z} \leftrightarrow G\} =$$

$$= \big\{\widetilde{Z}\,|\,\Psi_0(\widetilde{Z}\,|\,t) - \Psi_0(Z\,|\,t) = S_0(\psi_0\,|\,t), \psi_0 \in H_0\big\},$$

причем имеет место следующее соответствие между классами:

$$\chi \leftrightarrow N = N(\chi) \Longleftrightarrow \{\forall\, G \in \chi,\ Z \in N\colon G \leftrightarrow Z\}.$$

Так, если $\operatorname{ind} G(t) = \varkappa$, $|\varkappa| < \infty$, то, очевидно, $G(t) \in \Lambda^{\pm}(\pm\varkappa \geqslant 0)$, причем класс $\chi = \chi(G)$ содержит только функции того же индекса и при этом $N(\chi) = \{Z \mid Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_{|\varkappa|}\}\}$. Кроме того, если на $\Lambda^+(\Lambda^-)$ и на Σ ввести бинарные операции $G(t) = G_1(t)\cdot G_2(t)$ на $\Lambda^+(\Lambda^-)$ и $Z = Z_1 \cup Z_2$ на Σ, то эти операции сохраняют классы и соответствие между ними. Фактически соответствие $G \leftrightarrow Z$ или $\chi \leftrightarrow N$ — это обобщение на бесконечный индекс того факта, что для корректной постановки краевой задачи при $\operatorname{ind} G = \varkappa$ требуется ровно $|\varkappa|$ дополнительных условий (условий разрешимости), т. е. каноническое решение однородной задачи имеет ровно $\varkappa$ нулей (полюсов) [8, с. 107–110].

Пусть G, $\widetilde{G}$ принадлежат одному классу χ, т. е.

$$\widetilde{G}/G = \exp\{\psi_1 + S_0\psi_0 + i\beta\} \in \chi_0.$$

Введем характеристику

$$l(\widetilde{G}, G)_q^{\alpha} = \langle\psi_1\rangle_q^{\alpha} + \langle\psi_0\rangle_q^{\alpha} + |\beta|$$

и скажем, что последовательность $G_k \in \chi$ сходится к G_0, $G_k \xrightarrow{\chi} G_0$, $k \to \infty$, если $\|G_k/G_0 - 1\|_R^{(\alpha)} \to 0$, $k \to \infty$, $\forall\, R > 0$; $l(G_k, G_n)_q^{\alpha} \leqslant M = \mathrm{const}$, $k, n \geqslant 1$. Соответственно, пусть $\widetilde{Z}, Z \in N$, т. е. $\Psi_0(\widetilde{Z} \mid t) - \Psi_0(Z \mid t) = S_0(\psi_0 \mid t)$. Введем характеристику $l(\widetilde{Z}, Z)_q^{\alpha} = \langle\psi_0\rangle_q^{\alpha}$ и скажем, что последовательность $Z_k \in N$ сходится к Z_0, $Z_k \xrightarrow{N} Z_0$, если $|Z_k - Z_0|_R \to 0$, $k \to \infty, \forall\, R > 0$, $\langle Z_k\rangle_q^{\alpha} + l(Z_k, Z_n)_q^{\alpha} \leqslant M$, $k, n \geqslant 1$, где

$$|Z_k - Z_0|_R = \max_{|z_m^0| \leqslant R} |z_m^k - z_m^0|, \quad Z^k = \{z_m^k\}.$$

Теорема 11.4. *Пусть $G_k \in \chi$, $Z_k \in N$ и $G_k \xrightarrow{\chi} G_0$, $Z_k \xrightarrow{N} Z_0$, $k \to \infty$. Тогда*

- *$G_0 \in \chi$, $Z_0 \in N$, т. е. классы χ, N замкнуты относительно указанной сходимости*;
- *если $\chi \longleftrightarrow N$ и $X_k^{\pm}(z)$ — каноническое решение задачи факторизации $X_k^+(t)/X_k^-(t) = G_k(t)$, $t \in L$, $[X_k(Z_k)]^{\pm 1} \equiv 0$, $G_k \in \Lambda^{\pm}$, $k = \overline{0,\infty}$, то $\sup\limits_z |f_k^{\pm}(z)| + \langle X_k^{\pm}(t)\rangle_q^{\alpha} + \langle 1/X_k^{\pm}(t)\rangle_q^{\alpha} \leqslant M$, $k = \overline{0,\infty}$; $f_k^{\pm}(z) = [X_k(z)]^{\pm 1}, G_k \in \Lambda^{\pm}$; $\|X_k^{\pm}(t) - X_0^{\pm}(t)\|_R^{(\alpha)} + \|1/X_k^{\pm}(t) - 1/X_0^{\pm}(t)\|_R^{(\alpha)} \to 0$; $k \to \infty$, $\forall R > 0$.*

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 11.2. *Пусть*

$$\psi_k \in D_q^{\alpha}, \quad \langle\psi_k\rangle_q^{\alpha} \leqslant M, \quad k = \overline{1,\infty}$$

и

$$\|\psi_k(t)-\psi_0(t)\|_q^{(\alpha)}\to 0,\quad k\to\infty,\quad \forall\, R>0.$$

Тогда $\psi_0\in D_q^\alpha$, $\|S_0(\psi_k\,|\,t)-S_0(\psi_0\,|\,t)\|_R^{(\alpha)}\to 0$, $k\to\infty$, $\forall\, R>0$.

Доказательство. В силу очевидной компактности вложения $C_q^\alpha(L)\subset C_q^\beta(L)$, $\beta<\alpha$ и условия $\|\psi_k-\psi_0\|_R^{(\alpha)}\to 0$, $k\to\infty$, $\forall\, R>0$ получим, что $\|\psi_k-\psi_0\|_R^{(\beta,q)}\to 0$ при $k\to\infty$ и так как $\|\psi_k\|^{(\alpha,q)}\leqslant M$, то и $\|\psi_0\|^{(\alpha,q)}\leqslant M$, т.е. $\psi_0\in C_q^\alpha(L)$. С другой стороны, $\|\psi_0(t)\|\leqslant\sup\limits_k|\psi_k(t)|\leqslant M$, т.е. $\psi_0\in D_q^\alpha$. При $|t|\leqslant R$ положим

$$S_0(\psi_k-\psi_0\,|\,t)=\frac{t}{\pi i}\int\limits_{|t|\geqslant r}\frac{\psi_k-\psi_0}{s(s-t)}\,ds+\frac{t}{\pi i}\int\limits_{-r}^{r}\frac{\psi_k-\psi_0}{s(s-t)}\,ds=I_k^{(r)}+J_k^{(r)}$$

и выберем такое большое $r>R$, что $|I_k^{(r)}(t)|\leqslant\varepsilon/2$, $|dI_k^{(r)}(t)/dt|\leqslant\varepsilon/2$, $k=\overline{1,\infty}$, $|t|\leqslant R$. Последнее возможно, так как $|\psi_k-\psi_0|\leqslant 2M=\mathrm{const}$.

Для $J_k^{(r)}$ при фиксированном r, в силу ограниченности интеграла типа Коши в $C^\alpha[-r,r]$ [19], следует что $\|J_k^{(r)}\|_R^{(\alpha)}\to 0$, $k\to\infty$, откуда и вытекает справедливость утверждения леммы.

Лемма 11.3. *Пусть* $\langle Z_k\rangle_q^\alpha\leqslant M$, $k=\overline{1,\infty}$; $|Z_k-Z_0|_R\to 0$, $k\to\to\infty$, $\forall\, R>0$. *Тогда* $Z_0\in\Sigma$ *и* $\|\Psi_0(Z_k\,|\,t)-\Psi_0(Z_0\,|\,t)\|_R^{(\alpha)}\to 0$, $k\to\infty$, $\forall\, R>0$.

Доказательство. Пусть $Z_k=\{z_m^k=r_m^k e^{i\varphi_m^k}\}$, $k=\overline{0,\infty}$. Поскольку

$$\sum_{|m|\leqslant K}(r_m^k)^{-1}|\sin\varphi_m^k|\leqslant M=\mathrm{const},$$

то, переходя к пределу при $r\to\infty$, получим

$$\sum_{|m|\leqslant K}(r_m^0)^{-1}|\sin\varphi_m^0|\leqslant M=\mathrm{const},$$

откуда для Z_0 выполнено (j).

При $|z|\leqslant R$ и $r_m^k\geqslant 2R$, аналогично доказательству теоремы 11.2, находим

$$\sum_{|m|>K}|\ln(1-z/z_m^k)-\ln(1-z/\overline{z}_m^k)]\leqslant 4R\sum_{|m|>K}(r_m^k)^{-1}|\sin\varphi_m^k|\leqslant\varepsilon/2,$$

$$\sum_{|m|>K}\left|\frac{d}{dz}\,[\ln(1-\frac{z}{z_m^k})-\ln(1-\frac{z}{\overline{z}_m^k})]\right|\leqslant\varepsilon/2,\quad K=K(\varepsilon),\quad k\to\infty.$$

С учетом условия $|Z_k - Z_0|_R \to 0$, $\forall\, R > 0$ последнее неравенство влечет сходимость

$$\|\Psi(Z_k \,|\, t) - \Psi(Z_0 \,|\, t)\|_R^{(\alpha)} \to 0, \quad k \to \infty, \quad \forall\, R > 0.$$

Вследствие неравенств $\|\Psi(Z_k \,|\, t)\|^{(\alpha,q)} \leqslant M$, аналогично доказательству леммы 11.2, получим $\|\Psi(Z_0 \,|\, t)\|^{(\alpha,q)} \leqslant M$. Итак, $Z_0 \in \Sigma$, что и завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 11.4. Выберем произвольно $Z \in N(\chi)$ и представим функции $\ln G_k(t)$ в виде

$$\ln G_k = \psi_k^{(1)} + S_0(\psi_k^{(0)} \,|\, t) + i\beta_k + \Psi_0(Z \,|\, t), \quad \psi_k^{(j)} \in H_0,$$

$j = 0, 1$, $k = \overline{1, \infty}$; $\beta_k = \ln G_k(0) = \text{const}$. Из условий теоремы имеем

$$\langle \psi_k^{(1)} \rangle_q^\alpha + \langle \psi_k^{(0)} \rangle_q^\alpha + |\beta_k| \leqslant M, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Отсюда, используя леммы 11.2, 11.3 и сходимость $\|G_k/G_0 - 1\|_R^{(\alpha)} \to 0$, $k \to \infty$, $\forall\, R > 0$, находим

$$\|\psi_k^{(j)} - \psi_0^{(j)}\|_R^{(\alpha)} + |\beta_k - \beta_0| \to 0, \quad k \to \infty, \quad j = 0, 1, \quad \forall\, R > 0,$$

$$\psi_0^{(j)} \in D_q^\alpha \subset C_q^\alpha(L), \quad j = 0, 1,$$

где $\psi_0^{(j)}(t) + S_0(\psi_0^{(0)} \,|\, t) + i\beta_0 + \Psi_0(Z \,|\, t) = \ln G_0(t)$, откуда $G_0 \in \chi$.

Вновь с учетом лемм 11.2, 11.3 и неравенств

$$\Psi_0(Z_k \,|\, t) - \Psi_0(Z_n \,|\, t) = S_0(\psi_{k,n} \,|\, t), \quad \langle \psi_{k,n} \rangle_q^\alpha \leqslant M$$

получим, что при $k \to \infty$ $\Psi_0(Z_0 \,|\, t) - \Psi_0(Z_n \,|\, t) = S_0(\psi_{0,n} \,|\, t)$, $\psi_{0,n} \in \in D_q^\alpha$. Следовательно, $Z_0 \in N$, $l(Z_0, Z_n)_q^\alpha \leqslant M$ и, кроме того, при $\chi \Leftrightarrow N$ имеем

$$\ln G_k = \widetilde{\psi}_k^{(1)} + S_0(\widetilde{\psi}_0 \,|\, t) + i\widetilde{\beta}_k + \Psi_0(Z_k \,|\, t), \quad k = \overline{0, \infty},$$

где

$$\widetilde{\psi}_k^{(0)} = \psi_k^{(0)} + S_0(\Psi_0(Z) - \Psi_0(Z_k) \,|\, t), \quad \widetilde{\psi}_k^{(1)} = \psi_k^{(1)}, \quad \widetilde{\beta}_k = \beta_k,$$

т. е.

$$\langle \widetilde{\psi}_k^{(i)} \rangle_q^\alpha + \langle \widetilde{\psi}_k^{(0)} \rangle_q^\alpha + |\widetilde{\beta}_k| \leqslant M, \quad k = \overline{0, \infty}, \quad \|\widetilde{\psi}_k^{(j)} - \widetilde{\psi}_0^{(j)}\|_R^{(\alpha)} \to 0,$$

$$|\widetilde{\beta}_k - \widetilde{\beta}_0| \to 0, \quad k \to \infty, \quad \forall\, R > 0.$$

Используя теперь теоремы 11.1, 11.3, леммы 11.2, 11.3 и представление (10.48), непосредственно получим утверждение теоремы относительно $X_k(z)$, $k = \overline{0, \infty}$.

11.4. Решение краевой задачи. Устойчивость.

Теорема 11.5. *Пусть функция* $G(t) \in \Lambda = \Lambda^+ \cup \Lambda^-$, *последовательность* $Z \in \Sigma$, $Z \leftrightarrow G^{\pm 1}$ *при* $G \in \Lambda^{\pm}$ *и* $X^{\pm}(Z)$ — *каноническое решение задачи факторизации. Тогда*

1) *если* $G \in \Lambda^+$ (*«положительный» индекс*), *то существует единственное решение задачи*

$$\begin{cases} \Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = g(t), & t \in L; \\ \Phi^{\pm}(z_m) = 0, & \{z_m\} = Z; \end{cases}$$

2) *если* $G \in \Lambda^-$ (*«отрицательный» индекс*), *то для разрешимости задачи* (10.1) *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\int\limits_L \frac{g(s)}{X^+(s)(s - z_m)}\, ds = 0, \qquad \{z_m\} = Z,$$

причем решение (10.1) *единственно. Во всех случаях решение* $\Phi^{\pm}(z)$ *имеет вид*

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{X^{\pm}(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(s)}{X^+(s)(s - z)}\, ds.$$

Теорема 11.5 — это фактически переформулировка в других терминах теоремы 10.6.

Следствия.

1. Исходная краевая задача при $G \in \Lambda$ *безусловно и однозначно разрешима тогда и только тогда, когда* $G \in \chi_0$.

2. Если $G \in \Lambda^+$ *и* $\operatorname{ind} G = \infty$ (*т. е. не является конечным*), *то исходная краевая задача имеет бесконечно много линейно независимых решений.*

Это следует из очевидной инвариантности класса N при изменении любого конечного числа членов последовательности $Z \in N$.

Теорема 11.6 (устойчивости). *Пусть* $g_k(t) \in C^{\alpha}(L)$, $G_k(t) \in \Lambda$, $Z_k \in \Sigma$, $k = \overline{0, \infty}$; *функции* $G_k(t)$ *принадлежат одному классу* χ, Z_k *принадлежат одному классу* N *и* $\chi^{\pm} \longleftrightarrow N(\chi \subset \Lambda^{\pm})$. *Пусть далее* $\| g_k - g_0 \|^{(\alpha)} \to 0$, $G_k \xrightarrow{\chi} G_0$, $Z_k \xrightarrow{N} Z_0$, $k \to \infty$.

Тогда $\|\Phi_k^{\pm}(z) - \Phi_0^{\pm}(z)\|^{(\beta)} \to 0$, $k \to \infty$, $\beta = \beta(\alpha, q) > 0$, *где* $\Phi_k^{\pm}(z)$ — *решения соответствующих краевых задач для* $g_k(t)$, $G_k(t)$, Z, $k = \overline{0, \infty}$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что

$$l(G_k, \Psi_0(Z_k))_q^{\alpha)} \leqslant l(G_k, G_0)_q^{\alpha} + l(G_0, \Psi_0(Z_0))_q^{\alpha)} + \\ + l(\Psi_0(Z_0), \Psi_0(Z_k)_q^{\alpha} + \leqslant M.$$

Отсюда, используя представление (10.48) и теоремы 11.3, 11.4, получим $\|\Phi_k^{\pm}(z)\|^{(\beta_0)} \leqslant M$, $\beta_0 = \alpha^3(2q+1)^{-2}$, т. е. последовательность $\Phi_k^{\pm}(z)$ компактна в $C^{\beta}(\overline{D}^{\pm})$, $\beta < \beta_0$. Но из условия $\|g_k - g_0\|^{(\alpha)} \to 0$, $k \to \infty$ с учетом теоремы 10.2$'$ следует

$$\|g_k/X_k^{\pm}\|^{(\beta_1)} \leqslant M, \quad \beta_1 = \alpha^2(2q+1)^{-1},$$

$$\|g_k/X_k^{+} - g_0/X_0^{+}\|_R^{(\beta_1)} \to 0, \quad k \to \infty, \ \forall\, R > 0,$$

Вновь с помощью теоремы 10.2$'$ находим, что

$$\|\Phi_R^{\pm}(t) - \Phi_0^{\pm}(t)\|_R^{(\beta_0)} \to 0, \quad k \to \infty, \ \forall\, R > 0.$$

Следовательно, $\|\Phi_R^{\pm}(t) - \Phi_0^{\pm}(t)\|^{(\beta)} \to 0$, $k \to \infty$. Интегральная формула Коши позволяет, очевидно, получить оценку

$$\|\Phi_k^{\pm}(z) - \Phi_0^{\pm}(z)\|^{(\beta)} \leqslant M\|\Phi_k^{\pm}(t) - \Phi_0^{\pm}(t)\|^{(\beta)},$$

из которой и следует утверждение теоремы (сравнить с теоремой 10.7).

В заключение отметим, что функции $G(t) \in \Lambda$ могут иметь весьма сложную асимптотику $\arg G(t)$ при $|t| \to \infty$. Так, даже класс функций «нулевого индекса» χ_0 содержит не только функции нулевого индекса в собственном смысле (т. е. $G(t) \in C^{\alpha}(L)$, $\operatorname{ind} G(t) = 0$), но также, например, функцию $G(t) = \exp\{i \sin t\}$ (так как $\psi_1 = \sin t \in H_0$), хотя $G(t)\overline{\in} C^{\alpha}(L)$, $\alpha > 0$. Более того, в χ_0 есть даже функции, имеющие разрыв второго рода у $\arg G(t)$ при $t \to \infty$. Так, например, функция

$$\psi_0(t) = \begin{cases} -1, & t \geqslant 1, \\ -t, & -1 < t < 1, \\ 1, & t \leqslant -1, \end{cases}$$

принадлежит классу H_0, т. е. $G(t) = \exp\{S_0(\psi_0 \,|\, t)\} \in \chi_0$. Однако непосредственным вычислением легко убедиться, что $G(t) = G_0(t)\,\widetilde{G}(t)$, где $\widetilde{G}(t) \in C^{\alpha}(L)$, $\operatorname{ind} \widetilde{G} = 0$, а

$$G_0(t) = \begin{cases} \exp\{i \ln |t|\}, & |t| \geqslant 1, \\ 1, & |t| < 1, \end{cases}$$

т. е. $\arg G_0(t) \to \infty$, $|t| \to \infty$.

Далее, среди функций $G(t) \in \Lambda$ есть такие, которые в отличие от ранее рассмотренных [9], не имеют не только вполне регулярного роста, но даже и точного порядка на бесконечности, т. е.

$$\varliminf_{t \to \pm\infty} \frac{\ln\, \ln G(t)}{\ln |t|} \neq \varlimsup_{t \to \pm\infty} \frac{\ln\, \ln G(t)}{\ln |t|}.$$

Действительно, пусть $l(r)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $r \in [0,\infty)$, такая, что $l'(r)r\ln r \to 0$, $r \to \infty$, $\varliminf\limits_{r\to\infty} l(r) = \eta_1$, $\varlimsup\limits_{r\to\infty} l(r) = \eta_2$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$ (например, $l(r) = 1/2 + 1/4\sin\sqrt{\ln\,\ln(r+3)}\,$). Тогда [10, с. 91] функция $h(r) = r^{l(r)}$ монотонно возрастает при достаточно больших r, $h(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$. Пусть $h(r_m) = m$, $m = \overline{0,\infty}$ и $z_m = r_m \exp(i\pi/2)$, $Z = \{z_m\}$. Из [10, с. 91, 92] следует, что $Z \in \Sigma$ и

$$\Psi_0(Z\,|\,t) = \mp 2\pi i \frac{\sin \pi l(|t|)/2}{\sin \pi l|t|}\,h(t) + o(h(t)), \quad \pm t > 0.$$

Следовательно, для $G(t) = \exp(\Psi_0(Z\,|\,t)) \in \Lambda^+$ имеем

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{\ln\,\ln G(t)}{\ln|t|} = \eta_1 < \eta_2 = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln\,\ln G(t)}{\ln|t|}.$$

§ 12. Краевые задачи с бесконечным индексом на римановой поверхности

12.1. Введение. Постановка задачи. Пусть по-прежнему D — риманова поверхность рода $\rho > 0$, L — гладкий, замкнутый, простой, гомологичный нулю контур на D, $G(t)$, $g(t)$ — функции, заданные на L, $G(t) \neq 0$. Рассмотрим краевую задачу в случае, когда $\ln|G(t)|$ ограничен на L, а $\arg G(t)$ может иметь бесконечный разрыв в некоторой точке $t_0 \in L$. Аналогично плоскости $\mathbb{C}$ такую задачу будем называть краевой задачей с бесконечным индексом на D и по-прежнему будем считать $g(t_0) = 0$, $\Phi^+(t_0) = 0$.

Отметим, что задача с бесконечным индексом на плоскости имела локальный характер в том смысле, что все проблемы достаточно было решать только в окрестности бесконечности. В частности, можно считать, что все точки последовательности $Z \in \Sigma$ лежат в фиксированной окрестности бесконечности и т. п. Эта «локальность» задачи и позволяет без особого труда перенести все результаты § 10, 11 на задачи с бесконечным индексом на D. Отметим сразу и то важное обстоятельство, что при исследовании инвариантности классов корректности под действием гомеоморфизмов требовалось только локальное поведение гомеоморфизма в окрестности бесконечности [26].

Далее, как и на плоскости, для краевой задачи с бесконечным индексом на D возможны случаи, когда число решений l или число условий разрешимости l^* равно бесконечности. При $l^* = \infty$ в правой части задачи (A) (10.5) появляется ряд, о сходимости которого в $C^\alpha(L)$ ничего определенного сказать, вообще говоря, нельзя. Поэтому, как и на плоскости, в случае $l^* = \infty$ мы вместо задачи (A) будем рассматривать задачу (10.1) с дополнительными условиями разрешимости:

$$\begin{cases} \Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = g(t), & t \in L, \\ c_k(g) = 0, & k = \overline{1,\infty}, \end{cases} \tag{12.1}$$

причем функционалы $c_k(g)$ будут определены отдельно (см. п. 12.6, теорема 12.4).

12.2. Функциональные пространства. Пусть $U \ni t_0$ — фиксированная окрестность точки t_0, $z\colon U \to \mathbb{C}$ — локальный параметр. Будем в дальнейшем считать, что в терминах локального параметра $z(L \cap U)$ — отрезок вещественной оси. Тогда без ограничения общности положим, что

$$z(L \cap U) = \bigl\{s \in \mathbb{C} \,|\, |s| > R, \operatorname{Im} s = 0\bigr\}, \quad z(t_0) = \infty;$$

$$z(D^{\pm} \cap U) = \bigl\{s \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R, \pm \operatorname{Im} z > 0\bigr\}.$$

Кроме того, если L_0 — компонента связности L, содержащая точку t_0, то полагаем, что L_0 — гомеоморфный образ вещественной оси $L_0 = \xi_0(L^0)$, $L^0 = [-\infty, \infty]$, $t_0 = \xi_0(\infty)$, причем $z(\xi_0(s)) \equiv s$ при $|s| > R$, $\operatorname{Im} s = 0$. Остальные компоненты связности L $\quad L \backslash L_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{n} L_j$ будем, как и ранее, считать образами единичной окружности, $\xi_j : L^1 \to L_j$, $L^1 = \{s \in \mathbb{C} \bigm| |s| = 1\}$.

Введем пространства Гельдера

$$C^{\alpha}(L) = \bigl\{f(t) \,|\, f(\xi_0(s)) \in C^{\alpha}(L^0);\ f(\xi_j(s)) \in C^{\alpha}(L^1), j = \overline{1, n}\,\bigr\};$$

$$\|f\|^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{n} \|f(\xi_j(s))\|^{(\alpha)}_{L^1} + \|f(\xi_0(s))\|^{(\alpha)}_{L^0}$$

и, аналогично п. 10.3.6, весовые пространства Гельдера

$$C^{\alpha}_q(L) = \bigl\{f(t) \,|\, f(\xi_0(s)) \in C^{\alpha}_q(L^0);\ f(\xi_j(s)) \in C^{\alpha}(L^1), j = \overline{1, n}\,\bigr\};$$

$$\|f\|^{(\alpha,q)} = \|f(\xi_0(s))\|^{(\alpha,q)} + \sum_{j=1}^{n} \|f(\xi_j(s))\|^{(\alpha)};$$

$$C^{(\alpha,q)}_0(L) = \bigl\{f(t) \,|\, f(t) \in C^{\alpha}_q(L);\ |\operatorname{Re} f(\xi_0(s))| \leqslant M, s \in L^0\bigr\},$$

$$\|f\|^{(\alpha,q)}_0 = \|f\|^{(\alpha,n)} + \sup_{s \in L^0} |\operatorname{Re} f(\xi_0(s))|.$$

В дальнейшем примем также обозначения $L^0_R = \{t \in L^0 \,|\, |t| \geqslant R\}$, $\mathbb{C}_R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geqslant R\}$, $\mathbb{C}^{\pm}_R = \mathbb{C}_R \cap \{z \,|\, \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ и, соответственно, будем рассматривать классы $C^{\alpha}(L^0_R)$, $C^{\alpha}(\mathbb{C}^{\pm}_R)$ с аналогичными нормами, а также класс $H^R_0 = \{f(t) \,|\, |t| \geqslant R \text{ и } f(t) \in H_0\}$ (см. п. 11.1). Очевидно $C^{\alpha}_q(L) \subset C^{\alpha_1}_{q_1}(L)$ при $\alpha > \alpha_1$, $q \leqslant q_1$. В дальнейшем набор (α, q) будем считать фиксированным.

12.3. Класс $\Lambda(D, L)$. Пусть $\Lambda^+(D, L)$ — класс функций $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$, $t \in L$, соответствующих мероморфным в $D^\pm$ функциям $X^\pm(z)$, не имеющим полюсов в окрестности t_0 и таким, что

$$\ln X^\pm(t) \in C_0^{(\alpha,q)}(L), \quad q \geqslant 0, \quad \alpha \in (0,1).$$

Положим $\Lambda^-(D, L) = \{G(t) \,|\, G^{-1}(t) \in \Lambda^+(D, L)\}$ и $\Lambda(D, L) = \Lambda^+(D, L) \cup \Lambda^-(D, L)$. Пусть, как в § 7, $\Delta_0 = t_0^{-1} r_1^0 \ldots r_\rho^0$ минимальный дивизор, $r_j^0 \overline{\in} U$ фиксированы, $j = \overline{1, \rho}$ и $K(\Delta_0 \,|\, p, z) = K_0(p, z)$ — соответствующий ему абелев дифференциал, $\{\omega_1(p), \ldots, \omega_\rho(p)\}$ — соответствующий базис абелевых дифференциалов 1 рода на D, $(\omega_k, (r_j^0) = 0$, $k \neq j$, $k, j = \overline{1, \rho})$ и функции $\varphi_k(t) \in C^\alpha(L)$ таковы, что

$$\int\limits_L \varphi_k(t)\omega_j(t) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

В дальнейшем систему $\{K_0(p, z);\ \omega_k(p),\ \varphi_k(t),\ k = \overline{1, \rho}\}$ считаем фиксированной.

Введем операторы

$$S_D^\pm(f \,|\, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L f(t) K_0(t, z), \quad z \in D^\pm,$$

$$S_D(f \,|\, t) = S_D^+(f \,|\, t) + S_D^-(f \,|\, t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L f(s) K_0(s, t), \quad t \in L.$$

Теперь через $\chi_0(D, L)$ обозначим класс функций $G(t)$, для которых функция

$$G_0(t) = G(t) \prod_{j=1}^n (\eta_{j0}^+(t))^{-\varkappa_j}, \quad \varkappa_j = \operatorname{ind} G(t)\big|_{L_j}, \quad j = \overline{1, n}$$

удовлетворяет условиям:

(i) $\ln |G_0(t)| = \psi_0(t) \in C_0^{(\alpha,q)}(L)$,

(ii) $i \arg G_0(t) = S_D(\psi_1 \,|\, t)$, $\quad \psi_1 \in C_0^{(\alpha,q)}(L)$,

(iii) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_L \ln G_0(t)\omega =$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \ln G_0 \omega_1, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \ln G_0 \omega_2, \ldots, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \ln G_0 \omega_\rho \right) \in \Gamma$$

(Γ — решетка периодов).

Очевидно, класс $\chi_0(D, L)$ замкнут относительно умножения.

Покажем корректность определения $\chi_0(D, L)$, т. е. сходимость интегралов (iii). Во-первых, из утверждения 3 леммы 7.1 следует, что

$\operatorname{ind} G_0(t)\big|_{L_j} = 0$, $j = \overline{1, n}$, откуда с учетом (i), (ii) $\ln G_0(t) \in C^{\alpha}(L_j)$, $j = \overline{1, n}$, значит сходится каждый из интегралов в $\Big\{ \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{L_j} \ln G_0 \cdot \omega \Big\}$.

Далее, интеграл $\int\limits_{L_0} \psi_0(t)\omega_k(t)$ сходится абсолютно, так как $|\psi_0| \leqslant M$, а интеграл $\int\limits_{L} i \arg G_0(t)\omega_k(t)$ сходится в смысле главного значения. Действительно, после изменения порядка интегрирования

$$\sigma_0 = \int\limits_L i \arg G_0\omega_k = \int\limits_L \psi_1(s)\frac{1}{\pi i}\int\limits_L K_0(s,t)\omega_k(t)$$

и σ_0 сходится, поскольку $\int\limits_L K_0(s,t)\omega_k(t) = 0$ при $s = t_0$, а $|\psi_1(s)| \leqslant M$.

Лемма 12.1. *Условия* (i), (ii) *для* $G_0(t)$ *выполнены тогда и только тогда, когда* $G_0(\xi_0(s)) \in \chi_0$, *где* χ_0 — *класс функций «нулевого индекса» на плоскости* $\mathbb{C}$ *(см. п. 10.3.6).*

Доказательство. Очевидно $G_0(\xi_0(s)) \in C^{\alpha}[-R, R]$, $\forall\, R > 0$. Далее, пусть $u \in U$, $t \in L \cap U$, тогда в терминах локального параметра $t = \xi_0(s)$, $u = u(z)$ имеем

$$K_0(\xi_0(s), u(z)) = \left(\frac{1}{s-z} - \frac{1}{s}\right) ds + A(s,z)\, ds, \tag{12.2}$$

где $A(s,z)$ аналитична по s, z, $|s| \geqslant R$, $|z| > R$, $|A(s,z)| \leqslant M|s|^{-2}$. Последнее следует из аналитичности дифференциала $K(\xi_0(s), u(z))$ при $s = \infty$ и фиксированном $z \neq \infty$. Тогда

$$S_D(\psi_1 \,|\, \xi_0(s)) = S_0(\psi_1(\xi_0(\eta)) \,|\, s) + f(s), \tag{12.3}$$

где S_0 — оператор, введенный в п. 10.3.6:

$$S_0(\psi_1(\xi_0(\eta)) \,|\, s) = \frac{s}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_1(\xi_0(\eta))}{(\eta - s)\eta}\, d\eta.$$

Функция $f(s)$ представляется в виде

$$f(s) = \int\limits_{|\eta| \geqslant R} A(\eta, s)\psi_1(\xi_0(\eta))\, d\eta - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-R}^{R} \psi_1(\xi_0(\eta))\left(\frac{1}{\eta - s} - \frac{1}{\eta}\right) d\eta +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L \setminus U} K(t, \xi_0(s))\psi_1(t),$$

т. е. $f(s) \in C^\alpha(L_R^0)$, откуда с учетом (i), (ii) следует, что $G_0(\xi_0(s)) \in \chi_0$. Обратно, пусть $G_0(\xi_0(s)) \in \chi_0$. Тогда, очевидно, $\ln|G_0(t)| = \psi_0(t) \in C_0^{(\alpha,q)}(L)$, $i\arg G_0(t) \in C^\alpha(L\backslash U)$ и $i\arg G_0(\xi_0(s)) = S_0(\psi_2(\xi_0(\eta))\,|\,s)$, где $\psi_2(\xi_0(\eta)) \in C_0^{(\alpha,q)}(L^0)$. Теперь с учетом представления (12.3) находим

$$i\arg G(t) = S_D(\psi_2\,|\,t) + f(t), \quad f(t) \in C^\alpha(L\cap U).$$

Следовательно, $G(t)$ удовлетворяет (i), (ii) как функция класса $C^\alpha(L)$ (см. п. 10.3.6, теорема 10.4).

Лемма 12.2. *Имеет место представление*

$$\int\limits_L S_D(\psi\,|\,t)\omega_k(t) = \pm\operatorname{Res} S_D^\pm(\psi\,|\,r_k^0),$$

$$r_k^0 \in D^\pm, \quad k = \overline{1,\rho}, \quad \psi \in C_0^{(\alpha,q)}(L),$$

где аналогично § 4, 7, $\operatorname{Res} f(r_k^0) = \operatorname{Res} f(r)\omega_k(r)\big|_{r=r_k^0}$.

Доказательство. Имеем

$$S_D(\psi\,|\,t) = S_D^+(\psi\,|\,t) + S_D^-(\psi\,|\,t).$$

В силу интегральной теоремы Коши (п. 3.4) находим

$$\int\limits_L S_D^\pm(\psi\,|\,t)\omega_k(t) = \begin{cases} \pm\operatorname{Res} S_D^\pm(\psi\,|\,r_k^0), & r_k^0 \in D^\pm, \\ 0, & r_k^0 \in D^\mp, \end{cases}$$

откуда и следует утверждение леммы.

Теорема 12.1. *Функция $G(t)$ принадлежит классу $\chi_0(D,L)$ тогда и только тогда, когда она представляется в виде*

$$G(t) = X^+(t)/X^-(t), \quad t \in L,$$

где $X^\pm(u)$ аналитичны в $D^\pm$ и удовлетворяют условиям:
— $|\ln|X^\pm(u)|| \leqslant M$, $u \in \overline{D}^\pm$;
— *в U в терминах локального параметра*

$$\ln X^\pm(u(z)) = S_0^\pm(\varphi_0\,|\,z) \pm S_0^\pm(\varphi_1\,|\,z) + \psi^\pm(z), \quad z \in \mathbb{C}_R^\pm, \tag{12.4}$$

где $\varphi_{0,1}(t) \in H_0^R$, $\psi^\pm(z) \in C^\alpha(\mathbb{C}_R^\pm)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$G(t) \in \chi_0(D,L), \quad \varkappa_j = \operatorname{ind} G\big|_{L_j}, \quad j = \overline{1,n};$$

$$G_0(t) = G(t)\prod_{j=1}^n (\eta_{j,0}^+(t))^{-\varkappa_j}.$$

Обозначим

$$x_0^{\pm}(z) = S_D^{\pm}(\psi_0 \,|\, z) \pm S_D^{\pm}(\psi_1 \,|\, z), \quad z \in D^{\pm},$$

где $\psi_0 = \ln |G_0|$, $i \arg G_0 = S_D(\psi_1 \,|\, t)$. Тогда, очевидно, $x_0^+(t) - x_0^-(t) = \ln G_0(t)$, $t \in L$; $x_0^{\pm}(z)$ аналитичны в $D^{\pm}$ кроме точек r_k^0, $k = \overline{1, \rho}$, где имеются простые полюса, вычеты в которых вычисляются следующим образом (лемма 12.1):

$$\operatorname{Res} x_0^{\pm}(r_k^0) = \int\limits_L \psi_0 \omega_k = \pm\Big(\pm \int\limits_L S_D(\psi_1 \,|\, t)\omega_k\Big) = \int\limits_L \ln G_0 \omega_k = a_k, \quad k = \overline{1, \rho},$$

где $a = (a_1, \ldots, a_\rho) \in \Gamma$ (Γ — решетка периодов). Тогда, как и в § 7, выберем на D замкнутый контур $\widetilde{L}$, $\widetilde{L} \cap U = \emptyset$ так, что $\int\limits_{\widetilde{L}} \omega_k(p) = -a_k$, $k = \overline{1, \rho}$, и пусть

$$x^{\pm}(u) = x_0^{\pm}(u) + \int\limits_{\widetilde{L}} K_0(p, u), \quad X_0^{\pm}(q) = \exp\big(x^{\pm}(u)\big), \quad u \in D^{\pm}.$$

Тогда очевидно (см. § 7) $X^{\pm}(u)$ аналитичны в $D^{\pm}$, $X_0^+(t)/X_0^-(t) = G_0(t)$, $t \in L$ и $X_0^{\pm}(u) \neq 0$, т. е. $|\ln |X_0^{\pm}(q)|| \leqslant M$, $q \in D^{\pm} \backslash U$.

При этом, с учетом формулы (12.3), в U в терминах локального параметра имеем

$$x^{\pm}(q(z)) = S_0^{\pm}(\psi_0 \,|\, z) \pm S_0^{\pm}(\psi_1 \,|\, z) + f_0^{\pm}(z), \quad z \in \mathbb{C}_R^{\pm},$$

где $f_0^{\pm}(z) \in C^{\alpha}(\mathbb{C}_R^{\pm})$, $\psi_{0,1}(s) = \psi_{0,1}(\xi_0(s))$.

Пусть $\varphi_0(s) = \psi_0(s)$, $\psi_1(s) = \varphi_1(s) + i\varphi_2(s)$, $\operatorname{Im} \varphi_{1,2}(s) \equiv 0$.

Тогда из (i), (ii) следует, что $\varphi_{0,1}(s) \in H_0^R$. С другой стороны, в силу (ii) и (12.3) $i \arg G_0(\xi_0(s)) = S_0(\varphi_1 \,|\, s) + iS_0(\varphi_2 \,|\, s) + f_1(s)$, где $f_1(s) \in C^{\alpha}(L_R^0)$. Но так как $\operatorname{Re}(i \arg G_0) = 0 = iS_0(\varphi_2 \,|\, s) + \operatorname{Re} f_1(s)$, то $S_0(\varphi_2 \,|\, s) \in C^{\alpha}(L_R^0)$, откуда (п. 10.4) $S_0^{\pm}(\varphi_2 \,|\, z) \in C^{\alpha}(\mathbb{C}_R^{\pm})$. Окончательно получим

$$x^{\pm}(q(z)) = S_0^{\pm}(\varphi_0 \,|\, z) \pm S_0^{\pm}(\varphi_1 \,|\, z) + f_2^{\pm}(z), \quad z \in \mathbb{C}_R^{\pm},$$

$f_2^{\pm}(z) = \{f_0^{\pm}(z) \pm iS_0^{\pm}(\varphi_2 \,|\, z)\} \in C^{\alpha}(\mathbb{C}_R^{\pm})$, откуда, в частности, с учетом п. 10.3.6

$$|\ln |X_0^{\pm}(q)|| = |\operatorname{Re} x^{\pm}(q(z))| \leqslant M, \quad q \in U.$$

Таким образом, требуемое решение задачи факторизации для $G_0(t)$ построено. Решение задачи факторизации для оставшегося множителя

$\prod\limits_{j=1}^{n}(\eta_{j,0}^{+}(t))^{\varkappa_j}$ будет

$$X_1^{\pm}(q)=\begin{cases}\prod\limits_{j=1}^{n} (\eta_{j,0}^{+}(q))^{\varkappa_j}, & q\in D^{+},\\ 1, & q\in D^{-}.\end{cases}$$

Достаточность. Пусть $G(t)=X^{+}(t)/X^{-}(t)$, $t\in L$, где $X^{\pm}(q)$ удовлетворяют условиям (12.4), причем

$$\varkappa_j^{\pm}=\operatorname{ind}X^{\pm}\big|_{L_j},\quad j=\overline{1,n};$$

$$X_0^{\pm}(q)=X^{\pm}(q)\prod_{j=1}^{n}(\eta_{j,0}^{\pm}(q))^{-\varkappa_j^{\pm}},\quad q\in D^{\pm};$$

$$\varkappa_j=\operatorname{ind}G\big|_{L_j}=\varkappa_j^{+}-\varkappa_j^{-},\quad j=\overline{1,n};$$

$$G_0(t)=G(t)\prod_{j=1}^{n}(\eta_{j,0}^{+}(t))^{-\varkappa_j},\quad t\in L.$$

Тогда

$$G_0(t)=\frac{X_0^{+}(t)}{X_0^{-}(t)}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\eta_{j,0}^{+}(t)}{\eta_{j,0}^{-}(t)}\right)^{\varkappa_j^{-}}=G_1(t)G_2(t).$$

Из леммы 7.1 следует, что

$$\ln G_2(t)=\sum_{j=1}^{n}\varkappa_j^{-}\ln\frac{\eta_{j,0}^{+}(t)}{\eta_{j,0}^{-}(t)}\in C^{\alpha}(L),\quad t\in L.$$

Следовательно, с учетом леммы 12.1 и теоремы 10.5 функция $\ln G_2(t)$ удовлетворяет условиям (i), (ii) и, кроме того, в силу леммы 7.1 $\int\limits_{L}\ln G_2\omega\in\Gamma$ (Γ — решетка периодов). Осталось доказать выполнение (i)–(iii) для функций $G_1(t)=X_0^{+}(t)/X_0^{-}(t)$, $t\in L$. Во-первых, очевидно, что $\ln\eta_{j,0}^{\pm}(q(z))\in C^{\alpha}(\mathbb{C}_R^{\pm})$, $q(z)\in U$ и, следовательно, для $X_0^{\pm}(q(z))$ выполняются условия (12.4). Тогда согласно лемме 12.1 $\ln G_1(t)$ удовлетворяет условиям (i), (ii). Рассмотрим теперь $X_0^{\pm}(q)$ в областях $D_0^{\pm}=$ $=D^{\pm}\backslash U$ с границей $L^{\pm}=(L\backslash U)\cup\partial U^{\pm}$, $\partial U^{\pm}=\partial U\cap D^{\pm}$. Так как

$$\operatorname{ind}X_0^{\pm}\big|_{L_j}=0,\quad j=\overline{1,n};\qquad X_0^{\pm}(q)\neq 0,\quad q\in D_0^{\pm},$$

а значит и

$$\operatorname{ind} X_0^{\pm}\big|_{L_0^{\pm}} = 0, \quad L^{\pm} = L_0^{\pm} \bigcup \Bigl(\bigcup_{j=1}^{n} L_j\Bigr),$$

то аналогично доказательству леммы 7.1 интеграл $\int\limits_{L^{\pm}} \ln X_0^{\pm}\omega$ принадлежит решетке периодов Г.

Покажем, что

$$\int\limits_{\partial U^{\pm}} \ln X_0^{\pm}\omega_k = \int\limits_{L\cap U} \ln X_0^{\pm}\omega_k, \quad k = \overline{1,\rho}.$$

В плоскости локального параметра в U имеем $\omega_k(q(z)) = f_k(z)\,dz$, где $f_k(z)$ аналитичны в $\mathbb{C}_R$, $|f_k(z)| \leqslant M|z|^{-2}$, $|z| \geqslant R$ и выполняются соотношения

$$\int\limits_{L\cap U} \ln X_0^{\pm}\omega_k = \int\limits_{L_R} \ln X_0^{\pm}(\xi_0(s))\, f_k(s)\,ds;$$

$$\int\limits_{\partial U^{\pm}} \ln X_0^{\pm}\omega_k = \int\limits_{\widetilde{L}_R^{\pm}} \ln X_0^{\pm}(q(z))\, f_k(z)\,dz.$$

Здесь $\widetilde{L}_M^{\pm} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = M, \pm \operatorname{Im} z > 0\}$. В силу (12.4) и п. 10.3.6 справедливы оценки $|\ln X_0^{\pm}(q(z))| \leqslant M|z|^{1-\beta}$, $\beta > 0$, $|z| \geqslant R$, из которых, в частности, следует сходимость интегралов

$$\int\limits_{L_R} \ln X_0^{\pm}(\xi_0(s))\, f_k(s)\,ds, \quad k = \overline{1,\rho}$$

и, кроме того,

$$\int\limits_{\widetilde{L}_{R_1}^{\pm}} \ln X_0^{\pm}(q(z))\, f_k(z)\,dz \to 0, \quad R_1 \to \infty, \quad R_1 > R, \quad k = \overline{1,\rho}.$$

С другой стороны, так как $X_0^{\pm}(q(z)) \neq 0$, а $f_k(z)$ аналитична, то

$$\int\limits_{\widetilde{L}_R^{\pm}} \ln X_0^{\pm}(q(z))\, f_k(z)\,dz = \int\limits_{\widetilde{L}_{R_1}^{\pm}} \ln X_0^{\pm}(q(z))\, f_k(z)\,dz + \\ + \int\limits_{|s|\in[R,R_1]} \ln X_0^{\pm}(q(s))\, f_k(s)\,ds, \quad R_1 > R, \quad k = \overline{1,\rho}.$$

Отсюда при $R_1 \to \infty$ приходим к требуемым соотношениям

$$\int\limits_{\widetilde{L}_R^{\pm}} \ln X_0^{\pm}(q(z))\, f_k(z)\, dz = \int\limits_{L_R^0} \ln X_0^{\pm}(q(s))\, f_k(s)\, ds, \quad k = \overline{1,\rho}.$$

Таким образом

$$\int\limits_{L} \ln G_1\omega = \int\limits_{L\cap U} \ln G_1\omega + \int\limits_{L\setminus U} \ln G_1\omega = \int\limits_{L^+} \ln X_0^{+}\omega - \int\limits_{L^-} \ln X_0^{-}\omega \in \Gamma$$

(Γ — решетка периодов), что и завершает доказательство теоремы.

Следствие. $\chi_0(D,L) \subset \Lambda^+(D,L) \cap \Lambda^-(D,L)$.

12.4. Дивизоры. Класс $\Sigma(D,L)$. Зафиксируем точки $r_0^{\pm} \in D^{\pm}\setminus(U\cup L)$, $r \overline{\in} L_0$. Введем функцию

$$\Psi(r\,|\,q) = \int\limits_{\widetilde{r}}^{r} K_0(r,q) + \sum_{k=1}^{\rho} a_k(r) \int\limits_{L} K_0(t,q)\,\varphi_k(t), \quad q \in D^{\pm},$$

где $a_k(r) = -\int\limits_{\widetilde{r}}^{r} \omega_k(p)$,

$$\widetilde{r} = \widetilde{r}(r) = \begin{cases} r_0^{\pm}, & r \in D^{\mp}\setminus U, \\ z(\widetilde{r}) = \overline{z(r)}, & r \in U. \end{cases}$$

$r_0^{\pm} \in D^{\pm}\setminus U$. Кривая интегрирования, соединяющая r и $\widetilde{r}$, пересекает L в точке t_0.

Лемма 12.3. *Функция* $\Psi(r\,|\,q)$ *обладает следующими свойствами*:

1) $\exp\Psi(r\,|\,q)$ *аналитична в* $D^{\pm}$, *кроме точки* $\widetilde{r}$, *где имеется простой полюс*, $\exp\Psi(r\,|\,r) = 0$;

2) *граничные значения на* L $\Psi^{\pm}(r\,|\,t)$ *принадлежат* $C_0^{(\alpha,q)}(L)$, $q > 0$, *имеют разрыв* 1 *рода в точке* t_0, *приращение по* L *определяется равенством*

$$[\Psi^{\pm}(r\,|\,t)]\Big|_L = \begin{cases} 2\pi i, & r \in D^+, \\ -2\pi i, & r \in D^-; \end{cases}$$

3) $$\int\limits_{L} \Psi^{+}(r\,|\,t)\omega_k(t) - 2\pi i \int\limits_{q}^{t_0} \omega_k(p) = 0,\ k = \overline{1,\rho},\ r \in D^+,$$

$$\int\limits_{L} \Psi^{-}(r\,|\,t)\omega_k(t) + 2\pi i \int\limits_{q}^{t_0} \omega_k(t) = 0, \quad k = \overline{1,\rho}, \quad r \in D^-.$$

Доказательство. Вообще говоря, $\Psi(r \mid q)$ имеет полюса в точках $r_1^0 \dots r_\rho^0$, однако

$$\operatorname{Res}\Psi(r \mid r_j^0) = \int\limits_{\widetilde{r}}^{r} \omega_j(p) + \sum_{k=1}^{\rho} a_k(r) \int\limits_{L} \omega_j(t)\, \varphi_k(t) = 0.$$

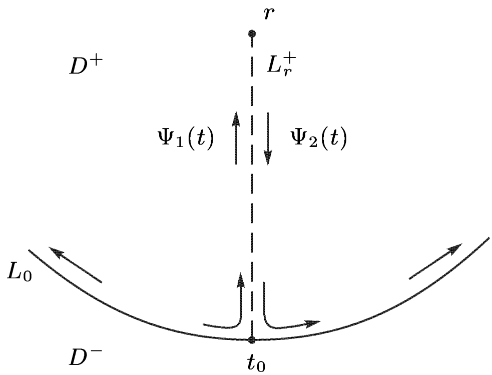

Рис. 13

Таким образом, функция $\Psi(r \mid q)$ аналитична в $D^\pm$, кроме точек кривой, соединяющей r и $\widetilde{r}$, где скачок ее равен $2\pi i$, а также самих r и $\widetilde{r}$, где имеются логарифмические особенности. Отсюда легко следует утверждение 1: функция $\exp(\Psi(r \mid q))$ аналитична в $D^\pm$, $\exp(\Psi(r \mid r)) = 0$, $\exp(\Psi(r \mid \widetilde{r})) = \infty$. Пусть далее $r \in D^+$, L_r^+ — часть кривой, соединяющей $\widetilde{r}$ и r, лежащая в D^+ (см. рис. 14), $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ — граничные значения $\Psi(r \mid q)$ на L_r^+. Функция $\Psi(r \mid q)$ непрерывна при обходе L_0 и L_r в направлении, указанном стрелками на рис. 14. Но $\Psi_1(t) - \Psi_2(t) = 2\pi i$, отсюда скачок $[\Psi(r \mid t)]\Big|_L = \Psi_1(t_0) - \Psi_2(t_0) = 2\pi i$. С другой стороны, при $t \in L$ имеем, что функция

$$\Psi^+(r \mid t) - \Psi^-(r \mid t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r)\varphi_k(t)$$

непрерывна на L, т. е. $[\Psi^+(r \mid t)]\Big|_L = [\Psi^-(r \mid t)]\Big|_L$, откуда окончательно следует утверждение 2.

Обратимся, наконец, к утверждению 3. Если обходить $L \cup L_r$ в направлении, указанном на рис. 14, то $\Psi(r \mid q)$ — граничное значение аналитической функции, $q \in L \cup L_r$ и тем самым

$$\int\limits_{L\cup L_r} \Psi(r\,|\,p)\omega_k(p) =$$

$$= \int\limits_{L} \Psi^+(r\,|\,t)\omega_k(t) + \int\limits_{t_0} \Psi_1(p)\omega_k(p) + \int\limits_{r}^{t_0} \Psi_2(p)\omega_k(p) = 0,$$

$k = \overline{1,\rho}$, откуда

$$\int\limits_{L} \Psi^+(r\,|\,t)\,\omega_k(t) - 2\pi i \int\limits_{r}^{t_0} \omega_k(p) = 0, \quad k = \overline{1,\rho}.$$

Утверждения леммы в случае $r \in D^-$ доказываются аналогично.

Пусть дивизор $\Delta = q_1 \ldots q_s q_{s+1}^{-1} \ldots q_m^{-1}$. Положим

$$\Psi(\Delta\,|\,q) = \sum_{j=1}^{s} \Psi(q_j\,|\,q) - \sum_{j=s+1}^{m} \Psi(q_j\,|\,q), \quad q \in D^{\pm}.$$

Наряду с обычными дивизорами (далее — конечными) будем рассматривать и «бесконечные» дивизоры, т.е. имеющие бесконечное число нулей $\Delta = q_1^{-1} \ldots q_s^{-1} q_{s+1} \ldots q_m \ldots$ или полюсов $\Delta = q_1 \ldots q_s q_{s+1}^{-1} \ldots q_m^{-1} \ldots$, причем $q_m \to t_0$, $m \to \infty$.

Пусть дивизор (конечный или бесконечный) $\Delta = \Delta_+ \cdot \Delta_-$, где $\Delta_\pm \subset D^\pm$. Пусть $\{q_m\} = \Delta \cap U$ — нули или полюса Δ, лежащие в U, $r_m = |z(q_m)|$, $\varphi_m = \arg z(q_m)$. Введем характеристику

$$\langle\Delta\rangle^{(\alpha,q)} = \sum_m r_m^{-1}|\sin\varphi_m| + \|\Psi^+(\Delta_+\,|\,t)\|^{(\alpha,q)} + \|\Psi^-(\Delta_-\,|\,t)\|^{(\alpha,q)}$$

и класс дивизоров $\Sigma(D,L) = \{\Delta\,|\,\langle\Delta\rangle^{(\alpha,q)} < \infty\}$.

Очевидно, любой конечный дивизор принадлежит $\Sigma(D,L)$. Покажем корректность определения класса $\Sigma(D,L)$ для бесконечных дивизоров, т.е. сходимость рядов $\Psi^\pm(\Delta_\pm\,|\,t)$. Можем считать $\Delta = q_1 \ldots q_m \ldots \in D^+ \cap U$. Как и в (12.2), в терминах локальных параметров имеем

$$z = z(q), \quad v = v(p), \quad q, p \in U,$$

$$K_0(p,q) = \left(\frac{1}{v-z} - \frac{1}{v}\right) dv + A(v,z)\,dv,$$

$$\omega_k(p) = f_k(v)\,dv, \quad k = \overline{1,\rho},$$

$$|A(v,z)| + \sum_{k=1}^{\rho} |f_k(v)| \leqslant M|v|^{-2}, \quad |v| > R.$$

Тогда

$$\Psi(\Delta\,|\,q) = \sum_m \int\limits_{\overline{z}_m}^{z_m} \left(\frac{1}{v-z} - \frac{1}{v}\right) dv + \sum_m \int\limits_{\overline{z}_m}^{z_m} A(v,z)\,dv +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\rho} \Big[\sum_m a_k(q_m)\Big] \int\limits_L K_0(t,q(z))\varphi_k(t) =$$
$$= J_1 + J_2 + \sum_{k=1}^{\rho} J_3^k \int\limits_L K_0(t,q(z))\varphi_k(t), \qquad (12.5)$$

$$J_3^k = -\sum_m \int\limits_{\overline{z}_m}^{z_m} f_k(v)\,dv = -\sum_m \int\limits_{\widetilde{L}_m} f_k(v)\,dv.$$

Но $J_1 = \ln \prod\limits_m \dfrac{1 - z/z_m}{1 - z/\overline{z}_m} < \infty$, так как $\sum\limits_m r_m^{-1} |\sin\varphi_m| < \infty$ согласно (10.2)–(10.4). Для интегралов J_2, J_3^k деформируем кривую интегрирования $\widetilde{L}_m$ так, чтобы

$$\widetilde{L}_m = \left\{ v \,\middle|\, |v| = r_m,\ \arg v = \left\{ \begin{array}{ll} [-\varphi_m, \varphi_m], & 0 < \varphi_m \leqslant \pi/2, \\ [\varphi_m, 2\pi - \varphi_m], & \pi/2 < \varphi_m \leqslant \pi \end{array} \right. \right\}.$$

Тогда для приращения $\arg v$ на $\widetilde{L}_m$ имеем $|[\arg v]|_{\widetilde{L}_m}| \leqslant M|\sin\varphi_m|$, т. е. длина $\widetilde{L}_m$ не превосходит $Mr_m|\sin\varphi_m|$ и

$$|J_2| + \sum_{k=1}^{\rho} |J_3^k| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} r_m^{-2} \cdot r_m |\sin\varphi_m| < \infty.$$

Заметим, что $\operatorname{Re} J_1 \equiv 0$ при $t \in L \cap U$, откуда $|\operatorname{Re}\Psi^+(\Delta\,|\,t)| \leqslant M$.

Если же $q\overline{\in}U$, то $K_0(p,q) = A(v,q)\,dv$ и дальнейшее доказательство аналогично.

Итак, при выполнении условия $\sum r_m^{-1}|\sin\varphi_m| < \infty$ ряды $\Psi(\Delta\,|\,q)$ сходятся и при этом

$$|\operatorname{Re}\Psi^+(\Delta\,|\,t)| \leqslant M, \quad t \in L. \qquad (12.6)$$

Для $\Delta \in \Sigma(D,L)$ положим $\Psi_0(\Delta\,|\,t) = \Psi^+(\Delta_+\,|\,t) - \Psi^-(\Delta_-\,|\,t)$.

Установим несколько предварительных свойств классов $\chi_0(D,L)$; $\Sigma(D,L)$.

Лемма 12.4. *Пусть* $\Delta = q^{\pm 1}$ *— один нуль или один полюс,* $q \overline{\in} L$. *Тогда* $[\Psi_0(\Delta \,|\, t)]\Big|_L = \pm 2\pi i$,

$$\int\limits_L \Psi_0(\Delta \,|\, t)\omega_k(t) \mp 2\pi i \int\limits_q^{t_0} \omega_k(p) = 0, \quad k = \overline{1, \rho}.$$

Эти утверждения следуют из леммы 12.3 и определения $\Psi_0(\Delta \,|\, t)$.

Лемма 12.5. *Если* $\Delta \in \Sigma(D, L)$, *то* Δ *— главный дивизор тогда и только тогда, когда* $\exp(\Psi_0(\Delta \,|\, t)) \in \chi_0(D, L)$.

Доказательство. Пусть Δ — конечный. Из леммы 12.4 следует, что разрыв в точке t_0 $[\Psi_0(\Delta \,|\, t)]\Big|_L$ равен $2\pi i \cdot \deg \Delta$ и с учетом леммы 12.1 получим, что условия (i), (ii) для $\exp(\Psi_0(\Delta \,|\, t))$ выполнены тогда и только тогда, когда $\deg \Delta = 0$. Далее, пусть $\deg \Delta = 0$, $\Delta = q_1 \ldots q_s q_{s+1}^{-1} \ldots q_{2s}^{-1}$, тогда

$$\int\limits_L \Psi_0(\Delta \,|\, t)\, \omega_k(t) = 2\pi i \sum_{j=1}^{s} \int\limits_{q_j}^{q_{j+s}} \omega_k(p),$$

и с учетом теоремы Абеля $\exp(\Psi_0(\Delta \,|\, t))$ принадлежит $\chi_0(D, L)$ тогда и только тогда, когда Δ главный дивизор. Если же Δ бесконечный дивизор, то в окрестности t_0 содержится бесконечное число нулей или полюсов и, переходя к локальному представлению (12.5), с учетом леммы 12.1 и результатов п. 10.3.6 получим, что $\exp(\Psi_0(\Delta \,|\, t)) \overline{\in} \chi_0(D, L)$. Лемма доказана.

Лемма 12.6. *Пусть дивизор* Δ *имеет бесконечное число нулей (полюсов), тогда найдется главный дивизор* $\widetilde{\Delta}$ *такой, что дивизор* $\Delta_0 = (\Delta \cdot \widetilde{\Delta}) \subset U$ *и* Δ_0 *не имеет полюсов (нулей).*

Доказательство. Для определенности пусть Δ имеет бесконечное число нулей $\Delta = q_1^{-1} \ldots q_s^{-1} q_{s+1} \ldots q_m \ldots$, $q_m \to t_0$, и пусть $(q_{s+1} \ldots q_m) \overline{\in} U$; $(q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots) \in U$.

Пусть $\Delta_1 = q_1^{-1} \ldots q_s^{-1} q_{m+1} q_{m+2} \ldots q_{s+\rho}$, тогда $\deg \Delta_1 = \rho$ и значит $r[\Delta_1^{-1}] = i[\Delta_1] + \deg \Delta_1 - \rho + 1 > 0$, т. е. существует мероморфная функция, кратная дивизору Δ_1^{-1}, пусть ее дивизор $\widetilde{\Delta}_1 = q_1 \ldots q_s q_{k_1}^{-1} \ldots q_{k_s}^{-1}$, $k_j \geqslant m+1$.

Далее, пусть $\Delta_2 = q_{s+1}^{-1} \ldots q_m^{-1} p_1 \ldots p_{m-s+\rho}$, где $p_j \in U$ — произвольные точки, тогда $\deg \Delta_2 = \rho$, т. е. $r[\Delta_2^{-1}] > 0$ и существует главный дивизор $\widetilde{\Delta}_2 = q_{s+1} \ldots q_m p_{k_1}^{-1} \ldots p_{m-s}^{-1}$.

Пусть $\widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}_1 (\widetilde{\Delta}_2)^{-1}$, тогда точки дивизора $\Delta_0 = (\Delta \cdot \widetilde{\Delta})$ лежат в U и Δ_0 и не имеет полюсов. Лемма доказана.

Лемма 12.7. *Пусть* Δ *— бесконечный дивизор, имеющий бесконечное число нулей, и* $\Delta^0 = \{q_m, m = \overline{1, \infty}\}$ *— нули* Δ, *расположенные в* U, $Z = \{z_m = z(q_m)\}$ *— те же нули в плоскости локального параметра.*

Тогда $\Delta \in \Sigma(D, L)$ *тогда и только тогда, когда* $Z \in \Sigma$, *где* Σ — *класс последовательностей на плоскости* $\mathbb{C}$, *введенный в п.* 10.4. *При этом в терминах локального параметра в* U

$$\Psi^{\pm}(\Delta^0_{\pm} \,|\, q(z)) - \Psi(Z_{\pm} \,|\, z) = \varphi(z), \quad z \in \mathbb{C}^{\pm}_R,$$

где $\varphi^{\pm}(z) \in C^{\alpha}(\mathbb{C}^{\pm}_R)$, $\Delta^0_{\pm} = \Delta^0 \cap D^{\pm}$, $Z_{\pm} = Z \cap \mathbb{C}^{\pm}_R$.

Доказательство. Пусть $\Delta^0 = q_1 \ldots q_m \ldots$, тогда $\Delta = \Delta^0 \cdot \Delta_1$, где Δ_1 — конечный дивизор и значит $\Delta \in \Sigma(D, L) \Longleftrightarrow \Delta^0 \in \Sigma(D, L)$. В U в терминах локального параметра $t = \xi_0(s)$, $z = z(q)$, $v = z(p)$ с учетом представления (12.5)

$$\Psi^{\pm}(\Delta^0_{\pm} \,|\, q(z)) = \Psi^{\pm}(Z_{\pm} \,|\, z) + J_2^{\pm}(z) + \sum_{k=1}^{\rho} J_3^k S_D^{\pm}(\varphi_k \,|\, q(z)), \quad z \in \mathbb{C}^{\pm}_R,$$

и, как показано ранее, $J_2^{\pm}(z)$ аналитичны в окрестности бесконечности, откуда непосредственно и следует утверждение леммы.

Леммы 12.1, 12.6, 12.7 раскрывают локальный характер определения классов $\chi_0(D, L)$ (свойства (i), (ii)) и $\Sigma(D, L)$.

12.5. Задача факторизации.

Теорема 12.2. *Классы* $\Lambda(D, L)$ *и* $\Sigma(D, L)$ *двойственны в том смысле, что*

— *если* $\Delta \in \Sigma(D, L)$, *то* $G(t) = \exp(\Psi_0(\Delta \,|\, t) \in \Lambda(D, L)$;

— *если* $G(t) \in \Lambda(D, L)$, *то существует дивизор* $\Delta \in \Sigma(D, L)$ *такой, что*

$G(t) = \widetilde{G}(t) \exp(\Psi_0(\Delta \,|\, t))$, $\widetilde{G} \in \chi_0(D, L)$;

— *если положить* $\Delta = \Delta_+ \Delta_-$, $\Delta_{\pm} \subset D^{\pm}$ *и*

$$X^{\pm}(q) = \exp[S_D^{\pm}(\ln \widetilde{G} \,|\, q) + \Psi(\Delta_{\pm} \,|\, q)], \quad q \in D^{\pm}, \tag{12.7}$$

то $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$, $t \in L$; *дивизор* $X^{\pm}(z)$ *равен* Δ *и* $\ln X^{\pm}(t) \in C_0^{(\alpha,q)}(L)$.

Доказательство. Пусть $\Delta \in \Sigma(D, L)$, тогда

$$G(t) = \exp(\Psi_0(\Delta \,|\, t)) = \exp(\Psi^+(\Delta_+ \,|\, t)) \exp(\Psi^-(\Delta_- \,|\, t)) = \\ = X^+(t)/X^-(t) \in \Lambda(D, L),$$

так как $\ln X^{\pm}(t) = \Psi^{\pm}(\Delta_{\pm} \,|\, t) \in C_0^{(\alpha,q)}(L)$.

Пусть теперь $G(t) \in \Lambda(D, L)$ и для определенности будем считать $G(t) \in \Lambda^+(D, L)$, т. е. $G(t) = X_1^+(t)/X_1^-(t)$, $t \in L$; $X_1^{\pm}(z)$ имеют лишь конечное число полюсов. Пусть $\operatorname{ind} X_1^{\pm}\big|_{L_j} = \varkappa_j^{\pm}$, $j = \overline{1, n}$;

$$X_0^{\pm}(z) = X_1^{\pm}(z) \prod_{j=1}^{n} (\eta^{\pm}_{j,0}(z))^{-\varkappa_j^{\pm}};$$

$$\varkappa_j = \operatorname{ind} G\big|_{L_j} = \varkappa_j^+ - \varkappa_j^-, \quad j = \overline{1, n};$$

$$G_0(t) = G(t) \prod_{j=1}^{n} (\eta_{j,0}^+(t))^{-\varkappa_j}.$$

Тогда

$$G(t) = \frac{X_0^+(t)}{X_0^-(t)} \left[\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\eta_{j,0}^+(t)}{\eta_{j,0}^-(t)} \right) \varkappa_j^- \right] \prod_{j=1}^{n} (\eta_{j,0}^+(t))^{\varkappa_j} = G_2(t) G_1(t),$$

причем, совершенно аналогично доказательству теоремы 12.1, имеем

$$G_1(t) = \left[\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\eta_{j,0}^+(t)}{\eta_{j,0}^-(t)} \right) \varkappa_j^- \right] \prod_{j=1}^{n} (\eta_{j,0}^+(t))^{\varkappa_j} \in \chi_0(D, L).$$

Изучим свойства функции $G_2(t) = X_0^+(t)/X_0^-(t)$, $t \in L$.

Сначала пусть функции $X_0^{\pm}(q)$ имеют бесконечное число нулей, тогда с учетом леммы 12.6 можно взять $X_2^{\pm}(q) = f(q) X_0^{\pm}(q)$, где $f(q)$ — мероморфная на D функция с дивизором $\widetilde{\Delta}$ таким, что $X_2^{\pm}(q)$ имеет только нули и все они расположены в U;

$$\Delta = (X_2^{\pm}) = q_1 \ldots q_m \ldots, \quad m = \overline{1, \infty}, \ q_m \in U; \ \ q_m \to t_0, \ m \to \infty.$$

Тогда в U в плоскости локального параметра

$$G_2(\xi_0(s)) = G_2(s) = X_2^+(s)/X_2^-(s),$$

где функции $X_2^{\pm}(z) = X_2^{\pm}(q(z))$ аналитичны в $\mathbb{C}_R^{\pm}$, причем $|\ln|X_0^{\pm}(s)|| \leqslant M$, $\ln X_2^{\pm}(s) = \ln X_2^{\pm}(\xi_0(s)) \in C_q^{\alpha}(L^0)$, нули $X_2^{\pm}(z)$ — это последовательность $Z = \{z_m = z(q_m)\}$.

Введем функцию

$$F(z) = \frac{X_2^{\pm}(z)}{\Pi(z)} \exp\left(-S_q^{\pm}(\ln G_2 \mid z)\right), \quad z \in \mathbb{C}_R^{\pm},$$

где $\Pi(z)$ — целая функция с нулями z_m, $m = \overline{1, \infty}$; S_q — оператор п. 10.4.1. Тогда $F^+(s) = F^-(s)$, $s \in L_R^0$, т.е. $F(z)$ аналитична при $|z| > R$, кроме точки $z = \infty$, и не имеет нулей.

Покажем, что $\Delta \arg F(z)\big|_{|z|=R} = 0$. Действительно, поскольку $\Pi(z)$ не имеет нулей при $|z| < R$, то $\Delta \arg \Pi(z)\big|_{|z|=R} = 0$. Так как $X_2^{\pm}(q)$ не имеет нулей вне U, то

$$\Delta \arg X_2^+(z)\Big|_{z \in \widetilde{L}_R^+} = \Delta \arg X_2^+(q)\Big|_{q \in \partial U^+} = -\Delta \arg X_2^+(t)\Big|_{t \in L \setminus U},$$

$$\Delta \arg X_2^-(z)\Big|_{z \in \widetilde{L}_R^-} = \Delta \arg X_2^-(q)\Big|_{q \in \partial U^-} = \Delta \arg X_2^-(t)\Big|_{t \in L \setminus U},$$

откуда

$$\Delta \arg X_2^+(z)\Big|_{z\in\widetilde{L}_R^+} + \Delta \arg X_2^-(z)\Big|_{z\in\widetilde{L}_R^-} = -\Delta \arg \frac{X_2^+(t)}{X_2^-(t)}\Big|_{t\in L\setminus U} =$$

$$= -\Delta \arg G_2(t)\Big|_{t\in L\setminus U} = -\Delta \arg G_2(t)\Big|_{t\in L_0\setminus U} = -\Delta \arg G_2(s)\Big|_{|s|\leqslant R},$$

так как

$$\Delta \arg G_2(t)\Big|_{t\in L\setminus L_0} = 2\pi \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind} G_2(t)\Big|_{L_j} = 0.$$

Далее аналогично,

$$\Delta \arg \exp\left(-S_q^+(\ln G_2\,|\,z)\right)\Big|_{\widetilde{L}_R^+} + \Delta \arg \exp\left(-S_q^-(\ln G_2\,|\,z)\right)\Big|_{\widetilde{L}_R^-} =$$

$$= \Delta \arg G_2(s)\Big|_{|s|\leqslant R},$$

откуда $\Delta \arg F(z)\Big|_{|s|=R} = 0$. Тогда функция $\ln F(z) = \varphi(z)$ аналитична при $|z| > R$, кроме $z = \infty$. Разлагая $\varphi(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности, получим $\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(1/z)$, $\varphi_1(z)$ — целая функция, $\varphi_2(z)$ аналитична при $|z| < 1/R$, в частности, $\varphi_2(t) \in C^\alpha(-1/R, 1/R)$.

Пусть $X_3^\pm(z) = X_2^\pm(z)\exp\left(-\varphi_2(1/z)\right)$, тогда $X_3^\pm(z) = \Pi(z)e^{\varphi_1(z)}e^{S_q^\pm(\ln G_2\,|\,z)}$ аналитична при $z \in \mathbb{C}^\pm = \{z \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$, $X_3^+(s)/X_3^-(s) = G_2(s)$, $s \in L^0$, $\ln X_3^\pm(t) \in C_0^{(\alpha,q)}(L^0)$ и $Z = \{z_m\}$ — нули $X_3^\pm(z)$. Следовательно, как показано в теореме 7.3, $Z \in \Sigma$ и существует последовательность $Z_1 \in \Sigma$, $Z_1 = \{z_m^1\}$ такая, что $|z_m^1| > R$ и

$$G_2(s) = \widetilde{G}(s)\exp\left(\Psi_0(Z_1\,|\,s)\right), \quad s \in L^0, \quad \widetilde{G}(s) \in \chi_0.$$

Отсюда с использованием лемм 12.1, 12.7 следует, что существует дивизор $\Delta_1 \in \Sigma(D, L)$, $\Delta_1 \subset U$, такой, что для $\widetilde{G}(t) = G_2(t)\exp\left(-\Psi_0(\Delta_1\,|\,t)\right)$ имеем представление $\widetilde{G}(t) = \widetilde{X}^+(t)/\widetilde{X}^-(t)$, где $\widetilde{X}^\pm(q)$ удовлетворяют условиям (12.4) теоремы 12.1. Тогда $\widetilde{G}(t) \in \chi_0(D, L)$, что и завершает доказательство в случае, когда $X_0^\pm(q)$ имеет бесконечное число нулей.

Если же $X_0^\pm(q)$ имеет конечное число нулей, т. е. ее дивизор Δ конечный, то, очевидно, $\Delta \in \Sigma(D, L)$ и при этом если $\widetilde{X}^\pm(q) = X_0^\pm(q)\exp\left(-\Psi(\Delta_\pm\,|\,q)\right)$, то $\widetilde{X}^\pm(q) \neq 0$, $q \in D^\pm$, $|\widetilde{X}^\pm(q)| \leqslant M$, $\ln \widetilde{X}^\pm(t) \in C_0^{(\alpha,q)}(L)$. Тогда, аналогично предыдущему, существует дивизор $\Delta_1 \in \Sigma(D, L)$, $\Delta_1 \subset U$ такой, что

$$\widetilde{G}(t) = G_2(t) \exp\left(-\Psi_0(\Delta_1 \mid t)\right) \in \chi_0(D, L).$$

Доказательство теоремы 12.2 в случае $G(t) \in \Lambda^-(D, L)$ аналогично.

Для $G(t) \in \Lambda(D, L)$ функцию $X^{\pm}(z)$ вида (12.7) назовем *каноническим решением задачи факторизации*, а ее дивизор Δ в (12.7) — дивизором, соответствующим $G(t)$. Как и в п. 11.3 введем классы эквивалентности функций и дивизоров

$$\chi = \chi(G) = \{\widetilde{G} \mid \widetilde{G}/G \in \chi_0(D, L)\},$$

$$N(\chi) = \{\Delta \in \Sigma(D, L) \mid \exp\left(-\Psi_0\Delta(t)\right)G(t) \in \chi_0(D, L); \quad G \in \chi\}.$$

Очевидно, $N(\chi)$ не зависит от выбора функции $G(t) \in \chi$. Из леммы 12.5 следует, что умножение Δ на главный дивизор $\widetilde{\Delta}$ не выводит из класса $N(\chi)$ и, наоборот, при $\deg \Delta < \infty$ класс $N(\chi)$ — это класс эквивалентных дивизоров (см. § 3). Отсюда следует, что множества $\Lambda(D, L)$, $\Sigma(D, L)$ разбиваются на непересекающиеся классы

$$\Sigma(D, L) = \Sigma_{+\infty} \cup \Sigma_{-\infty} \cup \left\{ \bigcup_{\varkappa=-\infty}^{\infty} \Sigma_{\varkappa} \right\},$$

где

$$\Sigma_{\varkappa} = \{\Delta \mid \deg \Delta < \infty, \quad \deg \Delta = \varkappa\}, \quad \varkappa = \overline{-\infty, \infty},$$

— классы дивизоров степени $\varkappa$,

$$\Sigma_{\pm\infty} = \{\Delta \mid \Delta = q_1^{\pm 1} q_2^{\pm 1} \ldots q_m^{\pm 1} \ldots, \quad q_m \to t_0, \quad m \to \infty\}$$

— классы бесконечных дивизоров. Наконец, при фиксированной степени $\varkappa$ класс $\Sigma_{\varkappa}$ разбивается на классы эквивалентных дивизоров, соответствующие точкам $\operatorname{Jac}(D)$:

$$\Sigma_{\varkappa} = \bigcup_{a \in \operatorname{Jac}(D)} \Sigma_{\varkappa}(a),$$

$\Sigma_{\varkappa}(a)$ — класс эквивалентных дивизоров с координатами $(\varkappa, a)$ (см. п. 3.7).

Здесь при параметризации классов дивизоров $\Sigma_{\varkappa}(a)$ координатами $(\varkappa, a)$ используется фиксированная точка $q_0 \in D^-$;

$$\Sigma_0(0) = \{\widetilde{\Delta} \mid \widetilde{\Delta} \quad \text{— главный}\}.$$

Соответственно на классы разбивается $\Lambda(D, L)$:

$$\Lambda(D, L) = \Lambda_{+\infty} \cup \Lambda_{-\infty} \cup \left(\bigcup_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} \Lambda_{\varkappa} \right), \quad \Lambda_{\varkappa} = \bigcup_{a \in \operatorname{Jac}(D)} \Lambda_{\varkappa}(a),$$

где $\Lambda_\varkappa(a) = \chi$ — класс эквивалентности, для которого $N(\chi) = \Sigma_\varkappa(a)$. При этом $\Lambda_0(0) = \chi_0(D, L)$.

Теорема 12.3. *Пусть $G(t) \in C^\alpha(L)$, $G(t) \neq 0$. Тогда $G(t) \in \Lambda_\varkappa(a)$, где*

$$\varkappa = \operatorname{ind} G(t)\Big|_L; \qquad a = (a_1, \ldots, a_\rho) \in \operatorname{Jac}(D),$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_L f_1(t)\, \omega_k(t), \quad k = \overline{1, \rho}, \tag{12.8}$$

$$f_1(t) = \ln\left(G(t)/\psi_0(t)^\varkappa\right) - \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j \eta^+_{j,0}(t), \quad \varkappa_j = \operatorname{ind}(G(t)/\psi_0(t)^\varkappa)\Big|_{L_j},$$

$j = \overline{1, n}$ (см. п. 7.3).

Доказательство. Пусть $\Delta_0 = q_1 \ldots q_s q_{s+1}^{-1} \ldots q_{2s}^{-1}$ такой дивизор, что $\sum\limits_{j=1}^{s} \int\limits_{q_j}^{q_{j+s}} \omega_k(p) = -a_k$ (по модулю периодов), $k = \overline{1, \rho}$, где a_k — вида (12.8); $\Delta = q_0^\varkappa \Delta_0$. Тогда из леммы 12.4 следует, что $\{f_1(t) - \Psi_0(\Delta_0 \,|\, t)\} \in C^\alpha(L)$ и

$$\int\limits_L f_0(t)\, \omega_k(t) = 2\pi a_k + 2\pi \sum_{j=1}^{s} \int\limits_{q_j}^{q_{j+s}} \omega_k(p) = 0, \quad k = \overline{1, \rho},$$

т. е. $\exp(f_0(t)) \in \chi_0(D, L)$, и так как координатами дивизора Δ являются $(\varkappa, a)$, то $G(t) = \exp(f_0(t)) \exp(\Psi_0(\Delta \,|\, t)) \in \Lambda_\varkappa(a)$. Теорема доказана.

Введем класс дополнительных дивизоров $\overset{o}{N}(\chi)$. Если $\deg \Delta < \infty$, то $\overset{o}{N}(\chi)$ определяется так же, как в п. 7.3. Пусть $\chi \subset \Lambda_{+\infty}$, $N(\chi) \subset \Sigma_{+\infty}$, тогда

$$\overset{o}{N}(\chi) = \{\Delta_1 = t_0 q_1 q_2 \ldots q_m \ldots,\ q_m \to t_0,\ m \to \infty,$$

$$\Delta/\Delta_1 \text{ — минимальный},\ \Delta \in N(\chi)\}.$$

Аналогично, если $\chi \subset \Lambda_{-\infty}$, $N(\chi) \subset \Sigma_{-\infty}$, то

$$\overset{o}{N}(\chi) = \{\Delta_1 = t_0 q_1^{-1} q_2^{-1} \ldots q_m^{-1} \ldots,\ q_m \to t_0,\ m \to \infty,$$

$$\Delta/\Delta_1 \text{ — минимальный},\ \Delta \in N(\chi)\}.$$

12.6. Неоднородная задача. Пусть $g(t) \in C^\alpha(L)$, $G(t) \in \Lambda(D, L)$. Как и в п. 10.1 без ограничения общности будем требовать, чтобы $g(t_0) = 0$ и t_0 было нулем дополнительного дивизора $\Delta_1 \in \overset{o}{N}(\chi)$, т. е. $\Phi^\pm(t_0) = 0$. Кроме того, при $G(t) \in \Lambda_{\pm\infty}$, с учетом леммы 12.6, будем считать, что

$$\overset{o}{N}(\chi) = \{\Delta_1 \,|\, \Delta_1 = t_0 q_{\rho+1} q_{\rho+2} \ldots q_m \ldots, \quad q_m \to t_0\}$$

при $\chi \subset \Lambda_{+\infty}$, где

$$\Delta = q_1 q_2 \ldots q_\rho q_{\rho+1} \ldots q_m \ldots \in N(\chi),$$

$$\Delta_2 = \Delta/\Delta_1 = q_1 q_2 \ldots q_\rho t_0^{-1} \text{ — минимальный;}$$

$$\overset{o}{N}(\chi) = \{\Delta_1 \,|\, \Delta_1 = t_0 q_1^{-1} \ldots q_\rho^{-1} q_{\rho+1}^{-1} \ldots q_m^{-1} \ldots, \quad q_m \to t_0\}$$

при $\chi \subset \Lambda_{-\infty}$, где $\Delta = (q_{\rho+1}^{-1} \ldots q_m^{-1} \ldots) \in N(\chi)$, $\Delta_2 = \Delta/\Delta_1 = q_1 \ldots q_\rho t_0^{-1}$ — минимальный.

Пусть $G(t) \in \chi \subset \Lambda(D, L)$; $X^\pm(z)$ — каноническое решение задачи факторизации с дивизором $\Delta = (X^\pm) \in N(\chi) \subset \Sigma(D, L)$; $\Delta_1 \in \overset{o}{N}(\chi)$ и $K_0(\Delta_2 \,|\, p, q) = K_2(p, q)$ — абелев дифференциал, соответствующий минимальному дивизору $\Delta_2 = \Delta/\Delta_1$ (§ 4). Положим

$$K_3(t, q) = \frac{X^\pm(q)}{X^+(t)}\, K_2(t, q), \quad t \in L, \quad q \in D^\pm.$$

Если $\chi = \Lambda_\varkappa(a)$, $|\varkappa| < \infty$, то при $l^* = l^*(\varkappa, a) > 0$ введем такую же, как в п. 7.4, систему дифференциалов $v_k(t) = v_k^\Delta(t)/X^+(t)$, $k = \overline{1, l^*}$, $t \in L$, $v_k^\Delta(p)$ — базис абелевых дифференциалов, кратных Δ (см. п. 4.3). Наконец при $\chi \subset \Lambda_{-\infty}$ положим

$$v_k(t) = \begin{cases} \omega_k^0(t)/X^+(t), & k = \overline{1, \rho}, \\[2ex] K_2(t, q_k)/X^+(t), & k = \overline{\rho+1, \infty}, \end{cases} \qquad t \in L,$$

где $q_k \in \Delta_1$, $k = \overline{\rho+1, \infty}$, $\omega_k^0(p)$, $k = \overline{1, \rho}$ — базис абелевых дифференциалов первого рода на D, соответствующий минимальному дивизору Δ_2 (т. е. в частности $\omega_k^0(q_j) = 0$, $k \neq j$, $k, j = \overline{1, \rho}$) (п. 4.1).

Теорема 12.4. *Пусть*

$$g(t) \in C^\alpha(L), \quad g(t_0) = 0, \quad G(t) \in \chi \subset \Lambda(D, L),$$

$$\Delta_1 = \{p_1 \ldots p_l \cdot q_1^{-1} \ldots q_{l^*}^{-1}\} \in \overset{o}{N}(\chi) \subset \Sigma(D, L)$$

(t_0 — нуль Δ_1, возможно $l = \infty$ или $l^* = \infty$).

Тогда существует единственное ограниченное решение задачи

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L; \tag{12.9}$$

$$\Phi^\pm(p_j) = 0, \quad j = \overline{1, l}; \tag{12.10}$$

$$c_k(g) = \int_L g(t)\, v_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, l^*}; \tag{12.11}$$

где условия (12.11) *необходимы и достаточны для разрешимости* (12.9) *в классе ограниченных функций.*

При этом решение задачи (12.9)–(12.11) *представляется интегральным оператором Коши*

$$\Phi^\pm(q) = \frac{1}{2\pi i}\int_L K_3(t, q)\, g(t), \quad q \in D^\pm, \tag{12.12}$$

и граничные значения $\Phi^\pm(t)$ *принадлежат* $C^\beta(L)$, $\beta = \beta(\alpha, q) > 0$.

Доказательство. Так как $\ln X^\pm(t) \in C_0^{(\alpha,q)}(L)$, то из теоремы $10.2'$ следует, что интеграл (12.2) сходится, граничные значения $\Phi^\pm(t)$ принадлежат $C^\beta(L)$, $\beta = \alpha^3/(2q+1) = \beta(\alpha, q) > 0$. Функции $\Phi^\pm(t)$ удовлетворяют условию (8.9) и $\Phi^\pm(q)$ кратны дивизору Δ_1. При этом вычеты в полюсах

$$\operatorname{Res}\Phi^\pm(q_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_L g(t)\, v_k(t), \quad k = \overline{1, l^*}.$$

Таким образом, решение (12.9)–(12.11) существует и условия (12.11) достаточны для существования ограниченного решения. Далее, пусть $g(t) \equiv 0$ и $\Phi^\pm(z)$ — какое-либо ограниченное решение задачи (12.9), (12.10). Тогда $\Phi^\pm(q)/X^\pm(q)$ мероморфна в $D^\pm$, непрерывна на L, кратна Δ_2^{-1} и так как Δ_2 — минимальный дивизор, т.е. $r[\Delta_2^{-1}] = 0$, то $\Phi^\pm(q) \equiv 0$, значит решение (12.9), (12.10) единственно.

Осталось доказать необходимость условий (12.11). Пусть $g(t) = \Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t)$, $\Phi^\pm(q)$ аналитичны в $D^\pm$ и непрерывны в $\overline{D}^\pm$, $\Phi^\pm(t_0) = 0$. Положим $v_k^\pm(p) = v_k^\Delta(p)/X^\pm(p)$, $k = \overline{1, l^*}$, $p \in D^\pm$ при $\chi = \Lambda_\varkappa(a)$, $|\varkappa| < \infty$ и

$$v_k^\pm(p) = \begin{cases} \omega_k^0(p)/X^\pm(p), & k = \overline{1, \rho}, \\ K_2(p, q_k)/X^\pm(p), & k = \overline{\rho + 1, \infty}, \end{cases} \qquad p \in D^\pm,$$

при $\chi \subset \Lambda_{-\infty}$. Тогда

$$g(t)v_k(t) = g(t)v_k^+(t) = \Phi^+(t)v_k^+(t) - \Phi^-(t)v_k^-(t),$$

причем $\Phi^\pm(q)v_k^\pm(q)$ аналитичны в $D^\pm$, откуда

$$\int\limits_L g(t)v_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, l^*},$$

что завершает доказательство теоремы.

Следствия.

1. *l — число ограниченных решений задачи* (12.9), *l^* — число условий разрешимости.*

2. *При $\chi = \Lambda_\varkappa(a)$, $|\varkappa| < \infty$, $l - l^* = \varkappa - \rho + 1$ (отличие от результатов п.* 7.4 *в том, что при этом не обязательно $G(t) = C^\alpha(L)$ — см. п.* 10.3.7).

3. *При $\varkappa > 2\rho - 2$ (в том числе $\chi \subset \Lambda_{+\infty}$) $l^* = 0$, $l = \varkappa - \rho + 1$ ($l = \infty$ при $\chi \subset \Lambda_{+\infty}$).*

4. *При $\varkappa < 0$ (в том числе $\chi \subset \Lambda_{-\infty}$) $l = 0$, $l^* = \rho - 1 - \varkappa$ ($l^* = \infty$ при $\chi \subset \Lambda_{-\infty}$).*

В случае $\chi = \Lambda_\varkappa(a)$ ($\varkappa \leqslant 2\rho - 2$) можно рассмотреть задачу с введением вместо условий разрешимости дополнительных слагаемых в правую часть (12.9), как в п. 7.1, Пусть, как в п. 7.4, $l = l(\varkappa, a)$, $l^* = l^*(\varkappa, a)$, $\psi_k^\pm(q) = \psi_{q_k}^\pm(q)$, $q \in D^\pm$, $k = \overline{1, l^*}$, q_k — полюса дополнительного дивизора Δ_1, $\psi_k(t) = \psi_k^+(t)$, $t \in L$, $k = \overline{1, l^*}$.

Рассмотрим задачу

$$\Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{l^*} c_k\psi_k(t), \tag{12.13}$$

$$\Phi^\pm(p_j) = 0, \quad j = \overline{1, l}. \tag{12.14}$$

Теорема 12.5. *Пусть $g(t) \in C^\alpha(L)$, $g(t_0) = 0$, $G(t) \in \chi = \Lambda_\varkappa(a)$, $\Delta_1 = p_1 \ldots p_l q_1^{-1} \ldots q_{l^*}^{-1} \in \overset{o}{N}(\chi)$ (t_0 — нуль Δ_1). Тогда решение задачи* (12.13), (12.14) *($\Phi^\pm(q)$; c_k, $k = \overline{1, l^*}$) существует и единственно, $\Phi^\pm(t) \in C^\beta(L)$, $\beta = \beta(\alpha, q) > 0$. При этом решение представляется оператором Коши*

$$\Phi^\pm(q) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L K(t, q)g(t), \quad q \in D^\pm,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L g(t)w_k(t), \quad k = \overline{1, l^*},$$

где

$$K(t,q) = \widetilde{K}(t,q) - \sum_{k=1}^{l^*} \widetilde{\psi}_k^{\pm}(q) w_k(t), \quad t \in L, \quad q \in D^{\pm},$$

$$\widetilde{\psi}_k^{\pm}(q) = \int_L \psi_k(t) \widetilde{K}(t,q), \quad k = \overline{1, l^*}, \quad q \in D^{\pm}.$$

Отличие этой теоремы от результатов п. 7.4 в том, что не обязательно $G(t) \in C^\alpha(L)$. Доказательство ее ничем не отличается от доказательства аналогичного результата в п. 7.4.

12.7. Устойчивость. Определим сходимость в классах $\Lambda(D,L)$, $\Sigma(D,L)$. Пусть $G_{1,2}(t) \in \chi_{1,2} \subset \Lambda(D,L)$ и G_1/G_2 удовлетворяет (i), (ii), т. е.

$$\ln(G_1/G_2) = \psi_0(t) + S_D(\psi_1 \,|\, t), \quad \psi_{0,1} \in C_0^{(\alpha,q)}(L), \quad \operatorname{Im} \psi_0 \equiv 0.$$

Введем характеристику

$$l(G_1,G_2)_q^\alpha = \|\psi_0\|_0^{(\alpha,q)} + \|\psi_1\|_0^{(\alpha,q)}.$$

Пусть U_ε — окрестности t_0, в терминах локального параметра равные $\mathbb{C}_{1/\varepsilon} = \{z \,|\, |z| \geqslant 1/\varepsilon\}$, $\varepsilon < 1/R$. Скажем, что последовательность $G_k(t) \in \chi$, $k = \overline{1,\infty}$ сходится к $G_0(t)$, $G_k \xrightarrow{\Lambda} G_0$, $k \to \infty$, если $G_k(t) \to \to G_0(t)$, $k \to \infty$ в $C^\alpha(L \backslash U_\varepsilon)$, $\forall\, \varepsilon > 0$ и $l(G_k, G_m)_q^\alpha \leqslant M = \mathrm{const}$, $k, m = = \overline{1,\infty}$.

Лемма 12.8. *Класс $\Lambda(D,L)$ функций $G(t)$ замкнут относительно введенной сходимости.*

Это утверждение непосредственно следует из леммы 12.1 и результатов п. 11.4. Заметим, что класс χ, вообще говоря, в этом случае не инвариантен, так как при переходе к пределу возможно

$$\left\{ \int_L \ln\left(\frac{G_m}{G_0}\right) w \not\to 0, \quad m \to \infty \right\} \text{— по модулю периодов.}$$

В частности, это значит, что при $|\varkappa| < \infty$ может измениться координата a_G функции $G(t)$.

Пусть теперь $\Delta_{1,2} \in N(\chi_{1,2}) \subset \Sigma(D,L)$ и

$$\Psi_0(\Delta_1 \,|\, t) - \Psi_0(\Delta_2 \,|\, t) = \Psi_0(t) + S_D(\psi_1 \,|\, t),$$

$$\psi_{0,1} \in C_0^{(\alpha,q)}(L), \quad \operatorname{Im} \psi_0 \equiv 0.$$

Аналогично § 11 введем характеристику

$$l(\Delta_1, \Delta_2)_q^\alpha = \|\psi_0\|_0^{(\alpha,q)} + \|\psi_1\|_0^{(\alpha,q)}.$$

Скажем, что последовательность Δ_k, $k = \overline{1, \infty}$ сходится к Δ_0, $\Delta_k \xrightarrow{\Sigma} \Delta_0$, $k \to \infty$, если $\Delta_k^\varepsilon \to \Delta_0^\varepsilon$, $k \to \infty$, $\forall\, \varepsilon > 0$; $\langle \Delta_k \rangle_q^\alpha + l(\Delta_k, \Delta_m)_q^\alpha \leqslant M = \mathrm{const}$, $k, m = \overline{1, \infty}$, где

$$\Delta_k^\varepsilon = \Delta_k \cap (U \backslash U_\varepsilon) = \{q_j^k \in \Delta_k \,|\, q_j^k \overline{\in} U_\varepsilon\}, \quad k = \overline{0, +\infty};$$

$\Delta_k^\varepsilon \to \Delta_0^\varepsilon$ означает, что $q_j^k \to q_j^0$, $k \to \infty$, $\forall\, j$ (дивизоры Δ_k^ε, $k = \overline{0, +\infty}$ конечные).

Лемма 12.9. *Класс $\Sigma(D, L)$ дивизоров Δ замкнут относительно введенной сходимости.*

Опять же при этом не обязательно сохраняются классы $N(\chi)$, $\overset{o}{N}(\chi)$. Доказательство повторяет доказательство леммы 12.8.

Теорема 12.6 (устойчивости). *Пусть $g_k(t) \in C^\alpha(L)$, $g_k(t_0) = 0$, $G_k(t) \in \chi_k \subset \Lambda(D, L)$, $\Delta_k \in \overset{o}{N}(\chi_k) \subset \Sigma(D, L)$ и $\Phi_k^\pm(q)$ — соответствующие решения задачи* (12.9)–(12.11), $k = \overline{0, \infty}$.

Тогда если $g_k(t) \to g_0(t)$ в $C^\alpha(L)$, $k \to \infty$, $G_k(t) \xrightarrow{\Lambda} G_0(t)$, $k \to \infty$, $\Delta_k \xrightarrow{\Sigma} \Delta_0$, $k \to \infty$ и

$$l(\Delta_k) = l(\varkappa_k, a_k) = \mathrm{const}, \tag{12.15}$$

то $\Phi_k^\pm(q) \to \Phi_0^\pm(q)$, $k \to \infty$ равномерно по $q \in D^\pm$ $\Phi_k^\pm(t) \to \Phi_0^\pm(t)$ в $C^\beta(L)$, $\beta = \beta(\alpha, q) > 0$, $k \to \infty$.

Доказательство этой теоремы полностью повторяет доказательство соответствующих результатов в § 7, 10.

В заключение заметим, что если $\chi_k \neq \Lambda_\varkappa(a)$, $\varkappa \in [0, 2\rho - 2]$ (в частности $\chi_k \subset \Lambda_{\pm\infty}$), то условие (12.15) выполняется автоматически. В случае же когда $\chi_k = \Lambda_\varkappa(a)$, $\varkappa \in [0, 2\rho - 2]$, условие (12.15) существенно и сильно ужесточает требования теоремы устойчивости, в частности для функций $G_k(t) \in C^\alpha(L)$ сходимости $G_k(t) \to G_0(t)$ в $C^\alpha(L)$ уже недостаточно (см. § 7).

12.8. Задача с бесконечным индексом для уравнений Бельтрами. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \overline{\partial} W - \mu \partial W = 0, & z \overline{\in} L,\ z \in D, \\ W^+ = G W^- + g, & t \in L, \end{cases}$$

где $G(t) \in \Lambda_{+\infty} \cup \Lambda_{-\infty}$. Эта задача с помощью гомеоморфизма $f^\mu : D \to$ $\to D^\mu$ сводится к задаче сопряжения аналитических функций

$$\begin{cases} \overline{\partial}\Phi = 0, \quad z \overline{\in} L^\mu, \quad z \in D^\mu, \quad L^\mu = f^\mu(L), \\ \Phi^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t) + g_1(t), \quad t \in L^\mu, \end{cases}$$

$G_1(t) = G((f^\mu)^{-1}(t))$.

Если перенести локально в окрестности U точки t_0 задачу на плоскость, то при определенных ранее асимптотических условиях на дивизор $\Delta \in \Sigma(D, L)$ двойственные классы локально инвариантны при гомеоморфных отображениях. Таким образом, применив локальный метод решения задачи (п. 1.8), т. е. сведя задачу к задаче сопряжения на ∂U с гельдеровым коэффициентом методами п. 1, получим результаты о разрешимости, аналогичные результатам п. 11 для аналитических функций.

Часть II

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Введение

В самом общем случае псевдодифференциальный оператор для функции двух переменных — это линейный оператор, заданный в плоскости преобразования Фурье [43, с. 97]:

$$Af = A(f \mid z) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} a(z,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{iz\xi}\,d\xi,$$

$z = (x, y)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $z\xi = x\xi_1 + y\xi_2$, $d\xi = d\xi_1 d\xi_2$; $\widehat{f}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $f(z)$ [42]:

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi)e^{iz\xi}\,d\xi \quad \text{или} \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(z)e^{-iz\xi}\,dz,$$

$dz = dxdy$.

Функция $a(z,\xi)$ называется *символом* оператора A. В частности, единичный оператор $E : f \to f$ будет псевдодифференциальным с символом, тождественно равным единице.

Обычно класс псевдодифференциальных операторов определяется условиями на символы. Так, стандартные условия на класс символов — полиоднородность по ξ и бесконечная гладкость по z и ξ (см. [43]).

Псевдодифференциальные операторы на классе функций, заданных на многообразии, определяются в терминах линейных операторов для функций двух переменных, получающихся при отображении переменной на многообразии в плоскость карты [43].

Хорошо известный пример псевдодифференциальных операторов для функций одной переменной — одномерные сингулярные интегральные операторы. Так, пусть

$$L_1 = \{\, z \mid |z| = 1 \,\}$$

–единичная окружность, сингулярный интегральный оператор

$$Sf = S(f \mid z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{f(t)}{t - z}\,dt$$

будет псевдодифференциальным с символом

$$s(\xi) = \operatorname{sgn}\xi = \begin{cases} 1, & \xi \geqslant 0, \\ -1, & \xi < 0; \end{cases} \qquad \xi \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, в этом случае преобразование Фурье — это разложение в ряд Фурье

$$f(z) = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{i\xi x} = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) z^{\xi}, \quad \xi \in \mathbb{Z}, \quad z = \mathrm{e}^{ix},\ x \in [0, 2\pi],$$

причем в силу формул Сохоцкого [8, 19]

$$S(t^{\xi} \mid z) = \begin{cases} \ \ z^{\xi}, & \xi \geqslant 0, \\ -z^{\xi}, & \xi < 0, \end{cases}$$

т. е.

$$S(f \mid z) = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi) z^{\xi}.$$

Отметим, что символ оператора S разрывен при $\xi = 0$.

В настоящей работе речь пойдет о решении уравнения $Af = g$, где функции f, g принадлежат некоторым функциональным пространствам: $f \in X$, $g \in Y$; $A : X \to Y$ — линейный псевдодифференциальный оператор. В дальнейшем задачу решения уравнения $Af = g$ для краткости будем называть «обращением оператора A». При обращении оператора необходимо, как минимум, описать следующие пространства:

- ядро оператора, т. е. множество решений однородного уравнения
$$\ker A = \{ f \in X \mid Af = 0 \} \subset X;$$
- коядро оператора в сопряженном пространстве Y^* или условия разрешимости
$$\text{coker } A = \{ g^* \in Y^* \mid g^*(Af) = 0, \quad \forall\, f \in X \} \subset Y^*.$$

Очевидно, условия $g^*(g_0) = 0\, \forall\, g^* \in \text{coker } A$ необходимы для разрешимости уравнения $Af = g_0$. Если эти условия и достаточны, т. е. образ оператора

$$\operatorname{im} A = \{ g = Af \mid f \in X \} \subset Y$$

— замкнутое подпространство Y, то оператор A называется *нормально разрешимым* (*по Хаусдорфу*) [43], [32, с. 29].

Особый интерес представляет случай, когда образ оператора $\operatorname{im} A$ имеет прямое дополнение в пространстве Y, которое в этом случае также называют коядром оператора (в пространстве Y):

$$Y = \operatorname{im} A \oplus \text{coker } A.$$

Пусть $Q_0 : Y \to \text{coker } A$ — проектор на коядро [15, с. 130], тогда условия разрешимости уравнения $Af = g$ имеют вид $Q_0 g = 0$.

Далее, если $\ker A \neq \{0\}$, то решение уравнения $Af = g$ неединственно. Для выделения единственного решения в этом случае необходимо на решение наложить дополнительные условия. Если ядро оператора имеет прямое дополнение в пространстве X:

$$X = \ker A \oplus X_1$$

и $Q_1 : X \to \ker A$ — проектор на ядро, то в качестве дополнительных условий можно задать проекцию решения на ядро оператора $Q_1 f = f_0$, где $f_0 \in \ker A$ — произвольный элемент ядра.

Отметим, что ядро и коядро оператора можно описать с точностью до изоморфизма, т. е. до взаимно однозначных отображений

$$\overline{A}_0 : X_0 \longleftrightarrow \ker A, \qquad B_0 : Y_0 \longleftrightarrow \operatorname{coker}\, A.$$

Для уравнения $Af = g$ часто бывает целесообразно (и даже необходимо, см. [19, 32]) рассматривать его решение $f \in X$ как оператор над правой частью $g \in Y$. В таком случае при $\ker A \neq \{0\}$ следует наложить дополнительные условия на решение f, а при $\operatorname{coker}\, A \neq \{0\}$ следует спроектировать правую часть g на образ оператора $\operatorname{im} A$. Проектирование обычно задается с помощью введения дополнительных искомых слагаемых в правую часть уравнения. Итак, рассмотрим задачу

$$\begin{cases} Af = g + B_0\psi_0, \\ A_0 f = f_0, \end{cases} \tag{0.1}$$

где f_0 — заданный (произвольно) элемент пространства X_0, $A_0 : X \to X_0$; ψ_0 — искомый элемент пространства Y_0, $B_0 : Y_0 \to Y$. Будем называть (0.1) *корректной постановкой задачи* для уравнения $Af = g$, если решение (0.1) существует, единственно и имеет вид

$$\begin{cases} f = Pg + \overline{A}_0 f_0, \\ \psi_0 = \overline{B}_0 g, \end{cases} \tag{0.2}$$

причем условие $\psi_0 = \overline{B}_0 g = 0$ необходимо и достаточно для разрешимости уравнения $Af = g$. Подчеркнем, что корректная постановка задачи исчерпывающим образом характеризует разрешимость уравнения $Af = g$, так как в этом случае пространство X_0 изоморфно $\ker A$: $\overline{A}_0 : X_0 \longleftrightarrow \ker A$ — изоморфизм; Y_0 изоморфно $\operatorname{coker}\, A$: $B_0 : Y_0 \longleftrightarrow \operatorname{coker}\, A$ — изоморфизм; $B_0\overline{B}_0 = Q_0 : Y \to \operatorname{coker}\, A$ — проектор на коядро оператора, $\overline{A}_0 A_0 = Q_1 : X \to \ker A$ — проектор на ядро. Оператор $P : Y \to X$ будем называть *обобщенным обратным* к оператору A.

Наконец, обратим внимание на часто встречающуюся ситуацию, когда гладкость решения f уравнения $Af = g$ меньше, вообще говоря, чем гладкость правой части g. С точки зрения теории линейных операторов это означает, что обращение оператора строится в шкале пространств X_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, т. е. исходный оператор $A : X_\alpha \to X_\alpha$, а обобщенный обратный $P : X_\alpha \to X_\beta$, $\beta = \beta(\alpha) < \alpha$. В настоящей работе в качестве шкалы X_α рассматривается шкала пространств Соболева W_2^s $(\alpha = s)$.

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор для функций одной переменной $A = b(z) + c(z)S$ с символом

$$a(z,\xi) = \begin{cases} b(z) + c(z) = a_1(z), & \xi \geqslant 0, \\ b(z) - c(z) = a_2(z), & \xi < 0. \end{cases}$$

Уравнение $Af = g$ легко решается сведением к задаче линейного сопряжения аналитических функций [8, 19]

$$a_1(z)\Phi^+(z) + a_2(z)\Phi^-(z) = g(z), \quad z \in L_1, \tag{0.3}$$

где $\Phi^\pm(z) = (f(z) \pm S(f \mid z))/2$ — граничные значения функций, аналитических соответственно в областях $D^\pm = \{\, z \mid |z|^{\pm 1} < 1 \,\}$. Напомним метод Гахова решения задачи (0.3). Пусть $a_{1,2}(z) \neq 0$,

$$\varkappa = \operatorname{ind} \frac{a(z,-\xi)}{a(z,\xi)} \Bigg|_{L_1} = \frac{1}{2\pi}\, \Delta \arg \frac{a_2(z)}{a_1(z)} \Bigg|_{L_1}, \quad \xi > 0. \tag{0.4}$$

Тогда можно представить

$$a_1(z) = c(z)a^+(z), \quad a_2(z) = c(z)z^\varkappa a^-(z),$$

где

$$a^\pm(z) = \exp\left(\pm S^\pm(z^{-\varkappa} a_1/a_2 \mid z)\right), \quad c(z) = \frac{a_1(z)}{a^+(z)} = \frac{a_2(z)}{z^\varkappa a^-(z)},$$

причем функции $a^\pm(z)$ — граничные значения функций, аналитичных и отличных от нуля в областях $D^\pm$; $c(z) \neq 0$, $z \in L_1$. Соответственно имеем представление для оператора A:

$$A = a + bS = a_1 S^+ + a_2 S^- = \\ = c(z)(S^+ + z^\varkappa S^-)(a^+S^+ + a^-S^-) = P_1 Q_\varkappa P_2, \tag{0.5}$$

где P_1 — оператор умножения на функцию $c(z)$,

$$P_2 = a^+S^+ + a^-S^-, \quad Q_\varkappa = S^+ + z^\varkappa S^-.$$

Операторы $P_{1,2}$ обратимы,

$$P_1^{-1} = \frac{1}{c(z)}, \quad P_2^{-1} = \frac{1}{a^+(z)}\, S^+ + \frac{1}{a^-(z)}\, S^-.$$

Таким образом, уравнение $Af = g$ сводится к уравнению

$$Q_\varkappa f_1 = g_1; \quad f_1 = P_2 f, \quad g_1 = P_1^{-1} g,$$

решение (условия разрешимости) которого строятся непосредственно. В частности, уравнение $Q_\varkappa f_1 = g_1$ (а, значит, и задача (0.3), и уравнение $Af = g$) имеет $l = \max(0, \varkappa)$ линейно независимых решений и $l^* = \max(0, -\varkappa)$ условий разрешимости на правую часть $g(z)$. При этом $l - l^* = \varkappa$.

В терминах теории линейных операторов [43, 32] приведенные утверждения означают, что оператор $A = a + bS$ — нетеров, т. е. нормально разрешим и размерности его ядра $l = \dim \ker A$ и коядра $l^* = \dim \operatorname{coker} A$ конечны, их разность $\varkappa = l - l^* = \operatorname{ind} A$ называется *индексом* оператора A [43, с. 246–252], [32, с. 32–47]. В этом случае пространства $\ker A$ и $\operatorname{im} A$ всегда имеют прямые дополнения [32, с. 27] и корректная постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} Af = g + \sum\limits_{k=1}^{l^*} B_k(z)\psi_k, \\ A_k f = f_k, \quad k = \overline{1, l}, \end{cases} \tag{0.6}$$

где ψ_k, $k = \overline{1, l^*}$ — искомые, а f_k, $k = \overline{1, l}$ — заданные (произвольно) константы, A_k — линейные непрерывные функционалы. Задача (0.6) будет корректной постановкой для уравнения $Af = g$, если ее решение существует, единственно и имеет вид

$$\begin{cases} f = Pg + \sum\limits_{k=1}^{l} \overline{A}_k(z) f_k, \\ \psi_k = \overline{B}_k g, \quad k = \overline{1, l^*}, \end{cases} \tag{0.7}$$

причем условия $\psi_k = \overline{B}_k g = 0$, $k = \overline{1, l^*}$ необходимы и достаточны для разрешимости уравнения $Af = g$. Здесь функционалы $\overline{B}_k$, $k = \overline{1, l^*}$ — базис коядра оператора A в сопряженном пространстве Y^*, $B_k(z)$, $k = \overline{1, l^*}$ — базис коядра в пространстве Y; $\overline{A}_k(z)$, $k = \overline{1, l}$ — базис ядра оператора A;

$$\sum_{k=1}^{l^*} B_k(z)\overline{B}_k = Q_0 : Y \to \operatorname{coker} A \subset Y$$

— проектор на коядро оператора,

$$\sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k(z) A_k = Q_0 : X \to \ker A$$

— проектор на ядро.

Отметим, что в общей теории нетеровых операторов числа l (размерность ядра) и l^* (размерность коядра) не являются, как правило, инвариантами, в частности, они изменяются при прибавлении к оператору A вполне непрерывного слагаемого, а индекс оператора $\varkappa = l - l^*$ — инвариант [43, 32]. При этом обычно индекс оператора выражается через топологические инварианты его символа (как в формуле (0.4), см. «формулы индекса» в [43]). В случае, когда размерности l или l^* бесконечны, сама задача описания $\ker A$ ($\operatorname{coker} A$), не говоря уже о корректной постановке, становится достаточно нетривиальной.

Вернемся, однако, к основной теме данной работы — псевдодифференциальным операторам на компактной римановой поверхности, т. е., локально, для функций двух переменных. Обычно в качестве их символов $a(z,\xi)$ рассматриваются функции, полиоднородные по ξ, т. е. представимые в виде суммы однородных по ξ функций с убывающим порядком однородности, например

$$a(z,\xi)=\sum_{m=m_0}^{-\infty} a_m(z,\xi), \quad a_m(z,\xi)=|\xi|^m a_m(z,\xi/|\xi|).$$

Основную роль при этом играет первый член суммы $a_{m_0}(z,\xi) = a_0(z,\xi)$, который называют главным символом оператора A, число m_0 — порядком оператора, а остальные слагаемые называют младшими членами [43]. В частности, с точностью до младших членов, символ произведения псевдодифференциальных операторов равен произведению главных символов сомножителей. Соответственно, если главный символ не обращается в нуль при $\xi \neq 0$ (не вырождается), то с точностью до младших членов оператор A обратим и главный символ обратного оператора равен $1/a_0(z,\xi)$. Точнее, если $a_0(z,\xi)\neq 0$ при $\xi \neq 0$, то оператор A — нетеров нулевого индекса и $1/a_0(z,\xi)$ — главный символ его регуляризатора, а младшие члены влияют на разрешимость уравнения $Af = g$ так же, как прибавление к нетерову оператору вполне непрерывного слагаемого [43]. Отметим при этом, что оператор порядка m_0 с помощью умножения на оператор с главным символом $|\xi|^{-m_0}$ очевидным образом сводится к оператору нулевого порядка, причем для оператора нулевого порядка младшие члены (т. е. символы отрицательного порядка) задают вполне непрерывный оператор [43].

В данной работе рассматриваются псевдодифференциальные операторы нулевого порядка с вырождающимся (обращающимся в нуль) символом. Таким операторам посвящено достаточно большое число работ (см., например, [31]). Как правило, эти операторы не являются нетеровыми, более того, их ядро или коядро обычно бесконечномерны. При этом, так как главный символ обращается в нуль, то на разрешимость уравнения $Af = g$ существенно влияют младшие члены.

В настоящей работе изучаются инварианты, т. е. характеристики разрешимости уравнения $Af = g$, не зависящие от младших членов символа оператора A (точнее, с точностью до младших членов). Напомним, что в теории нетеровых операторов такими инвариантами являются конечномерность ядра и коядра оператора и индекс оператора — разность между размерностью ядра и коядра.

Основная идея данной работы состоит в том, что оператор (нулевого порядка) с вырождающимся символом заменяется на оператор с символом, не обращающимся в нуль, но разрывным по ξ в тех точках, где символ исходного оператора обращался в нуль. Показано, что такую замену можно произвести с точностью до вполне непрерывного слагаемого. В свою очередь, операторы с разрывным по ξ символом поддаются исследованию методами, подобными методу Гахова решения задачи линейного сопряжения аналитических функций. В результате показано, что, при определенных условиях на характер вырождения (обращения в нуль) символа, имеет место представление оператора $A = \widetilde{A} + \alpha$, где α — вполне непрерывен, а $\widetilde{A}$ имеет бесконечномерные ядро и коядро, содержащие соответственно $l = l(\widetilde{A})$ и $l^* = l^*(\widetilde{A})$ произвольных функций одной переменной, заданных на единичной окружности L_1. Последнее утверждение в точности означает, что корректная постановка задачи для уравнения $\widetilde{A}f = g$ имеет вид

$$\begin{cases} \widetilde{A}f = g + \sum\limits_{k=1}^{l^*} B_k\psi_k(z_1), \\ A_k f = f_k(z_1), \quad k = \overline{1,l},\ z_1 \in L_1, \end{cases} \tag{0.8}$$

где $\psi_k(z_1)$, $k = \overline{1,l^*}$ — искомые, а $f_k(z_1)$, $k = \overline{1,l}$ — заданные (произвольно) функции, определенные на единичной окружности L_1. Здесь B_k, $k = \overline{1,l^*}$ — непрерывные операторы, действующие из пространства Соболева $W_2^s(L_1)$ функций, заданных на L_1, в пространство $W_2^s(D)$ функций, заданных на римановой поверхности D; A_k, $k = \overline{1,l}$ — наоборот, операторы из пространства $W_2^s(D)$ в пространство $W_2^s(L_1)$. При этом единственное решение задачи (0.8) имеет вид

$$\begin{cases} f = \widetilde{P}g + \sum\limits_{k=1}^{l} \overline{A}_k f_k(z_1), \\ \psi_k(z_1) = \overline{B}_k g, \quad k = \overline{1,l^*}, \end{cases} \tag{0.9}$$

причем условия $\psi_k(z_1) = \overline{B}_k g \equiv 0$, $k = \overline{1,l^*}$ необходимы и достаточны для разрешимости уравнения $\widetilde{A}f = g$. Здесь $\widetilde{P}$, $\overline{A}_k$, $\overline{B}_k$, A_k, B_k — непрерывные операторы, действующие в шкале пространств Соболева: $\widetilde{P} : W_2^s(D) \to W_2^{s-2\delta}(D)$; $B_k : W_2^s(L_1) \to W_2^{s-\delta}(D)$, $\overline{B}_k : W_2^s(D) \to W_2^{s-\delta}(L_1)$, $k = \overline{1,l^*}$; $A_k : W_2^s(D) \to W_2^{s-\delta}(L_1)$, $\overline{A}_k : W_2^s(L_1) \to W_2^{s-\delta}(D)$, $k = \overline{1,l}$; $\delta = \mathrm{const} < 1$.

Отметим, что, как и в общем случае, корректная постановка задачи вида (0.8) с решением вида (0.9) исчерпывающим образом характеризует разрешимость уравнения $\widetilde{A}f = g$. Так,

$$\ker \widetilde{A} = \left\{ f_0 = \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k f_k(z_1), \quad f_k \in W_2^s(L_1) \right\},$$

причем соответствие

$$f_k(z_1),\ k = \overline{1,l} \longleftrightarrow f_0 = \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k f_k(z_1) \in \ker \widetilde{A}$$

взаимно однозначно, т. е. вектор-функции одной переменной размерности l $\{ f_k(z_1)\ k = \overline{1, l} \}$ задают параметризацию ядра $\widetilde{A}$;

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k A_k : W_2^s(D) \to \ker \widetilde{A}$$

— проектор на ядро оператора $\widetilde{A}$. Кроме того, имеем разложение пространства правых частей в прямую сумму

$$W_2^s(D) = \operatorname{im} \widetilde{A} \oplus \operatorname{coker}\ \widetilde{A},$$

где

$$\operatorname{im} \widetilde{A} = \{ g \mid \overline{B}_k g \equiv 0,\ k = \overline{1, l^*} \}$$

— множество правых частей, для которых существует решение уравнения $\widetilde{A} f = g$;

$$\operatorname{coker}\ \widetilde{A} = \{ g_0 = \sum_{k=1}^{l^*} B_k \psi_k(z_1) \},$$

причем соответствие

$$\psi_k(z_1),\ k = \overline{1, l^*} \longleftrightarrow g_0 = \sum_{k=1}^{l^*} B_k \psi_k(z_1) \in \operatorname{coker}\ \widetilde{A}$$

взаимно однозначно, т. е. вектор-функции одной переменной размерности l^* $\{ \psi_k(z_1),\ k = \overline{1, l^*} \}$ задают параметризацию коядра A. При этом

$$Q_0 = \sum_{k=1}^{l^*} B_k \overline{B}_k : W_2^s(D) \to \operatorname{coker}\ \widetilde{A}$$

— проектор на коядро. Наконец, $\widetilde{P}$ — обобщенный обратный к оператору $\widetilde{A}$.

Числа $l = l(\widetilde{A})$ и $l^* = l^*(\widetilde{A})$, характеризующие ядро и коядро оператора $\widetilde{A}$, вычисляются в терминах главного символа исходного оператора A. Но возможны различные варианты представлений $A = \widetilde{A} + \alpha$, т. е. различные вполне непрерывные слагаемые α, при которых $l\,(\widetilde{A})$ и $l^*(\widetilde{A})$ принимают различные значения, т. е. характеристики l и l^* не являются инвариантами. Однако их разность $\varkappa = l - l^* = \varkappa(A)$ будет во всех случаях неизменной, т. е. инвариантом. Таким образом, инвариантами оператора в данном случае являются конечность чисел l и l^*, определяющих корректную постановку задачи вида (0.8) и их разность $l - l^* = \varkappa(A)$. Отметим при этом, что индекс $\varkappa$ будет и топологическим инвариантом главного символа оператора A, тогда как числа l и l^* не будут топологическими инвариантами символа.

Далее, если рассмотреть уравнение $Af = g$ на пространстве функций $X_0 = \{\, f \,\}$, равных тождественно нулю в окрестности множества

$$V = \left\{\, z \mid \exists\, \xi :\ a_0(z, \xi) = 0 \,\right\}$$

(области вырождения символа), то на этом пространстве оператор A нормально разрешим (по Хаусдорфу) и имеет конечномерное ядро и непрерывный правый обратный, т. е. образ $X = A(X_0)$ — замкнут, множество решений уравнения $Af = 0$, $f \in X_0$ — конечномерно и существует непрерывный оператор B такой, что

$$\forall\, g \in X \qquad ABg = g,$$

т. е. $f = Bg \in X_0$ есть частное решение уравнения $Af = g \in X$. По существу это означает, что все проблемы с разрешимостью уравнения $Af = g$, в том числе и связанные с младшими членами, локальны — «концентрируются» вблизи области вырождения символа V.

При исследовании псевдодифференциальных операторов особое внимание в настоящей работе уделяется псевдодифференциальным операторам на торе, которые впоследствии служат основной моделью для рассмотрения псевдодифференциальных операторов на произвольной римановой поверхности.

Наконец, в качестве приложения рассмотрена краевая задача с наклонной производной для эллиптического уравнения

$$\begin{cases} P(y, \partial)u = 0, & y \in D^+, \\ (b(y), \nabla u)\,\big|_{y \in D} = g(y), & y \in D, \end{cases} \tag{0.10}$$

где риманова поверхность $D = \partial D^+$ — граница области $D^+ \subset \mathbb{R}^3$, $P(y, \partial)$ — эллиптический линейный дифференциальный оператор второго порядка, $b(y) : D \to \mathbb{R}^3$ — граничное векторное поле. Как известно, эту задачу можно свести к уравнению с псевдодифференциальным оператором на D [43]. Если выполнено условие Лопатинского $a_n(y) = (b(y), n(y)) \neq 0$, где $n(y)$ — нормаль к D, $a_n(y)$ — нормальная составляющая вектора $b(y)$, то задача (0.10) — нетерова индекса нуль. Исследовалась задача (0.10) и в случае вырождения (обращения в нуль) $a_n(y)$ (см., например, [13]).

В данной работе выделяется класс векторных полей $b(y)$, для которых соответствующий задаче (0.10) псевдодифференциальный оператор на D удовлетворяет условиям настоящей работы и, следовательно, на задачу (0.10) переносятся все результаты работы. В частности, установлена разрешимость задачи (0.10) в классе функций $u(y)$, равных нулю в окрестности области вырождения

$$V = \{\, y \in D \mid a_n(y) = 0 \,\};$$

с точностью до вполне непрерывного слагаемого предложены корректные постановки для задачи (0.10), причем в терминах векторного поля $b(y)$ вычислены характеристики l и l^* и индекс $\varkappa = l - l^*$.

Остановимся подробней на содержании второй части книги. В гл. 1 рассматриваются псевдодифференциальные операторы на торе. В § 1 введен класс символов для псевдодифференциальных операторов нулевого порядка. Для удобства дальнейших рассмотрений и приложений этот класс несколько шире стандартного класса полиоднородных и бесконечно гладких символов [43], поэтому в этом пункте для введенного класса символов приводятся доказательства обычных для теории псевдодифференциальных операторов утверждений о непрерывности в пространствах Соболева, перемножении главных символов при умножении операторов и обратимости операторов с невырождающимся символом.

В § 2 рассмотрены так называемые операторы типа линейного сопряжения — операторы с разрывным по ξ символом. Для этого класса операторов устанавливается представление, аналогичное представлению (0.5) (*разложение Гахова*)

$$A = P_1 Q_{\varkappa} P_2 + \alpha = \widetilde{A} + \alpha, \tag{0.11}$$

где α — вполне непрерывен в пространствах Соболева W_2^s, $P_{1,2}$ — обратимы, а $Q_{\varkappa}$ — сингулярный интегральный оператор по одной переменной. В результате уравнение $\widetilde{A}f = g$ сводится к уравнению $Q_{\varkappa} f_1 = g_1$, для которого непосредственно строятся общее решение и условия разрешимости. При этом в уравнении $Q_{\varkappa} f_1 = g_1$ одна переменная выступает в качестве параметра, т. е. все решения (условия разрешимости) в качестве произвольных коэффициентов содержат функции от этой переменной. Таким образом вычисляются ядро оператора, коядро (условия разрешимости) и предлагается корректная постановка задачи для уравнения $Af = g$. Конструкции и результаты данного пункта являются идейной и технической основой для дальнейших рассуждений.

В гл. 2 изучаются псевдодифференциальные операторы на торе с вырождающимся символом. В § 3 вводится класс символов. § 4 носит вспомогательный технический характер, в нем установлены некоторые результаты, используемые в дальнейшем. Наконец, в § 5 приводятся основные результаты — замена оператора с вырождающимся символом на оператор с разрывным символом (регуляризованный оператор) с точностью до вполне непрерывного слагаемого, вычисление характеристик l, l^* и $\varkappa = l - l^*$ и корректная постановка задачи для регуляризованного оператора.

В гл. 3 мы обращаемся к псевдодифференциальным операторам на произвольной компактной римановой поверхности. В § 6 для римановой поверхности строится специального вида атлас, карты которого гомеоморфно отображают часть римановой поверхности в тор, что позволяет впоследствии локально сводить операторы на римановой поверхности к операторам на торе и, таким образом, использовать результаты глав 1 и 2. В § 7 для введенного в гл. 1 класса псевдодифференциальных операторов устанавливаются обычные для теории псевдодифференциальных операторов результаты об изменении главного символа оператора при замене переменной. На этой основе в § 8 вводится класс псевдодифференциальных операторов на римановой поверхности и устанавливаются некоторые их свойства. В § 9 вводится специальный метод продолжения оператора, заданного на одной карте (т. е. на торе) и удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям, до оператора на всей римановой поверхности, тождественного вне данной карты (т. е. на классе функций, равных нулю в данной карте). Эта конструкция систематически используется в дальнейшем, позволяя переносить результаты, полученные для операторов на торе, на операторы на римановой поверхности. В частности, с помощью этого продолжения в § 10 доказана обратимость (с точностью до вполне непрерывного слагаемого) оператора с невырожденным символом. Этот обычный для теории псевдодифференциальных операторов результат доказан специально для введенного класса символов, кроме того, метод доказательства, основанный на последовательном обращении оператора в картах с последующим продолжением на всю поверхность, существенно используется далее в гл. 4.

Глава 4 посвящена основной задаче — обращению псевдодифференциальных операторов с вырождающимся символом на римановой поверхности и корректной пострановке задачи для таких операторов. В § 11 вводится класс символов и устанавливаются некоторые их свойства. В § 12 устанавливается представление оператора $A = P_0 A_0 + \alpha$, где α — вполне непрерывен, P_0 — обратим, а A_0 — оператор с вырождающимся символом, действующий как тождественный вне окрестности области вырождения V. Эта процедура названа «локализация». На ее основе сразу же устанавливается разрешимость (с точностью до конечномерного ядра) уравнения $Af = g$ на классе функций, равных нулю в окрестности области вырождения V. Кроме того, если область вырождения состоит из нескольких компонент связности, то эта же процедура «локализации» позволяет разложить оператор в композицию операторов, символы которых вырождаются только на части компонент связности V, а на остальной части римановой поверхности операторы действуют как тождественные.

§ 13 посвящен обращению локализованных операторов по отдельности. Здесь окрестность области вырождения символа локализованного оператора отображается в тор, что позволяет использовать результаты гл. 2 для операторов на торе, а с помощью продолжения оператора (конструкция § 9) соответствующие результаты переносятся на оператор на римановой поверхности.

В § 14 «склеиваются» операторы, локализованные в § 12 и, таким образом, получаются результаты для исходного оператора. Здесь приводятся основные результаты настоящей работы, а именно: с точностью до вполне непрерывного слагаемого даются корректные постановки задачи для уравнения $Af = g$ вида (0.8), причем числа l, l^* и $\varkappa = l - l^*$ вычисляются в терминах главного символа оператора.

Глава 5 посвящена задаче с наклонной производной (0.10). В § 15 приводится постановка задачи и некоторые результаты о граничных псевдодифференциальных операторах, а в § 16 задача (0.10) сводится к псевдодифференциальному оператору на римановой поверхности D.

Далее в § 17 формулируются условия на граничное векторное поле $b(y)$, обеспечивающие возможность применить к соответствующему псевдодифференциальному оператору результаты гл. 4 и, наконец, в § 18 общие результаты гл. 4 переносятся на задачу с наклонной производной (0.10).

В тексте работы обычно через M обозначаются различные константы. Если необходимо подчеркнуть зависимость константы от параметров или функций, то указывается $M(\gamma)$, $M(f)$ и т. п. Кроме того, термин «область» употребляется не только для обозначения открытых множеств, но иногда, в целях единообразия, и для обозначения множеств, где символ обращается в нуль (область вырождения, локальная область вырождения). Впрочем, в тексте всегда точно указывается, какая именно «область» в каждом случае имеется в виду.

Глава 1
ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ТОРЕ

§ 1. Псевдодифференциальные операторы нулевого порядка

1.1. Класс операторов. Псевдодифференциальный оператор для функции двух переменных — это линейный оператор, заданный в плоскости преобразования Фурье [43, с. 97]:

$$Af = A(f \,|\, z) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} a(z,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{iz\xi}\,d\xi,$$

$z = (x,y)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $z\xi = x\xi_1 + y\xi_2$, $d\xi = d\xi_1 d\xi_2$; $\widehat{f}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $f(z)$ [42]:

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi)e^{iz\xi}\,d\xi \quad \text{или} \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(z)e^{-iz\xi}\,dz,$$

$dz = dxdy$.

Функция $a(z,\xi)$ называется *символом* оператора A. В частности, единичный оператор $E : f \to f$ будет псевдодифференциальным с символом, тождественно равным единице.

Обратимся к функциям, заданным на двумерном торе. Представим тор как квадрат

$$T = \{\, z = (x,y) \,|\, x \in [0, 2\pi],\ y \in [0, 2\pi] \,\}$$

с отождествленными противоположными сторонами или как прямое произведение единичных окружностей:

$$T = \{\, z = (z_1, z_2) \,|\, z_{1,2} \in \mathbb{C},\ |z_1| = |z_2| = 1 \,\},$$

где $z_1 = e^{ix}$, $z_2 = e^{iy}$. Для удобства будем использовать оба обозначения: $z = (x,y) = (z_1, z_2) \in T$. Функции, заданные на торе — это двоякопериодические функции на плоскости [11]:

$$f(z) = f(x,y), \quad f(z + 2\pi\xi) = f(z) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^2,$$

где $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ — целочисленная решетка

$$\mathbb{Z}^2 = \{\, \xi = (n_1, n_2) \,|\, n_{1,2} \in \mathbb{Z} \,\}.$$

Отметим, что в качестве T можно брать любой квадрат в плоскости со стороной 2π.

Как известно ([42, с. 215–219]), преобразование Фурье от двоякопериодических функций — это сумма дельта-функций, сосредоточенных в точках целочисленной решетки. Другими словами, в данном случае представление функции $f(z)$ через ее преобразование Фурье — это разложение в ряд Фурье

$$f(z) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \widehat{f}(\xi) e^{iz\xi} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \widehat{f}(\xi) z^{\xi}, \tag{1.1}$$

где $z^{\xi} = z_1^{n_1} z_2^{n_2}$, $\xi = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. При этом коэффициенты ряда Фурье

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z) e^{-iz\xi} dz = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{|z_1|=1} \int\limits_{|z_2|=1} f(z) z^{-\xi} \frac{dz_1}{z_1} \frac{dz_2}{z_2}. \tag{1.2}$$

Для членов ряда Фурье (1.1) введем специальное обозначение

$$S_{\xi} f = \widehat{f}(\xi) z^{\xi} = -\frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{4\pi^2} \int\limits_{|z_1|=1} \int\limits_{|z_2|=1} f(z) z^{-\xi} \frac{dz_1}{z_1} \frac{dz_2}{z_2},$$

$$\xi = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

С помощью представления (1.1) любой линейный оператор на торе можно представить как псевдодифференциальный:

$$Af = \sum_{\xi} \widehat{f}(\xi) A(z^{\xi}) = \sum_{\xi} \left(A(z^{\xi}) z^{-\xi}\right) \widehat{f}(\xi) z^{\xi} = \sum_{\xi} a(z, \xi) S_{\xi} f, \tag{1.3}$$

где функция

$$a(z, \xi) = z^{-\xi} A(z^{\xi}), \quad z \in T, \quad \xi \in \mathbb{Z}^2$$

будет символом оператора A. Отметим сразу же, что если $a(z, \xi) \equiv 0$ при $|\xi| \geqslant R$, то оператор $A = \sum\limits_{|\xi|<R} a(z, \xi) S_{\xi}$ — конечномерный.

Далее оператор A с символом $a(z, \xi)$ будем обозначать $A = \operatorname{op}(a(z, \xi))$.

Символ $a(z, \xi)$ будем называть *однородным*, если $a(z, t\xi) = a(z, \xi)$, $\forall\, t > 0$. Это значит, что $a(z, \xi) = a(z, \xi/|\xi|) = a(z, \varphi(\xi))$, где $\varphi(\xi) = \arg(\xi_1 + i\xi_2)$ — угол в плоскости ξ. При этом функция $a(z, \varphi)$ периодична по φ, т. е. область определения однородного символа — трехмерный тор

$$\widetilde{T} = T \times L_1, \quad L_1 = \left\{\, e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi] \,\right\}$$

(L_1 — единичная окружность).

Для того, чтобы сформулировать условия на класс символов, которые будут рассматриваться в настоящей работе, введем некоторые обозначения: пусть $f = f(z) = f(x, y) : T \to \mathbb{C}$ — комплекснозначная функция на торе;

$$|z - t| = |z_1 - t_1| + |z_2 - t_2|, \quad z = (z_1, z_2) \in T, \quad t = (t_1, t_2) \in T;$$

$$\|f\|_{(\alpha)} = \sup_{z \in T} |f(z)| + \sup_{z_{1,2} \in T} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{\alpha}}, \quad \alpha \in (0, 1);$$

$$f^{(k)}(z) = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} f(x, y), \quad k = (k_1, k_2), \quad |k| = k_1 + k_2;$$

$$\|f\|_{(\gamma)} = \sum_{|k|=0}^{m} \|f^{(k)}(z)\|_{(\alpha)}, \quad \gamma > 0, \quad \gamma \notin \mathbb{Z},$$

$$m \text{ — целая часть } \gamma, \quad \alpha = \gamma - m;$$

и, наконец, введем пространства Гельдера [8, 19]

$$C^{\gamma}(T) = \{ f(z) \mid \|f\|_{(\gamma)} < \infty \}.$$

Назовем $A = \mathrm{op}(a(z, \xi))$ псевдодифференциальным оператором нулевого порядка, если его символ имеет вид

$$a(z, \xi) = a_0(z, \varphi(\xi)) + a_{-1}(z, \xi), \tag{1.4}$$

где

$$a_0(z, \varphi) \in C^{\gamma_0}(T), \quad \frac{\partial a_0(z, \varphi)}{\partial \varphi} \in C^{\gamma_0}(T), \quad \gamma_0 > 4; \tag{1.5}$$

$$|S_{\zeta} a_{-1}(z, \xi)| \leqslant \frac{M}{(1 + |\xi|)(1 + |\zeta|)^{\gamma_1}}, \quad \gamma_1 > 3, \quad \zeta \in \mathbb{Z}^2. \tag{1.6}$$

Однородный символ $a_0(z, \varphi)$ будем называть *главным символом* оператора A. Если $a_0 \equiv 0$, то A — оператор порядка (-1).

Заметим, во-первых, что так как

$$f(z) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} S_{\xi} f,$$

то из условия (1.6) имеем

$$|a_{-1}(z, \xi)| \leqslant \sum_{\zeta} |S_{\zeta} a_{-1}(z, \xi)| \leqslant \frac{M}{1 + |\xi|} \to 0 \text{ при } |\xi| \to \infty,$$

откуда следует, что в представлении (1.4) слагаемые определяются однозначно. Во-вторых, любой символ $a(z, \xi)$ такой, что $|S_{\zeta} a(z, \xi)| \leqslant M$ и $a(z, \xi) \equiv 0$ при $|\xi| > R$ будет удовлетворять условию (1.6) и, следовательно, любой оператор с таким символом (конечномерный) будет оператором порядка (-1). Наконец отметим, что у символа $a(z,\xi) = a_0(z,\varphi(\xi))$ не определено значение $a(z,0)$. Поэтому представление (1.4) будем понимать так:

$$a(z,\xi) = \begin{cases} a_0(z,\varphi(\xi)) + a_{-1}(z,\xi), & |\xi| \geqslant 1; \\ a_{-1}(z,0), & \xi = 0; \end{cases}$$

а для символа $a_0(z,\varphi(\xi))$ будем по умолчанию всегда считать $|\xi| \geqslant 1$.

Оператор $A = \mathrm{op}(a(z,\xi))$ будет псевдодифференциальным оператором порядка m, если его символ $a(z,\xi) = \widetilde{a}(z,\xi)|\xi|^m$, где $\widetilde{a}(z,\xi)$ — символ оператора нулевого порядка, т. е. удовлетворяет условиям (1.4), (1.5), (1.6). В главах 1 и 2 мы будем рассматривать только операторы нулевого порядка.

Так как условия на символ (1.4), (1.5), (1.6) отличаются от обычных условий полиоднородности и бесконечной гладкости символа (см. [43, с. 96]), то приведем для данного случая доказательства некоторых стандартных для теории псевдодифференциальных операторов формул и утверждений (см. [43]).

1.2. Непрерывность в пространствах Соболева. Введем пространства Соболева

$$W_2^s(T) = \left\{ f(z) \;\middle|\; \|f\|_s^2 = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2} |S_\xi f|^2(1+|\xi|^2)^s < \infty \right\}$$

и покажем ограниченность псевдодифференциального оператора нулевого порядка в этих пространствах.

Будем через

$$\|A\|_{s_1,s_2} = \sup \frac{\|Af\|_{s_2}}{\|f\|_{s_1}}$$

обозначать норму оператора $A : W_2^{s_1}(T) \to W_2^{s_2}(T)$; $\|A\|_s = \|A\|_{s,s}$.

Лемма 1.1. *Пусть $f(z) \in C^\gamma(T)$, $\|f\|_{(\gamma)} \leqslant M_0(f)$. Тогда*

$$|S_\xi f| \leqslant \frac{\widetilde{M}(\gamma)M_0(f)}{(1+|\xi|)^\gamma}.$$

Доказательство. Пусть вначале $|\xi| \geqslant 1$, $0<\gamma<1$. Обозначим

$$I(\xi,t) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{|z_1|=1}\int\limits_{|z_2|=1} (f(tz)-f(z))z^{-\xi}\frac{dz_1}{z_1}\frac{dz_2}{z_2},$$

$$z = (z_1,z_2)\in T, \quad t = (t_1,t_2)\in T,$$

$$tz = (t_1z_1, t_2z_2) \in T, \quad \xi = (n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Непосредственно находим

$$I(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)(t^\xi - 1), \qquad \widehat{f}(\xi) = z^{-\xi}S_\xi f.$$

С другой стороны, по определению класса Гельдера

$$|f(tz) - f(z)| \leqslant M_0(f)|t - e_0|^\gamma, \quad e_0 = (1, 1),$$

откуда

$$|I(\xi, t)| \leqslant \frac{M_0(f)|t - e_0|^\gamma}{4\pi^2} \int\limits_{|z_1|=1} \int\limits_{|z_2|=1} |z^{-\xi}| \frac{|dz_1|}{|z_1|} \frac{|dz_2|}{|z_2|} = M_0(f)|t - e_0|^\gamma,$$

т. е.

$$|\widehat{f}(\xi)||t^\xi - 1| \leqslant M_0(f)|t - e_0|^\gamma. \tag{1.7}$$

Возьмем

$$t = \left(\exp\left(\frac{\pi i n_1}{|\xi|^2}\right), \exp\left(\frac{\pi i n_2}{|\xi|^2}\right)\right),$$

тогда

$$t^\xi = \left(\exp\left(\frac{\pi i n_1}{|\xi|^2}\right)\right)^{n_1} \left(\exp\left(\frac{\pi i n_2}{|\xi|^2}\right)\right)^{n_2} = \exp^{\pi i} = -1$$

и из (1.7) получим

$$2|\widehat{f}(\xi)| \leqslant M_0(f)|t - e_0|^\gamma.$$

Но при $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leqslant \pi$

$$\left|\frac{e^z - 1}{z}\right| \leqslant \sup_{|t|=\pi} \left|\frac{e^t - 1}{t}\right| \leqslant \frac{1}{\pi} \sup_{|t|=\pi} (|e^t| + 1) \leqslant \frac{e^\pi + 1}{\pi},$$

откуда так как $|\pi i n_{1,2}/|\xi|^2| \leqslant \pi/|\xi| \leqslant \pi$, то

$$|t - e_0| = \left|\exp\left(\frac{\pi i n_1}{|\xi|^2}\right) - 1\right| + \left|\exp\left(\frac{\pi i n_2}{|\xi|^2}\right) - 1\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^\pi + 1}{\pi} \left(\left|\frac{\pi i n_1}{|\xi|^2}\right| + \left|\frac{\pi i n_2}{|\xi|^2}\right|\right) \leqslant \frac{2(e^\pi + 1)}{|\xi|}.$$

Тогда

$$|S_\xi f| = |\widehat{f}(\xi)| \leqslant \frac{M_0(f)(e^\pi + 1)^\gamma 2^{\gamma - 1}}{|\xi|^\gamma}$$

и так как $|\xi| \geqslant 1$, т. е. $1 + |\xi| \leqslant 2|\xi|$, то окончательно для функций $f(z) \in$ $\in C^\gamma(T)$, $0 < \gamma < 1$ имеем

$$|S_\xi f| \leqslant \frac{2^{2\gamma - 1}(e^\pi + 1)^\gamma M_0(f)}{(1 + |\xi|)^\gamma} = \frac{M(\gamma) M_0(f)}{(1 + |\xi|)^\gamma}. \tag{1.8}$$

Теперь пусть $\gamma = n + \alpha$, $n > 0$ — целая часть γ, $0 < \alpha < 1$. Вычислим производные от z^ξ:

$$\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} z^\xi = (i n_1)^{k_1} (i n_2)^{k_2} z^\xi = i^{|k|} \xi^k z^\xi, \quad \xi^k = n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2}.$$

Отсюда с учетом представления (1.1)

$$f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} f = \sum_{\xi} \widehat{f}(\xi) \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} z^{\xi} =$$

$$= \sum_{\xi} \widehat{f}(\xi) i^{|k|} \xi^k z^{\xi} = i^{|k|} \sum_{\xi} \xi^k S_{\xi} f. \quad (1.9)$$

Но если $\|f\|_{(\gamma)} \leqslant M_0(f)$, то $\|f^{(k)}\|_{(\alpha)} \leqslant M_0(f)$, $|k| = n$, откуда с учетом (1.9) и (1.8)

$$|S_{\xi} f^k| = |i^{|k|} \xi^k S_{\xi} f| = |\xi^k| |S_{\xi} f| \leqslant \frac{M(\alpha) M_0(f)}{(1 + |\xi|)^{\alpha}}, \quad |k| = n.$$

С другой стороны,

$$|\xi|^n = \left(\sqrt{n_1^2 + n_2^2}\right)^n \leqslant (|n_1| + |n_2|)^n =$$

$$= \sum_{k_1 + k_2 = n} C_n^{k_1} |n_1|^{k_1} |n_2|^{k_2} \leqslant M_2(n) \sum_{|k| = n} |\xi^k|,$$

откуда

$$|\xi|^n |S_{\xi} f| \leqslant M_2(n) \sum_{|k| = n} |\xi^k| |S_{\xi} f| \leqslant M_2(n) \sum_{|k| = n} \frac{M(\alpha) M_0(f)}{(1 + |\xi|)^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_2(n) M(\alpha)(n+1) M_0(f)}{(1 + |\xi|)^{\alpha}}$$

и окончательно, с учетом $n + \alpha = \gamma$ и $1 + |\xi| \leqslant 2|\xi|$, получим

$$|S_{\xi} f| \leqslant \frac{M_2(n)(n+1) M(\alpha) M_0(f)}{|\xi|^n (1 + |\xi|)^{\alpha}} \leqslant \frac{2^n M_2(n)(n+1) M(\alpha) M_0(f)}{(1 + |\xi|)^{\gamma}} =$$

$$= \frac{\widetilde{M}(\gamma) M_0(f)}{(1 + |\xi|)^{\gamma}}, \quad |\xi| \geqslant 1.$$

Наконец при $\xi = 0$

$$|S_0 f| = \left| \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{|z_1| = 1} \int\limits_{|z_2| = 1} f(z) \frac{dz_1}{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \right| \leqslant \sup |f(z)| \leqslant M_0(f) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{M}(\gamma) M_0(f),$$

откуда окончательно следует утверждение леммы.

Следствие. Из условий на главный символ (1.5) следует, что

$$|S_\zeta a_0(z,\varphi(\xi))| + \left|S_\zeta \frac{\partial a_0}{\partial\varphi}(z,\varphi(\xi))\right| \leqslant \frac{M_0}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}, \quad \gamma_0 > 4, \quad \xi\in\mathbb{Z}^2, \tag{1.10}$$

где $M_0 = \widetilde{M}(\gamma_0)(\|a_0\|_{(\gamma_0)} + \|a_{0\varphi}\|_{(\gamma_0)})$.

Лемма 1.2. *Пусть* $\beta > \max(2s+2, 2)$. *Тогда*

$$I = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2} \frac{(1+|\xi|^2)^s}{(1+|\xi-\eta|)^\beta} \leqslant M(s,\beta)(1+|\eta|^2)^{s_0}, \quad s_0 = \max(s, -\beta/2).$$

Доказательство. Отметим, что так как $1+|\xi|^2 \leqslant (1+|\xi|)^2 \leqslant 2(1+|\xi|^2)$, то

$$(1+|\xi|^2)^\alpha \leqslant M(\alpha)(1+|\xi|)^{2\alpha}, \quad \forall\,\alpha\in\mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Пусть $s \geqslant 0$, тогда $s_0 = s$. Представим

$$I = \sum_{|\xi|\leqslant 2|\eta|} \ldots + \sum_{|\xi|>2|\eta|} \ldots = I_1 + I_2.$$

Поскольку $\beta > 2$, то

$$I_1 \leqslant (1+4|\eta|^2)^s \sum_\xi \frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^\beta} \leqslant M(\beta)4^s(1+|\eta|^2)^s,$$

$$M(\beta) = \sum_\xi \frac{1}{(1+|\xi|)^\beta} < \infty.$$

В сумме I_2 имеем $|\xi-\eta| \geqslant |\xi|-|\eta| \geqslant |\xi|-|\xi|/2 = |\xi|/2$, откуда в силу $1+|\xi|^2 \leqslant (1+|\xi|)^2$, $1+|\xi|/2 \geqslant (1+|\xi|)/2$ с учетом $\beta-2s>2$, получим

$$I_2 \leqslant \sum_\xi \frac{(1+|\xi|^2)^s}{(1+|\xi|/2)^\beta} \leqslant 2^\beta \sum_\xi \frac{1}{(1+|\xi|)^{\beta-2s}} \leqslant 2^\beta M(\beta-2s) \leqslant$$
$$\leqslant M(s,\beta)(1+|\eta|^2)^s.$$

Из оценок I_1 и I_2 следует утверждение леммы при $s\geqslant 0$.

Пусть теперь $s<0$. Тогда представим

$$I = \sum_{|\xi|\leqslant|\eta|/2} \ldots + \sum_{|\xi|>|\eta|/2} \ldots = I_3 + I_4.$$

При $|\xi| > |\eta|/2$ имеем $1+|\xi|^2 \geqslant 1+|\eta|^2/4 \geqslant (1+|\eta|^2)/4$, т.е. $(1+|\xi|^2)^s \leqslant 4^{-s}(1+|\eta|^2)^s$, откуда

$$I_4 \leqslant 4^{-s}(1+|\eta|^2)^s \sum_\xi \frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^\beta} \leqslant M(s,\beta)(1+|\eta|^2)^s. \tag{1.12}$$

Если же $|\xi| \leqslant |\eta|/2$, то

$$|\xi - \eta| \geqslant |\eta| - |\xi| \geqslant |\eta|/2 \geqslant |\xi|. \tag{1.13}$$

Пусть вначале $s \geqslant -1$, с учетом $\beta > 2$ это означает, что вновь $s_0 = s$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $1 - \beta/2 + \varepsilon/2 < 0$. Тогда $2s + 2 + \varepsilon > 0$, $\beta - 2s - 2 - \varepsilon > 0$ и с учетом (1.11) и (1.13), получим

$$(1 + |\xi - \eta|)^\beta \geqslant (1 + |\xi|)^{2s+2+\varepsilon}(1 + |\eta|/2)^{\beta-2s-2-\varepsilon} \geqslant$$
$$\geqslant M(1 + |\xi|)^{2s+2+\varepsilon}(1 + |\eta|^2)^{\beta/2-s-1-\varepsilon/2},$$

откуда, учитывая (1.11), найдем

$$I_3 \leqslant M \sum_\xi \frac{(1 + |\xi|)^{2s}}{(1 + |\xi|)^{2s+2+\varepsilon}(1 + |\eta|^2)^{\beta/2-s-1-\varepsilon/2}} \leqslant$$
$$\leqslant M(1 + |\eta|^2)^{s+1+\varepsilon/2-\beta/2} \sum_\xi \frac{1}{(1 + |\xi|)^{2+\varepsilon}} \leqslant M(s, \beta)(1 + |\eta|^2)^{s_1}.$$

Но так как $1 - \beta/2 + \varepsilon/2 < 0$, то $s_1 = s + 1 + \varepsilon/2 - \beta/2 < s < 0$ и в силу (1.12):

$$I = I_3 + I_4 \leqslant M(s, \beta)((1 + |\eta|^2)^s + (1 + |\eta|^2)^{s_1}) \leqslant M(s, \beta)(1 + |\eta|^2)^s.$$

Теперь рассмотрим случай $s < -1$. В этом случае согласно (1.13), (1.11), имеем

$$(1 + |\xi - \eta|)^\beta \geqslant (1 + |\eta|/2)^\beta \geqslant M(1 + |\eta|^2)^{\beta/2}$$

и так как $2s < -2$, то

$$\sum_\xi (1 + |\xi|)^{2s} \leqslant M(s) < \infty,$$

откуда

$$I_3 \leqslant M \sum_\xi \frac{(1 + |\xi|)^{2s}}{(1 + |\eta|^2)^{\beta/2}} \leqslant M(1 + |\eta|^2)^{-\beta/2}.$$

Следовательно,

$$I = I_3 + I_4 \leqslant M(s, \beta)\left((1 + |\eta|^2)^s + (1 + |\eta|^2)^{-\beta/2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant M(s, \beta)(1 + |\eta|^2)^{s_0},$$

что завершает доказательство леммы.

Лемма 1.3.

$$S_\xi(z^\eta f) = z^\eta S_{\xi-\eta} f, \quad \eta \in \mathbb{Z}^2.$$

Утверждение леммы легко проверяется непосредственным вычислением.

Теорема 1.1. *Пусть* $A = \mathrm{op}(a(z,\xi))$, *причем*

$$|S_\zeta a(z,\xi)| \leqslant M(a)\frac{(1+|\xi|)^\delta}{(1+|\zeta|)^\gamma}, \qquad \gamma > 2; \tag{1.14}$$

числа s_1 *и* s_2 *удовлетворяют условию*

$$s_2 = s_1 - \delta < \gamma - 1. \tag{1.15}$$

Тогда $A : W_2^{s_1}(T) \to W_2^{s_2}(T)$ — *непрерывен*, $\|A\|_{s_1,s_2} \leqslant M_0 M(a)$, $M_0 = M_0(s_1, \delta, \gamma)$.

Доказательство. Пусть $p = \min(s_2, 1)$, $0 < \varepsilon < \min(\gamma - 2, \gamma - 1 - s_2)$. Тогда $\gamma - 2 - \varepsilon > 0$. Если $p = s_2$, то $s_2 - p = 0 < \gamma - 2 - \varepsilon$, если же $p = 1$, то $s_2 - p = s_2 - 1 < (\gamma - 1 - \varepsilon) - 1 = \gamma - 2 - \varepsilon$, т. е. в любом случае $s_2 - p < \gamma - 2 - \varepsilon$. Итак, имеем:

$$2\gamma - 2 - 2\varepsilon > 2 > 0, \qquad 2\gamma - 2 - 2\varepsilon > 2(s_2 - p) + 2. \tag{1.16}$$

Пусть $f(z) \in W_2^{s_1}(T)$ и разложение $f(z)$ в ряд Фурье содержит конечное число слагаемых:

$$f(z) = \sum_{|\eta|<R} f(\eta) z^\eta. \tag{1.17}$$

Тогда

$$g = Af = \sum_{|\eta|<R} a(z,\eta) S_\eta f$$

и с учетом леммы 1.3 получим

$$S_\xi g = \sum_\eta S_\eta f \, S_{\xi-\eta} a(z,\eta),$$

откуда, используя условие (1.14), придем к неравенству

$$|S_\xi g| \leqslant \sum_\eta |S_\eta f| \frac{M(a)(1+|\eta|)^\delta}{(1+|\xi-\eta|)^\gamma}.$$

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$|S_\xi g|^2 \leqslant \sum_\eta |S_\eta f|^2 \frac{M^2(a)(1+|\eta|)^{2\delta+2p}}{(1+|\xi-\eta|)^{2\gamma-2-2\varepsilon}} \sum_\eta \frac{(1+|\eta|)^{-2p}}{(1+|\xi-\eta|)^{2+2\varepsilon}} = I_1 I_2. \tag{1.18}$$

Здесь $I_{1,2}$ — конечные суммы, причем для оценки I_2 можно применить лемму 1.2 с $\beta = 2 + 2\varepsilon$, $s = -p$. Получим

$$I_2 \leqslant M(s_2) \sum_\eta \frac{(1+|\eta|^2)^{-p}}{(1+|\xi-\eta|)^{2+2\varepsilon}} \leqslant M(1+|\xi|^2)^{s_0},$$

$s_0 = \max(-p, -1-\varepsilon) = -p$, так как $-p \geqslant -1$. Тогда из (1.18) следует

$$|S_\xi g|^2 \leqslant MM^2(a)(1+|\xi|^2)^{-p} \sum_\eta |S_\eta f|^2 \frac{(1+|\eta|^2)^{\delta+p}}{(1+|\xi-\eta|)^{2\gamma-2-2\varepsilon}}.$$

Отсюда

$$\|g\|_{s_2}^2 = \sum_\xi |S_\xi g|^2 (1+|\xi|^2)^{s_2} \leqslant$$

$$\leqslant MM^2(a) \sum_\xi (1+|\xi|^2)^{s_2-p} \sum_\eta |S_\eta f|^2 \frac{(1+|\eta|^2)^{\delta+p}}{(1+|\xi-\eta|)^{2\gamma-2-2\varepsilon}} =$$

$$= MM^2(a) \sum_\eta |S_\eta f|^2 (1+|\eta|^2)^{\delta+p} \sum_\xi \frac{(1+|\xi|^2)^{s_2-p}}{(1+|\xi-\eta|)^{2\gamma-2-2\varepsilon}} =$$

$$= MM^2(a) \sum_\eta |S_\eta f|^2 (1+|\eta|^2)^{\delta+p} I_3(\eta). \quad (1.19)$$

Изменение порядка суммирования возможно, так как сумма по η — конечная.

Неравенства (1.16) означают, что к $I_3(\eta)$ можно применить лемму 1.2. Тогда $I_3(\eta) \leqslant M(1+|\eta|^2)^{s_0}$, $s_0 = \max(s_2 - p, 1+\varepsilon-\gamma) = s_2 - p$, так как $s_2 - p \geqslant 0$, а $1+\varepsilon-\gamma < 0$. В таком случае из (1.19) окончательно следует

$$\|g\|_{s_2}^2 \leqslant MM^2(a) \sum_\eta |S_\eta f|^2 (1+|\eta|^2)^{\delta+p} (1+|\eta|^2)^{s_2-p} =$$

$$= MM^2(a) \sum_\eta |S_\eta f|^2 (1+|\eta|^2)^{\delta+s_2} =$$

$$= MM^2(a) \sum_\eta |S_\eta f|^2 (1+|\eta|^2)^{s_1} = MM^2(a) \|f\|_{s_1}^2. \quad (1.20)$$

Итак, доказано неравенство (1.20) для функций вида (1.17), где M не зависит от R. Поскольку множество функций вида (1.17) всюду плотно в $W_2^{s_1}(T)$, то из (1.20) следует утверждение теоремы.

Теорема 1.2. *Оператор порядка* (-1) *вполне непрерывен в* $W_2^s(T)$, $s < \gamma_1 - 1$.

Доказательство. В силу условия (1.6) символ оператора порядка (-1) удовлетворяет условию (1.14) с $\delta = -1$, $\gamma = \gamma_1 > 3$. Тогда, взяв $s_2 = s$, $s_1 = s - 1$, получим $s_2 = s_1 + 1 = s_1 - \delta = s < \gamma - 1$ и по теореме 1.1 оператор $A : W_2^{s-1}(T) \to W_2^s(T)$ — непрерывен. Но пространство $W_2^s(T)$ компактно вложено в $W_2^{s-1}(T)$, т. е. множество, ограниченное в $W_2^s(T)$, будет относительно компактным в $W_2^{s-1}(T)$. Другими словами, оператор вложения $E : W_2^s(T) \to W_2^{s-1}(T)$ — вполне непрерывен [43]. Тогда $A = AE : W_2^s(T) \to W_2^{s-1}(T) \to W_2^s(T)$ — вполне непрерывен. Теорема доказана.

Теорема 1.3. *Псевдодифференциальный оператор нулевого порядка непрерывен в* $W_2^s(T)$, $s < \min(\gamma_0 - 1, \gamma_1 - 1)$.

Доказательство. В силу представления (1.4) имеем

$$A = \mathrm{op}(a(z,\xi)) = \mathrm{op}(a_0(z,\varphi(\xi))) + \mathrm{op}(a_{-1}(z,\xi)) = A_0 + A_{-1},$$

причем по теореме 1.2 оператор $A_{-1} : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — вполне непрерывен. В свою очередь для символа $a_0(z,\varphi(\xi))$ выполняется (1.10), т. е. $a_0(z,\varphi(\xi))$ удовлетворяет условию (1.14) с $\delta = 0, \gamma = \gamma_0 > 4$. Тогда, взяв $s_2 = s_1 = s$ получим $s_2 = s_1 - 0 = s_1 - \delta < \gamma - 1$, откуда по теореме 1.1 оператор A_0 непрерывен в $W_2^s(T)$, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 1.4. *Пусть* $A = \mathrm{op}(a(z,\xi))$,

$$|S_\zeta a(z,\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon(|\xi|)}{(1+|\zeta|)^\gamma},$$

$\varepsilon(r) \to 0$ *при* $r \to \infty$; $\gamma > 2$. *Тогда* $A : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — *вполне непрерывен*, $s < \gamma - 1$.

Доказательство. Пусть

$$a_N(z,\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \leqslant N, \\ a(z,\xi), & |\xi| > N, \end{cases}$$

$A_N = \mathrm{op}(a_N(z,\xi))$. Очевидно $(A - A_N)$ — конечномерный оператор, с другой стороны, из теоремы 1.1 $\|A_N\|_s \leqslant \varepsilon(N) \to 0$ при $N \to \infty$, откуда и следует требуемое утверждение.

1.3. Композиция псевдодифференциальных операторов. Покажем, что произведение псевдодифференциальных операторов нулевого порядка есть псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, главный символ которого равен произведению главных сиволов сомножителей.

Лемма 1.4. *Пусть* $A = \mathrm{op}(a(z,\xi))$, $B = \mathrm{op}(b(z,\xi))$ *и* $C = A \circ B$. *Тогда* $C = \mathrm{op}(c(z,\xi))$, *причем*

$$c(z,\eta) = \sum_\xi a(z,\xi) S_{\xi-\eta} b(z,\eta), \tag{1.21}$$

$$S_\zeta c(z,\eta) = \sum_\xi S_{\zeta+\eta-\xi} a(z,\xi) S_{\xi-\eta} b(z,\eta), \quad \zeta \in \mathbb{Z}^2. \tag{1.22}$$

Доказательство. Имеем

$$Bf = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2} b(z,\eta) S_\eta f;$$

$$Cf = A(Bf) = \sum_{\xi}\sum_{\eta} a(z,\xi)S_{\xi}(b(z,\eta)S_{\eta}f).$$

Тогда с учетом леммы 1.3 получим

$$Cf = \sum_{\xi}\sum_{\eta} a(z,\xi)S_{\eta}fS_{\xi-\eta}b(z,\eta) = \sum_{\eta}\left[\sum_{\xi} a(z,\xi)S_{\xi-\eta}b(z,\eta)\right]S_{\eta}f,$$

откуда следует формула (1.21). Формула (1.22) вытекает непосредственно из (1.21) с учетом леммы 1.3.

Лемма 1.5. *Пусть* $\gamma > 2$. *Тогда*

$$I = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma}} \leqslant \frac{M_1(\gamma)}{(1+|\zeta|)^{\gamma}},$$

$$M_1(\gamma) = 2^{\gamma+1}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{(1+|\xi|)^{\gamma}}.$$

Доказательство. Произведя замену переменной суммирования $\xi - \eta = \xi \in \mathbb{Z}^2$, получим

$$I = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{(1+|\zeta-\xi|)^{\gamma}(1+|\xi|)^{\gamma}}.$$

Представим

$$I = \sum_{|\zeta-\xi|>|\zeta|/2}\ldots + \sum_{|\zeta-\xi|\leqslant|\zeta|/2}\ldots = I_1 + I_2.$$

Поскольку в I_1: $|\zeta-\xi| > |\zeta|/2$, то

$$I_1 \leqslant \frac{1}{(1+|\zeta|/2)^{\gamma}}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{(1+|\xi|)^{\gamma}} \leqslant \frac{M_1(\gamma)/2}{(1+|\zeta|)^{\gamma}}.$$

В свою очередь в I_2: $|\xi| \geqslant |\zeta| - |\xi-\zeta| \geqslant |\zeta|/2$, откуда

$$I_2 \leqslant \frac{1}{(1+|\zeta|/2)^{\gamma}}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{1+|\zeta-\xi|)^{\gamma}} \leqslant \frac{M_1(\gamma)/2}{(1+|\zeta|)^{\gamma}}.$$

Окончательно

$$I = I_1 + I_2 \leqslant \frac{M_1(\gamma)}{(1+|\zeta|)^{\gamma}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.6. *Пусть* $\gamma > 2$, $\beta \geqslant 0$. *Тогда*

$$I = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{(1+|\xi|)^{\beta}(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma+\beta}} \leqslant \frac{M_2(\gamma,\beta)}{(1+|\eta|)^{\beta}(1+|\zeta|)^{\gamma}},$$

$$M_2(\gamma,\beta) = 2^{\beta+1}M_1(\gamma).$$

Доказательство. Представим

$$I = \sum_{|\xi-\eta|\leqslant|\eta|/2} \ldots + \sum_{|\xi-\eta|>|\eta|/2} \ldots = I_1 + I_2.$$

В сумме I_1: $|\xi| \geqslant |\eta| - |\xi - \eta| \geqslant |\eta|/2$, т. е. $(1+|\xi|)^\beta \geqslant (1+|\eta|/2)^\beta$, откуда

$$I_1 \leqslant \frac{1}{(1+|\eta|/2)^\beta} \sum_\xi \frac{1}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^\gamma(1+|\xi-\eta|)^{\gamma+\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(1+|\eta|/2)^\beta} \sum_\xi \frac{1}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^\gamma(1+|\xi-\eta|)^{\gamma}} \leqslant \frac{2^\beta M_1(\gamma)}{(1+|\eta|)^\beta(1+|\zeta|)^\gamma}.$$

Для I_2 имеем $|\xi - \eta| > |\eta|/2$, следовательно, $(1+|\xi-\eta|)^\beta \geqslant (1+ + |\eta|/2)^\beta$, откуда

$$I_2 \leqslant \frac{1}{(1+|\eta|/2)^\beta} \sum_\xi \frac{1}{(1+|\xi|)^\beta(1+|\zeta+\eta-\xi|)^\gamma(1+|\xi-\eta|)^{\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(1+|\eta|/2)^\beta} \sum_\xi \frac{1}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^\gamma(1+|\xi-\eta|)^{\gamma}} \leqslant \frac{2^\beta M_1(\gamma)}{(1+|\eta|)^\beta(1+|\zeta|)^\gamma}.$$

Итак

$$I = I_1 + I_2 \leqslant \frac{2^{\beta+1} M_1(\gamma)}{(1+|\eta|)^\beta(1+|\zeta|)^\gamma}.$$

Лемма 1.7. *Пусть* $A = \mathrm{op}(a(z,\xi))$, $B = \mathrm{op}(b(z,\xi))$, *причем выполнены условия*

$$|S_\zeta a(z,\xi)| \leqslant \frac{M_a}{(1+|\zeta|)^\gamma}, \quad |S_\zeta b(z,\eta)| \leqslant \frac{M_b(\eta)}{(1+|\zeta|)^\gamma}, \quad \gamma > 3$$

и $C = A \circ B$. *Тогда для символа оператора* C: $C = \mathrm{op}(c(z,\xi))$ *имеем*

$$|S_\zeta c(z,\eta)| \leqslant \frac{M_a M_b(\eta) M_1(\gamma)}{(1+|\zeta|)^\gamma}.$$

Доказательство. Из леммы 1.4 (формула (1.22)) имеем

$$|S_\zeta c(z,\eta)| \leqslant \sum_\xi |S_{\zeta+\eta-\xi} a(z,\xi)| |S_{\xi-\eta} b(z,\eta)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_\xi \frac{M_a}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^\gamma} \frac{M_b(\eta)}{(1+|\xi-\eta|)^\gamma},$$

что с учетом леммы 1.5 дает требуемое утверждение.

Следствие. Если B — псевдодифференциальный оператор порядка (-1), т. е. $M_b(\eta) = M/(1+|\eta|)$, то C — тоже порядка (-1).

Теорема 1.5. *Пусть*

$$A = \mathrm{op}(a_0(z, \varphi(\xi)) + a_{-1}(z, \xi)), \quad B = \mathrm{op}(b_0(z, \varphi(\xi)) + b_{-1}(z, \xi))$$

— псевдодифференциальные операторы нулевого порядка. Тогда их композиция $C = A \circ B$ — тоже псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с главным символом $c_0(z, \varphi) = a_0(z, \varphi) b_0(z, \varphi)$.

Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных лемм.

Лемма 1.8. *Пусть A или B — псевдодифференциальные операторы порядка (-1), тогда и $C = A \circ B$ тоже псевдодифференциальный оператор порядка (-1).*

Доказательство. Утверждение леммы в случае, когда оператор B порядка (-1) — это следствие леммы 1.7. Пусть A — порядка (-1) (т. е. $a_0(z, \varphi) \equiv 0$), B — порядка нуль. Тогда из (1.4) имеем

$$|S_\zeta c(z, \eta)| = \Big| \sum_\xi S_{\zeta+\eta-\xi} a(z, \xi) S_{\xi-\eta} b(z, \eta) \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_\xi \big| S_{\zeta+\eta-\xi} a_{-1}(z, \xi) S_{\xi-\eta} b_0(z, \varphi(\eta)) \big| +$$
$$+ \sum_\xi \big| S_{\zeta+\eta-\xi} a_{-1}(z, \xi) S_{\xi-\eta} b_{-1}(z, \eta) \big| = I_1 + I_2.$$

Условия (1.6) для $a_{-1}(z, \xi)$ и (1.10) для $b_0(z, \varphi(\eta))$ дают

$$I_1 \leqslant \sum_\xi \frac{M}{(1+|\xi|)(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_0}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_\xi \frac{M}{(1+|\xi|)(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma+1}},$$

$\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_0 - 1) > 3$, что с учетом леммы 1.6 приводит к неравенству

$$I_1 \leqslant \frac{M M_2(\gamma, 1)}{(1+|\eta|)(1+|\zeta|)^\gamma}, \quad \gamma > 3.$$

Соответственно, из условий (1.6) для a_{-1} и b_{-1} следует

$$I_2 \leqslant \sum_\xi \frac{M}{(1+|\xi|)(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}(1+|\eta|)(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_1}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{1+|\eta|} \sum_\xi \frac{1}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_1}},$$

откуда с учетом леммы 1.5 находим

$$I_2 \leqslant \frac{M M_1(\gamma_1)}{(1+|\eta|)(1+|\zeta|)^{\gamma_1}}.$$

Окончательно

$$|S_\zeta c(z,\eta)| \leqslant I_1 + I_2 \leqslant \frac{M(M_2(\gamma,1)+M_1(\gamma_1))}{(1+|\eta|)(1+|\zeta|)^\gamma},$$

$\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_0 - 1) > 3$, т.е. для символа $c(z,\xi)$ выполнены условия (1.6).

Лемма 1.9. *Пусть* $\xi, \eta \in \mathbb{Z}^2$, $p = \eta + t(\xi - \eta) = (p_1, p_2)$, $t \in [0,1]$. *Тогда*

$$\frac{d}{dt}\,\varphi(p) = \frac{(l(p), \xi-\eta)}{|p|^2}, \qquad \frac{d}{dt}\,|p| = \frac{(p,\xi-\eta)}{|p|}.$$

Здесь (,) *— знак скалярного произведения,* $l(p) = (-p_2, p_1)$.

Доказательство проводится непосредственным вычислением производной.

Лемма 1.10. *Пусть* $a(z,\varphi)$ *удовлетворяет условию* (1.10):

$$|S_\zeta(a(z,\varphi)| + |S_\zeta a_\varphi(z,\varphi)| \leqslant \frac{M_a}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}, \quad \gamma_0 > 4. \tag{1.23}$$

Тогда

$$|S_\zeta(a(z,\varphi(\xi)) - a(z,\varphi(\eta)))| \leqslant \frac{8M_a|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}. \tag{1.24}$$

Доказательство. Положим $\psi(t) = S_\zeta a(z,\varphi(p))$, $p = \eta + t(\xi - \eta)$. Очевидно:

$$\psi(1) = S_\zeta a(z,\varphi(\xi)); \qquad \psi(0) = S_\zeta a(z,\varphi(\eta));$$

$$\psi'(t) = S_\zeta a_\varphi(z,\varphi(p))\frac{d\varphi(p)}{dt}$$

и с учетом леммы 1.9

$$\psi'(t) = S_\zeta a_\varphi(z,\varphi(p))\frac{(l(p),\xi-\eta)}{|p|^2}.$$

Тогда из (1.23) следует

$$|\psi'(t)| \leqslant \frac{M_a|\xi-\eta|}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}|p|}.$$

Но

$$|\psi(1) - \psi(0)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |\psi'(t)|,$$

откуда

$$I = |S_\zeta(a(z,\varphi(\xi)) - a(z,\varphi(\eta)))| \leqslant \frac{M_a|\xi-\eta|}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}} \sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{|p|}.$$

Отметим, что так как $|\eta| \geqslant 1$, то $|\eta| \geqslant (1+|\eta|)/2$.

Пусть сначала $|\xi-\eta|<|\eta|/2$. Тогда $|p|\geqslant|\eta|-|t||\xi-\eta|\geqslant|\eta|/2\geqslant$ $\geqslant(1+|\eta|)/4$ и

$$I\leqslant\frac{4M_a|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}.$$

Если же $|\xi-\eta|\geqslant|\eta|/2$, то $1\leqslant 2|\xi-\eta|/|\eta|\leqslant 4|\xi-\eta|/(1+|\eta|)$, откуда

$$I\leqslant|S_\zeta a(z,\varphi(\xi))|+|S_\zeta a(z,\varphi(\eta))|\leqslant\frac{2M_a}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}\leqslant\frac{8M_a|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}.$$

Итак, в любом случае

$$|S_\zeta(a(z,\varphi(\xi))-a(z,\varphi(\eta)))|\leqslant\frac{8M_a|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.11. *Пусть* $A=\mathrm{op}(a(z,\xi))$, $B=\mathrm{op}(b(z,\xi))$, $\alpha=A\circ B-$ $-\mathrm{op}(a(z,\xi)b(z,\xi))$. *Тогда символ оператора* α *можно представить в виде*

$$\alpha(z,\eta)=\sum_\xi(a(z,\xi)-a(z,\eta))S_{\xi-\eta}b(z,\eta).$$

Доказательство. Для любой функции $f(z)$, очевидно, имеем $\sum\limits_\xi S_\xi f=f$, откуда

$$\sum_\xi S_{\xi-\eta}b(z,\eta)=b(z,\eta).$$

Тогда с учетом леммы 1.4 (представление (1.21)) получим

$$\alpha(z,\eta)=\sum_\xi a(z,\xi)S_{\xi-\eta}b(z,\eta)-a(z,\eta)b(z,\eta)=$$

$$=\sum_\xi a(z,\xi)S_{\xi-\eta}b(z,\eta)-a(z,\eta)\sum_\xi S_{\xi-\eta}b(z,\eta)=$$

$$=\sum_\xi(a(z,\xi)-a(z,\eta))S_{\xi-\eta}b(z,\eta).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.12. *Пусть* $A=\mathrm{op}(a(z,\xi))$, $B=\mathrm{op}(b(z,\xi))$, $\alpha=$ $=\mathrm{op}(\alpha(z,\xi))=A\circ B-\mathrm{op}(a(z,\xi)b(z,\xi))$, *причем*

$$|S_\zeta(a(z,\xi)-a(z,\eta))|\leqslant\frac{M_a(|\eta|)|\xi-\eta|}{(1+|\zeta|)^\gamma},$$

$$|S_\zeta b(z,\eta)|\leqslant\frac{M_b}{(1+|\zeta|)^{\gamma+1}},\quad\gamma>3.$$

Тогда

$$|S_\zeta \alpha(z,\eta)| \leqslant \frac{M_a(|\eta|)M_b M_1(\gamma)}{(1+|\zeta|)^\gamma}.$$

Доказательство. Из леммы 1.11 следует, что

$$\alpha(z,\eta) = \sum_\xi (a(z,\xi) - a(z,\eta))S_{\xi-\eta}b(z,\eta),$$

откуда с учетом леммы 1.3

$$S_\zeta\alpha(z,\eta) = \sum_\xi S_{\zeta+\eta-\xi}(a(z,\xi) - a(z,\eta))S_{\xi-\eta}b(z,\eta),$$

$$|S_\zeta\alpha(z,\eta)| \leqslant \sum_\xi |S_{\zeta+\eta-\xi}(a(z,\xi) - a(z,\eta))||S_{\xi-\eta}b(z,\eta)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_\xi \frac{M_a(|\eta|)|\xi-\eta|}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^\gamma}\,\frac{M_b}{(1+|\xi-\eta|)^{\gamma+1}} \leqslant$$
$$\leqslant M_a(|\eta|)M_b\sum_\xi \frac{1}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^\gamma(1+|\xi-\eta|)^\gamma},$$

что с учетом леммы 1.5 сразу дает требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 1.5. Пользуясь представлением (1.4), положим

$$A = \mathrm{op}(a(z,\xi)) = \mathrm{op}(a_0(z,\varphi(\xi))) + \mathrm{op}(a_{-1}(z,\xi)) = A_0 + A_{-1},$$

$$B = \mathrm{op}(b(z,\xi)) = \mathrm{op}(b_0(z,\varphi(\xi))) + \mathrm{op}(b_{-1}(z,\xi)) = B_0 + B_{-1}.$$

Тогда $C = A\circ B = A_0\circ B_0 + A_{-1}\circ B + A_0\circ B_{-1}$.

Из леммы 1.8 следует, что $A_{-1}\circ B + A_0\circ B_{-1}$ — псевдодифференциальный оператор порядка (-1). Далее, согласно лемме 1.10 символ $a_0(z,\varphi(\xi))$ удовлетворяет условию (1.24), тогда для композиции $A_0\circ B_0$ можно применить лемму 1.12 с $M_a(|\eta|) = M/(1+|\eta|)$, откуда получим, что $\alpha = A_0\circ B_0 - \mathrm{op}(a_0(z,\varphi(\xi))b_0(z,\varphi(\xi)))$ — псевдодифференциальный оператор порядка (-1), что и завершает доказательство теоремы.

Следствие. $AB - BA$ — оператор порядка (-1).

1.4. Обратимость псевдодифференциальных операторов. Будем называть символ оператора $a(z,\xi) = a_0(z,\varphi(\xi)) + a_{-1}(z,\xi)$ *невырожденным*, если $a_0(z,\varphi)\neq 0$, $(z,\varphi)\in\widetilde{T}$. Покажем, что псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом нетеров в $W_2^s(T)$ и имеет нулевой индекс, т. е. обратим с точностью до прибавления конечномерного слагаемого [43, 32].

Лемма 1.13. *Пусть* $\alpha = \mathrm{op}(\alpha(z,\xi))$ — *псевдодифференциальный оператор с символом, удовлетворяющим условию*

$$|S_\zeta \alpha(z,\xi)| \leqslant \frac{M(|\xi|)}{(1+|\zeta|)^\gamma}, \quad \gamma > 3,$$

причем $M(|\xi|) \leqslant \min(\varepsilon, M/(1+|\xi|))$, $\varepsilon M_1(\gamma) = \varepsilon_0 < 1$. *Тогда оператор* $E + \alpha$ — *обратим в* $W_2^s(T)$, $s < \gamma - 1$, $(E+\alpha)^{-1} = E + \beta$, $\beta = \mathrm{op}(\beta(z,\xi))$ — *псевдодифференциальный оператор порядка* (-1), *причем*

$$|S_\zeta \beta(z,\xi)| \leqslant \frac{M(|\xi|)}{(1-\varepsilon_0)(1+|\zeta|)^\gamma}.$$

Доказательство. Построим оператор $(E+\alpha)^{-1}$ в виде суммы ряда

$$(E+\alpha)^{-1} = E + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha^n. \tag{1.25}$$

Обозначим через $\alpha_n(z,\xi)$ символ оператора α^n, $\alpha^n = \mathrm{op}(\alpha_n(z,\xi))$. Докажем по индукции, что

$$|S_\zeta \alpha_n(z,\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon_0^{n-1} M(|\xi|)}{(1+|\zeta|)^\gamma}. \tag{1.26}$$

Действительно, при $n = 1$ (1.26) следует непосредственно из условия леммы. Далее, $\alpha^{n+1} = \alpha \circ \alpha^n$, откуда с учетом формул символа композиции (1.21), (1.22) (лемма 1.4), получим

$$\alpha_{n+1}(z,\eta) = \sum_{\xi} \alpha(z,\xi) S_{\xi-\eta} \alpha_n(z,\eta),$$

$$S_\zeta \alpha_{n+1}(z,\eta) = \sum_{\xi} S_{\zeta+\eta-\xi} \alpha(z,\xi) S_{\xi-\eta} \alpha_n(z,\eta),$$

что с учетом условий леммы, предположения индукции (1.26) и леммы 1.5 дает

$$|S_\zeta \alpha_{n+1}(z,\eta)| \leqslant \sum_{\xi} \frac{\varepsilon}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^\gamma} \, \frac{M(|\eta|)\, \varepsilon_0^{n-1}}{(1+|\xi-\eta|)^\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(|\eta|) \varepsilon_0^{n-1} \varepsilon M_1(\gamma)}{(1+|\zeta|)^\gamma} = \frac{M(|\eta|)\, \varepsilon_0^n}{(1+|\zeta|)^\gamma}.$$

Итак, оценка (1.26) доказана.

Из (1.26), очевидно, следует, что ряд (1.25) сходится, обратный оператор $(E+\alpha)^{-1}$ непрерывен в $W_2^s(T)$ и

$$(E+\alpha)^{-1} = E + \mathrm{op}(\beta(z,\xi)), \quad \beta(z,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n(z,\xi),$$

причем

$$|S_\zeta \beta(z,\xi)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(|\xi|)\,\varepsilon_0^{n-1}}{(1+|\zeta|)^\gamma} \leqslant \frac{M(|\xi|)}{(1-\varepsilon_0)(1+|\zeta|)^\gamma},$$

что и завершает доказательство леммы.

Теперь пусть $A = \mathrm{op}(a(z,\xi))$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом. Поскольку в силу условий (1.5) $a_0(z,\varphi) \neq 0$ — непрерывна по всем агрументам и определена на компактном множестве $\widetilde{T}$, то $|a_0(z,\varphi)| \geqslant M = \mathrm{const}$. Тогда, в частности, и символ $b_0(z,\varphi) = 1/a_0(z,\varphi)$ удовлетворяет условию (1.5).

Рассмотрим в T замкнутые кривые

$$L^1 = L^1(y) = \{\, z = (x,y) \in T \mid x \in [0,2\pi]\,\},$$

$$L^2 = L^2(x) = \{\, z = (x,y) \in T \mid y \in [0,2\pi]\,\}.$$

Отметим, что кривые $L^1(y)$ гомотопны при разных y и образуют гомотопический класс L^1; $L^2(x)$ гомотопны при разных x и образуют гомотопический класс L^2, причем L^1 и L^2 — полная система образующих гомотопической группы $\pi(T)$ [41, 1, 28]. При этом $L^{1,2}$ можно считать замкнутыми кривыми в $\widetilde{T}$: $\widetilde{L}^{1,2} = \{\,(z,\varphi) \mid z \in L^{1,2}, \varphi = \mathrm{const}\}$. Введем индексы

$$\varkappa = \varkappa(a_0) = \mathrm{ind}\, a_0(z,\varphi)\,\Big|_{\varphi\in[0,2\pi]},$$

$$\varkappa_1 = \varkappa_1(a_0) = \mathrm{ind}\, a_0(z,\varphi)\,\Big|_{L^1}, \qquad \varkappa_2 = \varkappa_2(a_0) = \mathrm{ind}\, a_0(z,\varphi)\,\Big|_{L^2},$$

где, как обычно [8], для функции $f(z) \neq 0$:

$$\mathrm{ind}\, f(z)\,\Big|_L = \frac{1}{2\pi}\,\Delta \arg f(z)\,\Big|_L.$$

В силу непрерывности $a_0(z,\varphi)$ индекс $\varkappa$ не зависит от $z = (z_1, z_2)$, $\varkappa_1$ от z_2 и φ, а $\varkappa_2$ — от z_1 и φ. Представим

$$a_0(z,\varphi) = z_1^{\varkappa_1} z_2^{\varkappa_2} e^{i\varkappa\varphi}\,\widetilde{a}_0(z,\varphi), \quad \mathrm{ind}\,\widetilde{a}_0\,\Big|_{L^{1,2},\varphi} = 0. \tag{1.27}$$

Тогда однозначно определяется функция $\beta(z,\varphi) = \ln \widetilde{a}_0(z,\varphi)$, причем $\beta(z,\varphi)$ также удовлетворяет условиям (1.5) [8, 19]. Итак, $\widetilde{a}_0(z,\varphi) = \exp(\beta(z,\varphi))$.

Возьмем функцию $\chi_R(t) \in C^\infty(0,+\infty)$ (т. е. бесконечно дифференцируемую на луче $(0,+\infty)$), такую, что $\chi_R(t) \equiv 1$ при $t \geqslant R$, $\chi_R(t) \equiv 0$

при $t \leqslant R/2$ и $|\chi_R'(t)| \leqslant 4/R$ при $t \in (0,\infty)$. Пусть теперь

$$a_R(z,\xi) = \begin{cases} \exp\left(\chi_R(|\xi|)\beta(z,\varphi(\xi))\right), & |\xi| \geqslant 1, \\ 1, & \xi = 0. \end{cases}$$

Символ $a_R(z,\xi)$ будем называть *уточненным* для символа $\widetilde{a}_0(z,\varphi) = \exp\left(\beta(z,\varphi)\right)$.

Лемма 1.14. *Уточненный символ $a_R(z,\xi)$ удовлетворяет условиям*:

1. $a_R(z,\xi) \equiv \widetilde{a}_0(z,\varphi(\xi))$ *при* $|\xi| \geqslant R$.
2. $a_R(z,\xi) \equiv 1$ *при* $|\xi| \leqslant R/2$.
3. $|S_\zeta a_R(z,\xi)| \leqslant M/(1+|\zeta|)^{\gamma_0}$.
4. $|S_\zeta(a_R(z,\xi) - a_R(z,\eta))| \leqslant M_0(|\eta|)|\xi-\eta|/(1+|\zeta|)^{\gamma_0}$, $M_0(|\eta|) = \min\left(\varepsilon_0(R), M/(1+|\eta|)\right)$, $\varepsilon_0(R) \to 0$ *при* $R \to \infty$.

Доказательство. Первое и второе утверждения леммы очевидны. Так как $\beta(z,\varphi) \in C^{\gamma_0}(T)$, то и $a_R(z,\xi) \in C^{\gamma_0}(T)$, откуда, аналогично доказательству леммы 1.1, следует третье утверждение леммы. Обратимся к четвертому утверждению. Сначала докажем оценку

$$|S_\zeta(a_R(z,\xi) - a_R(z,\eta))| \leqslant \frac{M|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}. \tag{1.28}$$

Пусть $p = p(t) = \eta + t(\xi-\eta)$. Тогда:

$$\frac{\partial a_R}{\partial t}(z,p(t)) = a_R(z,p(t))\Big[\chi_R'(|p(t)|)|p(t)|'\beta(z,\varphi(p(t))) + \\ + \chi_R(|p(t)|)\beta_\varphi'(z,\varphi(p(t)))\varphi_t'(p(t))\Big].$$

Используя лемму 1.9, аналогично доказательству леммы 1.10, получим

$$|S_\zeta(a_R(z,\xi) - a_R(z,\eta))| \leqslant \sup_{t\in[0,1]}\left|S_\zeta \frac{\partial a_R}{\partial t}(z,p(t))\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{M|\xi-\eta|}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}} \sup_{t\in[0,1]}\left|\chi_R'(|p|) + \frac{1}{|p|}\right|.$$

Так как из условий на $\chi_R(t)$, очевидно, следует $|t\chi_R'(t)| \leqslant 4$, $\forall\, t > 0$, то

$$|S_\zeta(a_R(z,\xi) - a_R(z,\eta))| \leqslant \frac{5M|\xi-\eta|}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}} \sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{|p|}, \quad p = \eta + t(\xi-\eta). \tag{1.29}$$

Тогда, если $|\xi-\eta|<|\eta|/2$ и $|\eta|\geqslant 1$, то $|p|\geqslant|\eta|-|t||\xi-\eta|\geqslant|\eta|/2\geqslant$ $\geqslant(1+|\eta|)/4$ и из (1.29) очевидно вытекает (1.28). Если же $|\xi-\eta|\geqslant$ $\geqslant|\eta|/2$, $|\eta|\geqslant 1$, то $1\leqslant 2|\xi-\eta|/|\eta|\leqslant 4|\xi-\eta|/(1+|\eta|)$ и из третьего утверждения леммы имеем:

$$|S_\zeta(a_R(z,\xi)-a_R(z,\eta))|\leqslant|S_\zeta a_R(z,\xi)|+|S_\zeta a_R(z,\eta)|\leqslant\frac{2M}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{8M|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)(1+|\zeta|)^{\gamma_0}},$$

т. е. вновь справедливо (1.28). Наконец, если $\eta=0$, то $a_R(z,\eta)\equiv 1$, т. е. $S_\zeta a_R(z,\eta)=0$, $|\zeta|\geqslant 1$ и в этом случае неравенство (1.28) непосредственно следует из третьего утверждения леммы. Итак, (1.28) доказано.

Теперь покажем, что

$$|S_\zeta(a_R(z,\xi)-a_R(z,\eta))|\leqslant\frac{\varepsilon_0(R)|\xi-\eta|}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}},\quad \varepsilon_0(R)\to 0,\quad R\to\infty. \tag{1.30}$$

Действительно, если $|\xi-\eta|\geqslant R/4$, то из третьего утверждения леммы

$$|S_\zeta(a_R(z,\xi)-a_R(z,\eta))|\leqslant\frac{2M}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}\leqslant\frac{(8M/R)|\xi-\eta|}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}=\frac{\varepsilon(R)|\xi-\eta|}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}},$$

т. е. выполнено (1.30). Пусть $|\xi-\eta|<R/4$. Если в этом случае $|\eta|\geqslant$ $\geqslant R/2$ или $|\xi|\geqslant R/2$, то $|p|\geqslant R/4$ и из (1.29) найдем

$$|S_\zeta(a_R(z,\xi)-a_R(z,\eta))|\leqslant\frac{(20M/R)|\xi-\eta|}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}=\frac{\varepsilon(R)|\xi-\eta|}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}.$$

Если же, наконец, $|\eta|<R/2$ и $|\xi|<R/2$, то $a_R(z,\xi)\equiv a_R(z,\eta)\equiv 1$ и $a_R(z,\xi)-a_R(z,\eta)\equiv 0$, т. е. (1.30) выполненяется автоматически.

Соединяя утверждения (1.28) и (1.30), получим четвертое утверждение леммы. Лемма доказана.

Замечание. Для функции

$$b_R(z,\xi)=1/a_R(z,\xi)=\exp\left(-\chi_R(|\xi|)\beta(z,\varphi(\xi))\right)$$

также справедливы утверждения 3,4 леммы 1.14.

Лемма 1.15. *Пусть* $A_0^R=\operatorname{op}(a_R(z,\xi))$, $B_0^R=\operatorname{op}(b_R(z,\xi))$, $b_R=$ $=1/a_R$. *Тогда при достаточно больших* R *операторы* A_0^R, B_0^R *обратимы в* $W_2^s(T)$, $s<\gamma_0-2$, $(A_0^R)^{-1}=B_0^R+\alpha_1$, $(B_0^R)^{-1}=A_0^R+\alpha_2$, $\alpha_{1,2}$ — *операторы порядка* (-1).

Доказательство. Пусть $C_1=A_0^R\circ B_0^R$, $C_2=B_0^R\circ A_0^R$. Так как $b_R(z,\xi)a_R(z,\xi)\equiv 1$, то, используя леммы 1.12 и 1.14, получим

$$C_{1,2}=E+\operatorname{op}(c_{1,2}(z,\xi)),\quad |S_\zeta c_{1,2}(z,\xi)|\leqslant\frac{M(|\xi|)}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0-1}},$$

$M(|\xi|)=\min\left(\varepsilon(R),M/(1+|\xi|)\right)$, $\varepsilon(R)\to 0$ при $R\to\infty$. Выберем $R>$ >0 так, чтобы $\varepsilon(R)M_1(\gamma_0-1)=\varepsilon_0<1$. Тогда в силу леммы 1.13

операторы $C_{1,2}$ обратимы в $W_2^s(T)$, $s < \gamma_0 - 2$, $C_{1,2}^{-1} = E + \beta_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ — псевдодифференциальные операторы порядка (-1). Следовательно,

$$E = A_0^R \circ B_0^R C_1^{-1} = C_2^{-1} B_0^R \circ A_0^R = B_0^R \circ A_0^R C_2^{-1} = C_1^{-1} A_0^R \circ B_0^R,$$

т. е. A_0^R, B_0^R — обратимы,

$$(A_0^R)^{-1} = B_0^R C_1^{-1} = B_0^R + B_0^R \beta_1 = B_0^R + \alpha_1,$$

$$(B_0^R)^{-1} = A_0^R C_2^{-1} = A_0^R + A_0^R \beta_2 = A_0^R + \alpha_2,$$

причем согласно лемме 1.8 $\alpha_{1,2}$ — операторы порядка (-1). Лемма доказана.

Лемма 1.16. *Пусть α — оператор порядка (-1), тогда существует конечномерный оператор K такой, что $E + \alpha = E + \alpha_1 + K$, где $(E + \alpha_1)$ — обратим в $W_2^s(T)$, $s < \gamma_1 - 1$, $(E + \alpha_1)^{-1} = E + \beta_1$, β_1 — оператор порядка (-1).*

Доказательство. Пусть $\alpha = \mathrm{op}(\alpha(z, \xi))$. Положим

$$\alpha_1^R(z, \xi) = \begin{cases} \alpha_1(z, \xi), & |\xi| \geqslant R, \\ 0, & |\xi| < R, \end{cases}$$

$\alpha_1 = \mathrm{op}(\alpha_1^R(z, \xi))$. Тогда $(\alpha - \alpha_1) = K$ — конечномерный оператор;

$$|S_\zeta \alpha_1^R(z, \eta)| \leqslant \frac{M_R(|\eta|)}{(1 + |\zeta|)^{\gamma_1}}, \quad M_R(|\eta|) = \min\left(\varepsilon_1(R), \frac{M}{(1 + |\eta|}\right),$$

где $\varepsilon_1(R) = M/(1 + R) \to 0$ при $R \to \infty$. В силу леммы 1.13 при достаточно большом R оператор $(E + \alpha_1)$ обратим, $(E + \alpha_1)^{-1} = E + \beta_1$, β_1 — оператор порядка (-1). Лемма доказана.

Теорема 1.6. *Пусть A — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с главным символом $a_0(z, \varphi) \neq 0$. Тогда существует конечномерный оператор K такой, что оператор $(A + K)$ обратим в $W_2^s(T)$, $s < \min(\gamma_0 - 2, \gamma_1 - 1)$, при этом $B = (A + K)^{-1}$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с главным символом $b_0(z, \varphi) = 1/a_0(z, \varphi)$.*

Доказательство. Итак, пусть $a(z, \xi) = a_0(z, \varphi(\xi)) + a_{-1}(z, \xi)$, $b_0(z, \varphi) = 1/a_0(z, \varphi)$. Представим $a_0(z, \varphi)$, $b_0(z, \varphi)$ в виде (1.27):

$$a_0(z, \varphi) = z_1^{\varkappa_1} z_2^{\varkappa_2} e^{i\varkappa\varphi} \widetilde{a}_0(z, \varphi),$$

$$b_0(z, \varphi) = z_1^{-\varkappa_1} z_2^{-\varkappa_2} e^{-i\varkappa\varphi} \widetilde{b}_0(z, \varphi), \quad \widetilde{b}_0 = 1/\widetilde{a}_0.$$

Придадим символу $a(z, \xi)$ вид:

$$a(z, \xi) = z_1^{\varkappa_1} z_2^{\varkappa_2} (\widetilde{a}_0(z, \varphi(\xi)) + \widetilde{a}_{-1}(z, \xi)) e^{i\varkappa\varphi(\xi)},$$

где

$$\widetilde{a}_{-1}(z, \xi) = z_1^{-\varkappa_1} z_2^{-\varkappa_2} e^{-i\varkappa\varphi(\xi)} a_{-1}(z, \xi)$$

(считается, что $\exp(i\varkappa\varphi(\xi)) = 1$ при $\xi = 0$). Тогда оператор A с символом $a(z,\xi)$: $A = \mathrm{op}(a(z,\xi))$ можно представить в виде композиции: $A = A_1 \circ \widetilde{A} \circ A_2$, где $A_1 = \mathrm{op}(z_1^{\varkappa_1} z_2^{\varkappa_2})$, $A_2 = \mathrm{op}(\exp(i\varkappa\varphi(\xi)))$, $\widetilde{A} = \mathrm{op}(\widetilde{a})$, $\widetilde{a} = \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_{-1}$. Оператор A_1 есть просто умножение на функцию $z_1^{\varkappa_1} z_2^{\varkappa_2} \neq 0$, а A_2 — умножение коэффициентов ряда Фурье $\widehat{f}(\xi)$ на $\exp(i\varkappa\varphi(\xi)) \neq 0$. Очевидно, операторы $A_{1,2}$ — обратимы, $(A_{1,2})^{-1} = B_{1,2}$, $B_1 = \mathrm{op}(z_1^{-\varkappa_1} z_2^{-\varkappa_2})$, $B_2 = \mathrm{op}(\exp(-i\varkappa\varphi(\xi)))$. Таким образом, если учесть теорему 1.5 об умножении главных символов при произведении операторов, то для доказательства теоремы осталось показать, что $\widetilde{A}$ — обратим с точностью до конечномерного слагаемого K, $\widetilde{B} = (\widetilde{A} + K)^{-1}$ — псевдодифференциальный оператор порядка нуль с главным символом, равным $\widetilde{b}_0$.

По построению $\widetilde{a}_{-1}$ с учетом леммы 1.3 имеем

$$S_\zeta \widetilde{a}_{-1}(z,\xi) = z_1^{-\varkappa_1} z_2^{-\varkappa_2} e^{-i\varkappa\varphi(\xi)} S_{\zeta+\varkappa_0} a_{-1}(z,\xi),$$

$$\varkappa_0 = (\varkappa_1, \varkappa_2) = \mathrm{const} \in \mathbb{Z}^2,$$

и, следовательно, для $\widetilde{a}_{-1}(z,\xi)$ также выполнены условия (1.6):

$$|S_\zeta \widetilde{a}_{-1}(z,\eta)| \leqslant \frac{M}{(1+|\eta|)(1+|\zeta|)^{\gamma_1}}, \quad \gamma_1 > 3,$$

т. е. $\widetilde{A}_{-1} = \mathrm{op}(\widetilde{a}_{-1}(z,\xi))$ — оператор порядка (-1).

Для $\widetilde{a}_0(z,\varphi)$, $\widetilde{b}_0(z,\varphi)$ построим соответственно уточненные символы $a_R(z,\xi)$, $b_R(z,\xi)$ и операторы $A_0^R = \mathrm{op}(a_R(z,\xi))$, $B_0^R = \mathrm{op}(b_R(z,\xi))$. По построению очевидно, что $b_R(z,\xi) \cdot a_R(z,\xi) \equiv 1$. Пусть $A^R = A_0^R + \widetilde{A}_{-1}$. Из первого утверждения леммы 1.14 следует, что оператор

$$A^R - \widetilde{A} = \mathrm{op}(a_R(z,\xi) - \widetilde{a}_0(z,\varphi(\xi))) = K_1$$

конечномерный, т. е. $A^R = \widetilde{A} + K_1$. Далее, согласно леммам 1.15, 1.8 имеем

$$B_0^R A^R = C_2 + B_0^R \widetilde{A}_{-1} = E + \alpha,$$

где α — оператор порядка (-1). Тогда по лемме 1.16 $E + \alpha = E + \alpha_1 + K_2$, т. е.

$$A^R = (B_0^R)^{-1}(E + \alpha_1 + K_2) = (B_0^R)^{-1}(E + \alpha_1) - K_3 = A_0 - K_3,$$

где K_3 — конечномерный оператор, а в силу лемм 1.15, 1.16 оператор A_0 — обратим,

$$B = A_0^{-1} = (E + \beta_1) B_0^R = B_0^R + \beta_2,$$

где β_2 — оператор порядка (-1).

Пусть $B_0 = \operatorname{op}(\widetilde{b}_0(z, \varphi(\xi)))$. Из первого утверждения леммы 1.14 следует, что $B_0^R - B_0 = K_4$ — конечномерный оператор порядка (-1). Итак, окончательно

$$\widetilde{A} = A^R - K_1 = A_0 - K_1 - K_3 = A_0 - K,$$

K — конечномерный, A_0 — обратим,

$$B = A_0^{-1} = B_0^R + \beta_2 = B_0 + K_4 + \beta_2 = B_0 + \alpha_2,$$

где α_2 — оператор порядка (-1), откуда главные символы операторов B и B_0 совпадают. Теорема доказана.

§ 2. Операторы типа линейного сопряжения

2.1. Класс операторов. Пусть

$$\mathbb{Z}_m^{\pm} = \{\, \xi = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \pm n_2 \geqslant \pm m \,\};$$

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_0^+$, $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}_{-1}^-$. Введем операторы

$$S_m^{\pm} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_m^{\pm}} S_\xi; \qquad S^+ = S_0^+, \qquad S^- = S_{-1}^-.$$

Очевидно,

$$S_m^{\pm} S_n^{\pm} = S_m^{\pm} \text{ при } \pm m \geqslant \pm n; \qquad S_m^+ S_k^- = S_k^- S_m^+ = 0 \text{ при } k < m;$$
$$S^+ S^- = S^- S^+ = 0 \tag{2.1}$$

и, кроме того,

$$S_m^+ + S_{m-1}^- = E. \tag{2.2}$$

При $\xi = (n_1, n_2)$, имеем

$$S_m^{\pm}(z^\xi f) = S_m^{\pm}\Big(\sum_\eta \widehat{f}(\eta) z^{\xi+\eta}\Big) = \sum_{\xi+\eta \in \mathbb{Z}_m^{\pm}} \widehat{f}(\eta) z^{\xi+\eta} =$$
$$= z^\xi \sum_{\eta \in \mathbb{Z}_{m-n_2}^{\pm}} \widehat{f}(\eta) z^\eta = z^\xi S_{m-n_2}^{\pm} f. \tag{2.3}$$

Отметим, что $S_m^{\pm}$ — сингулярные интегральные операторы по переменной z_2, в частности

$$S^{\pm} f = \pm \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t_2|=1} \frac{f(z_1, t_2)}{t_2 - z_2}\, dt_2 + \frac{1}{2}\, f(z_1, z_2).$$

Символ операторов $S^{\pm}$ равен $s^{\pm}(\xi) = (1 \pm \operatorname{sgn}(n_2))/2$, $\xi = (n_1, n_2)$,

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, $S^{\pm}$ не являются псевдодифференциальными операторами нулевого порядка, так как хотя символ $S^{\pm}$ и однороден, $s^{\pm}(\xi) = s^{\pm}(\varphi(\xi)) = (1 \pm \operatorname{sgn}(\sin\varphi(\xi)))/2$, но разрывен при $\sin\varphi = 0$ и, следовательно, не удовлетворяет условию (1.5).

Пусть $A_{1,2} = \operatorname{op}(a_0^{1,2}(z, \varphi(\xi)) + a_{-1}^{1,2}(z, \xi))$ — различные, вообще говоря, псевдодифференциальные операторы нулевого порядка с невырожденным символом. Оператор вида

$$A = A_1 S^+ + A_2 S^- \tag{2.4}$$

будем называть оператором *типа линейного сопряжения*. Это означает, что

$$\begin{aligned} A = \operatorname{op}(a_0^1(z, \varphi(\xi)) s^+(\varphi(\xi)) + a_0^2(z, \varphi(\xi)) s^-(\varphi(\xi))) + \\ + \operatorname{op}(a_{-1}^1(z, \xi) s^+(\xi) + a_{-1}^2(z, \xi) s^-(\xi)) = \\ = \operatorname{op}(a_0(z, \varphi(\xi)) + A_{-1}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где символ оператора A_{-1} удовлетворяет условию (1.6) (см. далее лемму 2.1), т. е. A_{-1} — оператор порядка (-1), а главный символ оператора A

$$a_0(z, \varphi) = \begin{cases} a_0^1(z, \varphi), & \sin\varphi \geqslant 0, \\ a_0^2(z, \varphi), & \sin\varphi < 0, \end{cases}$$

имеет разрыв при $\sin\varphi = 0$. Ближайшая аналогия таких операторов — операторы задачи линейного сопряжения по переменной z_2 [8, 19]:

$$A = a_1(z) S^+ + a_2(z) S^-,$$

где $a_{1,2}(z)$ — некоторые функции. Отметим, что в виде (2.4) можно представить любой псевдодифференциальный оператор A, если принять $A_1 = A_2 = A$.

Лемма 2.1. *Пусть $A = A_1 S^+ + A_2 S^-$ — оператор типа линейного сопряжения, α — оператор порядка (-1). Тогда αA и $A\alpha$ — операторы порядка (-1).*

Доказательство. Из леммы 1.8 § 1 следует, что

$$\alpha A = \alpha A_1 S^+ + \alpha A_2 S^- = \alpha_1 S^+ + \alpha_2 S^-,$$

причем $\alpha_{1,2}$ — операторы порядка (-1), т. е. выполнено условие (1.6):

$$|S_\zeta \alpha_{1,2}(z, \xi)| \leqslant \frac{M}{(1 + |\xi|)(1 + |\zeta|)^{\gamma_1}}.$$

Но тогда для $\alpha(z,\xi)$ — символа оператора αA, имеем

$$\alpha(z,\xi)=\begin{cases}\alpha_1(z,\xi), & \xi\in\mathbb{Z}_+,\\ \alpha_2(z,\xi), & \xi\in\mathbb{Z}_-,\end{cases}$$

откуда $\alpha(z,\xi)$ тоже удовлетворяет условию (1.6). Итак, αA — оператор порядка (-1).

Далее, пусть $\alpha^\pm=S^\pm\alpha$, $\alpha=\mathrm{op}(\alpha(z,\xi))$ — оператор порядка (-1). С учетом формулы (2.3) находим

$$\alpha^+f=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_0^+}S_\xi\Bigl(\sum_\eta\alpha(z,\eta)\widehat{f}(\eta)z^\eta\Bigr)=$$

$$=\sum_\eta\widehat{f}(\eta)z^\eta\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^+_{-m_2}}S_\xi\alpha(z,\eta),\qquad \eta=(m_1,m_2),$$

т. е. символ оператора α^+:

$$\alpha^+(z,\eta)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^+_{-m_2}}S_\xi\alpha(z,\eta).$$

Аналогично символ оператора α^-:

$$\alpha^-(z,\eta)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^-_{-1-m_2}}S_\xi\alpha(z,\eta).$$

Отсюда

$$S_\zeta\alpha^+(z,\eta)=\begin{cases}S_\zeta\alpha(z,\eta), & \zeta\in\mathbb{Z}^+_{-m_2},\\ 0, & \zeta\notin\mathbb{Z}^+_{-m_2},\end{cases}$$

$$S_\zeta\alpha^-(z,\eta)=\begin{cases}S_\zeta\alpha(z,\eta), & \zeta\in\mathbb{Z}^-_{-1-m_2},\\ 0, & \zeta\notin\mathbb{Z}^-_{-1-m_2},\end{cases}$$

и так как для $S_\zeta\alpha(z,\eta)$ выполнено условие (1.6), то такое же условие выполняется и для $S_\zeta\alpha^\pm(z,\eta)$, т. е. $\alpha^\pm=\mathrm{op}(\alpha^\pm(z,\xi))$ — операторы порядка (-1). Тогда с учетом леммы 1.8 § 1

$$A\alpha=A_1S^+\alpha+A_2S^-\alpha=A_1\alpha^++A_2\alpha^-=\alpha_0$$

оператор порядка (-1). Лемма доказана.

Аналогично классической теории задач линейного сопряжения [8, 19] через $a^\pm(z,\varphi)$ будем обозначать символы, удовлетворяющие условию (1.5) и такие, что

$$S_0^\pm(a^\pm(z,\varphi))=a^\pm(z,\varphi);\tag{2.6}$$

$$a^\pm(z,\varphi)\neq0,\quad (z,\varphi)\in\widetilde{T};\qquad \varkappa_2(a^\pm)=0.\tag{2.7}$$

Из (2.5) и (2.1) следует:

$$S^{\mp}_{\mp 1}(a^{\pm}(z,\varphi)) \equiv 0. \tag{2.8}$$

Условие (2.5) означает, что символы $a^{\pm}(z,\varphi)$ есть следы аналитических внутри (a^{+}) или вне (a^{-}) единичного круга функций по переменной z_2 при всех z_1 и φ. Тогда условие (2.6) означает, что аналитические продолжения $a^{\pm}(z,\varphi) \neq 0$ при $|z_2|^{\pm 1} \leqslant 1$.

Введем классы операторов

$$\Lambda^{+} = \left\{ A^{+} = \mathrm{op}(a^{+}(z,\varphi(\xi))) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_{+}} a^{+}(z,\varphi(\xi)) S_{\xi} \right\},$$

$$\Lambda^{-} = \left\{ A^{-} = \mathrm{op}(a^{-}(z,\varphi(\xi))) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_{-}} a^{-}(z,\varphi(\xi)) S_{\xi} \right\},$$

$$\Lambda = \{\, A = A^{+} + A^{-} \mid A^{\pm} \in \Lambda^{\pm} \,\}.$$

Отметим, что операторы классов $\Lambda^{\pm}$, Λ не являются псевдодифференциальными операторами нулевого порядка, так как их символ разрывен по ξ при $\sin\varphi(\xi) = 0$.

Лемма 2.2. *Оператор типа линейного сопряжения непрерывен в $W_2^s(T)$, $s < \min(\gamma_0 - 1, \gamma_1 - 1)$.*

Доказательство. Пусть $S^{\pm} f = f^{\pm}$, тогда по определению

$$f^{\pm}(z) = \sum_{\xi} \widehat{f}^{\pm}(\xi) z^{\xi}, \quad \widehat{f}^{\pm}(\xi) = \begin{cases} \widehat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{Z}_{\pm}, \\ 0, & \xi \notin \mathbb{Z}_{\pm}, \end{cases}$$

и, следовательно, $\|f^{\pm}(z)\|_s \leqslant \|f(z)\|_s$, т. е. $S^{\pm} : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — непрерывны. Отсюда с учетом теоремы 1.3 § 1 получим утверждение леммы.

Следствие. Операторы классов $\Lambda^{\pm}$, Λ непрерывны в $W_2^s(T)$, $s < \gamma_0 - 1$.

2.2. Основные свойства.

Лемма 2.3. *Пусть $A^{\pm} \in \Lambda^{\pm}$, $A_0 = A^{+} + A^{-} \in \Lambda$ и $A = A_1 S^{+} + A_2 S^{-}$ — оператор типа линейного сопряжения. Тогда*:

1. $A^{\pm} S^{\pm} = A^{\pm}$.

2. $S^{\pm} A^{\pm} = A^{\pm}$, $S^{\mp} A^{\pm} = 0$.

3. $A \circ A_0 = (A_1 \circ A^{+}) S^{+} + (A_2 \circ A^{-}) S^{-}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Очевидно,

$$S_{\xi}(z^{\eta}) = \begin{cases} z^{\eta}, & \xi = \eta, \\ 0, & \xi \neq \eta. \end{cases}$$

Тогда, обозначая $\xi = (n_1, n_2)$, $\eta = (m_1, m_2)$, получим

$$A^+S^+f = \left(\sum_{n_2 \geqslant 0} a^+(z, \varphi(\xi))S_\xi\right) \sum_{m_2 \geqslant 0} \widehat{f}(\eta)z^\eta =$$

$$= \sum_{m_2 \geqslant 0} \widehat{f}(\eta) \sum_{n_2 \geqslant 0} a^+(z, \varphi(\xi))S_\xi(z^\eta) = \sum_{n_2 \geqslant 0} a^+(z, \varphi(\xi))\widehat{f}(\xi)z^\xi = A^+f$$

и аналогично $A^-S^-f = A^-f$, что и доказывет утверждение 1.

Теперь обратимся к утверждению 2. При $A^+ \in \Lambda^+$ с учетом (2.3), (2.1), (2.2), (2.5) и (2.7) имеем

$$S^+A^+f = S_0^+\left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}_0^+} a^+(z, \varphi(\xi))\widehat{f}(\xi)z^\xi\right) =$$

$$= \sum_{n_2 \geqslant 0} \widehat{f}(\xi)z^\xi S^+_{-n_2}(a^+(z, \varphi(\xi))) =$$

$$= \sum_{n_2 \geqslant 0} \widehat{f}(\xi)z^\xi (S_0^+ + S_{-1}^-)S^+_{-n_2}(a^+(z, \varphi(\xi))) =$$

$$= \sum_{n_2 \geqslant 0} \widehat{f}(\xi)z^\xi \left[S_0^+(a^+) + S^+_{-n_2}S^-_{-1}(a^+)\right] = \sum_{n_2 \geqslant 0} \widehat{f}(\xi)z^\xi a^+(z, \varphi(\xi)) =$$
$$= A^+f$$

и аналогично

$$S^-A^-f = S_{-1}^-\left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}_{-1}^-} a^-(z, \varphi(\xi))\widehat{f}(\xi)z^\xi\right) =$$

$$= \sum_{n_2 < 0} \widehat{f}(\xi)z^\xi (S_0^- + S_1^+)S^-_{-1-n_2}(a^-(z, \varphi(\xi))) =$$

$$= \sum_{n_2 < 0} \widehat{f}(\xi)z^\xi \left[S_0^-(a^-) + S^-_{-1-n_2}S_1^+(a^-)\right] = \sum_{n_2 < 0} \widehat{f}(\xi)z^\xi a^-(z, \varphi(\xi)) =$$
$$= A^-f.$$

Отсюда, опять с учетом (2.2), следует

$$S^-A^+f = (E - S^+)A^+f = 0$$

и аналогично $S^+A^-f = 0$. Итак, второе утверждение леммы доказано.

Из первого и второго утверждений леммы следует, что

$$A \circ A_0 = (A_1S^+ + A_2S^-)(A^+ + A^-) =$$
$$= A_1 \circ A^+ + A_2 \circ A^- = (A_1 \circ A^+)S^+ + (A_2 \circ A^-)S^-.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть* $A = A_1S^+ + A_2S^-$ — *оператор типа линейного сопряжения*, $A_0 = A^+ + A^- \in \Lambda$, $A_{1,2} = \mathrm{op}(a_0^{1,2}(z, \varphi(\xi)) + a_{-1}^{1,2}(z, \xi))$, $A^\pm = \mathrm{op}(a^\pm(z, \varphi(\xi)))$. *Тогда*

$$A \circ A_0 = \widetilde{A}_1 S^+ + \widetilde{A}_2 S^- + \alpha,$$

где α — *оператор порядка* (-1),

$$\widetilde{A}_1 = \mathrm{op}(a_0^1(z, \varphi(\xi))\, a^+(z, \varphi(\xi))), \quad \widetilde{A}_2 = \mathrm{op}(a_0^2(z, \varphi(\xi))\, a^-(z, \varphi(\xi))).$$

Доказательство. Используя первое и третье утверждения леммы 2.3, получим

$$\begin{aligned}A \circ A_0 = \mathrm{op}(a_0^1(z, \varphi(\xi))) \circ \mathrm{op}(a^+(z, \varphi(\xi)))S^+ +\\ + \mathrm{op}(a_0^2(z, \varphi(\xi))) \circ \mathrm{op}(a^-(z, \varphi(\xi)))S^- +\\ + \mathrm{op}(a_{-1}^1(z, \varphi(\xi))) \circ \mathrm{op}(a^+(z, \varphi(\xi)))S^+ +\\ + \mathrm{op}(a_{-1}^2(z, \varphi(\xi))) \circ \mathrm{op}(a^-(z, \varphi(\xi)))S^- =\\ = A_0^1 S^+ + A_0^2 S^- + A_{-1}^1 S^+ + A_{-1}^2 S^-.\end{aligned}$$

Отсюда, аналогично доказательству леммы 1.8 § 1, следует, что $A_{-1}^{1,2}$ — операторы порядка (-1). Тогда по лемме 2.1 и $A_{-1}^1 S^+ + A_{-1}^2 S^-$ — оператор порядка (-1). Далее, согласно лемме 1.11 § 1

$$A_0^1 = \mathrm{op}(a_0^1(z, \varphi(\xi))\, a^+(z, \varphi(\xi))) + \mathrm{op}(c(z, \xi)),$$

$$c(z, \eta) = \sum_\xi (a_0^1(z, \varphi(\xi)) - a_0^1(z, \varphi(\eta)))S_{\xi-\eta} a^+(z, \varphi(\eta))$$

и, аналогично доказательству леммы 1.12 § 1, получим, что $op(c(z, \eta)) = \alpha_1$ — оператор порядка (-1). Точно так же

$$A_0^2 = \mathrm{op}(a_0^2(z, \varphi(\xi))\, a^-(z, \varphi(\xi))) + \alpha_2,$$

α_2 — оператор порядка (-1). Тогда и $\alpha = \alpha_1 S^+ + \alpha_2 S^-$ — оператор порядка (-1), что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть*

$$A^\pm = \mathrm{op}(a^\pm(z, \varphi(\xi))) \in \Lambda^\pm, \quad B^\pm = \mathrm{op}(b^\pm(z, \varphi(\xi))) \in \Lambda^\pm,$$

$A = A^+ + A^- \in \Lambda$, $B = B^+ + B^- \in \Lambda$. *Тогда*:

1. $A^\pm B^\pm = C^\pm + \alpha^\pm$, $\alpha^\pm$ — *операторы порядка* (-1), $C^\pm = \mathrm{op}(a^\pm(z, \varphi(\xi))\, b^\pm(z, \varphi(\xi))) \in \Lambda^\pm$.

2. $AB = C + \alpha$, $\alpha = \alpha^+ + \alpha^-$ — *оператор порядка* (-1), $C = C^+ + C^- \in \Lambda$.

3. *Оператор A обратим с точностью до конечномерного слагаемого, т. е. существует конечномерный оператор K такой, что $\widetilde{A} = A + K$ — обратим, при этом $\widetilde{A}^{-1} = A_1 + \alpha$, где α — оператор порядка* (-1), $A_1 = A_1^+ + A_1^- \in \Lambda$, $A_1^\pm = \mathrm{op}(1/a^\pm(z, \varphi(\xi))) \in$ $\in \Lambda^\pm$.

Доказательство. В соответствии с леммой 1.4 § 1, имеем

$$A^\pm B^\pm = \mathrm{op}(c^\pm{}_1(z,\xi)), \quad c^\pm{}_1(z,\eta) = \sum_\xi a^\pm(z,\varphi(\xi)) S_{\xi-\eta} b^\pm(z,\varphi(\eta)).$$

По определению классов $\Lambda^\pm$: $a^\pm(z,\varphi(\xi)) \equiv b^\pm(z,\varphi(\xi)) \equiv 0$ при $\xi \notin \mathbb{Z}_\pm$. Тогда

$$c_1^\pm(z,\eta) = \begin{cases} \sum\limits_{\xi\in\mathbb{Z}_\pm} a^\pm(z,\varphi(\xi)) S_{\xi-\eta} b^\pm(z,\varphi(\eta)), & \eta \in \mathbb{Z}_\pm, \\ 0, & \eta \notin \mathbb{Z}_\pm. \end{cases}$$

Далее, из условия (2.5) вытекает:

$$b^\pm(z,\varphi) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_0^\pm} S_\xi b^\pm(z,\varphi); \qquad S_\zeta b^\pm(z,\varphi) = 0, \quad \zeta \notin \mathbb{Z}_0^\pm. \tag{2.9}$$

Пусть $\eta = (m_1, m_2)$. Если $\eta \in \mathbb{Z}_+$, т. е. $m_2 \geqslant 0$, то

$$\xi \in \mathbb{Z}_0^+ \iff \xi - \eta \in \mathbb{Z}^+_{-m_2} \text{ и } \mathbb{Z}_0^+ \subset \mathbb{Z}^+_{-m_2}.$$

Тогда с учетом (2.8)

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_0^+} S_{\xi-\eta} b^+(z,\varphi) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^+_{-m_2}} S_\xi b^+(z,\varphi) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_0^+} S_\xi b^+(z,\varphi) = b^+(z,\varphi). \tag{2.10}$$

Если же $\eta \in \mathbb{Z}_-$, т. е. $m_2 < 0$, то аналогично

$$\xi \in \mathbb{Z}^-_{-1} \iff \xi - \eta \in \mathbb{Z}^-_{-1-m_2} \text{ и } \mathbb{Z}_0^- \subset \mathbb{Z}^-_{-1-m_2},$$

и из (2.8) следует

$$\begin{aligned} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^-_{-1}} S_{\xi-\eta} b^-(z,\varphi) &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^-_{-1-m_2}} S_\xi b^-(z,\varphi) = \\ &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_0^-} S_\xi b^-(z,\varphi) = b^-(z,\varphi). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Из формул (2.9), (2.10), аналогично построениям леммы 1.11 § 1, находим

$$c_1^\pm(z,\eta) = c^\pm(z,\varphi(\eta)) + \alpha^\pm(z,\eta), \quad \eta \in \mathbb{Z}_\pm,$$

где

$$c^\pm(z,\varphi(\eta)) = a^\pm(z,\varphi(\eta))\, b^\pm(z,\varphi(\eta)),$$

$$\alpha^{\pm}(z,\eta)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_{\pm}}(a^{\pm}(z,\varphi(\xi))-a^{\pm}(z,\varphi(\eta)))S_{\xi-\eta}b^{\pm}(z,\varphi(\eta)),$$

Откуда, как и при доказательстве леммы 1.12 § 1, получим, что $\alpha^{\pm}(z,\eta)$ удовлетворяют условию (1.6), т. е. $\alpha^{\pm}=\mathrm{op}(\alpha^{\pm}(z,\eta))$ — операторы порядка (-1). Итак, первое утверждение леммы доказано.

Второе утверждение леммы следует непосредственно из первого с учетом утверждения 3 леммы 2.3.

Рассмотрим, наконец, третье утверждение леммы. Аналогично доказательству теоремы 1.6, с помощью условия (2.6) представим

$$a^{\pm}(z,\varphi)=z_1^{\varkappa_1^{\pm}}\exp(\beta^{\pm}(z,\varphi))=z_1^{\varkappa_1^{\pm}}a_0^{\pm}(z,\varphi),\quad \pm\sin\varphi\geqslant 0,$$

где $\varkappa_1^{\pm}=\varkappa_1(a^{\pm})$, а $\beta^{\pm}(z,\varphi)$ и $a_0^{\pm}(z,\varphi)$ удовлетворяют условиям (1.5) и (2.5) при $\pm\sin\varphi\geqslant 0$. Тогда с учетом леммы 2.3 можно представить

$$A=(z_1^{\varkappa_1^{+}}S^{+}+z_1^{\varkappa_1^{-}}S^{-})(A_0^{+}+A_0^{-})=P_1A_0,$$

где $A_0=A_0^{+}+A_0^{-}\in\Lambda$, $P_1=z_1^{\varkappa_1^{+}}S^{+}+z_1^{\varkappa_1^{-}}S^{-}$. Непосредственно проверяется, что P_1 — обратим, $P_1^{-1}=z_1^{-\varkappa_1^{+}}S^{+}+z_1^{-\varkappa_1^{-}}S^{-}$. Таким образом, достаточно доказать третье утверждение леммы для оператора A_0.

Построим уточненные символы

$$a_R^{\pm}(z,\xi)=\begin{cases}\exp(\chi_R(|\xi|)\beta^{\pm}(z,\varphi(\xi)), & \xi\in\mathbb{Z}_{\pm},\\ 0, & \xi\notin\mathbb{Z}_{\pm},\end{cases}$$

$$b_R^{\pm}(z,\xi)=\begin{cases}1/a_R^{\pm}(z,\xi), & \xi\in\mathbb{Z}_{\pm},\\ 0, & \xi\notin\mathbb{Z}_{\pm},\end{cases}$$

и пусть $A_R^{\pm}=\mathrm{op}(a_R^{\pm}(z,\xi))$, $B_R^{\pm}=\mathrm{op}(b_R^{\pm}(z,\xi))$, $A_R=A_R^{+}+A_R^{-}$, $B_R=$ $=B_R^{+}+B_R^{-}$. Тогда, аналогично доказательству леммы 2.3, получим

$$A_RB_R=A_R^{+}B_R^{+}+A_R^{-}B_R^{-},\qquad B_RA_R=B_R^{+}A_R^{+}+B_R^{-}A_R^{-}.$$

Далее, рассуждая так же, как при доказательстве первого утверждения леммы, придем к равенствам

$$A_R^{\pm}B_R^{\pm}=\mathrm{op}(a_R^{\pm}(z,\xi)b_R^{\pm}(z,\xi))+\mathrm{op}(\alpha_R^{\pm}(z,\xi)),$$

$$B_R^{\pm}A_R^{\pm}=\mathrm{op}(b_R^{\pm}(z,\xi)a_R^{\pm}(z,\xi))+\mathrm{op}(\beta_R^{\pm}(z,\xi)),$$

$$\alpha_R^{\pm}(z,\eta)=\begin{cases}\sum\limits_{\xi\in\mathbb{Z}_{\pm}}(a_R^{\pm}(z,\xi)-a_R^{\pm}(z,\eta))S_{\xi-\eta}b_R^{\pm}(z,\eta), & \eta\in\mathbb{Z}_{\pm},\\ 0, & \eta\notin\mathbb{Z}_{\pm},\end{cases}$$

$$\beta_R^{\pm}(z,\eta) = \begin{cases} \sum\limits_{\xi\in\mathbb{Z}_{\pm}} (b_R^{\pm}(z,\xi) - b_R^{\pm}(z,\eta))S_{\xi-\eta}a_R^{\pm}(z,\eta), & \eta \in \mathbb{Z}_{\pm}, \\ 0, & \eta \notin \mathbb{Z}_{\pm}. \end{cases}$$

Поскольку $a_R^{\pm}(z,\xi)b_R^{\pm}(z,\xi) \equiv 1$ при $\xi \in \mathbb{Z}_{\pm}$, то с учетом леммы 2.3

$$A_R^{\pm}B_R^{\pm} = S^{\pm} + \alpha^{\pm} = S^{\pm}(E+\alpha^{\pm}) = (E+\alpha^{\pm})S^{\pm},$$

$$B_R^{\pm}A_R^{\pm} = S^{\pm} + \beta^{\pm} = S^{\pm}(E+\beta^{\pm}) = (E+\beta^{\pm})S^{\pm},$$

$$\alpha^{\pm} = \mathrm{op}(\alpha^{\pm}(z,\xi)), \qquad \beta^{\pm} = \mathrm{op}(\beta^{\pm}(z,\xi)),$$

причем

$$|S_{\zeta}\alpha^{\pm}(z,\eta)| + |S_{\zeta}\beta^{\pm}(z,\eta)| \leqslant \frac{M_R(|\eta|)}{(1 = |\zeta|)^{\gamma_1}},$$

$M_R(|\eta|) = \min\left(\varepsilon(R), M/(1+|\eta|)\right)$, $\varepsilon(R) \to 0$ при $R \to \infty$. По лемме 1.13 § 1 при достаточно большом R операторы $E+\alpha^{\pm}$, $E+\beta^{\pm}$ — обратимы, $(E+\alpha^{\pm})^{-1} = E+\alpha_1^{\pm}$, $(E+\beta^{\pm})^{-1} = E+\beta_1^{\pm}$, где $\alpha_1^{\pm} = \mathrm{op}(\alpha_1^{\pm}(z,\xi))$, $\beta_1^{\pm} = \mathrm{op}(\beta_1^{\pm}(z,\xi))$ — операторы порядка (-1) и

$$S_0^{\pm}(\alpha_1^{\pm}(z,\xi)) = \alpha_1^{\pm}(z,\xi), \quad S_0^{\pm}(\beta_1^{\pm}(z,\xi)) = \beta_1^{\pm}(z,\xi);$$

$$\alpha_1^{\pm}(z,\xi) \equiv \beta_1^{\pm}(z,\xi) \equiv 0 \ \text{ при } \ \xi \notin \mathbb{Z}_{\pm}.$$

Следовательно,

$$S^{\pm} = A_R^{\pm}B_R^{\pm}(E+\alpha_1^{\pm}) = (E+\alpha_1^{\pm})A_R^{\pm}B_R^{\pm} = B_R^{\pm}A_R^{\pm}(E+\beta_1^{\pm}) = \\ = (E+\beta_1^{\pm})A_R^{\pm}B_R^{\pm},$$

откуда

$$A_RB_R(E+\alpha_1^{+}+\alpha_1^{-}) = A_R^{+}B_R^{+}(E+\alpha_1^{+})S^{+} + A_R^{-}B_R^{-}(E+\alpha_1^{-})S^{-} = \\ = S^{+} + S^{-} = E$$

и аналогично

$$E = (E+\alpha_1^{+}+\alpha_1^{-})A_RB_R = B_RA_R(E+\beta_1^{+}+\beta_1^{-}) = \\ = (E+\beta_1^{+}+\beta_1^{-})B_RA_R.$$

Таким образом, A_R и B_R — обратимые операторы, $A_R^{-1} = B_R + \alpha_R$, α_R — оператор порядка (-1). С другой стороны, $A_R - A_0 = K_1$, $B_R - A_1 = K_2$, где $K_{1,2}$ — конечномерные операторы порядка (-1). Итак, окончательно $(A_0 + K) = A_R$ — обратимый оператор,

$$A_R^{-1} = B_R + \alpha_R = A_1 + K_2 + \alpha_R = A_1 + \alpha,$$

α — оператор порядка (-1), чем и завершается доказательство теоремы.

2.3. Факторизация оператора. Рассмотрим оператор типа линейного сопряжения

$$A = A_1 S^+ + A_2 S^-,$$

$$A_{1,2} = \mathrm{op}(a_0^{1,2}(z, \varphi(\xi)) + a_{-1}^{1,2}(z, \xi)), \quad a_0^{1,2}(z, \varphi) \neq 0$$

или

$$A = A_0^1 S^+ + A_0^2 S^- + \alpha, \quad A_0^{1,2} = \mathrm{op}(a_0^{1,2}(z, \varphi(\xi))),$$

α — оператор порядка (-1). Отметим, что из-за множителей

$$S^\pm = \mathrm{op}(s^\pm(\varphi(\xi))), \qquad s^\pm(\varphi) = \frac{1 \pm \mathrm{sgn}(\sin\varphi)}{2} = \begin{cases} 1, & \pm\sin\varphi > 0, \\ 0, & \pm\sin\varphi < 0 \end{cases}$$

значения $a_0^1(z, \varphi)$ можно рассматривать только при $\sin\varphi \geqslant 0$, а $a_0^2(z, \varphi)$ — только при $\sin\varphi \leqslant 0$.

Аналогично классической задаче линейного сопряжения, построим факторизацию (разложение в произведение) символов $a_0^{1,2}(z, \varphi) \neq 0$. Введем обозначения:

$$\varkappa_{1,2}^+ = \varkappa_{1,2}(a_0^1(z, \varphi)) = \mathrm{ind}\, a_0^1(z, \varphi) \Big|_{L^{1,2}}, \qquad \sin\varphi \geqslant 0;$$

$$\varkappa_{1,2}^- = \varkappa_{1,2}(a_0^2(z, \varphi)) = \mathrm{ind}\, a_0^2(z, \varphi) \Big|_{L^{1,2}}, \qquad \sin\varphi \leqslant 0;$$

$$\varkappa = \varkappa_2^- - \varkappa_2^+ = \mathrm{ind}\, \frac{a_0^2(z, -\varphi)}{a_0^1(z, \varphi)} \Big|_{L^2}, \qquad \sin\varphi \geqslant 0. \tag{2.12}$$

Тогда можно представить

$$\begin{aligned} a_0^1(z, \varphi) &= z_1^{\varkappa_1^+} z_2^{\varkappa_2^+} \exp(\beta_1(z, \varphi)), \qquad \sin\varphi \geqslant 0; \\ a_0^2(z, \varphi) &= z_1^{\varkappa_1^-} z_2^{\varkappa_2^-} \exp(\beta_2(z, \varphi)), \qquad \sin\varphi \leqslant 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Пусть

$$\beta(z, \varphi) = \beta_1(z, \varphi) - \beta_2(z, -\varphi),$$

$$a_0^\pm(z, \pm\varphi) = \exp(\pm S^\pm(\beta(z, \varphi))), \quad \sin\varphi \geqslant 0.$$

Из классической теории сингулярного интеграла типа Коши [8, 19] следует, что $a_0^\pm(z, \varphi)$ удовлетворяют условиям (1.5), (2.5) и (2.6) при $\pm\sin\varphi \geqslant 0$, соответственно, причем

$$\frac{a_0^+(z, \varphi)}{a_0^-(z, \varphi)} = \exp(S^+(\beta) + S^-(\beta)) = \frac{\exp(\beta_1(z, \varphi))}{\exp(\beta_2(z, -\varphi))}, \qquad \sin\varphi \geqslant 0. \tag{2.14}$$

Пусть $a^{\pm}(z,\varphi) = z_1^{\varkappa_1^{\pm}} a_0^{\pm}(z,\varphi)$, $\pm\sin\varphi \geqslant 0$. Тогда из (2.12), (2.13) следует

$$\frac{a_0^1(z,\varphi)}{a_0^2(z,-\varphi)} = z_2^{-\varkappa}\frac{a^+(z,\varphi)}{a^-(z,-\varphi)}, \qquad \sin\varphi \geqslant 0.$$

Обозначим

$$c(z,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{a_0^1(z,\varphi)}{a^+(z,\varphi)}, & \sin\varphi \geqslant 0, \\ \dfrac{a_0^2(z,\varphi)}{a^-(z,\varphi)}, & \sin\varphi \leqslant 0. \end{cases}$$

Символ $c(z,\varphi)$ удовлетворяет условиям (1.5) при $\pm\sin\varphi > 0$, а при $\sin\varphi = 0$, т. е. при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$ имеем

$$\frac{a_0^1(z,0)}{a_0^2(z,0)} = z_2^{-\varkappa}\frac{a^+(z,0)}{a^-(z,0)}, \qquad \frac{a_0^1(z,\pi)}{a_0^2(z,\pi)} = z_2^{-\varkappa}\frac{a^+(z,\pi)}{a^-(z,\pi)}.$$

Откуда

$$c(z,0) = \frac{a_0^1(z,0)}{a^+(z,0)} = \frac{a_0^2(z,0)}{z_2^{\varkappa}a^-(z,0)}, \qquad c(z,\pi) = \frac{a_0^1(z,\pi)}{a^+(z,\pi)} = \frac{a_0^2(z,\pi)}{z_2^{\varkappa}a^-(z,\pi)},$$

т. е. символ $c(z,\varphi)$ непрерывен по φ при $\sin\varphi = 0$ и, следовательно, удовлетворяет условию (1.5) при $\varphi \in [0,2\pi]$. Итак, окончательно получим факторизацию символа:

$$\begin{aligned} a_0^1(z,\varphi) &= c(z,\varphi)a^+(z,\varphi), \qquad \sin\varphi \geqslant 0; \\ a_0^2(z,\varphi) &= c(z,\varphi)z_2^{\varkappa}a^-(z,\varphi), \qquad \sin\varphi \leqslant 0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

причем $c(z,\varphi) \neq 0$ — удовлетворяет условию (1.5), $a^{\pm}(z,\varphi)$ — условиям (1.5), (2.5) и (2.6) при $\pm\sin\varphi \geqslant 0$, соответственно.

Пусть $C = \mathrm{op}(c(z,\varphi(\xi)))$. Как следует из теоремы 1.6 § 1 оператор C обратим с точностью до конечномерного слагаемого, т. е. существует конечномерный оператор K такой, что $P_1 = C + K$ — обратим, при этом $P_1^{-1} = \mathrm{op}(1/c(z,\varphi(\xi))) + \alpha$, α — оператор порядка (-1).

Введем операторы

$$A_0^{\pm} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_{\pm}} a^{\pm}(z,\varphi(\xi))S_{\xi} \in \Lambda^{\pm}, \quad A_0 = A_0^+ + A_0^- \in \Lambda.$$

По теореме 2.2 существует конечномерный оператор K такой, что $P_2 = A_0 + K$ — обратим, при этом

$$P_2^{-1} = \mathrm{op}\left(\frac{1}{a^+(z,\varphi(\xi))}\right)S^+ + \mathrm{op}\left(\frac{1}{a^-(z,\varphi(\xi))}\right)S^- + \alpha,$$

α — оператор порядка (-1).

Рассмотрим композицию $B = P_1^{-1} A P_2^{-1}$. Из теоремы 1.5 § 1 и леммы 2.1 следует, что

$$P_1^{-1} A = \operatorname{op}\left(\frac{a_0^1(z, \varphi(\xi))}{c(z, \varphi(\xi))}\right) S^+ + \operatorname{op}\left(\frac{a_0^2(z, \varphi(\xi))}{c(z, \varphi(\xi))}\right) S^- + \alpha,$$

α — оператор порядка (-1). В свою очередь, из теоремы 2.1 и леммы 2.1, с учетом формул факторизации символа (2.14), имеем

$$B = (P_1^{-1} A) P_2^{-1} = \operatorname{op}\left(\frac{a_0^1(z, \varphi(\xi))}{c(z, \varphi(\xi)) a^+(z, \varphi(\xi))}\right) S^+ +$$
$$+ \operatorname{op}\left(\frac{a_0^2(z, \varphi(\xi))}{c(z, \varphi(\xi)) a^-(z, \varphi(\xi))}\right) S^- + \alpha = S^+ + z_2^{\varkappa} S^- + \alpha = Q_\varkappa + \alpha.$$

Итак,

$$B = P_1^{-1} A P_2^{-1} = Q_\varkappa + \alpha, \quad Q_\varkappa = S^+ + z_2^{\varkappa} S^-, \tag{2.16}$$

α — оператор порядка (-1).

Обращение оператора $Q_\varkappa$ легко строится непосредственно:

Лемма 2.4.

1. *$Q_\varkappa : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — непрерывен.*
2. *$Q_\varkappa = E$ при $\varkappa = 0$.*
3. *$Q_\varkappa$ обратим справа при $\varkappa > 0$, слева при $\varkappa < 0$, при этом соответствующий односторонний обратный $Q_\varkappa^{-1} = Q_{-\varkappa}$.*
4. *При $\varkappa < 0$ левый обратный к $Q_\varkappa$ можно взять в виде $Q_\varkappa^{-1} = \widetilde{Q}_{-\varkappa} = S^+ + z_2^{-\varkappa} S^-_{\varkappa-1}$.*

Доказательство. Первое и второе утверждения леммы очевидны. Пусть $\varkappa > 0$, тогда с учетом (2.1) и (2.3) имеем

$$Q_\varkappa \circ Q_{-\varkappa} = (S^+ + z_2^{\varkappa} S^-)(S^+ + S^-_{-1-\varkappa} z_2^{-\varkappa}) = S^+ + z_2^{\varkappa} S^- S^-_{-1-\varkappa} z_2^{-\varkappa} =$$
$$= S^+ + z_2^{\varkappa} S^-_{-1-\varkappa} z_2^{-\varkappa} = S^+ + z_2^{\varkappa} z_2^{-\varkappa} S^-_{-1} = S^+ + S^- = E,$$

откуда следует третье утверждение леммы. Наконец, при $\varkappa < 0$:

$$\widetilde{Q}_{-\varkappa} Q_\varkappa = (S^+ + z_2^{-\varkappa} S^-_{\varkappa-1})(S^+ + S^-_{-1+\varkappa} z_2^{\varkappa}) = S^+ + z_2^{-\varkappa} S_{\varkappa-1} z_2^{\varkappa} =$$
$$= S^+ + z_2^{-\varkappa} z_2^{\varkappa} S^- = E.$$

Лемма полностью доказана.

Следствие.

1. При $\varkappa = 0 \quad Q_\varkappa + \alpha = E + \alpha_0$.
2. При $\varkappa > 0 \quad Q_\varkappa + \alpha = Q_\varkappa + Q_\varkappa Q_{-\varkappa} \alpha = Q_\varkappa (E + \alpha_0)$.

3. При $\varkappa < 0$ $\quad Q_\varkappa + \alpha = Q_\varkappa + \alpha Q_{-\varkappa} Q_\varkappa = (E + \alpha_0) Q_\varkappa.$

Здесь α_0 — оператор порядка (-1).

Используя это следствие леммы 2.4, из формулы (2.15) получим

$$B = P_1^{-1} A P_2^{-1} = \begin{cases} E + \alpha_0, & \varkappa = 0, \\ Q_\varkappa (E + \alpha_0), & \varkappa > 0, \\ (E + \alpha_0) Q_\varkappa, & \varkappa < 0. \end{cases}$$

Отсюда окончательно

$$A = P_1 B P_2, \qquad B = \begin{cases} E + \alpha_0, & \varkappa = 0, \\ Q_\varkappa (E + \alpha_0), & \varkappa > 0, \\ (E + \alpha_0) Q_\varkappa, & \varkappa < 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

$P_{1,2}$ — обратимые операторы, α_0 — оператор порядка (-1). Таким образом, обращение оператора A, т. е. решение уравнения $Af = g$, сводится к обращению оператора B.

2.4. Обращение операторов (решение уравнений). По-прежнему будем обозначать единичную окружность

$$L_1 = \{\, z_1 \in \mathbb{C} \mid |z_1| = 1 \,\}$$

и пусть

$$f(z_1) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n_1) z_1^{n_1}$$

— разложение функции на единичной окружности в ряд Фурье. Введем пространства Соболева:

$$W_2^s(L_1) = \left\{ f(z_1) \,\middle|\, \|f\|_s = \sum |\widehat{f}(n_1)|^2 (1 + |n_1|^2)^s < \infty \right\}.$$

Лемма 2.5. *Пусть $f(z) \in W_2^s(T)$, тогда*

$$f_k(z_1) = \int\limits_{L_1} z_2^{-k-1} f(z)\, dz_2 \in W_2^s(L_1),$$

$$\|f_k(z_1)\|_s \leqslant 2\pi \|f\|_s, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Представим

$$f(z) = \sum_\xi \widehat{f}(\xi) z^\xi = \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n_1, n_2) z_1^{n_1} z_2^{n_2}.$$

Но

$$\int\limits_{L_1} z_2^m\, dz_2 = \begin{cases} 2\pi i, & m = -1, \\ 0, & m \neq -1, \end{cases} \tag{2.18}$$

откуда

$$f_k(z_1) = 2\pi i \sum_{n_1} \widehat{f}(n_1, k) z_1^{n_1},$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \|f_k(z_1)\|_s^2 = \sum_{n_1} |\widehat{f}(n_1, k)|^2 (1 + |n_1|^2)^s \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n_1} |\widehat{f}(n_1, k)|^2 (1 + |n_1|^2 + |k|^2)^s \leqslant \sum_{\xi} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s = \|f\|_s^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть*

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{m} f_k(z_1) z_2^k.$$

Тогда

$$f(z) \in W_2^s(T) \Longleftrightarrow f_k(z_1) \in W_2^s(L_1), \quad k = \overline{-m, m};$$

$$M_1(m) \sum_{k=-m}^{m} \|f_k\|_s \leqslant \|f\|_s \leqslant M_2(m) \sum_{k=-m}^{m} \|f_k\|_s.$$

Доказательство. Положим $\xi = (n_1, n_2)$. При $|n_2| \leqslant m$ справедливы очевидные неравенства

$$\begin{gathered} 1 + |n_1|^2 \leqslant 1 + |\xi|^2 \leqslant (1 + m^2)(1 + |n_1|^2); \\ \sum_{|k| \leqslant m} \|f_k\|_s^2 \leqslant \left(\sum_{|k| \leqslant m} \|f_k\|_s \right)^2 \leqslant M(m) \sum_{|k| \leqslant m} \|f_k\|_s^2. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Для функции

$$f(z) = \sum_{|k| \leqslant m} f_k(z_1) z_2^k,$$

ее коэффициенты Фурье имеют вид

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \widehat{f}_k(n_1), & |k| \leqslant m, \\ 0, & |k| > m, \end{cases} \tag{2.20}$$

где $\xi = (n_1, k)$. Из (2.18) и (2.19):

$$M_1(m)^2\Bigg(\sum_{|k|\leqslant m}\|f_k\|_s\Bigg)^2 \leqslant \sum_{|k|\leqslant m}\|f_k\|_s^2 = \sum_{|k|\leqslant m}\sum_{n_1}|\widehat{f}_k(n_1)|^2(1+$$

$$+|n_1|^2)^s \leqslant \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2}|\widehat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s = \|f\|_s^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|k|\leqslant m}\sum_{n_1}|\widehat{f}_k(n_1)|^2 M_2^2(m)(1+|n_1|^2)^s \leqslant M_2^2(m)\sum_{|k|\leqslant m}\|f_k\|_s^2 \leqslant$$

$$\leqslant M_2^2(m)\Bigg(\sum_{|k|\leqslant m}\|f_k\|_s\Bigg)^2,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 2.7.

1. *При* $\varkappa > 0$

$$\ker Q_\varkappa = \{\, f \in W_2^s(T) \,|\, Q_\varkappa f = 0\,\} =$$
$$= \left\{ f = \sum_{k=0}^{\varkappa-1} f_k(z_1) z_2^k (1 - z_2^{-\varkappa}),\, f_k(z_1) \in W_2^s(L_1) \right\}. \qquad (2.21)$$

В этом случае решение задачи

$$\begin{cases} Q_\varkappa f = g \in W_2^s(T), \\ \displaystyle\int_{L_1} z_2^k f(z)\, dz_2 = \psi_k(z_1) \in W_2^s(L_1), \quad k = \overline{0, \varkappa-1}, \end{cases} \qquad (2.22)$$

где $\psi_k(z_1)$ — *заданные функции, существует и единственно в* $W_2^s(T)$ *и имеет вид*:

$$f(z) = Q_{-\varkappa} g - \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \psi_{\varkappa-1-k}(z_1) z_2^k (1 - z_2^{-\varkappa}). \qquad (2.23)$$

2. *При* $\varkappa < 0$ *для разрешимости уравнения* $Q_\varkappa f = g$ *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\int_{L_1} z_2^k g(z)\, dz_2 \equiv 0, \quad k = \overline{0, |\varkappa|-1}. \qquad (2.24)$$

В этом случае решение задачи

$$Q_\varkappa f = g + \sum_{k=0}^{|\varkappa|-1} \psi_k(z_1) z_2^{-k-1}, \quad g \in W_2^s(T), \tag{2.25}$$

где $\psi_k(z_1)$ — искомые функции, существует, единственно и имеет вид:

$$\begin{cases} f(z) = \widetilde{Q}_{-\varkappa} g \in W_2^s(T), \\ \psi_k(z_1) = -\displaystyle\int_{L_1} z_2^k g(z)\,dz_2 \in W_2^s(L_1), \quad k = \overline{0, |\varkappa|-1}. \end{cases} \tag{2.26}$$

Доказательство. Пусть $\varkappa > 0$,

$$f = \sum_{k=0}^{\varkappa-1} f_k(z_1) z_2^k (1 - z_2^{-\varkappa}), \qquad f_k(z_1) \in W_2^s(L_1).$$

Откуда согласно лемме 2.6 $f \in W_2^s(T)$ и, кроме того,

$$S^+ f = \sum_{k=0}^{\varkappa-1} f_k(z_1) z_2^k, \qquad S^- f = -\sum_{k=0}^{\varkappa-1} f_k(z_1) z_2^{k-\varkappa},$$

откуда

$$Q_\varkappa f = S^+ f + z_2^\varkappa S^- f = \sum_{k=0}^{\varkappa-1} f_k(z_1) z_2^k - z_2^\varkappa \sum_{k=0}^{\varkappa-1} f_k(z_1) z_2^{k-\varkappa} = 0.$$

Обратно, пусть $f \in W_2^s(T)$, $Q_\varkappa f = 0$,

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k(z_1) z_2^k.$$

Тогда

$$S^+ f = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z_1) z_2^k = \sum_{k=0}^{\varkappa-1} f_k(z_1) z_2^k + \sum_{k=\varkappa}^{+\infty} f_k(z_1) z_2^k,$$

$$z_2^\varkappa S^- f = z_2^\varkappa \sum_{k=-\infty}^{-1} f_k(z_1) z_2^k = \sum_{k=0}^{\varkappa-1} f_{k-\varkappa}(z_1) z_2^k + \sum_{k=-\infty}^{-1-\varkappa} f_k(z_1) z_2^{k+\varkappa}$$

и поскольку $Q_\varkappa f = S^+ f + z_2^\varkappa S^- f = 0$, т. е.

$$\sum_{k=\varkappa}^{+\infty} f_k(z_1) z_2^k + \sum_{k=-\infty}^{-1-\varkappa} f_k(z_1) z_2^{k+\varkappa} + \sum_{k=0}^{\varkappa-1} (f_k(z_1) + f_{k-\varkappa}(z_1)) z_2^k = 0,$$

то $f_k(z_1) \equiv 0$ при $k \geqslant \varkappa$ или $k \leqslant -1-\varkappa$, а при $k = \overline{0, \varkappa-1}$ $f_k(z_1) = -f_{k-\varkappa}(z_1)$, т. е.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\varkappa-1} f_k(z_1)(z_2^k - z_2^{k-\varkappa}) = \sum_{k=0}^{\varkappa-1} f_k(z_1) z_2^k (1 - z_2^{-\varkappa}).$$

При этом, так как $f \in W_2^s(T)$, то по лемме 2.6 $f_k(z_1) \in W_2^s(L_1)$. Ита (2.20), доказано.

Рассмотрим теперь задачу (2.21). Из второго утверждения леммы 2.4 следует, что

$$Q_\varkappa f = g \Longleftrightarrow f = Q_{-\varkappa} g + f_0, \qquad f_0 \in \ker Q_\varkappa.$$

Если представить

$$g(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g_j(z_1) z_2^j,$$

то при $k = \overline{0, \varkappa-1}$ из формулы (2.17) следует

$$\int\limits_{L_1} z_2^k S^+ g\, dz_2 = \sum_{j=0}^{+\infty} g_j(z_1) \int\limits_{L_1} z_2^{k+j}\, dz_2 \equiv 0,$$

так как $(k+j) \geqslant 0$. Аналогично

$$\int\limits_{L_1} z_2^k z_2^{-\varkappa} S^- g\, dz_2 = \sum_{j=-\infty}^{-1} g_j(z_1) \int\limits_{L_1} z_2^{k+j-\varkappa}\, dz_2 \equiv 0,$$

поскольку $(k+j-\varkappa) \leqslant -2$. Следовательно,

$$\int\limits_{L_1} z_2^k Q_{-\varkappa} g\, dz_2 = \int\limits_{L_1} z_2^k S^+ g\, dz_2 + \int\limits_{L_1} z_2^k z_2^{-\varkappa} S^- g\, dz_2 \equiv 0. \tag{2.27}$$

В свою очередь с учетом (2.20)

$$\int\limits_{L_1} z_2^k f_0\, dz_2 = \sum_{j=0}^{\varkappa-1} f_j(z_1) \left[\, \int\limits_{L_1} z_2^k z_2^j\, dz_2 - \int\limits_{L_1} z_2^k z_2^{-\varkappa} z_2^j\, dz_2 \right] = -f_{\varkappa-1-k}(z_1).$$

Следовательн (2.21), выполнено тогда и только тогда, когда $f_{\varkappa-1-k}(z_1) = -\psi_k(z_1)$, т. е. решение (2.21) существует и единственно и имеет вид (2.22). Итак, первое утверждение леммы доказано.

Пусть теперь $\varkappa < 0$. Тогда из третьего утверждения леммы 2.4 следует, что решение уравнения $Q_\varkappa f = g$ единственно. Если $g = Q_\varkappa f$, то аналогично выводу формулы (2.26), получим

$$\int\limits_{L_1} z_2^k g\, dz_2 \equiv 0, \quad k = \overline{0, |\varkappa| - 1}. \tag{2.28}$$

Обратно, пусть выполнено (2.27). Возьмем $f = Q_{-\varkappa} g$. Тогда $g(z)$ есть решение задачи (2.21) для $\varkappa_0 = -\varkappa > 0$:

$$Q_{\varkappa_0} g = f; \qquad \int\limits_{L_1} z_2^k g\, dz_2 \equiv 0, \quad k = \overline{0, \varkappa_0 - 1};$$

откуда в силу (2.22) имеем $g = Q_{-\varkappa_0} f = Q_\varkappa f$. Таким образом, справедливо (2.23).

Из (2.23) следует, что решение задачи (2.24) существует тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{L_1} z_2^k g\, dz_2 + \sum_{j=0}^{|\varkappa|-1} \psi_j(z_1) \int\limits_{L_1} z_2^{k-j-1}\, dz_2 = 0,$$

откуда с учетом (2.17)

$$\psi_k(z_1) = -\int\limits_{L_1} z_2^k g\, dz_2, \quad k = \overline{0, |\varkappa| - 1}. \tag{2.29}$$

Из леммы 2.5 следует, что $\psi_k(z_1) \in W_2^s(L_1)$, если $g(z) \in W_2^s(T)$.

Как показано при доказательстве (2.23), единственное решение задачи (2.24) имеет вид

$$f = Q_{-\varkappa} g_0, \quad g_0 = g + \sum_{k=0}^{|\varkappa|-1} \psi_k(z_1) z_2^{-k-1}.$$

Если

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k(z_1) z_2^k,$$

то из (2.28) следует, что $\psi_k(z_1) = -g_{-k-1}(z_1)$, $k = \overline{0, |\varkappa| - 1}$ и поэтому

$$g_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k(z_1) z_2^k - \sum_{k=0}^{|\varkappa|-1} g_{-k-1}(z_1) z_2^{-k-1} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\varkappa-1} g_k(z_1) z_2^k + \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(z_1) z_2^k = S_{\varkappa-1}^- g + S^+ g.$$

Отсюда с учетом (2.1)

$$f = Q_{-\varkappa} g_0 = (S^+ + z_2^{-\varkappa} S^-)(S^+ + S^-_{\varkappa-1}) g = \\ = (S^+ + z_2^{-\varkappa} S^-_{\varkappa-1}) g = \widetilde{Q}_{-\varkappa} g.$$

Таким образом, установлена справедливость формулы (2.25), чем и завершается доказательство леммы.

2.5. Обсуждение результатов. Первое утверждение леммы 2.7 означает, что при $\varkappa > 0$ решение уравнения $Q_\varkappa f = g$, $g \in W_2^s(T)$ всегда существует (т. е. размерность коядра равна нулю), а ядро оператора $Q_\varkappa$ параметризуется l-мерными вектор-функциями, определенными на единичной окружности L_1 и корректная постановка задачи для уравнения $Q_\varkappa f = g$ имеет вид (2.21). В свою очередь, при $\varkappa < 0$ решение уравнения $Q_\varkappa f = g$ единственно (т. е. размерность ядра равна нулю), но имеется коядро, которое параметризуется l^*-мерными вектор-функциями на L_1 и корректная постановка задачи для уравнения $Q_\varkappa f = g$ имеет вид (2.24). Подчеркнем, что во всех этих случаях ядро (коядро) оператора бесконечномерны, а l и l^* — это не размерность, а количество произвольных функций. Наконец, при $\varkappa \geqslant 0$ можно считать $l^* = 0$, а при $\varkappa \leqslant 0$ — $l = 0$ и в любом случае $(l - l^*) = \varkappa$ — топологический инвариант главного символа $a_0(z, \varphi)$.

Добавление к оператору $Q_\varkappa$ множителя $(E + \alpha_0)$, где α_0 — оператор порядка (-1) (см. (2.16)) не меняет ситуацию принципиально. Действительно, тогда $\alpha_0 : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — вполне непрерывен и значит оператор $(E + \alpha_0)$ — нетеров и нулевого индекса, т. е. имеет конечномерные ядро и коядро одинаковой размерности. Предположим, что $\varkappa > 0$ и $B = Q_\varkappa(E + \alpha_0)$. Имеем

$$Bf = g \Longleftrightarrow (E + \alpha_0) f = Q_{-\varkappa} g + f_0, \quad f_0 \in \ker Q_\varkappa. \tag{2.30}$$

Пусть оператор $(E + \alpha_0)$ имеет ядро размерности n с базисом $h_1, \ldots, h_n$:

$$(E + \alpha_0) f = 0 \Longleftrightarrow f = \sum_{k=1}^{n} d_k h_k, \quad d_k \in \mathbb{C}$$

и, соответственно, коядро той же размерности:

$$\begin{gathered} g = (E + \alpha_0) f \Longleftrightarrow c_k(g) = 0, \\ k = \overline{1, n} \ \text{ и } \ f = (E + \beta_0) g + \sum d_k h_k, \end{gathered} \tag{2.31}$$

$c_k : W_2^s(T) \to \mathbb{C}$ — линейно независимые функционалы, $(E + \beta_0)$ — также нетеров оператор нулевого индекса. На пространстве $X_0 = \ker Q_\varkappa$ функционалы c_k не обязательно линейно независимы. Пусть число линейно независимых c_k на X_0 равно $m \leqslant n$, тогда можно считать $c_1, \ldots, c_m$ — линейно независимы на X_0, а $c_j(f) = 0$, $j = \overline{m+1, n}$ при

$f \in X_0$. Выберем $f_k^0 \in X_0$ так, чтобы

$$c_j(f_k^0) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \qquad j, k = \overline{1, m}$$

и пусть

$$\widetilde{X}_0 = \{\, f \in X_0 \,|\, c_j(f) = 0, j = \overline{1, m}\,\}$$

($\widetilde{X}_0$ — это бесконечномерное подпространство X_0 конечной коразмерности m). Тогда из (2.29) и (2.30) получим

$$Bf = g \Longleftrightarrow f = (E + \beta_0)Q_{-\varkappa}g - \sum_{k=1}^{m} c_k(Q_{-\varkappa}g)f_k^0 +$$

$$+ \widetilde{f}_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j h_j \text{ и } c_j(Q_{-\varkappa}g) = 0, \quad j = \overline{m+1, n},$$

$\widetilde{f}_0 \in \widetilde{X}_0$, т. е. в конечном счете в ядро оператора B добавилось $(n - m)$ произвольных констант и появилось столько же условий разрешимости на правую часть g.

Аналогично при $\varkappa < 0$ у оператора $(E + \alpha_0)Q_\varkappa$ может появиться конечномерное ядро и столько же условий добавится к условиям разрешимости. Таким образом, нетеров нулевого индекса множитель $(E + \alpha_0)$ в представлении (2.16) добавляет одинаковое (конечное) число констант в ядро и коядро оператора.

2.6. Заключительные утверждения. Множитель $(E + \alpha_0)$ в представлении (2.16) можно представить как добавление к оператору A конечномерного слагаемого. Действительно, используя лемму 1.16 § 1, представим $E + \alpha_0 = E + K_1 + \alpha_1$, где K_1 — конечномерный, а $(E + \alpha_1)$ — обратимый оператор. Тогда, введя операторы

$$\widetilde{P}_1 = \begin{cases} P_1, & \varkappa \geqslant 0, \\ P_1(E + \alpha_1), & \varkappa < 0, \end{cases} \qquad \widetilde{P}_2 = \begin{cases} (E + \alpha_1)P_2, & \varkappa > 0, \\ P_2, & \varkappa \leqslant 0, \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} P_1 Q_\varkappa K_1 P_2, & \varkappa \geqslant 0, \\ P_1 K_1 Q_\varkappa P_2, & \varkappa < 0, \end{cases}$$

из (2.16) получим утверждение.

Теорема 2.3. *Имеет место представление*

$$A = \widetilde{P}_1 Q_\varkappa \widetilde{P}_2 + K = \widetilde{A} + K, \tag{2.32}$$

где $\widetilde{P}_{1,2} : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ *— обратимые операторы,* K *— конечномерный.*

Далее оператор $\widetilde{A} = A - K$ будем называть *главной частью* оператора A.

Теорема 2.4. *Пусть* $s < \min(\gamma_0 - 2, \gamma_1 - 1)$,

$$\widetilde{P}_0 = \begin{cases} \widetilde{P}_2^{-1} Q_{-\varkappa} \widetilde{P}_1^{-1}, & \varkappa \geqslant 0, \\ \widetilde{P}_2^{-1} \widetilde{Q}_{-\varkappa} \widetilde{P}_1^{-1}, & \varkappa < 0. \end{cases}$$

Тогда $\widetilde{P}_0 : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ *— непрерывен и при этом*

1. *При* $\varkappa = 0$ *оператор* $\widetilde{A} : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ *обратим,*

$$\widetilde{A} f = g \Longleftrightarrow f = \widetilde{P}_0 g.$$

2. *При* $\varkappa > 0$

$$\widetilde{A} f = g \Longleftrightarrow f = \widetilde{P}_0 g + \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \widetilde{P}_2^{-1} \left[f_k(z_1) z_2^k (1 - z_2^{-\varkappa}) \right],$$

где $f_k(z_1) \in W_2^s(L_1)$ *— произвольные функции,* $k = \overline{0, \varkappa - 1}$.

В этом случае решение задачи

$$\begin{cases} \widetilde{A} f = g \in W_2^s(T), \\ \displaystyle\int\limits_{L_1} z_2^k \widetilde{P}_2 f \, dz_2 = \psi_k(z_1) \in W_2^s(L_1), \quad k = \overline{0, \varkappa - 1}, \end{cases} \tag{2.33}$$

где $\psi_k(z_1)$ *— заданные функции, существует, единственно и имеет вид*

$$f = \widetilde{P}_0 g - \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \widetilde{P}_2^{-1} \left[\psi_{\varkappa-1-k}(z_1) z_2^k (1 - z_2^{-\varkappa}) \right]. \tag{2.34}$$

3. *При* $\varkappa < 0$

$$\widetilde{A} f = g \Longleftarrow f = \widetilde{P}_0 g$$

и для разрешимости уравнения $\widetilde{A} f = g$ *необходимо и достаточно выполения условий*

$$\int\limits_{L_1} z_2^k (\widetilde{P}_1^{-1} g) \, dz_2 \equiv 0, \quad k = \overline{0, |\varkappa| - 1}. \tag{2.35}$$

В этом случае решение задачи

$$\widetilde{A} f = g + \sum_{k=0}^{|\varkappa|-1} \widetilde{P}_1 \left[\psi_k(z_1) z_2^{-k-1} \right], \quad g \in W_2^s(T), \tag{2.36}$$

где $\psi_k(z_1)$ — искомые функции, существует, единственно и имеет вид

$$\begin{cases} f = \widetilde{P}_0 g \in W_2^s(T), \\ \psi_k(z_1) = -\displaystyle\int\limits_{L_1} z_2^k(\widetilde{P}_1^{-1} g)\, dz_2 \in W_2^s(L_1), \quad k = \overline{0, |\varkappa| - 1}. \end{cases} \tag{2.37}$$

Утверждения теоремы непосредственно следуют из (2.31) и леммы 2.7, непрерывность операторов — из леммы 2.2.

Оператор $\widetilde{P}_0$ — обобщенный обратный к оператору $\widetilde{A}$. Отметим, что при $\varkappa > 0$ решение задачи (2.32) (имеющее вид (2.33)) будет непрерывно в $W_2^s(T)$ как оператор над $g \in W_2^s(T)$ и $\psi_k(z_1) \in W_2^s(L_1)$, а при $\varkappa < 0$ решение задачи (2.35) (вида (2.36)) $f(z) \in W_2^s(T)$ и $\psi_k(z_1) \in \in W_2^s(L_1)$, $k = \overline{0, |\varkappa| - 1}$ непрерывны как операторы над $g \in W_2^s(T)$.

Теорема 2.3 означает, что с точностью до конечномерного слагаемого, т. е. с точностью до добавления одинакового числа констант в ядро и коядро имеем:

- при $\varkappa = 0$ оператор A нетеров нулевого индекса;
- при $\varkappa > 0$ оператор A имеет нулевое коядро ($l^* = 0$), а ядро содержит $l = \varkappa$ произвольных функций одной переменной;
- при $\varkappa < 0$ оператор A имеет нулевое ядро ($l = 0$), а коядро содержит $l^* = |\varkappa|$ произвольных функций одной переменной.

Во всех случаях $(l - l^*) = \varkappa$.

Глава 2

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ТОРЕ С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ СИМВОЛОМ

§ 3. Класс операторов на торе

Пусть $A = \mathrm{op}(a_0(z, \varphi(\xi)) + a_{-1}(z, \xi))$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, главный символ которого $a_0(z, \varphi)$ может обращаться в нуль. На характер обращения в нуль $a_0(z, \varphi)$ наложим следующие условия:

$$M_1 |\sin \varphi| \leqslant |a_0(z, \varphi)| \leqslant M_2, \tag{3.1}$$

$$\sup_{z_1, \varphi} \int\limits_L \left| \frac{\partial}{\partial z_2} h_0(z_1, z_2, \varphi) \right| |dz_2| < \infty, \quad |h_0(z, \varphi)| \leqslant M, \tag{3.2}$$

где

$$h_0(z, \varphi) = \ln \frac{a_0(z, \varphi)}{a_0(z, -\varphi)}.$$

Заметим, что выполнение условия (3.2) достаточно потребовать только при $\varphi \in [0, \pi]$. Кроме того, функция $h_0(z, \varphi)$, вообще говоря, неоднозначна, однако выполнение условия (3.2) не зависит от выбора непрерывной ветви логарифма.

В силу (3.1) главный символ $a_0(z, \varphi)$ вырождается только при $\sin \varphi = 0$. При этом условия (3.1), (3.2) автоматически выполнены, если символ $a_0(z, \varphi)$ не вырождается, $|a_0(z, \varphi)| \geqslant M = \mathrm{const}$, $(z, \varphi) \in \widetilde{T}$.

Как и в §§ 1,2 введем индексы:

$$\begin{aligned} \varkappa_{1,2}^{\pm} &= \varkappa_{1,2}^{\pm}(a_0) = \mathrm{ind}\, a_0(z, \varphi) \Big|_{L^{1,2}}, \quad \pm \sin \varphi > 0; \\ \varkappa &= \varkappa_2^- - \varkappa_2^+ = \mathrm{ind}\, \frac{a_0(z, -\varphi)}{a_0(z, \varphi)} \Big|_{L^2}, \quad \sin \varphi > 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Так как $a_0(z, \varphi) \neq 0$ при $\sin \varphi \neq 0$, то определение индексов $\varkappa_{1,2}^{\pm}$ и $\varkappa$ корректно.

Далее будем представлять A как оператор типа линейного сопряжения:

$$A = AS^+ + AS^-.$$

Аналогично п. 2.1, введем символы $a^{\pm}(z,\xi)$, $\xi\in\mathbb{Z}_0^{\pm}$, удовлетворяющие условиям

$$S_0^{\pm}(a^{\pm}(z,\xi))=a^{\pm}(z,\xi),\quad \xi\in\mathbb{Z}_0^{\pm};\tag{3.4}$$

$$a^{\pm}(z,\xi)\neq 0,\quad z\in T,\quad \xi\in\mathbb{Z}_0^{\pm};\qquad \varkappa_2(a^{\pm})=0.\tag{3.5}$$

Соответственно,

$$S_{\mp1}^{\mp}(a^{\pm}(z,\xi))\equiv 0.$$

Отличие от п. 2.1 состоит в том, что на символ $a^{\pm}(z,\xi)$ не накладывается никаких условий однородности и гладкости по ξ. Положим

$$\Lambda_0^{+}=\Big\{\,A^{+}=\mathrm{op}(a^{+}(z,\xi))=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_+}a^{+}(z,\xi)S_\xi\,\Big\},$$

$$\Lambda_0^{-}=\Big\{\,A^{-}=\mathrm{op}(a^{-}(z,\xi))=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_-}a^{-}(z,\xi)S_\xi\,\Big\},$$

$$\Lambda_0=\{\,A=A^{+}+A^{-}\mid A^{\pm}\in\Lambda_0^{\pm}\,\}.$$

Лемма 3.1. *Пусть* $A^{\pm}\in\Lambda_0^{\pm}$, $A_0=A^{+}+A^{-}\in\Lambda_0$ *и* $A=A_1S^{+}+{}+A_2S^{-}$ *— оператор типа линейного сопряжения. Тогда*:

1. $A^{\pm}S^{\pm}=A^{\pm}$.
2. $S^{\pm}A^{\pm}=A^{\pm}$, $S^{\mp}A^{\pm}=0$.
3. $A\circ A_0=(A_1\circ A^{+})S^{+}+(A_2\circ A^{-})S^{-}$.
4. *Пусть* $B^{\pm}\in\Lambda_0^{\pm}$, $B_0=B^{+}+B^{-}\in\Lambda_0$ *и* $A^{\pm}B^{\pm}=B^{\pm}A^{\pm}=S^{\pm}$. *Тогда* $A_0B_0=B_0A_0=E$.

Доказательство. Первые три утверждения леммы устанавливаются аналогично лемме 2.3 п. 2.1. Обращаясь к четвертому утверждению, с учетом формулы (2.1) п. 2.1, получим

$$A_0B_0=(A^{+}+A^{-})(B^{+}S^{+}+B^{-}S^{-})=A^{+}B^{+}S^{+}+A^{-}B^{-}S^{-}=\\=S^{+}+S^{-}=E$$

и аналогично $B_0A_0=E$. Лемма доказана.

§ 4. Функции $a^{\pm}(z,\varphi)$, $c(z,\varphi)$

Как и в § 2, представим

$$a_0(z,\varphi)=z_1^{\varkappa_1^{\pm}}z_2^{\varkappa_2^{\pm}}a_1(z,\varphi)=z_1^{\varkappa_1^{\pm}}z_2^{\varkappa_2^{\pm}}\exp\big(\beta(z,\varphi)\big),\quad \pm\sin\varphi>0$$

и пусть $\beta_1(z,\varphi)=\beta(z,\varphi)-\beta(z,-\varphi)$, $\sin\varphi>0$. Условие (3.2), очевидно, означает:

$$|\beta_1(z,\varphi)|\leqslant M;$$
$$\sup_{z_1,\varphi}\frac{1}{2\pi}\int\limits_L\left|\frac{\partial}{\partial z_2}\,\beta_1(z_1,z_2,\varphi)\right||dz_2|=\beta_0<\infty. \tag{4.1}$$

Из условий (1.5) § 1 и $a_0(z,\varphi)\neq 0$ при $\sin\varphi\neq 0$ следует, что $\beta_1(z,\varphi)$ подчиняется условию (1.5) при $\sin\varphi\geqslant\delta_0>0$. Аналогично § 2, пусть

$$\beta^{\pm}(z,\pm\varphi)=\pm S^{\pm}\beta_1(z,\varphi),\quad \sin\varphi>0,$$

$$h(z,\varphi)=\begin{cases}\beta(z,\varphi)-\beta^{+}(z,\varphi), & \sin\varphi>0,\\ \beta(z,\varphi)-\beta^{-}(z,\varphi), & \sin\varphi<0.\end{cases}$$

Положим

$$a^{\pm}(z,\varphi)=z_1^{\varkappa_1^{\pm}}\exp\left(\beta^{\pm}(z,\varphi)\right),\quad \pm\sin\varphi>0;$$

$$c(z,\varphi)=z_2^{\varkappa_2^{+}}\exp\left(h(z,\varphi)\right),\quad \sin\varphi\neq 0.$$

Тогда, очевидно, имеет место представление

$$a_0(z,\varphi)=\begin{cases}c(z,\varphi)a^{+}(z,\varphi), & \sin\varphi>0,\\ c(z,\varphi)z_2^{\varkappa}a^{-}(z,\varphi), & \sin\varphi<0,\end{cases} \tag{4.2}$$

причем

$$c(z,-\varphi)=c(z,\varphi),\quad \sin\varphi\neq 0. \tag{4.3}$$

4.1. Свойства функций β_1, $\beta^{\pm}$, h. Установим ряд вспомогательных результатов, относящихся к функциям $\beta_1(z,\varphi)$, $\beta^{\pm}(z,\varphi)$, $h(z,\varphi)$.

Лемма 4.1. *Пусть* $0<\alpha<1$, $k=(k_1,k_2)$, $|k|=k_1+k_2\leqslant K=$ $=\mathrm{const}$. *Тогда*:

1. $\|f\|_{(\alpha)}\leqslant M(f)\Longrightarrow\|S^{\pm}f\|_{(\alpha)}\leqslant M\cdot M(f)$.

2. $|f|\geqslant m(f)$, $\|f\|_{(\gamma_0)}\leqslant M(f)$,

$$\gamma_0=K+\alpha\Longrightarrow|(\ln f)^{(k)}|\leqslant M\left(\frac{M(f)}{m(f)}\right)^{|k|},$$

$$\|(\ln f)^{(k)}\|_{(\alpha)}\leqslant M\left(\frac{M(f)}{m(f)}\right)^{|k|+1}.$$

3. $|f|\leqslant m(f)$; $\|f^{(k)}\|_{(\alpha)}\leqslant(M(f))^{|k|+1}$, $|f^{(k)}|\leqslant(M(f))^{|k|}\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow\|(\exp(\pm f))^{(k)}\|_{(\alpha)}\leqslant Me^{m(f)}(M(f))^{|k|+1},$$

$$|(\exp(\pm f))^{(k)}|\leqslant Me^{m(f)}(M(f))^{|k|},$$

где

$$f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}}, \quad z_1 = e^{ix}, \quad z_2 = e^{iy}.$$

Доказательство. Отметим, что для функции $f(x,y) \neq 0$

$$\ln f = i\varkappa_1 x + i\varkappa_2 y + f_0(x,y). \tag{4.4}$$

Здесь

$$\varkappa_{1,2} = \operatorname{ind} f(z) \Big|_{L^{1,2}},$$

а $f_0(x,y)$ — непрерывна на торе T. При этом во втором условии леммы при $|k| = 0$ имеется в виду оценка $\ln f$ вида (4.4) по модулю, а при $|k| \geqslant 1$ функции $(\ln f)^{(k)}$ непрерывны на T (см. формулу (4.5)).

Первое утверждение леммы сразу следует из свойств интеграла типа Коши в пространствах Гельдера (см., например, [8, 19]).

Обратимся ко второму утверждению. Производные $\ln f$ в общем случае имеют вид

$$(\ln f)^{(k)} = \sum_{j=1}^{j(k)} \frac{1}{f^{l(j)}} \prod_{p=1}^{p(j)} (f)^{(n(p))}, \tag{4.5}$$

причем

$$\sum_{p=1}^{p(j)} n(p) = k,$$

степени знаменателя $l(j) \leqslant |k|$ и число слагаемых $j(k) \leqslant M$ при $|k| \leqslant K$.

Используя известные свойства функций класса Гельдера

$$\|fg\|_{(\alpha)} \leqslant \sup|f| \|g\|_{(\alpha)} + \|f\|_{(\alpha)} \sup|g| \leqslant \|f\|_{(\alpha)} \|g\|_{(\alpha)};$$

$$\left\| \frac{1}{f^l} \right\|_{(\alpha)} \leqslant \frac{1}{\inf|f|^{l+1}} \|f\|_{(\alpha)}$$

(см. [19]), из (4.5) получим

$$|(\ln f)^{(k)}| \leqslant M \frac{1}{m(f)^{|k|}} \prod_{p=1}^{p(j)} (M(f))^{|n(p)|} \leqslant M \left(\frac{M(f)}{m(f)} \right)^{|k|},$$

$$\|(\ln f)^{(k)}\|_{(\alpha)} \leqslant \sum_{j=1}^{j(k)} \left\| \frac{1}{f^{l(j)}} \right\|_{(\alpha)} \prod_{p=1}^{p(j)} \|f^{(n(p))}\|_{(\alpha)} \leqslant$$
$$\leqslant M \frac{M(f)}{m(f)^{|k|+1}} (M(f))^{|k|} \leqslant M \left(\frac{M(f)}{m(f)} \right)^{|k|+1}.$$

Итак, второе утверждение леммы доказано.

Обращаясь к третьему утверждению, выпишем производные от $\exp(f)$:

$$(\exp f)^{(k)} = e^f \sum_{j=1}^{j(k)} \prod_{p=1}^{p(j)} f^{(n(p))}, \qquad \sum_{p=1}^{p(j)} n(p) = k, \quad j(k) \leqslant M,$$

откуда

$$|(\exp f)^{(k)}| \leqslant M e^{m(f)} \sum_{j=1}^{j(k)} \prod_{p=1}^{p(j)} (M(f))^{|n(p)|} \leqslant M e^{m(f)} (M(f))^{|k|}.$$

Далее, очевидно, имеем

$$\|e^f\|_{(\alpha)} \leqslant \sup|e^f| + M \sum_{|k|=1} \sup|(e^f)^{(k)}| \leqslant e^{m(f)} + M \sum_{|k|=1} |e^f||f^{(k)}| \leqslant \leqslant M e^{m(f)} M(f)$$

и, аналогично предыдущему,

$$\|(e^f)^{(k)}\|_{(\alpha)} \leqslant \|e^f\|_{(\alpha)} \sum_{j=1}^{j(k)} \prod_{p=1}^{p(j)} \sup|f^{(n(p))}| + \\ + \sup|e^f| \sum_{j=1}^{j(k)} \sum_{\widetilde{p}=1}^{p(j)} \Bigg[\|f^{(n(\widetilde{p}))}\|_{(\alpha)} \prod_{\substack{p=1 \\ p\neq\widetilde{p}}}^{p(j)} |f^{(n(p))}| \Bigg] \leqslant \\ \leqslant e^{m(f)} M(f) \sum_{j=1}^{j(k)} \prod_{p=1}^{p(j)} (M(f))^{|n(p)|} + \\ + e^{m(f)} \sum_{j=1}^{j(k)} \sum_{\widetilde{p}=1}^{p(j)} \Bigg[(M(f))^{|n(\widetilde{p})|+1} \prod_{\substack{p=1 \\ p\neq\widetilde{p}}}^{p(j)} (M(f))^{|n(p)|} \Bigg] \leqslant M e^{m(f)} (M(f))^{|k|+1}.$$

Доказательство третьего утверждения для $\exp(-f)$ проводится совершенно аналогично.

Теорема 4.1. *Для функций* $f(z,\varphi) = \beta_1(z,\varphi)$, $\beta^{\pm}(z,\varphi)$, $h(z,\varphi)$ *справедливы оценки*:

$$\left|f^{(k)}\right| \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|^{|k|}}, \quad |k| \geqslant 1; \qquad \left\|f^{(k)}\right\|_{(\alpha)} \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|^{|k|+1}};$$

$$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)^{(k)}\right| \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|^{|k|+1}}; \qquad \left\|\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)^{(k)}\right\|_{(\alpha)} \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|^{|k|+2}};$$

$$|k| \leqslant 4, \quad \alpha = \gamma_0 - 4 \in (0,1).$$

Доказательство. Из условий (3.1) и (1.5) § 1 для $a_0(z,\varphi)$ очевидно, следует: $|a_1(z,\varphi)| \geqslant M|\sin\varphi|$, $\|a_1(z,\varphi)\|_{(\gamma_0)} \leqslant M$, где

$$a_1(z,\varphi) = z_1^{-\varkappa_1^{\pm}} z_2^{-\varkappa_2^{\pm}} a_0(z,\varphi) = \exp\left(\beta(z,\varphi)\right), \quad \pm\sin\varphi > 0.$$

Тогда по лемме 4.1

$$|(\beta)^{(k)}| \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|^{|k|}}, \qquad \|(\beta)^{(k)}\|_{(\alpha)} \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|^{|k|+1}},$$

откуда вытекает утверждение теоремы для $\beta_1(z,\varphi) = \beta(z,\varphi) - \beta(z,-\varphi)$. Поскольку

$$\frac{\partial\beta_1(z,\varphi)}{\partial\varphi} = \frac{a_{1\varphi}(z,\varphi)}{a_1(z,\varphi)} - \frac{a_{1\varphi}(z,-\varphi)}{a_1(z,-\varphi)},$$

то, аналогично доказательству леммы 4.1, получим

$$\left|\left(\frac{\partial\beta_1}{\partial\varphi}\right)^{(k)}\right| \leqslant M|\sin\varphi|^{-|k|-1}, \qquad \left\|\left(\frac{\partial\beta_1}{\partial\varphi}\right)^{(k)}\right\|_{(\alpha)} \leqslant M|\sin\varphi|^{-|k|-2}.$$

Наконец, из свойств интеграла типа Коши имеем [8, 19]

$$(S^{\pm}f)^{(k)} = S^{\pm}(f^{(k)}), \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi}S^{\pm}f = S^{\pm}\frac{\partial f}{\partial\varphi},$$

откуда, используя первое утверждение леммы 4.1, получим оставшиеся утверждения теоремы.

Установим теперь оценку модуля для $\beta^{\pm}(z,\varphi)$, $h(z,\varphi)$ при $\sin\varphi \to 0$. Предварительно докажем некоторые результаты, относящиеся к интегралу типа Коши от функций, зависящих от параметров. Пусть $f(t,\alpha)$ — функция, $t \in L = L_1$, α — параметр и

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(t,\alpha)}{t-z}\,dt, \qquad z \in U^+ = \{\, z \mid |z| \leqslant 1 \,\}.$$

Лемма 4.2. *Пусть* $|f(t,\alpha)| \leqslant M$, $|f'_t(t,\alpha)| \leqslant M/\varepsilon(\alpha)$, $\varepsilon(\alpha) < 1/2$;

$$\int\limits_L |f'_t(t,\alpha)||dt| < \infty.$$

Тогда

$$|I(z)| \leqslant |\ln\varepsilon(\alpha)| \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_L |f'_t(t,\alpha)||dt| + M.$$

Доказательство. Вначале преобразуем интеграл $I(z)$. Выберем однозначную непрерывную ветвь $\ln(t-z)$, $t \in L$, $z \in U^+$. Тогда

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f(t,\alpha)\,d\ln(t-z) = \frac{1}{2\pi i}\,f(t,\alpha)\ln(t-z)\,\Big|_L -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln(t-z) f'_t(t,\alpha)\,dt = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln(t-z) f'_t(t,\alpha)\,dt.$$

Пусть z — фиксировано, $\varepsilon(\alpha) < 1/2$,

$$L_2 = \{\, t \in L \mid |t-z| \leqslant \varepsilon(\alpha)\,\}, \quad L_3 = \{\, t \in L \mid |t-z| > \varepsilon(\alpha)\,\}.$$

Возможно $L_2 = \emptyset$, иначе $L_2 = [a,b] \subset L$ — отрезок окружности. Пусть $L_2 \neq \emptyset$, t_0 — проекция z на L, т. е. $t_0 \in [a,b]$, $|t_0 - t| \leqslant |t-z|$ при $t \in L$. Рассмотрим

$$\int\limits_{L_2} f'(t,\alpha)\ln(t-z)\,dt = f(t,\alpha)\ln(t-z)\,\Big|_a^b - \int\limits_{L_2} \frac{f(t,\alpha)}{t-z}\,dt =$$

$$= f(t,\alpha)\ln(t-z)\,\Big|_a^b - f(t_0,\alpha)\ln(t-z)\,\Big|_a^b - \int\limits_{L_2}\frac{f(t,\alpha)-f(t_0,\alpha)}{t-z}\,dt =$$

$$= (f(b,\alpha) - f(t_0,\alpha))\ln(b-z) - (f(a,\alpha)-f(t_0,\alpha))\ln(a-z) -$$

$$-\int\limits_a^b \frac{f(t,\alpha)-f(t_0,\alpha)}{t-z}\,dt = A_1 + A_2 + I_0,$$

причем

$$|A_1| \leqslant |f(b,\alpha) - f(t_0,\alpha)|\left|\ln\frac{b-z}{\varepsilon(\alpha)}\,\varepsilon(\alpha)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{t_0}^b f'(t,\alpha)\,dt\right|\left(\left|\ln\frac{|b-z|}{\varepsilon(\alpha)}\right| + |\ln\varepsilon(\alpha)| + M\right).$$

Так как $|f'(t,\alpha)| \leqslant M/\varepsilon(\alpha)$, т. е.

$$\int\limits_{t_0}^b |f'(t,\alpha)||dt| \leqslant M\frac{|b-t_0|}{\varepsilon(\alpha)},$$

то

$$|A_1| \leqslant M\frac{|b-t_0|}{\varepsilon(\alpha)}\left|\ln\frac{|b-z|}{\varepsilon(\alpha)}\right| + \int\limits_{t_0}^{b}|f'(t,\alpha)||dt||\ln\varepsilon(\alpha)| + M \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{b}|f'(t,\alpha)||dt||\ln\varepsilon(\alpha)| + M\frac{|b-z|}{\varepsilon(\alpha)}\left|\ln\frac{|b-z|}{\varepsilon(\alpha)}\right|.$$

Однако $|b-z| \leqslant \varepsilon(\alpha)$, т. е. $0 \leqslant x = |b-z|/\varepsilon(\alpha) \leqslant 1$, тогда $|x\ln x| \leqslant \leqslant 1/e \leqslant M$ и, окончательно,

$$|A_1| \leqslant \int\limits_{t_0}^{b}|f'(t,\alpha)||dt||\ln\varepsilon(\alpha)| + M.$$

Совершенно аналогично $|A_2| \leqslant \int\limits_{a}^{t_0}|f'(t,\alpha)||dt||\ln\varepsilon(\alpha)| + M$. Наконец,

$$|I_0| \leqslant \int\limits_{a}^{b}\frac{\int\limits_{t_0}^{t}|f'_s(s,\alpha)||ds|}{|t-z|}|dt| \leqslant \frac{M}{\varepsilon(\alpha)}\int\limits_{a}^{b}\frac{|t-t_0|}{|t-z|}|dt| \leqslant M\frac{|b-a|}{\varepsilon(\alpha)} \leqslant 2M.$$

Итак,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} f'(t,\alpha)\ln(t-z)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(|A_1|+|A_2|+|I_0|\right) \leqslant$$

$$\leqslant |\ln\varepsilon(\alpha)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{a}^{b}|f'(t,\alpha)||dt| + M.$$

Поскольку при $t \in L_3$ $|t-z| > \varepsilon(\alpha)$, то $|\ln(t-z)| \leqslant |\ln|t-z|| + M \leqslant \leqslant |\ln\varepsilon(\alpha)| + M$. Следовательно

$$\left|\int\limits_{L_3} f'(t,\alpha)\ln(t-z)\,dt\right| \leqslant \int\limits_{L_3}|f'(t,\alpha)||\ln(t-z)||\,dt| \leqslant$$

$$\leqslant |\ln\varepsilon(\alpha)|\int\limits_{L_3}|f'(t,\alpha)||dt| + M.$$

Окончательно получим

$$|I(z)| \leqslant \frac{|\ln \varepsilon(\alpha)|}{2\pi}\left(\int\limits_a^b |f'(t,\alpha)||dt| + \int\limits_{L_3} |f'(t,\alpha)||\,dt|\right) + M =$$

$$= -\ln \varepsilon(\alpha)\frac{1}{2\pi}\int\limits_L |f'(t,\alpha)||\,dt| + M.$$

Если при данном z $L_2 = \emptyset$, то остается только оценка для интеграла по L_3. Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Имеют место оценки*

$$|\beta^{\pm}(z,\varphi)| \leqslant -\beta_0 \ln|\sin\varphi| + M, \quad \pm\sin\varphi > 0;$$

$$|h(z,\varphi)| \leqslant -(\beta_0+1)\ln|\sin\varphi| + M, \quad \sin\varphi \neq 0.$$

Доказательство. По условию (4.1) $|\beta_1(z,\varphi)| \leqslant M$,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_L |\beta_{1t}(z_1,t,\varphi)||dt| \leqslant \beta_0$$

и, кроме того,

$$|\beta_{1t}(z_1,t,\varphi)| = \left|\frac{a_{1t}(z_1,t,\varphi)}{a_1(z_1,t,\varphi)} - \frac{a_{1t}(z_1,t,-\varphi)}{a_1(z_1,t,-\varphi)}\right| \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|},$$

т. е. $\beta_1(z,\varphi)$ удовлетворяет условиям леммы 4.2 с $\varepsilon(\alpha) = |\sin\varphi|$. Поскольку

$$\beta^{\pm}(z,\pm\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\beta_1(z_1,t,\varphi)}{t-z_2}\,dt \pm \frac{1}{2}\,\beta_1(z,\varphi),$$

то

$$|\beta^{\pm}(z,\varphi)| \leqslant -\beta_0\ln|\sin\varphi| + M \qquad \pm\sin\varphi > 0.$$

Далее,

$$h(z,\varphi) = \beta(z,\varphi) - \beta^{+}, \quad \pm\sin\varphi > 0,$$

причем $M_2 \geqslant |a_1| \geqslant M_1|\sin\varphi|$. Откуда

$$|h(z,\varphi)| \leqslant -(\beta_0+1)\ln|\sin\varphi| + M.$$

Теорема доказана.

4.2. Свойства функций $a^{\pm}(z,\varphi)$, $c(z,\varphi)$.

Теорема 4.3. *Для функций* $f(z,\varphi) = a^{\pm}(z,\varphi)$, $1/a^{\pm}(z,\varphi)$, $c(z,\varphi)$, $1/c(z,\varphi)$ *выполнены условия*:

1. $\|f(z,\varphi)\|_{(\gamma_0)} \leqslant M/|\sin\varphi|^{\beta_0+6}$.

2. *Если* $\Delta f = f(z,\varphi_1) - f(z,\varphi_2)$, $m(\varphi) = \min(|\sin\varphi_1|, |\sin\varphi_2|)$, *то*

$$\|\Delta f\|_{(\gamma_0)} \leqslant \frac{M|\varphi_1-\varphi_2|}{(m(\varphi))^{\beta_0+7}}, \quad \pm\sin\varphi_{1,2} \geqslant 0.$$

Доказательство. По теореме 4.2:

$$|\beta^{\pm}(z,\varphi)| \leqslant -\beta_0 \ln|\sin\varphi| + M, \quad \pm\sin\varphi > 0.$$

Согласно теореме 4.1:

$$|(\beta^{\pm})^{(k)}| \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|^{|k|}}, \quad \|(\beta^{\pm})^{(k)}\|_{(\alpha)} \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|^{|k|+1}}.$$

Тогда, используя третье утверждение леммы 4.1 с $f = \beta^{\pm}$, $m(f) = -\beta_0 \ln|\sin\varphi| + M$, $M(f) = M/|\sin\varphi|$, получим

$$\|(a^{\pm})^{(k)}\|_{(\alpha)} \leqslant M\|(\exp(\beta^{\pm}))^{(k)}\|_{(\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant Me^{-\beta_0\ln|\sin\varphi|+M}\left(\frac{M}{|\sin\varphi|}\right)^{|k|+1} \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|^{\beta_0+|k|+1}}; \tag{4.6}$$

$$|(a^{\pm})^{(k)}| \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|^{\beta_0+|k|}}.$$

Откуда

$$\|a^{\pm}(z,\varphi)\|_{(\gamma_0)} \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|^{\beta_0+5}}, \qquad \gamma_0 = 4+\alpha.$$

Совершенно аналогичные утверждения имеют место для $1/a^{\pm}$, c, $1/c$:

$$\|(a^{\pm}(z,\varphi))^{-1}\|_{(\gamma_0)} \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|^{\beta_0+5}},$$

$$\|c(z,\varphi)\|_{(\gamma_0)} + \|c^{-1}(z,\varphi)\|_{(\gamma_0)} \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi|^{\beta_0+6}}.$$

Наконец, рассмотрим

$$\Delta a^{\pm}(z,\varphi) = z_1^{\varkappa_1^{\pm}} \Delta e^{\beta^{\pm}(z,\varphi)} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{\beta^{\pm}(z,u)} \beta^{\pm}{}_u(z,u)\,du, \pm\sin\varphi_{1,2} \geqslant 0.$$

Очевидно, имеем

$$\|\Delta a^{\pm}(z,\varphi)\|_{(\gamma_0)} \leqslant \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \|e^{\beta^{\pm}(z,u)}\beta^{\pm}{}_u(z,u)\|_{(\gamma_0)}\,du.$$

Производная произведения имеет в общем случае вид

$$\left(e^{\beta^{\pm}(z,u)}\beta_u^{\pm}(z,u)\right)^{(k)}=\sum_{j=1}^{j(k)}\left(e^{\beta^{\pm}}\right)^{(n(j)}(\beta_u^{\pm})^{(m(j))},\quad n(j)+m(j)=k.$$

Откуда с учетом (4.6) и теоремы 4.1:

$$\left\|\left(e^{\beta^{\pm}}\beta_u^{\pm}\right)^{(k)}\right\|_{(\alpha)}\leqslant\sum_{j=1}^{j(k)}\left(\sup\left|\left(e^{\beta^{\pm}}\right)^{(n(j))}\right|\|(\beta^{\pm}{}_u)^{(m(j))}\|_{(\alpha)}+\right.$$

$$\left.+\left\|\left(e^{\beta^{\pm}}\right)^{(n(j))}\right\|_{(\alpha)}\sup|(\beta_u^{\pm})^{(m(j))}|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{j(k)}\left(\frac{M}{|\sin u|^{\beta_0+|k|}}\,\frac{M}{|\sin u|^{|k|+2}}+\frac{M}{|\sin u|^{\beta_0+|k|+1}}\,\frac{M}{|\sin u|^{|k|+1}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{|\sin u|^{\beta_0+|k|+2}}.$$

Следовательно,

$$\|\Delta a^{\pm}\|_{(\gamma_0)}\leqslant M\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{du}{|\sin u|^{\beta_0+6}}\leqslant M\frac{|\varphi_1-\varphi_2|}{m(\varphi)^{\beta_0+6}},\quad\pm\sin\varphi_{1,2}\geqslant 0.$$

Аналогично

$$\|\Delta(a^{\pm})^{-1}\|_{(\gamma_0)}\leqslant M\frac{|\varphi_1-\varphi_2|}{m(\varphi)^{\beta_0+6}},$$

$$\|\Delta c(z,\varphi)\|_{(\gamma_0)}+\|\Delta(c(z,\varphi))^{-1}\|_{(\gamma_0)}\leqslant M\frac{|\varphi_1-\varphi_2|}{m(\varphi)^{\beta_0+7}},$$

при $\pm\sin\varphi_{1,2}\geqslant 0$. Теорема доказана.

Теорема 4.4. *В обозначениях теоремы* 4.3 *для функций* $f(z,\varphi)=a^{\pm}(z,\varphi)$, $1/a^{\pm}(z,\varphi)$, $c(z,\varphi)$, $1/c(z,\varphi)$ *имеем*

$$|S_\xi f(z,\varphi)|\leqslant\frac{M}{|\sin\varphi|^{\nu}(1+|\xi|)^{\gamma_0}};$$

$$|S_\xi\Delta f|\leqslant\frac{M|\varphi_1-\varphi_2|}{(m(\varphi))^{\nu+1}(1+|\xi|)^{\gamma_0}},\quad\pm\sin\varphi_{1,2}\geqslant 0;\qquad\nu=\beta_0+6.$$

Утверждения теоремы непосредственно следуют из теоремы 4.3 и леммы 1.1 § 1.

Замечание. Совершенно аналогичные утверждения можно получить при любом не целом γ_0, при этом $\nu=\beta_0+2+n$, n — целая часть γ_0.

§ 5. Факторизация оператора. Решение уравнений

5.1. Регуляризация оператора A. Оператор $\widetilde{A}$. В этом пункте мы построим «регуляризованный» оператор $\widetilde{A}$, отличающийся от исходного оператора A на вполне непрерывное слагаемое и установим некоторые свойства его символа.

Лемма 5.1. *Пусть*

$$f_\nu(u) = \begin{cases} \varepsilon_0^{-1/\nu}(1+u)^{-1/(2\nu+1)}, & u > R_\nu, \\ \pi/2, & |u| \leqslant R_\nu, \\ \pi - \varepsilon_0^{-1/\nu}(1+|u|)^{-1/(2\nu+1)}, & u < -R_\nu, \end{cases}$$

$$R_\nu = \left(\frac{(2/\pi)^\nu}{\varepsilon_0}\right)^{2+1/\nu} - 1, \quad \varepsilon_0 < \frac{(2/\pi)^\nu}{2}, \quad \nu > 0.$$

Тогда

1. $R_\nu > 3$.
2. $f_\nu(u)$ *непрерывна при всех* $u \in \mathbb{R}$.
3. $\sin f_\nu(u) \geqslant M_1 \varepsilon_0^{-1/\nu}(1+|u|)^{-1/(2\nu+2)}$, $\forall\, u \in \mathbb{R}$.
4. $\sin f_\nu(u) \leqslant M_2 \varepsilon_0^{-1/\nu}(1+|u|)^{-1/(2\nu+1)}$ *при* $|u| \geqslant R_\nu$.
5. $|f'_\nu(u)| \leqslant M(1+|u|)^{-1}$.

Здесь через M, M_1, M_2 и т. д. обозначаются константы, не зависящие от ε_0.

Доказательство. Так как $\varepsilon_0 < (2/\pi)^\nu/2$, то $R_\nu \geqslant 2^{2+1/\nu} - 1 > 3$. Далее, $\varepsilon_0^{-1/\nu}(1+R_\nu)^{-1/(2\nu+1)} = \pi/2$, откуда следует непрерывность $f_\nu(u)$.

Из определения $f_\nu(u)$ имеем

$$\varepsilon_0^{-1/\nu}(1+|u|)^{-1/(2\nu+1)} \leqslant f_\nu(u) \leqslant \pi/2 \text{ при } u \geqslant 0.$$

Тогда $M_1 f_\nu(u) \leqslant \sin f_\nu(u) \leqslant M_2 f_\nu(u)$, откуда следует третье и четвертое утверждения при $u \geqslant 0$. Аналогично при $u \leqslant 0$

$$\varepsilon_0^{-1/\nu}(1+|u|)^{-1/(2\nu+1)} \leqslant \pi - f_\nu(u) \leqslant \pi/2,$$

$$M_1(\pi - f_\nu(u)) \leqslant \sin f_\nu(u) \leqslant M_2(\pi - f_\nu(u)),$$

что завершает доказательство третьего и четвертого утверждений леммы.

Наконец, очевидно,

$$|f'_\nu(u)| \leqslant \frac{M}{1+|u|}\,|f_\nu(u)| \leqslant \frac{M}{1+|u|}.$$

Лемма доказана.

Положим

$$u(\xi)=\begin{cases} |\xi|, & \cos\varphi(\xi)>0,\\ 0, & \cos\varphi(\xi)=0,\\ -|\xi|, & \cos\varphi(\xi)<0,\end{cases}$$

$$\varphi_\pm(\xi)=\pm f_\nu(u(\xi)),\quad \Omega_\nu=\left\{\xi\in\mathbb{Z}^2\,|\,|\sin\varphi(\xi)|\leqslant\sin\varphi_+(\xi)\right\}.$$

Лемма 5.2. *Пусть* $\xi,\eta\in\Omega_\nu$, $|\xi-\eta|\leqslant|\xi|/2$. *Тогда*

$$|\varphi_\pm(\xi)-\varphi_\pm(\eta)|\leqslant\frac{M|\xi-\eta|}{1+|\eta|}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Так как $|\xi-\eta|\leqslant|\xi|/2$, то $|\eta|\leqslant|\xi|+|\xi-\eta|\leqslant 3|\xi|/2$, откуда

$$1+|\xi|\geqslant\frac{2}{3}\,(1+|\eta|). \tag{5.2}$$

Пусть $p(t)=\xi+t(\eta-\xi)$, $t\in[0,1]$. Тогда с учетом (5.2)

$$1+|p(t)|\geqslant 1+|\xi|-t|\eta-\xi|\geqslant 1+\frac{|\xi|}{2}\geqslant\frac{1}{2}\,(1+|\xi|)\geqslant\frac{1}{3}\,(1+|\eta|). \tag{5.3}$$

Рассмотрим для определенности только $\varphi_+(\xi)$. Если $\cos\varphi(\xi)$ и $\cos\varphi(\eta)$ имеют одинаковый знак, $\operatorname{sgn}\cos\varphi(\xi,\eta)=\pm1$, то

$$|u(\xi)-u(\eta)|=||\xi|-|\eta||\leqslant|\xi-\eta|$$

и с учетом пятого утверждения леммы 5.1 и неравенств (5.3), получим

$$|\varphi_+(\xi)-\varphi_+(\eta)|=|f_\nu(u(\xi))-f_\nu(u(\eta))|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{t\in[0,1]}|f'_\nu(u(p(t)))||u(\xi)-u(\eta)|\leqslant\sup_{t\in[0,1]}\frac{M}{1+|p(t)|}\,|\xi-\eta|\leqslant\frac{M|\xi-\eta|}{1+|\eta|}.$$

Если $\cos\varphi(\xi)=\cos\varphi(\eta)=0$, то $\varphi_+(\xi)=\varphi_+(\eta)=\pi/2$.

Пусть $\cos\varphi(\xi)=0$, а $\cos\varphi(\eta)\neq0$, скажем, $\cos\varphi(\eta)>0$. Тогда $\varphi_+(\xi)=\pi/2$. Если при этом $|\eta|\leqslant R_\nu$, то и $\varphi_+(\eta)=\pi/2$. Если же $|\eta|>R_\nu$, то пусть $p^*=\xi+t^*(\eta-\xi)$ — точка отрезка, соединяющего ξ и η и такая, что $|p^*|=R_\nu$. Тогда $\cos\varphi(p^*)>0$, но $\varphi_+(p^*)=\pi/2$ и с учетом доказанного выше

$$|\varphi_+(\xi)-\varphi_+(\eta)|=|\varphi_+(p^*)-\varphi_+(\eta)|\leqslant\frac{M|p^*-\eta|}{1+|\eta|}\leqslant\frac{M|\xi-\eta|}{1+|\eta|}.$$

Аналогичное доказательство иммет место при $\cos\varphi(\eta)<0$.

Если, наоборот, $\cos\varphi(\eta)=0$, а $\cos\varphi(\xi)\neq0$, то аналогично:

$$|\varphi_+(\xi)-\varphi_+(\eta)|\leqslant\frac{M|\xi-\eta|}{1+|\xi|}.$$

С учетом (5.2) это вновь дает утверждение леммы.

Наконец, пусть $\cos\varphi(\xi)$ и $\cos\varphi(\eta)$ разных знаков. Рассмотрим случай $|\xi| \leqslant 2R_\nu$, тогда $|\eta| \leqslant |\xi| + |\eta - \xi| \leqslant 3R_\nu$. Пусть ξ^* — проекция ξ на отрезок $\{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi^*| \leqslant R_\nu, \quad \cos\varphi(\xi^*) = 0\}$, т. е.

$$|\xi - \xi^*| = \min_{\substack{|\zeta| \leqslant R_\nu \\ cos\varphi(\zeta)=0}} |\xi - \zeta|.$$

Так как $\cos\varphi(\xi)$ и $\cos\varphi(\eta)$ имеют разные знаки и $\xi, \eta \in \Omega_\nu$, то, очевидно,

$$|\xi - \xi^*| + |\xi^* - \eta| \leqslant M|\xi - \eta|.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$|\varphi_+(\xi) - \varphi_+(\xi^*)| \leqslant \frac{M|\xi - \xi^*|}{1 + |\xi|}, \quad |\varphi_+(\xi^*) - \varphi_+(\eta)| \leqslant \frac{M|\xi^* - \eta|}{1 + |\eta|}.$$

Отсюда с учетом (5.2):

$$|\varphi_+(\xi) - \varphi_+(\eta)| \leqslant |\varphi_+(\xi) - \varphi_+(\xi^*)| + |\varphi_+(\xi^*) - \varphi_+(\eta)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{1 + |\eta|}\left(|\xi - \xi^*| + |\xi^* - \eta|\right) \leqslant \frac{M|\xi - \eta|}{1 + |\eta|}.$$

Если, наконец, $|\xi| > 2R_\nu$, то $|\eta| \geqslant |\xi| - |\xi - \eta| \geqslant |\xi|/2 > R_\nu$. Вновь с учетом того, что $\cos\varphi(\xi)$ и $\cos\varphi(\eta)$ имеют разные знаки и $\xi, \eta \in \Omega_\nu$, получим $|\xi - \eta| \geqslant M(1 + |\eta|)$, откуда

$$|\varphi_+(\xi) - \varphi_+(\eta)| \leqslant M \leqslant \frac{M|\xi - \eta|}{1 + |\eta|}.$$

Для функции $\varphi_+(\xi)$ лемма доказана. Доказательство для $\varphi_-(\xi)$ полностью аналогично.

Лемма 5.3. *Справедливы следующие утверждения*:

1. $|\sin\varphi_\pm(\xi)| \geqslant M_1\varepsilon_0^{-1/\nu}(1 + |\xi|)^{-1/(2\nu+1)}$.
2. *При* $|\xi| \geqslant R_\nu$ $|\sin\varphi_\pm(\xi)| \leqslant M_2\varepsilon_0^{-1/\nu}(1 + |\xi|)^{-1/(2\nu+1)}$.
3. *Если* $\xi \notin \Omega_\nu$, *то*

$$|\sin\varphi(\xi)|^\nu \geqslant \varepsilon_0^{-1}(1 + |\xi|)^{-\delta}, \tag{5.4}$$

$$|\sin\varphi(\xi)|^{\nu+1} \geqslant \varepsilon_0^{-1}(1 + |\xi|)^{\delta-1}, \tag{5.5}$$

$$\delta = \nu/(2\nu + 1).$$

4. *Пусть* $\xi, \eta \in U_\nu$, $|\xi - \eta| \leqslant |\xi|/2$. *Обозначим* $m(\xi, \eta) = \min\left(|\sin\varphi_\pm(\xi)|, |\sin\varphi_\pm(\eta)|\right)$. *Тогда*

$$\frac{|\varphi_\pm(\xi) - \varphi_\pm(\eta)|}{m^{\nu+1}(\xi, \eta)} \leqslant \frac{M\varepsilon_0|\xi - \eta|}{(1 + |\eta|)^\delta}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Первое и второе утверждения леммы сразу следуют из третьего и четвертого утверждений леммы 5.1.

Рассмотрим третье утверждение леммы. Так как $\xi \notin \Omega_\nu$, то, учитывая первое утверждение, получим

$$|\sin\varphi(\xi)| > \sin\varphi_+(\xi) \geqslant \varepsilon_0^{-1/\nu}(1+|\xi|)^{-1/(2\nu+1)}. \tag{5.7}$$

Возведя это неравенство в степень ν, сразу получим (5.4). Умножим (5.4) вновь на (5.7). Так как $1/(2\nu+1) = 1-2\delta$ и $\varepsilon_0 < 1$, то

$$|\sin\varphi(\xi)|^{\nu+1} \geqslant \varepsilon_0^{-1}\varepsilon_0^{-1/\nu}(1+|\xi|)^{-\delta}(1+|\xi|)^{2\delta-1} \geqslant \varepsilon_0^{-1}(1+|\xi|)^{\delta-1},$$

т. е. выполнено (5.5). Итак, третье утверждение леммы доказано.

Обратимся к четвертому утверждению. Из первого утверждения леммы с учетом (5.2) имеем

$$m(\xi,\eta) \geqslant \min\Big(M_1\varepsilon_0^{-1/\nu}(1+|\xi|)^{-1/(2\nu+1)}, M_1\varepsilon_0^{-1/\nu}(1+|\eta|)^{-1/(2\nu+1)}\Big) \geqslant$$
$$\geqslant M\varepsilon_0^{-1/\nu}(1+|\eta|)^{-1/(2\nu+1)},$$

откуда, используя лемму 5.2, получим

$$\frac{|\varphi_\pm(\xi)-\varphi_\pm(\eta)|}{m^{\nu+1}(\xi,\eta)} \leqslant \frac{M|\xi-\eta|}{1+|\eta|}\,\frac{1}{\varepsilon_0^{-1-1/\nu}(1+|\eta|)^{-(\nu+1)/(2\nu+1)}} =$$
$$= \frac{M|\xi-\eta|\varepsilon_0^{1+1/\nu}}{(1+|\eta|)^{\delta}} \leqslant \frac{M\varepsilon_0|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)^{\delta}}.$$

Лемма доказана.

Пусть $\Omega_\nu^\pm = \Omega_\nu \cap \mathbb{Z}_0^\pm$. Введем при $\pm\sin\varphi(\xi) \geqslant 0$, соответственно, символы

$$a_\pm(z,\xi) = \begin{cases} a_0(z,\varphi(\xi)), & \xi \notin \Omega_\nu^\pm, \\ a_0(z,\varphi_\pm(\xi)), & \xi \in \Omega_\nu^\pm, \end{cases}$$

и пусть $A_\pm = \mathrm{op}(a_\pm(z,\xi))$, $\pm\sin\varphi(\xi) \geqslant 0$,

$$\widetilde{A}_0 = A_+S^+ + A_-S^- = \mathrm{op}(\widetilde{a}_0(z,\xi)).$$

Напомним, что исходный оператор

$$A = \mathrm{op}(a(z,\xi)) = \mathrm{op}(a_0(z,\varphi(\xi)) + a_{-1}(z,\xi)) = A_0 + A_{-1},$$

где $A_{-1} = \mathrm{op}(a_{-1}(z,\xi))$ — оператор порядка (-1). Положим $\widetilde{A} = \widetilde{A}_0 + A_{-1} = \mathrm{op}(\widetilde{a}(z,\xi))$.

Теорема 5.1. *Оператор* $A - \widetilde{A} = \alpha : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — *вполне непрерывен* ($s < \gamma_0 - 1$).

Доказательство. Имеем

$$A - \widetilde{A} = A_0 - \widetilde{A}_0 = \mathrm{op}(a_0(z,\varphi(\xi)) - \widetilde{a}_0(z,\xi)).$$

В силу теоремы 1.4 § 1 достаточно показать, что

$$|S_\zeta(a_0(z,\varphi(\xi)) - \widetilde{a}_0(z,\xi))| \leqslant \frac{\varepsilon(|\xi|)}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}, \tag{5.8}$$

$\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to \infty$. В свою очередь, с учетом леммы 1.1 § 1 формула (5.8) вытекает из условия

$$\|a_0(z,\varphi(\xi)) - \widetilde{a}_0(z,\xi)\|_{(\gamma_0)} \leqslant \varepsilon(|\xi|). \tag{5.9}$$

Но

$$a_0(z,\varphi(\xi)) - \widetilde{a}_0(z,\xi) = 0, \quad \xi \notin \Omega_\nu;$$

$$a_0(z,\varphi(\xi)) - \widetilde{a}_0(z,\xi) = a_0(z,\varphi(\xi)) - a_0(z,\varphi_\pm(\xi)),$$

$$\xi \in \Omega_\nu^\pm, \quad \pm\sin\varphi(\xi) > 0;$$

$$a_0(z,\varphi(\xi)) - \widetilde{a}_0(z,\xi) = a_0(z,\varphi(\xi)) - a_0(z,\varphi_+(\xi), \quad \sin\varphi(\xi) = 0.$$

Далее,

$$a_0(z,\varphi_1) - a_0(z,\varphi_2) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} a_{0u}(z,u)\,du,$$

откуда с учетом условия (1.5) § 1 имеем

$$\|a_0(z,\varphi_1) - a_0(z,\varphi_2)\|_{(\gamma_0)} \leqslant \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \|a_{0u}(z,u)\|_{(\gamma_0)}\,du \leqslant M|\varphi_1 - \varphi_2|.$$

Пусть $\xi \in \Omega_\nu^+$. Тогда

$$\begin{aligned}\|a_0(z,\varphi(\xi)) - \widetilde{a}_0(z,\xi)\|_{(\gamma_0)} &= \|a_0(z,\varphi(\xi)) - a_0(z,\varphi_+(\xi))\|_{(\gamma_0)} \leqslant \\ &\leqslant \|a_0(z,\varphi(\xi)) - a_0(z,0)\|_{(\gamma_0)} + \|a_0(z,\varphi_+(\xi)) - a_0(z,0)\|_{(\gamma_0)} \leqslant \\ &\leqslant M(|\varphi(\xi)| + |\varphi_+(\xi)|) \leqslant M(|\sin\varphi(\xi)| + \sin\varphi_+(\xi)) \leqslant \\ &\leqslant \frac{M}{\varepsilon_0^{1/\nu}(1+|\xi|)^{1/(2\nu+1)}} = \varepsilon(|\xi|).\end{aligned}$$

Аналогично устанавливается (5.9) при $\xi \in \Omega_\nu^-$, что и завершает доказательство теоремы.

Далее оператор $\widetilde{A}$ будем называть *главной частью оператора* A. Введем аналогично $\widetilde{a}_0(z,\xi)$ символы

$$\widetilde{c}(z,\xi) = \begin{cases} c(z,\varphi(\xi)), & \xi \notin \Omega_\nu, \\ c(z,\varphi_\pm(\xi)), & \xi \in \Omega_\nu^\pm, \end{cases}$$

$$\widetilde{a}^{\pm}(z,\xi)=\begin{cases} a^{\pm}(z,\varphi(\xi)), & \xi\notin\Omega_\nu,\\ a^{\pm}(z,\varphi_{\pm}(\xi)), & \xi\in\Omega_\nu^{\pm},\end{cases}$$

где $c(z,\varphi)$, $a^{\pm}(z,\varphi)$ — функции, построенные и исследованные в § 4. Отметим, что символы $\widetilde{a}^{\pm}(z,\xi)$ определены при $z\in T$, $\xi\in\mathbb{Z}_0^{\pm}$, причем, вообще говоря, $\widetilde{a}^{+}(z,\xi)\neq\widetilde{a}^{-}(z,\xi)$ при $\xi\in\mathbb{Z}_0^{+}\cap\mathbb{Z}_0^{-}$ (когда $\sin\varphi(\xi)=0$). С другой стороны, по построению $c(z,\varphi)=c(z,-\varphi)$ и так как, очевидно, $\varphi_{+}(\xi)=-\varphi_{-}(\xi)$, то при $\sin\varphi(\xi)=0$ имеем

$$c(z,\varphi_{+}(\xi))=c(z,-\varphi_{-}(\xi))=c(z,\varphi_{-}(\xi)),$$

т. е. символ $\widetilde{c}(z,\xi)$ задан при всех $\xi\in\mathbb{Z}^2$. Кроме того, если для $\xi=(n_1,n_2)$ обозначить $\overline{\xi}=(n_1,-n_2)$, то $\varphi_{+}(\xi)=-\varphi_{-}(\overline{\xi})$, откуда

$$\widetilde{c}(z,\overline{\xi})=\widetilde{c}(z,\xi),\quad z\in T,\quad \xi\in\mathbb{Z}^2. \tag{5.10}$$

Из теоремы 4.3 легко следуют свойства символов $\widetilde{c}$, $\widetilde{a}^{\pm}$:

Теорема 5.2. *Пусть* $\nu=\beta_0+6$, $\delta=\nu/(2\nu+1)$. *Тогда*

1. *Для функций* $f(z,\xi)=\widetilde{a}^{\pm}(z,\xi)$, $1/\widetilde{a}^{\pm}(z,\xi)$ *выполнены условия*

$$|S_\zeta f(z,\xi)|\leqslant M\varepsilon_0\frac{(1+|\xi|)^\delta}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}; \tag{5.11}$$

$$|S_\zeta(f(z,\xi)-f(z,\eta))|\leqslant\frac{M\varepsilon_0|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)^\delta(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}\quad \text{при } |\xi-\eta|\leqslant|\xi|/2; \tag{5.12}$$

$$z\in T,\qquad \xi\in\mathbb{Z}_0^{\pm}.$$

2. *Для функций* $f(z,\xi)=\widetilde{c}(z,\xi)$, $1/\widetilde{c}(z,\xi)$ *выполнены условия*

$$|S_\zeta f(z,\xi)|\leqslant M\varepsilon_0\frac{(1+|\xi|)^\delta}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}; \tag{5.13}$$

$$|S_\zeta(f(z,\xi)-f(z,\eta))|\leqslant\frac{M\varepsilon_0|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)^\delta(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}\quad \text{при } |\xi-\eta|\leqslant|\xi|/2; \tag{5.14}$$

$$z\in T,\qquad \xi\in\mathbb{Z}^2.$$

3. *Для* $a_{\pm}(z,\xi)$ *выполнены условия*

$$|S_\zeta a_{\pm}(z,\xi)|\leqslant\frac{M}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}; \tag{5.15}$$

$$|S_\zeta(a_\pm(z,\xi)-a_\pm(z,\eta))| \leqslant \frac{M|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)(1+|\zeta|)^{\gamma_0}} \qquad \text{(5.16)}$$
$$\textit{при } |\xi-\eta| \leqslant |\xi|/2; \quad z \in T, \quad \xi \in \mathbb{Z}_0^\pm.$$

Доказательство. Обращаясь к первому утверждению, рассмотрим для определенности $\widetilde{a}^+(z,\xi)$, $\xi \in \mathbb{Z}_0^+$. Если $\xi \notin \Omega_\nu^+$, то из теоремы 4.4 с учетом третьего утверждения леммы 5.3:

$$|S_\zeta \widetilde{a}^+(z,\xi)| = |S_\zeta a^+(z,\varphi(\xi))| \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi(\xi)|^\nu(1+|\zeta|)^{\gamma_0}} \leqslant \frac{M\varepsilon_0(1+|\xi|)^\delta}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}.$$

Если же $\xi \in \Omega_\nu^+$, то, используя первое утверждение леммы 5.3, получим

$$|S_\zeta \widetilde{a}^+(z,\xi)| = |S_\zeta a^+(z,\varphi_+(\xi)) \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi_+(\xi)|^\nu(1+|\zeta|)^{\gamma_0}} \leqslant \frac{M\varepsilon_0(1+|\xi|)^\delta}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}.$$

Итак, доказано условие (5.11).

Рассмотрим условие (5.12). Если $\xi,\eta \notin \Omega_\nu^+$, то, поскольку $\delta < 1$, из третьего утверждения леммы 5.3 с учетом (5.2) следует

$$m^{\nu+1} = \min\left(|\sin\varphi(\xi)|^{\nu+1}, |\sin\varphi(\eta)|^{\nu+1}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \min\left(\varepsilon_0^{-1}(1+|\xi|)^{\delta-1}, \varepsilon_0^{-1}(1+|\eta|)^{\delta-1}\right) \geqslant M\varepsilon_0^{-1}(1+|\eta|)^{\delta-1}.$$

С другой стороны,

$$\nabla\varphi(\xi) = \left(-\frac{n_2}{|\xi|}, \frac{n_1}{|\xi|}\right),$$

откуда

$$|\varphi(\xi)-\varphi(\eta)| \leqslant |\nabla\varphi(\xi^*)||\xi-\eta| \leqslant \frac{M|\xi-\eta|}{1+|\eta|},$$

так как при $\xi,\eta \notin \Omega_\nu^+$ $|\xi^*| \geqslant R_\nu > 3$ (первое утверждение леммы 5.1). Окончательно с учетом теоремы 4.4, получим

$$|S_\zeta(\widetilde{a}^+(z,\xi)-\widetilde{a}^+(z,\eta))| = |S_\zeta(a^+(z,\varphi(\xi))-a^+(z,\varphi(\eta)))| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M|\varphi(\xi)-\varphi(\eta)|}{m^{\nu+1}(1+|\zeta|)^{\gamma_0}} \leqslant \frac{M\varepsilon_0|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)^\delta(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}.$$

Если же $\xi,\eta \in \Omega_\nu^+$, то из теоремы 4.4 согласно четвертого утверждения леммы 5.2 находим

$$|S_\zeta(\widetilde{a}^+(z,\xi)-\widetilde{a}^+(z,\eta))| = |S_\zeta(a^+(z,\varphi_+(\xi))-a^+(z,\varphi_+(\eta)))| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M|\varphi_+(\xi)-\varphi_+(\eta)|}{(m(\xi,\eta))^{\nu+1}(1+|\zeta|)^{\gamma_0}} \leqslant \frac{M\varepsilon_0|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)^\delta(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}.$$

Пусть, наконец, $\xi \notin \Omega_\nu^+$, а $\eta \in \Omega_\nu^+$. Соединим точки ξ и η отрезком и пусть он пересекает границу Ω_ν^+ в точке η^*. Тогда

$$|\xi - \eta^*| \leqslant |\xi - \eta|, \quad |\eta - \eta^*| \leqslant |\xi - \eta|, \quad |\eta^*| \geqslant 2|\eta|/3$$

и как в предыдущем случае, получим

$$|S_\zeta(\widetilde{a}^+(z,\xi) - \widetilde{a}^+(z,\eta))| \leqslant |S_\zeta(\widetilde{a}^+(z,\xi) - \widetilde{a}^+(z,\eta^*))| + \\ + |S_\zeta(\widetilde{a}^+(z,\eta^*) - \widetilde{a}^+(z,\eta))| \leqslant \frac{M\varepsilon_0|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)^\delta(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}.$$

Аналогичное доказательство имеет место и при $\xi \in \Omega_\nu^+$, а $\eta \notin \Omega_\nu^+$.

Итак, первое утверждение теоремы для $\widetilde{a}^+(z,\xi)$ доказано. Доказательство его для $\widetilde{a}^-(z,\xi)$, $1/\widetilde{a}^\pm(z,\xi)$ полностью аналогично.

Обратимся теперь ко второму утверждению теоремы. Доказательство формулы (5.13) для $\widetilde{c}(z,\xi)$, $1/\widetilde{c}(z,\xi)$ при $\xi \in \mathbb{Z}^2$ совершенно аналогично доказательству формулы (5.11) для $\widetilde{a}^+(z,\xi)$ при $\xi \in \mathbb{Z}_0^+$. То же самое относится к формуле (5.14) в случае, когда $\xi, \eta \in \mathbb{Z}_0^\pm$, т. е. когда знаки $\sin\varphi(\xi)$ и $\sin\varphi(\eta)$ совпадают. Если же $\sin\varphi(\xi)$ и $\sin\varphi(\eta)$ имеют разные знаки, то, очевидно, имеем $|\xi-\eta| \geqslant |\overline{\xi}-\eta|$ и, используя условие симметрии (5.10), получим

$$|S_\zeta(\widetilde{c}(z,\xi) - \widetilde{c}(z,\eta))| \leqslant |S_\zeta(\widetilde{c}(z,\overline{\xi}) - \widetilde{c}(z,\eta))| \leqslant \\ \leqslant \frac{M\varepsilon_0|\overline{\xi}-\eta|}{(1+|\eta|)^\delta(1+|\zeta|)^{\gamma_0}} \leqslant \frac{M\varepsilon_0|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)^\delta(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}$$

и аналогично для $1/\widetilde{c}(z,\xi)$.

Теперь рассмотрим третье утверждение теоремы. Условие (5.15), очевидно, следует из условия (1.10) § 1 на $a_0(z,\varphi)$ (см. определение $a_\pm(z,\xi)$), а условие (5.16) выводится аналогично предыдущему из условий (1.5) § 1 на $a_{0\varphi}(z,\varphi)$ и леммы 5.2.

5.2. Факторизация оператора $\widetilde{A}$. Пусть $\widetilde{C} = \mathrm{op}(\widetilde{c}(z,\xi))$; $C_2 = \mathrm{op}(1/\widetilde{c}(z,\xi))$;

$$\widetilde{A}^+ = \mathrm{op}(\widetilde{a}^+(z,\xi)) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_0^+} \widetilde{a}^+(z,\xi)S_\xi,$$

$$\widetilde{A}^- = \mathrm{op}(\widetilde{a}^-(z,\xi)) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_{-1}^-} \widetilde{a}^-(z,\xi)S_\xi,$$

$$B^+ = \mathrm{op}(1/\widetilde{a}^+(z,\xi)) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_0^+} \frac{1}{\widetilde{a}^+(z,\xi)}\, S_\xi,$$

$$B^- = \mathrm{op}(1/\widetilde{a}^-(z,\xi)) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^-_{-1}} \frac{1}{\widetilde{a}^-(z,\xi)}\, S_\xi$$

и $\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}^+S^+ + \widetilde{A}^-S^-$, $B_2 = B^+S^+ + B^-S^-$. Очевидно $\widetilde{A}^\pm, B^\pm \in \Lambda_0^\pm$, $\widetilde{A}_2, B_2 \in \Lambda_0$.

Введем класс операторов

$$\Upsilon_\gamma = \Upsilon_\gamma(\varepsilon) = \left\{ \alpha = \mathrm{op}(\alpha(z,\xi)) \,|\, |S_\zeta\alpha(z,\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{(1+|\zeta|)^\gamma},\ \gamma > 2 \right\}.$$

Отметим, что в силу теоремы 1.1 § 1 оператор $\alpha \in \Upsilon_\gamma$ непрерывен в $W_2^s(T)$, $s < \gamma - 2$, а если при этом $\varepsilon M_1(\gamma) < 1$, то по лемме 1.13 § 1 оператор $(E+\alpha)$ — обратим в $W_2^s(T)$,

$$(E+\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = E + \beta, \quad \beta \in \Upsilon_\gamma\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon M_1(\gamma)}\right).$$

Лемма 5.4. *Пусть* $\alpha_{1,2} \in \Upsilon_\gamma(\varepsilon)$, *тогда* $(\alpha_1+\alpha_2) \in \Upsilon_\gamma(2\varepsilon)$, $(\alpha_1\circ\alpha_2) \in \Upsilon_\gamma(M_1(\gamma)\varepsilon^2)$.

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидно. Пусть $\alpha = \alpha_1\circ\alpha_2 = \mathrm{op}(\alpha(z,\xi))$, $\alpha_{1,2} = \mathrm{op}(\alpha_{1,2}(z,\xi))$. Тогда согласно лемме 1.4 § 1 (формула (1.22))

$$S_\zeta\alpha(z,\eta) = \sum_\xi S_{\zeta+\eta-\xi}\alpha_1(z,\xi)S_{\xi-\eta}\alpha_2(z,\eta).$$

Отсюда с использованием леммы 1.5 § 1 находим

$$|S_\zeta\alpha(z,\eta)| \leqslant \sum_\xi |S_{\zeta+\eta-\xi}\alpha_1(z,\xi)||S_{\xi-\eta}\alpha_2(z,\eta)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_\xi \frac{\varepsilon}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^\gamma}\,\frac{\varepsilon}{(1+|\xi-\eta|)^\gamma} \leqslant \frac{M_1(\gamma)\varepsilon^2}{(1+|\zeta|)^\gamma}.$$

Лемма доказана.

Установим некоторые вспомогательные результаты, относящиеся к композиции операторов с символами специального вида.

Лемма 5.5. *Пусть* $A = \mathrm{op}(a(z,\xi))$, $B = \mathrm{op}(b(z,\xi))$, $C = A\circ B$, $C_1 = \mathrm{op}(a(z,\xi)b(z,\xi))$. *Тогда*:

1. *Если символы* a, b *удовлетворяют условиям*

$$|S_\zeta a(z,\xi)| \leqslant \frac{M\varepsilon_0(1+|\xi|)^\delta}{(1+|\zeta|)^{\gamma_1}}, \quad \delta \leqslant 1/2, \quad \gamma_1 \geqslant 2, \tag{5.17}$$

$$|S_\zeta(a(z,\xi)-a(z,\eta))| \leqslant \frac{M\varepsilon_0|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)^\delta(1+|\zeta|)^{\gamma_1}} \quad \text{\textit{при} } |\xi-\eta| \leqslant |\xi|/2, \tag{5.18}$$

$$|S_\zeta b(z,\xi)| \leqslant \frac{M\varepsilon_0(1+|\xi|)^\delta}{(1+|\zeta|)^{\gamma_2}}, \quad \gamma_2 \geqslant 3, \tag{5.19}$$

то $C = C_1 + \alpha$, $\alpha \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2)$, $\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2 - 1)$.

2. *Если символы* a, b *удовлетворяют условиям*

$$|S_\zeta a(z,\xi)| \leqslant \frac{M}{(1+|\zeta|)^{\gamma_1}}, \quad \gamma_1 \geqslant 2, \tag{5.20}$$

$$|S_\zeta(a(z,\xi)-a(z,\eta))| \leqslant \frac{M|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)(1+|\zeta|)^{\gamma_1}} \quad \text{\textit{при} } |\xi-\eta| \leqslant |\xi|/2, \tag{5.21}$$

$$|S_\zeta b(z,\xi)| \leqslant \frac{M\varepsilon_0(1+|\xi|)^\delta}{(1+|\zeta|)^{\gamma_2}}, \quad \gamma_2 \geqslant 3, \tag{5.22}$$

то $C = C_1 + \alpha_1$, $\alpha_1 = \mathrm{op}(\alpha_1(z,\xi))$,

$$|S_\zeta \alpha_1(z,\xi)| \leqslant \frac{M\varepsilon_0}{(1+|\xi|)^{1-\delta}(1+|\zeta|)^{\gamma_3}}, \quad \gamma_3 = \min(\gamma_1, \gamma_2 - 1). \tag{5.23}$$

3. *Если символ* a *удовлетворяет условию* (5.17), *а* b — *условию* (5.23) *с* $\gamma_3 > 3$, *то* $C \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2)$, $\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_3 - 1)$.

4. *Если символ* a — *порядка* (-1), *т. е. удовлетворяет условию* (1.6) *§ 1 с* $\gamma_1 > 2$, *а* b — *удовлетворяет условию* (5.19) *с* $\gamma_2 > 3$, *то символ композиции* $C = \mathrm{op}(c(z,\xi))$ *удовлетворяет условию* (5.23) *с* $\gamma_3 = \min(\gamma_1, \gamma_2 - 1)$.

Доказательство. Пусть $C = A \circ B$. Пользуясь формулами символа композиции операторов (1.21) § 1, получим для $C = \mathrm{op}(c(z,\xi)$:

$$c(z,\eta) = \sum_\xi a(z,\xi) S_{\xi-\eta} b(z,\eta) =$$
$$= \sum_\xi a(z,\eta) S_{\xi-\eta} b(z,\eta) + \sum_\xi (a(z,\xi)-a(z,\eta)) S_{\xi-\eta} b(z,\eta) =$$
$$= a(z,\eta)b(z,\eta) + \sum_\xi (a(z,\xi)-a(z,\eta)) S_{\xi-\eta} b(z,\eta),$$

откуда

$$C = C_1 + \alpha, \quad \alpha = \mathrm{op}(\alpha(z,\xi)),$$

$$\alpha(z,\eta) = \sum_{\xi} (a(z,\xi) - a(z,\eta)) S_{\xi-\eta} b(z,\eta), \tag{5.24}$$

$$S_\zeta \alpha(z,\eta) = \sum_{\xi} S_{\zeta+\eta-\xi}(a(z,\xi) - a(z,\eta)) S_{\xi-\eta} b(z,\eta). \tag{5.25}$$

В формуле (5.25) представим

$$\sum_{\xi} \ldots = \sum_{|\xi-\eta| \leqslant |\xi|/2} \ldots + \sum_{|\xi-\eta| > |\xi|/2} \ldots = I_1 + I_2. \tag{5.26}$$

Воспользовавшись формулами (5.24), (5.25), (5.26), рассмотрим первое утверждение леммы. В силу условий (5.18), (5.19), с учетом леммы 1.5 § 1 имеем

$$|I_1| \leqslant \sum_{\xi} \frac{M\varepsilon_0 |\xi - \eta|}{(1+|\eta|)^\delta (1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}} \frac{M\varepsilon_0 (1+|\eta|)^\delta}{(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_2}} \leqslant$$

$$\leqslant M\varepsilon_0^2 \sum_{\xi} \frac{1}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_2-1}} \leqslant \frac{M\varepsilon_0^2 M_1(\gamma)}{(1+|\zeta|)^\gamma},$$

$$\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2 - 1) > 2.$$

В сумме I_2 имеем $|\xi-\eta| > |\xi|/2$, тогда $|\eta| \leqslant |\xi-\eta| + |\xi| \leqslant 3|\xi-\eta|$, откуда $1+|\xi| \leqslant 1+|\xi-\eta|$, $1+|\eta| \leqslant 1+3|\xi-\eta| \leqslant 3(1+|\xi-\eta|)$ и с учетом формул (5.17), (5.19) и опять же леммы 1.5 § 1, получим

$$|I_2| \leqslant \sum_{\xi} \frac{M\varepsilon_0((1+|\xi|)^\delta + (1+|\eta|)^\delta)}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}} \frac{M\varepsilon_0(1+|\eta|)^\delta}{(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_2}} \leqslant$$

$$\leqslant M\varepsilon_0^2 \sum_{\xi} \frac{((1+|\xi-\eta|)^\delta + 3^\delta(1+|\xi-\eta|)^\delta)(1+|\xi-\eta|)^\delta 3^\delta}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_2}} \leqslant$$

$$\leqslant M\varepsilon_0^2 \sum_{\xi} \frac{1}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_2-2\delta}} \leqslant \frac{M\varepsilon_0^2 M_1(\gamma)}{(1+|\zeta|)^\gamma},$$

$$\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2 - 1),$$

так как при $\delta < 1/2$ имеем $\gamma_2 - 2\delta \geqslant \gamma_2 - 1$. Окончательно

$$|S_\zeta \alpha(z,\eta)| \leqslant |I_1| + |I_2| \leqslant \frac{M\varepsilon_0^2}{(1+|\zeta|)^\gamma}, \quad \gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2 - 1) > 2.$$

Итак, первое утверждение леммы доказано.

Обращаясь ко второму утверждению леммы, снова воспользуемся для $\alpha_1(z,\xi)$ формулами (5.24), (5.25), (5.26). Имеем в силу (5.21), (5.22) и леммы 1.5 § 1:

$$|I_1| \leqslant \sum_{\xi} \frac{M|\xi-\eta|}{(1+|\eta|)(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}} \frac{M\varepsilon_0(1+|\eta|)^{\delta}}{(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\varepsilon_0}{(1+|\eta|)^{1-\delta}} \sum_{\xi} \frac{1}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_2-1}} \leqslant \frac{M\varepsilon_0 M_1(\gamma)}{(1+|\zeta|)^{\gamma}},$$

$$\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2 - 1) > 2.$$

В свою очередь, в сумме I_2 $|\eta| \leqslant 3|\xi-\eta|$, т. е. $(1+|\xi-\eta|) \geqslant (1+|\eta|)/3$, откуда, используя (5.20), (5.22) и лемму 1.5 § 1, получим

$$|I_2| \leqslant \sum_{\xi} \frac{2M}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}} \frac{M\varepsilon_0(1+|\eta|)^{\delta}}{(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_2}} \leqslant \frac{6M\varepsilon_0}{(1+|\eta|)^{1-\delta}} \times$$

$$\times \sum_{\xi} \frac{1}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_2-1}} \leqslant \frac{6M\varepsilon_0}{(1+|\eta|)^{1-\delta}(1+|\zeta|)^{\gamma}},$$

$$\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2 - 1) > 2.$$

Окончательно

$$|S_\zeta \alpha_1(z,\eta)| \leqslant |I_1| + |I_2| \leqslant \frac{M\varepsilon_0}{(1+|\eta|)^{1-\delta}(1+|\zeta|)^{\gamma}}.$$

Таким образом, доказано второе утверждение леммы.

Для доказательства третьего утверждения используем формулы (1.21), (1.22) § 1 и (5.26). В I_1 имеем $|\eta| \geqslant |\xi| - |\xi-\eta| \geqslant |\xi|/2$, откуда с учетом (5.17), (5.23) и леммы 1.5 § 1

$$|I_1| \leqslant \sum_{\xi} \frac{M\varepsilon_0(1+|\xi|)^{\delta}}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}} \frac{M\varepsilon_0}{(1+|\eta|)^{1-\delta}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_3}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\varepsilon_0^2 2^{\delta}}{(1+|\eta|)^{1-2\delta}} \sum_{\xi} \frac{1}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_3-1}} \leqslant \frac{M\varepsilon_0^2}{(1+|\zeta|)^{\gamma}},$$

$$\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_3 - 1) > 2$$

(так как $1-2\delta > 0$, то $(1+|\eta|)^{2\delta-1} < 1$).

В сумме I_2 имеем $|\xi-\eta|>|\xi|/2$, откуда, аналогично предыдущему,

$$|I_2| \leqslant \sum_{\xi} \frac{M\varepsilon_0(1+|\xi|)^{\delta}}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma}} \frac{M\varepsilon_0}{(1+|\eta|)^{1-\delta}(1+|\xi|/2)(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_3-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\varepsilon_0^2}{(1+|\zeta|)^{\gamma}},$$

$$\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_3-1) > 2.$$

Окончательно получим

$$|S_\zeta c(z,\xi)| \leqslant |I_1|+|I_2| \leqslant \frac{M\varepsilon_0^2}{(1+|\zeta|)^{\gamma}}, \quad \gamma=\min(\gamma_1,\gamma_3-1).$$

Итак, третье утверждение леммы доказано.

Наконец, рассмотрим четвертое утверждение леммы, снова воспользовавшись формулами (1.21), (1.22) § 1 и (5.26). Из условий (1.6) § 1 и (5.19), аналогично доказательству третьего утверждения, получим

$$|I_1| \leqslant \sum_{\xi} \frac{M}{(1+|\xi|)(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}} \frac{M\varepsilon_0(1+|\eta|)^{\delta}}{(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_2}} \leqslant \frac{M\varepsilon_0}{(1+|\eta|)^{1-\delta}} \times$$

$$\times \sum_{\xi} \frac{1}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_2-1}} \leqslant \frac{M\varepsilon_0}{(1+|\eta|)^{1-\delta}(1+|\zeta|)^{\gamma}},$$

$$\gamma=\min(\gamma_1,\gamma_2-1).$$

Снова аналогично предыдущему, для I_2 получим

$$|I_2| \leqslant \sum_{\xi} \frac{M}{(1+|\xi|)(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_1}} \frac{M\varepsilon_0(1+|\eta|)^{\delta}}{(1+|\eta|)(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_2-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\varepsilon_0}{(1+|\eta|)^{1-\delta}(1+|\zeta|)^{\gamma}},$$

$$\gamma=\min(\gamma_1,\gamma_2-1),$$

откуда

$$|S_\zeta c(z,\xi)| \leqslant |I_1|+|I_2| \leqslant \frac{M\varepsilon_0}{(1+|\eta|)^{1-\delta}(1+|\zeta|)^{\gamma}}, \quad \gamma=\min(\gamma_1,\gamma_2-1).$$

Лемма доказана.

Теорема 5.3. *Пусть ε_0 – достаточно мало. Тогда:*

1. *Существует оператор C_0 такой, что $C_0C_2 = C_2C_0 = E$, при этом*

$$C_0 = \widetilde{C}(E+\beta_1) = (E+\beta_2)\widetilde{C}, \quad \beta_{1,2} \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2), \quad \gamma=\gamma_0-1.$$

2. *Существуют операторы* $A^\pm \in \Lambda_0^\pm$ *такие, что* $A^\pm B^\pm = B^\pm A^\pm$ $\pm = S^\pm$, *при этом*

$$A^\pm = \widetilde{A}^\pm(E + \beta_1^\pm) = (E + \beta_2^\pm)\widetilde{A}^\pm,$$

$$\beta_{1,2}^\pm \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2) \cap \Lambda_0^\pm, \quad \gamma = \gamma_0 - 1.$$

3. *Пусть* $A_2 = A^+S^+ + A^-S^-$, *тогда* $A_2B_2 = B_2A_2 = E$, *причем* $A_2 = (E+\beta)\widetilde{A}_2 \in \Lambda_0$, $\beta = \beta_1^+ + \beta_2^- \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2) \cap \Lambda_0$, $\gamma = \gamma_0 - 1$.

Доказательство. Из условий (5.13), (5.14) для $\widetilde{c}(z,\xi)$, $1/\widetilde{c}(z,\xi)$, используя первое утверждение леммы 5.5 с $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_0$, $\delta = \nu/(2\nu+1) < 1/2$ сразу получим $C_2\widetilde{C} = E + \alpha_1$, $\widetilde{C}C_2 = E + \alpha_2$, $\alpha_{1,2} \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2)$, $\gamma = \gamma_0 - 1$. Но тогда по лемме 1.13 § 1 при $M\varepsilon_0^2 M_1(\gamma) < 1/2$ операторы $(E + \alpha_{1,2})$ — обратимы, $(E+\alpha_{1,2})^{-1} = E + \beta_{1,2}$, $\beta_{1,2} \in \Upsilon_\gamma(2M\varepsilon_0^2)$, откуда

$$C_2\widetilde{C}(E+\beta_1) = (E+\beta_2)\widetilde{C}C_2 = E.$$

Следовательно,

$$\widetilde{C}(E+\beta_1) = (E+\beta_2)\widetilde{C}C_2\widetilde{C}(E+\beta_1) = (E+\beta_2)\widetilde{C} = C_0$$

и $C_0C_2 = C_2C_0 = E$.

Совершенно аналогично из условий (5.11), (5.12) для $\widetilde{a}^\pm(z,\xi)$, $1/\widetilde{a}^\pm(z,\xi)$ получим второе утверждение теоремы. Третье утверждение теоремы следует из ее второго утверждения и четвертого утверждения леммы 3.1.

Теорема 5.4. *Справедливо представление*: $C_2\widetilde{A}B_2 = Q_\varkappa + \alpha$, $\alpha \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2)$, $\gamma = \min(\gamma_1 - 1, \gamma_0 - 2) > 2$, $\gamma_1 > 3$ — *из условия* (1.6) *§ 1*.

Доказательство. Имеем $\widetilde{A} = \widetilde{A}_0 + A_{-1}$, где $\widetilde{A}_0 = \mathrm{op}(\widetilde{a}_0(z,\xi))$, $A_{-1} = \mathrm{op}(a_{-1}(z,\xi))$ — оператор порядка (-1). Тогда

$$C_2\widetilde{A}B_2 = C_2\widetilde{A}_0B_2 + C_2A_{-1}B_2.$$

Используя условие (1.6) § 1 для $a_{-1}(z,\xi)$ и (5.11) для $1/\widetilde{a}^\pm(z,\xi)$, получим с помощью четвертого утверждения леммы 5.5, что

$$A_{-1}B_2 = A_{-1}B^+S^+ + A_{-1}B^-S^- = \alpha_1 S^+ + \alpha_2 S^- = \alpha_0,$$

где $\alpha_{0,1,2}$ удовлетворяют условию (5.23) с $\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_0 - 1) > 3$. Тогда, в свою очередь, используя (5.11) для $1/\widetilde{c}(z,\xi)$ и третье утверждение леммы 5.5 получим:

$$C_2A_{-1}B_2 = C_2\alpha_0 = \alpha \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2), \quad \gamma = \min(\gamma_1 - 1, \gamma_0 - 2) > 2.$$

Теперь рассмотрим оператор $C_2\widetilde{A}_0B_2$. По построению функций $\widetilde{c}(z,\xi)$, $\widetilde{a}^\pm(z,\xi)$ имеем представления

$$a_+(z,\xi) = \widetilde{c}(z,\xi)\widetilde{a}^+(z,\xi), \quad \sin\varphi(\xi) \geqslant 0;$$

$$a_-(z,\xi) = z_2^{\varkappa}\widetilde{c}(z,\xi)\widetilde{a}^-(z,\xi), \quad \sin\varphi(\xi) \leqslant 0.$$

Далее, с учетом леммы 2.3

$$\widetilde{A}_0 B_2 = (A_+S^+ + A_-S^-)(B^+S^+ + B^-S^-) = A_+B^+S^+ + A_-B^-S^-.$$

Но из условий (5.15), (5.16) и (5.11) для $1/\widetilde{a}^{\pm}(z,\xi)$, с учетом второго утверждения леммы 5.5, следует

$$A_\pm B^\pm = \mathrm{op}\left(\frac{a_\pm(z,\xi)}{\widetilde{a}^{\pm}(z,\xi)}\right) + \alpha_1^{\pm} = \mathrm{op}(\widetilde{c}_1(z,\xi)) + \alpha_1,$$

$$\widetilde{c}_1(z,\xi) = \begin{cases} \widetilde{c}(z,\xi), & \sin\varphi(\xi) \geqslant 0, \\ z_2^{\varkappa}\widetilde{c}(z,\xi), & \sin\varphi(\xi) < 0, \end{cases}$$

$\alpha_1^{\pm} = \mathrm{op}(\alpha_1^{\pm}(z,\xi))$, символ $\alpha_1^{\pm}(z,\xi)$ удовлетворяет условию (5.23) с $\gamma = \gamma_0 - 1$. В свою очередь, используя условия (5.11), (5.12) для $1/\widetilde{c}(z,\xi)$; (5.11) для $\widetilde{c}(z,\xi)$ и $\widetilde{c}(z,\xi)z_2^{\varkappa}$ и лемму 5.5, получим

$$C_2A_\pm B^\pm = \mathrm{op}\left(\frac{\widetilde{c}_1(z,\xi)}{\widetilde{c}(z,\xi)}\right) + \alpha_0 + \alpha_2 = H^\pm + \alpha_0 + \alpha_2^{\pm},$$

где $H^+ = S^+$, $H^- = z_2^{\varkappa}S^-$,

$$\alpha_0 = \mathrm{op}(1/\widetilde{c}(z,\xi)) \circ \mathrm{op}(\widetilde{c}_1(z,\xi)) - \mathrm{op}(\widetilde{c}_1(z,\xi)/\widetilde{c}(z,\xi)) \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2),$$

$\gamma = \gamma_0 - 1$ (первое утверждение леммы 5.5); $\alpha_2^{\pm} = C_2\alpha_1^{\pm} \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2)$, $\gamma = \gamma_0 - 2$ (третье утверждение леммы 5.5).

Итак,

$$C_2A_\pm B^\pm = H^\pm + \alpha_\pm, \quad \alpha_\pm \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2), \quad \gamma = \gamma_0 - 2,$$

откуда

$$C_2\widetilde{A}_0B_2 = C_2(A_+B^+S^+ + A_-B^-S^-) =$$
$$= S^+ + \alpha_+S^+ + z_2^{\varkappa}S^- + \alpha_-S^- = Q_\varkappa + \alpha,$$

$$\alpha = \alpha_+S^+ + \alpha_-S^- \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2), \quad \gamma = \gamma_0 - 2.$$

Окончательно

$$C_2\widetilde{A}B_2 = C_2\widetilde{A}_0B_2 + C_2A_1B_2 = Q_\varkappa + \alpha,$$

$$\alpha \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2), \quad \gamma = \min(\gamma_1 - 1, \gamma_0 - 2) > 2.$$

Теорема 5.5. *При достаточно малом ε_0 имеет место факторизация оператора $\widetilde{A}$:*

$$\widetilde{A} = \widetilde{P}_1 \circ Q_\varkappa \circ \widetilde{P}_2, \tag{5.27}$$

причем существуют операторы $\widetilde{P}_{1,2}^{-1}$ *такие, что* $\widetilde{P}_{1,2}\widetilde{P}_{1,2}^{-1} = \widetilde{P}_{1,2}^{-1}\widetilde{P}_{1,2} = E$, *при этом*

$$\begin{gathered} \widetilde{P}_1 = \widetilde{C}(E+\beta_1), \quad \widetilde{P}_1^{-1} = (E+\alpha_1)C_2, \\ \widetilde{P}_2 = (E+\beta_2)\widetilde{A}_2, \quad \widetilde{P}_2^{-1} = B_2(E+\alpha_2), \\ \alpha_{1,2}, \beta_{1,2} \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2), \quad \gamma = \min(\gamma_0-2, \gamma_1-1). \end{gathered} \tag{5.28}$$

Доказательство. Как показано в предыдущей теореме,

$$C_2\widetilde{A}B_2 = Q_\varkappa + \alpha_0, \quad \alpha_0 \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2), \quad \gamma = \gamma_0 - 2 > 2.$$

Отсюда по теореме 5.3 при достаточно малом ε_0 имеем

$$\widetilde{A} = C_0(Q_\varkappa + \alpha_0)A_2.$$

Далее, если $\varkappa > 0$, то $Q_{-\varkappa}Q_\varkappa = E$ (см. лемму 2.4 § 2), отсюда

$$Q_\varkappa + \alpha_0 = Q_\varkappa + \alpha_0 Q_{-\varkappa}Q_\varkappa = (E + \alpha_0 Q_{-\varkappa})Q_\varkappa = (E+\alpha_3)Q_\varkappa,$$

причем, очевидно, что $\alpha_3 = \alpha_0 Q_{-\varkappa} \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2)$, $\gamma = \gamma_0 - 2$, т. е.

$$\widetilde{A} = C_0(E+\alpha_3)Q_\varkappa A_2 = \widetilde{P}_1 Q_\varkappa \widetilde{P}_2,$$

$$\widetilde{P}_1 = C_0(E+\alpha_3) = \widetilde{C}(E+\beta)(E+\alpha_3) = \widetilde{C}(E+\beta_1),$$

причем согласно лемме 5.4 $\beta_1 = (\beta + \alpha_3 + \beta\circ\alpha_3) \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2)$;

$$\widetilde{P}_2 = A_2 = (E+\beta_2)\widetilde{A}_2, \quad \beta_2 \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2).$$

При достаточно малом ε_0 операторы $(E+\beta_{1,2})$ — обратимы, $(E+\beta_{1,2})^{-1} = E + \alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,2} \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2)$, откуда немедленно следует утверждение теоремы.

Если $\varkappa = 0$, то $Q_\varkappa = E$ и $\widetilde{A} = C_0A_2 = \widetilde{P}_1\widetilde{P}_2$,

$$\widetilde{P}_1 = C_0 = \widetilde{C}(E+\beta_1), \quad \widetilde{P}_2 = A_2 = (E+\beta_2)\widetilde{A}_2,$$

т. е. опять справедливо (5.27), (5.28).

Наконец, если $\varkappa < 0$, то $Q_\varkappa Q_{-\varkappa} = E$ (снова лемма 2.4 § 2) и

$$Q_\varkappa + \alpha_0 = Q_\varkappa + Q_\varkappa Q_{-\varkappa}\alpha_0 = Q_\varkappa(E+\alpha_4),$$

$\alpha_4 \in \Upsilon_\gamma(M\varepsilon_0^2)$, $\gamma = \gamma_0 - 2$, откуда, аналогично предыдущему,

$$\widetilde{A} = C_0 Q_\varkappa(E+\alpha_4)A_2 = \widetilde{P}_1 Q_\varkappa \widetilde{P}_2,$$

$$\widetilde{P}_1 = C_0 = \widetilde{C}(E+\beta_1), \quad \widetilde{P}_2 = (E+\alpha_4)A_2 = (E+\beta_2)\widetilde{A}_2,$$

т. е. снова имеет место представление (5.28). Теорема доказана.

5.3. Решение уравнения. Гладкость решений. Итак, имеем представление

$$A = \widetilde{A} + \alpha, \quad \widetilde{A} = \widetilde{P}_1 Q_\varkappa \widetilde{P}_2,$$

где $\alpha : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — вполне непрерывен, $s < \gamma_0 - 1$; $\widetilde{P}_{1,2}$ имеют обратные $\widetilde{P}_{1,2}^{-1}$. Тогда, аналогично п. 2.4 (теорема 2.4), легко построить решение уравнения $\widetilde{A}f = g$. Решение f при этом будет выражаться через операторы $\widetilde{P}_{1,2}^{-1}$ и

$$\widetilde{P}_0 = \begin{cases} \widetilde{P}_2^{-1} Q_{-\varkappa} \widetilde{P}_1^{-1}, & \varkappa \geqslant 0, \\ \widetilde{P}_2^{-1} \widetilde{Q}_{-\varkappa} \widetilde{P}_1^{-1}, & \varkappa < 0. \end{cases}$$

Поскольку $a_0(z, \varphi)$ может обращаться в нуль при $\sin\varphi = 0$, то по свойствам интеграла типа Коши символы $a^\pm(z, \varphi)$, $c(z, \varphi)$, вообще говоря, не ограничены по модулю ни сверху, ни снизу при $\sin\varphi \to 0$ (см. [8, 19]). В таком случае не ограничены сверху и символы операторов $\widetilde{C}$, C_2, $\widetilde{A}^\pm$, $B^\pm$, A_2, B_2, $\widetilde{P}_1$, $\widetilde{P}_2$, $\widetilde{P}_{1,2}^{-1}$ и $\widetilde{P}_0$. Это означает, что операторы $\widetilde{P}_{1,2}^{-1}$, $\widetilde{P}_0$ не ограничены, вообще говоря, в пространствах $W_2^s(T)$. Покажем, что операторы $\widetilde{P}_{1,2}^{-1}$ действуют в шкале пространств W_2^s с понижением гладкости не более, чем на величину $\delta = \nu/(2\nu + 1)$, $\nu = \beta_0 + 6$, а $\widetilde{P}_0$ — с понижением гладкости не более, чем на 2δ; т. е. $\widetilde{P}_{1,2}^{-1} : W_2^s(T) \to W_2^{s-\delta}(T)$, $\widetilde{P}_0 : W_2^s(T) \to W_2^{s-2\delta}(T)$ — непрерывны.

Теорема 5.6. *Операторы* $\widetilde{P}_{1,2}^{-1} : W_2^s(T) \to W_2^{s-\delta}(T)$ *и* $\widetilde{P}_0 : W_2^s(T) \to W_2^{s-2\delta}(T)$ *непрерывны* $(s < \min(\gamma_0 - 4, \gamma_1 - 3))$.

Доказательство. По построению имеем (см. п. 5.2) $\widetilde{P}_1^{-1} = (E + \alpha_1)C_2$, $\widetilde{P}_2^{-1} = B_2(E + \alpha_2)$, где $\alpha_{1,2} \in \Upsilon_\gamma$, $\gamma = \min(\gamma_0 - 2, \gamma_1 - 1)$, а символы операторов $C_2 = \mathrm{op}(1/\widetilde{c}(z, \xi))$ и $B_2 = \mathrm{op}(1/\widetilde{a}^+(z, \xi))S^+ + \mathrm{op}(1/\widetilde{a}^-(z, \xi))S^-$ удовлетворяют условию (5.11). Тогда по теореме 1.1 § 1 операторы $C_2, B_2 : W_2^s(T) \to W_2^{s-\delta}(T)$ — непрерывны, $s < \gamma_0 + \delta - 2$; а операторы $E + \alpha_{1,2} : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — непрерывны, $s < \gamma - 2 = \min(\gamma_0 - 4, \gamma_1 - 3)$. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы для операторов $\widetilde{P}_{1,2}^{-1}$.

Далее, оператор $Q_{-\varkappa} : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — непрерывен для любого s, откуда следует, что $H_1 = (E + \alpha_2)Q_{-\varkappa}(E + \alpha_1)$, $H_2 = (E + \alpha_2)\widetilde{Q}_{-\varkappa}(E + \alpha_1)$ непрерывны в $W_2^s(T)$, $s < \min(\gamma_0 - 4, \gamma_1 - 3)$. Тогда $\widetilde{P}_0 = B_2 H_{1,2} C_2 : W_2^s(T) \to W_2^{s-\delta}(T) \to W_2^{s-\delta}(T) \to W_2^{s-2\delta}(T)$ непрерывен при $s < \gamma_0 + \delta - 2$, $s - \delta < \min(\gamma_0 - 4, \gamma_1 - 3)$, $s - \delta < \gamma_0 + \delta - 2$, т. е. по крайней мере при $s < \min(\gamma_0 - 4, \gamma_1 - 3)$. Теорема доказана.

Теперь докажем теорему о разрешимости уравнения $\widetilde{A}f = g$, аналогичную теореме 2.4 п. 2.4.

Теорема 5.7. *Пусть* $s < \min(\gamma_0 - 4, \gamma_1 - 3)$. *Справедливы утверждения*:

1. *При* $\varkappa = 0$ *решение уравнения* $\widetilde{A}f = g$ *существует и единственно*,
$$\widetilde{A}f = g \Longleftrightarrow f = \widetilde{P}_0 g$$
и если $g \in W_2^s(T)$, *то решение* $f \in W_2^{s-2\delta}(T)$ *есть непрерывный оператор над* $g(z)$.

2. *При* $\varkappa > 0$ $\widetilde{A}f = g \Longleftrightarrow f = \widetilde{P}_0 g + \sum\limits_{k=0}^{\varkappa-1} \widetilde{P}_2^{-1}\left[f_k(z_1) z_2^k (1 - z_2^{-\varkappa})\right]$;
$f_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$ — *произвольные функции*, $k = \overline{0, \varkappa - 1}$.
В этом случае решение задачи
$$\begin{cases} \widetilde{A}f = g, \quad g(z) \in W_2^s(T), \\ \displaystyle\int\limits_{L_1} z_2^k \widetilde{P}_2 f \, dz_2 = \psi_k(z_1), \quad k = \overline{0, \varkappa - 1}, \end{cases} \tag{5.29}$$
где $\psi_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$ — *заданные (произвольно) функции, существует, единственно и имеет вид*
$$f = \widetilde{P}_0 g - \sum_{k=0}^{\varkappa-1} \widetilde{P}_2^{-1}\left[\psi_{\varkappa-1-k}(z_1) z_2^k (1 - z_2^{-\varkappa})\right]. \tag{5.30}$$
При этом $f \in W_2^{s-2\delta}(T)$ *есть непрерывный оператор над* $g(z) \in$ $\in W_2^s(T)$; $\psi_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$, $k = \overline{0, \varkappa - 1}$.

3. *При* $\varkappa < 0$
$$\widetilde{A}f = g \Longleftarrow f = \widetilde{P}_0 g$$
и для разрешимости уравнения $\widetilde{A}f = g$ *необходимо и достаточно выполнения условий разрешимости*
$$\int\limits_{L_1} z_2^k (\widetilde{P}_1^{-1} g) \, dz_2 \equiv 0, \quad k = \overline{0, |\varkappa| - 1}. \tag{5.31}$$
В этом случае решение задачи
$$\widetilde{A}f = g + \sum_{k=0}^{|\varkappa|-1} \widetilde{P}_1\left[\psi_k(z_1) z_2^{-k-1}\right], \tag{5.32}$$

где $\psi_k(z_1)$ — искомые функции, существует, единственно и имеет вид

$$f = \widetilde{P}_0 g; \quad \psi_k(z_1) = -\int\limits_{L_1} z_2^k(\widetilde{P}_1^{-1} g)\,dz_2, \quad k = \overline{0, |\varkappa| - 1}. \tag{5.33}$$

При этом $f(z) \in W_2^{s-2\delta}(T)$; $\psi_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$ есть непрерывные операторы над $g(z) \in W_2^s(T)$.

Утверждения теоремы непосредственно следуют из факторизации оператора $\widetilde{A}$ (5.27), лемм 2.6, 2.7 п. 2.3 об обращении оператора $Q_\varkappa$ и теоремы 5.6.

Замечание. Корректную постановку задачи для уравнения $\widetilde{A}f = g$ в случае отрицательного индекса (третье утверждение теоремы, задача (5.32)) можно предложить в таком виде:

$$\widetilde{A}f = g + \sum_{k=0}^{|\varkappa|-1} (E - \widetilde{A})\widetilde{P}_1[\psi_k(z_1) z_2^{-k-1}], \tag{5.34}$$

при этом решение задачи

$$\begin{cases} \psi_k(z_1) = -\displaystyle\int\limits_{L_1} z_2^k(\widetilde{P}_1^{-1} g)\,dz_2, \quad k = \overline{0, |\varkappa| - 1}, \\ f = \widetilde{P}_0 g - \displaystyle\sum_{k=0}^{|\varkappa|-1} \widetilde{P}_1[\psi_k(z_1) z_2^{-k-1}]. \end{cases} \tag{5.35}$$

Действительно, (5.34) означает, что

$$\widetilde{A}\left(f + \sum_{k=0}^{|\varkappa|-1} \widetilde{P}_1[\psi_k(z_1) z_2^{-k-1}]\right) = g + \sum_{k=0}^{|\varkappa|-1} \widetilde{P}_1[\psi_k(z_1) z_2^{-k-1}],$$

откуда с учетом (5.32), (5.33) и следует (5.35). Мы обратимся к этому варианту корректной постановки задачи при рассмотрении задач на римановой поверхности (§ 13).

Утверждение теоремы 5.7 означает, что при $\varkappa \geqslant 0$ оператор $\widetilde{A}$ обратим справа и его ядро параметризуется $l = \varkappa$-мерными вектор-функциями одной переменной; в случае $\varkappa < 0$ оператор $\widetilde{A}$ обратим слева и его коядро параметризуется $l^* = |\varkappa|$-мерными вектор-функциями одной переменной.

Из-за вырождения символа оператора $\widetilde{A}$ решения задач (5.29), (5.32) будут иметь, вообще говоря, меньшую гладкость, чем правая часть $g(z)$. Обратимся к особенностям вырождения символа по переменной ξ. По условию символ $a_0(z, \varphi(\xi)) = 0$ только при $\sin\varphi(\xi) = 0$, т. е. при $n_2 = 0$, $\xi = (n_1, 0)$. Другими словами, $a_0(z, \varphi(\xi)) \to 0$ при $|\sin\varphi(\xi)| = |n_2|/|\xi| \to 0$, а при $|n_2|/|\xi| \geqslant \delta_0 > 0$ имеем $|a_0(z, \varphi(\xi))| \geqslant M$. В частности, это означает, что на функции вида $f(z)=g(z_2)z_1^j$, $j=$const, оператор A действует как оператор с невырождающимся символом $a(z,(j,n_2))$, $|a(z,(j,n_2))|\geqslant M$, а на функции вида $f(z)=g(z_1)z_2^j$, $j=$ $=$const — как оператор с вырождающимся символом $a(z,(n_1,j))\to$ $\to 0$, $|n_1|\to\infty$. Другими словами, действие операторов A и $\widetilde{A}$ в чем-то подобно действию оператора интегрирования по переменной z_1. Естественно было бы ожидать, что и обобщенный обратный оператор $\widetilde{P}_0$ (понижающий гладкость) действует в этом смысле аналогично операции дифференцирования по переменной z_1, т. е. понижает гладкость только по переменной z_1.

Уточним, что имеется в виду. Пусть $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$,

$$q(\xi)=\begin{cases} |\xi|^\nu/|\xi_2|^\nu, & \xi\notin\Omega_\nu,\\ \varepsilon_0(1+|\xi|)^\delta, & \xi\in\Omega_\nu,\quad |\xi|>R_\nu,\\ 1, & |\xi|\leqslant R_\nu.\end{cases}$$

Очевидно,

$$1\leqslant q(\xi)\leqslant M(1+|\xi|)^\delta,\qquad \lim_{|\xi|\to\infty}q(\xi)=\frac{1}{|\sin\varphi(\xi)|^\nu}.$$

Введем весовые пространства Соболева

$$W_2^s(q,T))=\left\{f:\sum_{\xi\in U}|\widehat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s q^2(\xi)<\infty\right\}$$

и, аналогично, $W_2^s(q^2,T)$. Условие $f(z)\in W_2^s(q,T)$ фактически означает, что $f(z)$ имеет различную гладкость по переменным z_1 и z_2. Так, при $z_1=z_1^0=$const, $f(z_1^0,z_2)\in W_2^s$, а при $z_2=z_2^0=$const, $f(z_1,z_2^0)\in W_2^{s+\delta}$.

Покажем, что $\widetilde{P}_{1,2}^{-1}:W_2^s(q,T)\to W_2^s(T)$, $\widetilde{P}_0:W_2^s(q^2,T)\to W_2^s(T)$ — непрерывны. Смысл этого утверждения и состоит в том, что обратные операторы понижают гладкость только по переменной z_1: $\widetilde{P}_{1,2}^{-1}$ — на величину δ, а $\widetilde{P}_0$ — на величину 2δ.

Лемма 5.6. *Если* $|\xi-\eta|\geqslant M_0|\xi|$, $M_0<1$ *и* $\gamma>2$ *то*

$$\sum_{\xi\in U}\frac{q(\xi)}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^\gamma(1+|\xi-\eta|)^{\gamma+\delta}}\leqslant\frac{M}{M_0^\delta(1+|\zeta|)^\gamma}.$$

Действительно, тогда

$$(1+|\xi-\eta|)^\delta\geqslant(1+M_0|\xi|)^\delta\geqslant M_0^\delta(1/M_0+|\xi|)^\delta\geqslant M_0^\delta(1+|\xi|)^\delta,$$

откуда $q(\xi)/(1+|\xi-\eta|)^\delta\leqslant M_0^{-\delta}$ и требуемое утверждение сразу следует из леммы 1.5 § 1.

Лемма 5.7. *При* $\gamma > 2$

$$I = \sum_{\xi \in U} \frac{q(\xi)}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma+\delta}} \leqslant \frac{Mq(\eta)}{(1+|\zeta|)^{\gamma}}.$$

Доказательство. Пусть сначала $|\eta| \leqslant R_\nu$, представим

$$I = \sum_{|\xi| \geqslant 2R_\nu} \ldots + \sum_{|\xi| < 2R_\nu} \ldots = I_1 + I_2.$$

В I_1 имеем $|\xi| \geqslant 2|\eta|$, откуда $|\xi-\eta| \geqslant |\xi|/2$ и по лемме 5.6, $I_1 \leqslant M(1+|\zeta|)^{-\gamma}$. В I_2 $q(\xi) \leqslant \varepsilon_0(1+2R_\nu)^{\delta} \leqslant M$, откуда по лемме 1.5 § 1, $I_2 \leqslant M(1+|\zeta|)^{-\gamma}$. Итак при $|\eta| \leqslant R_\nu$

$$I = I_1 + I_2 \leqslant M(1+|\zeta|)^{-\gamma} \leqslant Mq(\eta)(1+|\zeta|)^{-\gamma}.$$

Теперь пусть $|\eta| \geqslant R_\nu$. Представим

$$I = \sum_{q(\xi) \leqslant 2q(\eta)} \ldots + \sum_{q(\xi) > 2q(\eta)} \ldots = I_1 + I_2.$$

Для I_1, с учетом леммы 1.5 § 1, очевидно, имеем

$$I_1 \leqslant 2q(\eta) \sum_{\xi} \frac{1}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma}(1+|\xi-\eta|)^{\gamma}} \leqslant \frac{Mq(\eta)}{(1+|\zeta|)^{\gamma}}.$$

Если в I_2 $\eta \in \Omega_\nu$, то $q(\eta) = \varepsilon_0(1+|\eta|)^{\delta}$. Тогда

$$\varepsilon_0(1+|\xi|)^{\delta} \geqslant q(\xi) > 2q(\eta) \geqslant 2\varepsilon_0(1+|\eta|)^{\delta},$$

откуда $|\xi| \geqslant 2^{1/\delta}|\eta|$, $|\xi-\eta| \geqslant (1-2^{1/\delta})|\xi|$. По лемме 5.6

$$I_2 \leqslant M(1+|\zeta|)^{-\gamma} \leqslant Mq(\eta)(1+|\zeta|)^{-\gamma}.$$

Пусть, наконец, $\eta \notin \Omega_\nu$. Тогда $q(\eta) = |\sin\varphi(\eta)|^{-\nu}$, $|\sin\varphi(\eta)| = q^{-1/\nu}(\eta)$ и

$$\begin{gathered} |\sin\varphi(\xi)| \leqslant q^{-1/\nu}(\xi) \leqslant 2^{-1/\nu}q^{-1/\nu}(\eta) \leqslant 2^{-1/\nu}, \\ |\cos\varphi(\xi)| \geqslant \sqrt{1-2^{-2/\nu}}\,. \end{gathered} \tag{5.36}$$

Пусть $M_1 = (2^{1/\nu}-1)\sqrt{1-2^{-2/\nu}}\,/2 = \mathrm{const} > 0$, φ_0 — угол между векторами ξ и η на плоскости $\mathbb{R}^2$. Представим

$$I_2 = \sum_{|\sin\varphi_0| \geqslant M_1} \ldots + \sum_{|\sin\varphi_0| < M_1} \ldots = I_{21} + I_{22}.$$

В I_{21}, $|\xi-\eta| \geqslant |\xi||\sin\varphi_0| \geqslant M_1|\xi|$, откуда по лемме 5.6

$$I_{21} \leqslant M(1+|\zeta|)^{-\gamma} \leqslant Mq(\eta)(1+|\zeta|)^{-\gamma}.$$

В сумме I_{22} имеем

$$\frac{|\cos\varphi(\eta)|}{|\cos\varphi(\xi)|} \leqslant \frac{|\cos\varphi(\xi)||\cos\varphi_0| + |\sin\varphi(\xi)||\sin\varphi_0|}{|\cos\varphi(\xi)|} \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \frac{M_1}{|\cos\varphi(\xi)|} \leqslant 1 + \frac{2^{1/\nu}-1}{2},$$

откуда, с учетом (5.36), получим

$$|\sin\varphi_0| \geqslant |\sin\varphi(\eta)||\cos\varphi(\xi)| - |\cos\varphi(\eta)||\sin\varphi(\xi)| \geqslant$$
$$\geqslant q^{-1/\nu}(\eta)|\cos\varphi(\xi)| - 2^{-1/\nu}q^{-1/\nu}(\eta)|\cos\varphi(\eta)| \geqslant$$
$$\geqslant q^{-1/\nu}(\eta)|\cos\varphi(\xi)|\left(1 - 2^{-1/\nu}\left(1+\frac{2^{1/\nu}-1}{2}\right)\right) \geqslant$$
$$\geqslant q^{-1/\nu}(\eta)\sqrt{1-2^{-2/\nu}}\,(1-2^{-1/\nu})/2 = q^{-1/\nu}(\eta)M_2, \quad M_2 < 1.$$

Следовательно, $|\xi-\eta| \geqslant |\xi||\sin\varphi_0| \geqslant |\xi|M_2q^{-1/\nu}(\eta)$ и по лемме 5.6

$$I_{22} \leqslant \frac{M}{M_2^\delta q^{-\delta/\nu}(\eta)(1+|\zeta|)^\gamma} \leqslant \frac{Mq(\eta)}{(1+|\zeta|)^\gamma},$$

так как $\delta/\nu < 1$. Лемма доказана.

Лемма 5.8. *Для* $f(z,\xi) = \widetilde{c}(z,\xi)$, $1/\widetilde{c}(z,\xi)$, $\xi\in\mathbb{Z}^2$ *и* $f^\pm(z,\xi) = \widetilde{a}^\pm(z,\xi)$, $1/\widetilde{a}^\pm(z,\xi)$, $\xi\in\mathbb{Z}_0^\pm$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} |S_\zeta f(z,\xi)| &\leqslant \frac{Mq(\xi)}{(1+|\zeta|)_0^\gamma}, \quad \zeta,\xi\in\mathbb{Z}^2;\\ |S_\zeta f^\pm(z,\xi)| &\leqslant \frac{Mq(\xi)}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}, \quad \zeta\in\mathbb{Z}^2, \quad \xi\in\mathbb{Z}_0^\pm. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Действительно, как показано при доказательстве теоремы 5.2 § 5:

$$|S_\zeta f^\pm(z,\xi)| \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi(\xi)|^\nu(1+|\zeta|)^{\gamma_0}} \text{ при } \xi\notin\Omega_\nu^\pm,$$

$$|S_\zeta f^\pm(z,\xi)| \leqslant \frac{M\varepsilon_0(1+|\xi|)^\delta}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}} \text{ при } \xi\in\Omega_\nu^\pm, \quad |\xi|>R_\nu;$$

$$|S_\zeta f(z,\xi)| \leqslant \frac{M}{|\sin\varphi(\xi)|^\nu(1+|\zeta|)^{\gamma_0}} \text{ при } \xi\notin\Omega_\nu,$$

$$|S_\zeta f(z,\xi)| \leqslant \frac{M\varepsilon_0(1+|\xi|)^\delta}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}} \text{ при } \xi\in\Omega_\nu, \quad |\xi|>R_\nu;$$

откуда сразу следуют утверждения леммы.

Лемма 5.9. *Пусть $p_1(z,\xi)$, $p_2(z,\xi)$, $p_0(z,\xi)$ — символы операторов $\widetilde{P}_1^{-1}$, $\widetilde{P}_2^{-1}$, $\widetilde{P}_0$ соответственно. Тогда*

$$|S_\zeta p_1(z,\xi)| + |S_\zeta p_2(z,\xi)| \leqslant \frac{Mq(\xi)}{(1+|\zeta|)^\gamma},$$
$$|S_\zeta p_0(z,\xi)| \leqslant \frac{Mq^2(\xi)}{(1+|\zeta|)^\gamma}, \quad \gamma = \min(\gamma_1-\delta-1, \gamma_0-\delta-2). \tag{5.38}$$

Доказательство. Обратимся к формуле (5.28). Символы операторов $\alpha_{1,2}$ в этой формуле будем обозначать соответственно $\alpha_{1,2}(z,\xi)$. Для символов операторов C_2 $(b_2(z,\xi) = 1/\widetilde{c}(z,\xi))$ и B_2 $(b_2(z,\xi) = 1/\widetilde{a}^{\pm}(z,\xi)$, $\xi \in \mathbb{Z}_0^{\pm})$, согласно лемме 5.8, выполнены условия (5.37):

$$|S_\zeta c_2(z,\xi)| + |S_\zeta b_2(z,\xi)| \leqslant \frac{Mq(\xi)}{(1+|\zeta|)^{\gamma_0}}. \tag{5.39}$$

Тогда с учетом лемм 1.5 и 1.4 § 1 имеем

$$|S_\zeta p_1(z,\eta)| \leqslant \sum_\xi |S_{\zeta+\eta-\xi}(1+\alpha_1(z,\xi))||S_{\xi-\eta}c_2(z,\eta)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_\xi \frac{M}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^\gamma}\,\frac{Mq(\eta)}{(1+|\xi-\eta|)^{\gamma_0}} \leqslant \frac{Mq(\eta)}{1+|\zeta|)^\gamma},$$
$$\gamma = \min(\gamma_1-1, \gamma_0-2).$$

Для $p_2(z,\xi)$ используем лемму 5.7:

$$|S_\zeta p_2(z,\eta)| \leqslant \sum_\xi |S_{\zeta+\eta-\xi}b_2(z,\xi)||S_{\xi-\eta}(1+\alpha_2(z,\eta))| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_\xi \frac{Mq(\xi)}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma_0}}\,\frac{M}{(1+|\xi-\eta|)^\gamma} \leqslant \frac{Mq(\eta)}{(1+|\zeta|)^{\gamma-\delta}}.$$

Осталось рассмотреть символ $p_0(z,\xi)$. Рассмотрим оператор $P = Q_{-\varkappa}\widetilde{P}_1^{-1}$ при $\varkappa \geqslant 0$ и $P = \widetilde{Q}_{-\varkappa}\widetilde{P}_1^{-1}$ при $\varkappa < 0$. Символ оператора P обозначим через $p(z,\xi)$.

Если $\varkappa = 0$, то $P = \widetilde{P}_1^{-1}$, т. е. $p(z,\xi) = p_1(z,\xi)$ и выполнено условие

$$|S_\zeta p(z,\xi)| \leqslant \frac{Mq(\xi)}{(1+|\zeta|)^\gamma}. \tag{5.40}$$

В случае $\varkappa > 0$ имеем с учетом леммы 2.3 § 2

$$Q_{-\varkappa}\widetilde{P}_1^{-1} = (S^+ + z_2^{-\varkappa}S^-)\left(\sum_\xi p_1(z,\xi)S_\xi\right) =$$

$$= \sum_\xi (S_{n_2}^+(p_1(z,\xi)) + z_2^{-\varkappa}S_{n_2-1}^-(p_1(z,\xi)))S_\xi, \quad \xi = (n_1, n_2),$$

т. е. символ

$$p(z,\xi) = S_{n_2}^+(p_1(z,\xi)) + z_2^{-\varkappa}S_{n_2-1}^-(p_1(z,\xi)), \quad \xi = (n_1, n_2).$$

Тогда получим для $\zeta = (m_1, m_2)$

$$S_\zeta p(z,\xi) = \begin{cases} S_\zeta p_1(z,\xi), & m_2 \geqslant n_2, \\ 0, & n_2 - \varkappa \leqslant m_2 \leqslant n_2 - 1, \\ z_2^{-\varkappa}S_{\zeta_2}p_1(z,\xi), & m_2 \leqslant n_2 - \varkappa - 1, \end{cases}$$

где $\zeta_2 = (m_1, m_2 + \varkappa)$. Отсюда сразу следует, что для $p(z,\xi)$ и в этом случае выполнено условие (5.40).

Если же $\varkappa < 0$, то аналогично предыдущему

$$p(z,\xi) = S_{n_2}^+(p_1(z,\xi)) + z_2^{-\varkappa}S_{n_2+\varkappa-1}^-(p_1(z,\xi)),$$

откуда

$$S_\zeta p(z,\xi) = \begin{cases} S_\zeta p_1(z,\xi), & m_2 \geqslant n_2, \\ z_2^{-\varkappa}S_{\zeta_2}p_1(z,\xi), & m_2 \leqslant n_2 - 1, \end{cases}$$

и тем самым вновь следует формула (5.40).

Так как $\widetilde{P}_0 = \widetilde{P}_2^{-1}P$, то, используя лемму 5.7 и лемму 1.4 § 1, получим

$$|S_\zeta p_0(z,\eta)| \leqslant \sum_\xi |S_{\zeta+\eta-\xi}p_2(z,\xi)||S_{\xi-\eta}p(z,\eta)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_\xi \frac{Mq(\xi)}{(1+|\zeta+\eta-\xi|)^{\gamma-\delta}}\,\frac{Mq(\eta)}{(1+|\xi-\eta|)^\gamma} \leqslant \frac{Mq^2(\eta)}{(1+|\zeta|)^{\gamma-\delta}}.$$

Лемма доказана.

Теорема 5.8. *Операторы*

$$\widetilde{P}_{1,2}^{-1} : W_2^s(q,T) \to W_2^s(T) \quad \textit{и} \quad \widetilde{P}_0 : W_2^s(q^2,T) \to W_2^s(T)$$

непрерывны, $s < \min(\gamma_1 - 3 - \delta, \gamma_0 - 4 - \delta)$.

Доказательство. Рассмотрим, например, оператор $\widetilde{P}_0$. Пусть $f(z) \in \in W_2^s(q^2)$,

$$g(z) = \widetilde{P}_0 f = \sum_{\xi} p_0(z,\xi) S_\xi f,$$

где $\gamma = \min(\gamma_1 - 1 - \delta, \gamma_0 - 2 - \delta)$, $s < \gamma - 2$ и $\varepsilon > 0$ выбрано так, чтобы $2\gamma - 2 - 2\varepsilon > 2s + 2$. Тогда

$$|S_\eta g|^2 \leqslant \left(\sum_{\xi} \frac{Mq^2(\xi)|S_\xi f|}{(1+|\xi-\eta|)^\gamma}\right)^2 \leqslant \sum_{\xi} \frac{Mq^4(\xi)|S_\xi f|^2}{(1+|\xi-\eta|)^{2\gamma-2-2\varepsilon}} \times$$
$$\times \sum_{\xi} \frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{2+2\varepsilon}} \leqslant M \sum_{\xi} \frac{q^4(\xi)|S_\xi f|^2}{(1+|\xi-\eta|)^{2\gamma-2-2\varepsilon}},$$

откуда, с учетом леммы 1.6 § 1,

$$(2\pi\|g\|_s)^2 = \sum_{\eta} |S_\eta g|^2 (1+|\eta|^2)^s \leqslant M \sum_{\xi} |S_\xi f|^2 q^4(\xi) \times$$
$$\times \sum_{\eta} \frac{(1+|\eta|^2)^s}{(1+|\xi-\eta|)^{2\gamma-2-2\varepsilon}} \leqslant M \sum_{\xi} |S_\xi f|^2 q^4(\xi)(1+|\xi|^2)^s,$$

т. е. $\widetilde{P}_0 : W_2^s(q^2, T) \to W_2^s(T)$ — непрерывен.

Ограниченность операторов $\widetilde{P}_{1,2}^{-1}$ в соответствующих весовых пространствах Соболева доказывается полностью аналогично.

Глава 3

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО РОДА

§ 6. Многообразия, атласы

6.1. Определения, общие свойства. Пусть D — риманова поверхность, т. е. двумерное компактное аналитическое многообразие без края [41, 1, 28]. Чтобы удобнее было использовать результаты глав 1 и 2, будем строить карты многообразия D как отображения в тор, т. е. карта — это гомеоморфизм $h : T_h \to D$, $T_h \subset T$ (см. далее п. 6.2, 6.3, 6.4).

Введем классы бесконечно дифференцируемых функций на D. Пусть $T_0 \subset T$. Как обычно, через $C_0^\infty(T_0)$ будем обозначать множество двоякопериодических функций на $\mathbb{R}^2$, имеющих ограниченные производные любого порядка и тождественно равных нулю вне T_0. Через $C^\infty(D)$ будем обозначать множество функций $f : D \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\chi(z)f(h(z)) \in C_0^\infty(T_h) \quad \forall\, \chi(z) \in C_0^\infty(T_h)$$

и для любой карты $h : T_h \to D$, $T_h \subset T$. Соответственно, отображения $g : T \to D$ будем называть отображениями класса C^∞, если

$$\chi(z)h^{-1}(g(z)) \in C_0^\infty(T_h) \quad \forall\, \chi(z) \in C_0^\infty(T_h)$$

для любой карты h.

Для псевдодифференциального оператора не существенна комплексно — аналитическая структура многообразия, поэтому будем рассматривать D с точностью до гомеоморфизмов класса C^∞, другими словами, в качестве атласа можно взять любой набор гомеоморфизмов $h_j : T_j \to D$ класса C^∞, такой, что множества $D_j = h_j(T_j)$ образуют покрытие D и гомеоморфизмы h_j сохраняют ориентацию, т. е. отображения $h_j^{-1} \circ h_k : T_k \to T_j$ имеют положительный якобиан.

В дальнейшем будем употреблять термин *гомеоморфизм класса* C^∞ для отображения $h : T_h \to D$, $T_h \subset T$ такого, что $(h_j^{-1} \circ h) \in C^\infty(T_h)$ и имеет положительный якобиан. Очевидно, класс таких гомеоморфизмов не зависит от выбора атласа (при сохранении ориентации многообразия, см. [42, 41, 28]).

Обычным образом определим классы финитных функций:

$$C_0^\infty(D_0) = \{\, f(w) \in C^\infty(D) \mid f(w) \equiv 0, w \notin D_0 \,\}, \quad D_0 \subset D.$$

Приведем несколько стандартных утверждений о функциях на многообразии, которые будем использовать в дальнейшем. Пусть $D_0 \subset D_1 \subset D$, причем включение $D_0 \subset D_1$ компактное, т. е. замыкание D_0 состоит только из внутренних точек D_1.

Утверждение 1. *Существует функция $\chi(w) \in C_0^\infty(D_1)$ такая, что $\chi(w) \equiv 1$ при $w \in D_0$.* В дальнейшем такие функции будем называть *срезающими.*

Утверждение 2. *Пусть $f(w) \in C^\infty(D)$, тогда существует функция $\widetilde{f}(w) \in C_0^\infty(D_1)$ такая, что $\widetilde{f}(w) \equiv f(w)$ при $z \in D_0$.*

Действительно, достаточно взять

$$\widetilde{f}(w) = \begin{cases} \chi(w) f(w), & w \in D_1, \\ 0, & w \notin D_1, \end{cases}$$

где $\chi(w)$ — срезающая функция из утверждения 1.

Функция $\widetilde{f}(w)$ будет продолжением функции $f(w)$ из области D_0 до нуля вне области D_1 класса C^∞. Таким же способом можно строить продолжения до нуля функций любого класса гладкости.

Пусть L — кривая на D, функция $f(w) \neq 0$ при $w \in L$. Введем, как и в гл. 1, 2, понятие *индекса* $f(w)$ по кривой L:

$$\operatorname{ind} f \,\Big|_{L} = \frac{1}{2\pi}\, \Delta \arg f(w) \,\Big|_{w \in L}$$

Утверждение 3. *Пусть $f(w) \neq 0$ — непрерывна при $w \in D_1$, D_1 — связно и индекс $f(w)$ по любой замкнутой кривой в D_1 равен нулю. Тогда можно однозначно определить в D_1 непрерывную ветвь* $\ln f(w)$. *При этом гладкость у логарифма такая же, как и у $f(w)$.*

Пусть $h : T_0 \to D$ — гомеоморфизм класса C^∞, $T_0 \subset T$, $D_0 = h(T_0)$. Для функций $f(z) \in C_0^\infty(T_0)$ и $g(w) \in C_0^\infty(D_0)$ введем операторы замены переменной:

$$hg = h(g \,|\, z) = \begin{cases} g(h(z)), & z \in T_0, \\ 0, & z \notin T_0, \end{cases}$$

$$h^{-1} f = h^{-1}(f \,|\, w) = \begin{cases} f(h^{-1}(w)), & w \in D_0, \\ 0, & w \notin D_0. \end{cases}$$

Очевидно, $h : C_0^\infty(D_0) \to C_0^\infty(T_0)$, $h^{-1} : C_0^\infty(T_0) \to C_0^\infty(D_0)$. Операторы замены переменной можно определить и для функций любого другого класса гладкости. Отметим, что если гомеоморфизм $h = h_1 \circ h_2$, то оператор замены переменной

$$(h_1 \circ h_2) g = g(h_1(h_2(z))) = h_2(h_1 g). \tag{6.1}$$

Пусть $h_j : T_j \to D$ — атлас на D, $D_j = h_j(T_j)$, T_j^1 компактно включены в T_j и срезающие функции $\widetilde{\chi}_j \in C_0^\infty(T_j)$, $\widetilde{\chi}_j(z) \equiv 1$ при

$z \in T_j^1$. Тогда можно построить набор срезающих функций на D:

$$\chi_j(w) = h_j^{-1}(\widetilde{\chi} \,|\, w) \in C_0^\infty(D_j),$$

причем $\chi_j(w) \equiv 1$ при $w \in D_j^1 = h_j(T_j^1)$. Потребуем, чтобы множества D_j^1 покрывали все D, т. е.

$$\chi_j(w) \equiv 1, \quad w \in D_j^1; \quad \bigcup_j D_j^1 = D. \tag{6.2}$$

Лемма 6.1. *Пусть срезающие функции $\chi_j(w)$ удовлетворяют условию* (6.2), $j = \overline{0, n}$. *Тогда функции*

$$\chi_k^0(w) = \begin{cases} \chi_0(w), & k = 0, \\ \prod\limits_{j=0}^{k-1}(1 - \chi_j(w))\chi_k(w), & k > 1, \end{cases}$$

образуют разбиение единицы, т. е.

$$\chi_k^0(w) \in C_0^\infty(D_k); \quad \sum_{k=1}^n \chi_k^0(w) \equiv 1 \quad \forall\, w \in D.$$

Доказательство. Очевидно, что $\chi_k^0(w) \in C_0^\infty(D_k)$, $k = \overline{0, n}$.

В силу условия (6.2) любая точка $w \in D$ принадлежит какому-нибудь D_j^1. Если $w \in D_0^1$, то $\chi_0(w) = 1$, тогда $\chi_0^0(w) = 1$, а все остальные $\chi_k^0(w) = 0$, $k > 0$, т. е. $\sum \chi_k^0(w) = 1$. Если $w \in D_j^1$, $j > 0$, то $\chi_j(w) = 1$, откуда все $\chi_k^0(w) = 0$ при $k > j$. Тогда

$$\sum_{k=0}^n \chi_k^0(w) = \chi_0(w) + (1 - \chi_0(w))\chi_1(w) + \ldots + \prod_{l=0}^{j-1}(1 - \chi_l(w)) \cdot 1 =$$

$$= \chi_0(w) + \ldots + \prod_{l=0}^{j-2}(1 - \chi_l(w)[\chi_{j-1}(w) + 1 - \chi_{j-1}(w)] =$$

$$= \chi_0(w) + \ldots + \prod_{l=0}^{j-3}(1 - \chi_l(w))[\chi_{j-2}(w) + 1 - \chi_{j-2}(w)] = \ldots =$$

$$= \chi_0(w) + 1 - \chi_0(w) = 1.$$

Лемма доказана.

6.2. Атлас для римановой поверхности рода $\rho = 0$ (сферы). Риманова поверхность рода нуль — это компактифицированная комплексная плоскость $D = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Для нее будем использовать стандартный атлас: пусть

$$T(\delta) = \{\, z \mid |z| < 1 + \delta,\ 0 < \delta < 1 \,\},$$

атлас состоит из двух карт:

$$\begin{gathered} h_0(z) = z : T(\delta) \to D, \\ h_0(T(\delta))) = D_0(\delta) = \{\, z \mid |z| < 1 + \delta \,\}; \\ h_1(z) = 1/z : T(\delta) \to D, \\ h_1(T(\delta))) = D_1(\delta) = \{\, z \mid |z| > 1/(1 + \delta) \,\}. \end{gathered} \tag{6.3}$$

Карты $h_{0,1}$ образуют атлас $D\ \forall\, \delta > 0$. Для единообразия будем в дальнейшем считать множества $T(\delta)$ подмножествами тора

$$T(\delta) \subset T = \{\, z = (x, y) \,|\, x \in [-\pi, \pi], \quad y \in [-\pi, \pi] \,\}.$$

Соответственно, функции $f(z) \in C_0^\infty(T(\delta))$ будем считать двоякопериодическими, т. е.
$C_0^\infty(T(\delta)) \subset C^\infty(T)$.

Выберем и зафиксируем $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \delta_4 < \delta_5 < 1$ и обозначим $T^p = T(\delta_p)$, $D_{0,1}^p = D_{0,1}(\delta_p)$, $p = \overline{1, 5}$. Очевидно, $T^p \subset T^{p+1}$, $p = \overline{1, 4}$, причем включения компактны. Возьмем срезающие функции

$$\widetilde{\chi}^p(z) \in C_0^\infty(T^{p+1}), \quad \widetilde{\chi}^p(z) \equiv 1 \text{ при } z \in T^p, \quad p = \overline{1, 4}. \tag{6.4}$$

Соответственно, введем срезающие функции на D:

$$\chi_j^p(w) = h_j^{-1} \widetilde{\chi}^p, \quad j = 0, 1, \quad p = \overline{1, 4}. \tag{6.5}$$

Очевидно, функции $\chi_{0,1}^p(w)$ удовлетворяют условию (6.2) для любого $p = \overline{1, 4}$. При этом

$$\begin{gathered} \widetilde{\chi}^p(z) \widetilde{\chi}^{p+1}(z) \equiv \widetilde{\chi}^p(z), \quad (1 - \widetilde{\chi}^{p+1}(z)) \widetilde{\chi}^p(z) \equiv 0, \\ z \in T, \quad p = \overline{1, 4}; \\ \chi_{0,1}^p(w) \chi_{0,1}^{p+1}(w) \equiv \chi_{0,1}^p(w), \quad (1 - \chi_{0,1}^{p+1}(w)) \chi_{0,1}^p(w) \equiv 0, \\ w \in D, \quad p = \overline{1, 4}. \end{gathered} \tag{6.6}$$

6.3. Атлас для римановой поверхности рода $\rho = 1$ (тора). Представим тор как риманову поверхность функции $v = \sqrt{u(u^2 - 1)}$, т. е. как множество

$$D = \{\, w = (u, v) \in \mathbb{C}^2 \,|\, v^2 = u(u^2 - 1) \,\} \tag{6.7}$$

или, наконец, как два экземпляра сферы $\overline{\mathbb{C}}$, разрезанные по промежуткам $[-1, 0]$ и $[1, \infty]$ и склееные через противоположные берега разрезов [11, с. 237–238, 245]. Для униформизации тора будем использовать функцию

$$\psi(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^2\\ xi\neq 0}} \left(\frac{1}{(z-2\pi\xi)^2} - \frac{1}{(2\pi\xi)^2} \right), \quad z = x+iy \in \mathbb{C} \tag{6.8}$$

[11, с. 163–168]. $\psi(z)$ двоякопериодическая функция, т. е. $\psi(z+2\pi\xi) = \psi(z)$, $\xi \in \mathbb{Z}^2$. Пусть $e_1 = \psi(\pi)$, $e_2 = \psi(\pi+\pi i)$, $e_3 = \psi(i\pi)$. Тогда функция $\psi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$(\psi'(z))^2 = 4(\psi(z)-e_1)(\psi(z)-e_2)(\psi(z)-e_3) \tag{6.9}$$

и отображение $z \to w = (u, v)$: $u = \psi(z)$, $v = \psi'(z)$ есть конформный гомеоморфизм квадрата T на риманову поверхность функции $v = \sqrt{4(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}$ [11, с. 237–238].

Построим с помощью $\psi(z)$ гомеоморфизм T на тор D вида (6.7). Очевидно, что $\psi(-z) = \psi(z)$, $\psi'(-z) = -\psi'(z)$. В частности это означает, что отображение $u = \psi(z)$ взаимно однозначно отображает половину квадрата $\{\, z \mid x \in [0, 2\pi],\ y \in [0, \pi] \,\}$ на всю плоскость $\overline{\mathbb{C}} = \{u\}$, а вторую половину квадрата $\{\, z \mid x \in [0, 2\pi],\ y \in [\pi, 2\pi] \,\}$ — симметрично относительно точки $z = \pi + i\pi$ на второй экземпляр $\overline{\mathbb{C}}$ с изменением знака $v = \psi'(z)$, т. е.

$$\psi(2\pi + 2\pi i - z) = \psi(z), \quad \psi'(2\pi+2\pi i - z) = -\psi'(z),$$
$$z = x+iy, \quad x\in[0,2\pi], \quad y\in[0,\pi].$$

Далее, из (6.8) следует:

$$\psi(\overline{z}) = \frac{1}{\overline{z}^2} + \sum_{\xi\neq 0}\left(\frac{1}{(\overline{z}-2\pi\xi)^2} - \frac{1}{(2\pi\xi)^2}\right) = \overline{\frac{1}{z^2} + \sum_{\xi\neq 0}\left(\frac{1}{(z-2\pi\overline{\xi})^2} - \frac{1}{(2\pi\overline{\xi})^2}\right)} = \overline{\psi(z)};$$

$$\psi(iz) = \frac{1}{(iz)^2} + \sum_{\xi\neq 0}\left(\frac{1}{(iz-2\pi\xi)^2} - \frac{1}{(2\pi\xi)^2}\right) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{\xi\neq 0}\left(\frac{1}{z+2\pi i\xi)^2} - \frac{1}{(2\pi i\xi)^2}\right) = -\psi(z).$$

Отсюда, в частности, если $z \in \mathbb{R}$ вещественное, то и $\psi(z) \in \mathbb{R}$ тоже вещественное; если z чисто мнимое, т. е. $iz \in \mathbb{R}$, то

$$\psi(z) = \psi(i(-iz)) = -\psi(-iz) \in \mathbb{R}$$

также вещественное. Значит $e_1 = \psi(\pi) \in \mathbb{R}$, $e_3 = \psi(i\pi) = -e_1$ и

$$-e_2 = \psi(i(\pi+i\pi)) = \psi(i\pi - \pi) = \psi(i\pi + \pi - 2\pi) = e_2,$$

т. е. $e_2 = 0$. В окрестности нуля имеем разложение

$$\psi(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^{2n-2},$$

где c_n есть многочлены с положительными рациональными коэффициентами переменных $g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_1e_3)$ и $g_3 = 4e_1e_2e_3$ [11, с. 168]. Так как $e_2 = 0$, а $e_1 = -e_3$, то $g_3 = 0$, а $g_2 = -4e_1e_3 > 0$. Тогда и $c_n \geqslant 0$, т. е. $\psi(z) > 0$ при $z > 0$. В частности, $e_1 > 0$, а $e_3 = -e_1 < 0$.

Окончательно для униформизации тора D (6.7) введем функцию

$$h(z) = w = (u, v): \quad u = \psi_0(z) = \frac{\psi(z)}{e_1}, \quad v = \psi_1(z) = \frac{\psi'(z)}{2e_1^{3/2}}.$$

В силу (6.9) имеем

$$v^2 = \frac{(\psi'(z))^2}{4e_1^3} = \frac{4(\psi(z) - e_1)\psi(z)(\psi(z) + e_1)}{4e_1^3} = u(u^2 - 1),$$

т. е. отображение $h : z \to w = (u, v)$ есть гомеоморфизм квадрата T на тор D (6.7).

Уточним некоторые свойства отображения h. Рассмотрим образ в плоскости u кривой $L^1(0) = \{ (x, 0) \mid x \in [0, 2\pi] \}$. Так как $\psi_0(x) \in \mathbb{R}$, $\psi_0(x) > 0$ при $x > 0$, $\psi_0(0) = \infty$, $\psi_0(\pi) = 1$ и $0 = \psi_0(\pi + i\pi)$, то при движении x от 0 до π получим в плоскости u луч $[+\infty, 1]$, а при $x \in [\pi, 2\pi]$ — тот же луч, проходимый в обратном направлении. При этом v меняет знак, $v \neq 0$ при $x \neq 0, 2\pi$, т. е. этот два раза проходимый луч $[1, +\infty] = \psi_0(L^1(0))$ образует на D замкнутый контур $\widetilde{L}^1(0) = h(L^1(0))$.

Аналогично отрезок $L^1(\pi) = \{ (x, \pi) \mid x \in [0, 2\pi] \}$ переходит в плоскости u в два раза проходимый отрезок $[-1, 0] = \psi_0(L^1(\pi))$, что соответствует на D замкнутому контуру $\widetilde{L}^1(\pi) = h(L^1(\pi))$. В общем случае отрезок $L^1(y) = \{ (x, y) \mid x \in [0, 2\pi] \}$ переходит в плоскости u в замкнутую кривую $\psi_0(L^1(y))$, не проходящую через $0, \pm 1, \infty$ и содержащую отрезок $[-1, 0]$. При $y \in [0, \pi]$ эти кривые образуют гомотопию два раза проходимого отрезка $[-1, 0]$ и два раза проходимого луча $[1, +\infty]$. При замене y на $(2\pi - y)$ кривая в плоскости u остается той же, но меняется знак v, т. е. аналогичная кривая переходит на другой лист римановой поверхности. В общем кривые $h(L^1(y)) = \widetilde{L}^1(y)$ образуют на D гомотопический класс L^1 — одну из образующих гомотопической группы $\pi(D)$.

Образы кривых $L^2(x) = \{ (x, y) \mid y \in [0, 2\pi] \}$ образуют гомотопический класс L^2 — вторую образующую группы $\pi(D)$. В плоскости u это кривые, соединяющие одну точку луча $[1, +\infty]$ с точкой отрезка $[-1, 0]$ при $y \in [0, \pi]$, а затем возвращающиеся обратно тем же путем при $y \in [\pi, 2\pi]$, но уже по другому листу поверхности (с изменением знака v).

При $x = 0$ это будет проходимый два раза луч $\psi_0(L^2(0)) = [-\infty, -1]$, при $x = \pi$ — проходимый два раза отрезок $\psi_0(L^2(\pi)) = [0, 1]$.

Пусть, наконец, $O_0(\delta)$ — круг с центром $(-1/2, 0)$ и радиусом $(2/3 - \delta)$, $0 < \delta < 1/6$. Положим

$$\widetilde{O}_0(\delta) = \{\, (u, v) \in D \mid u \in O_0(\delta) \,\}.$$

Очевидно, $[-1, 0] \subset O_0(\delta)$ и $O_0(\delta) \cap [1, +\infty] = \emptyset$. Тогда из предыдущих рассуждений легко следует, что

$$h^{-1}(\widetilde{O}_0(\delta)) = \{\, (x, y) \in T \mid \pi - \psi_1(x) < y < \pi + \psi_1(2\pi - x) \,\},$$
$$0 < \psi_1(x) < \psi_1^0(\delta) < \pi. \tag{6.10}$$

6.4. Атлас для римановой поверхности рода $\rho > 1$. Эту риманову поверхность будем с точностью до гомеоморфизма представлять как риманову поверхность функции

$$v = \sqrt{(u-1) \prod_{k=0}^{\rho-1} (u - \alpha_k)(u - \beta_k)}\,,$$

где $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_k \neq \beta_k$, $\alpha_k, \beta_k \neq 1, \infty$, т. е.

$$D = \{\, w = (u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid v^2 = (u-1) \prod_{k=0}^{\rho-1} (u - \alpha_k)(u - \beta_k) \,\} \tag{6.11}$$

или, наконец, D — это два экземпляра $\overline{\mathbb{C}}$, разрезанные по лучу $[1, +\infty]$ и по кривым, соединяющим α_k и β_k, и склееные через противоположные берега разрезов [11, с. 549–550].

Расположим точки α_k, β_k специальным образом. Пусть

$$\lambda(z) = (z + 2)/3.$$

Через $\lambda^k(z) = \lambda(\lambda^{k-1}(z))$ будем обозначать k-тую степень гомеоморфизма λ, $k = \overline{1 - \rho, \rho - 1}$. Очевидно, $\lambda^k(z) = 1 + (z-1)/3^k : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$,

$$\lambda^k(z_1) - \lambda^k(z_2) = \frac{z_1 - z_2}{3^k}. \tag{6.12}$$

Возьмем $\alpha_0 = -1$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_k = \lambda^{-k}(-1) = 1 - 2 \cdot 3^k$, $\beta_k = \lambda^{-k}(0) = 1 - 3^k$, $k = \overline{1, \rho - 1}$. Имеем

$$\alpha_{\rho-1} < \beta_{\rho-1} < \ldots < \alpha_0 < \beta_0.$$

Отметим, что гомеоморфизм $\lambda^k : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ переводит луч $[1, +\infty]$ в себя. Зафиксируем выбранные точки α_k, β_k и будем считать, что разрезы плоскости, через края которых происходит склеивание двух экземпляров $\overline{\mathbb{C}}$ — это отрезки $[\alpha_k, \beta_k]$, $k = \overline{0, \rho - 1}$.

Введем в плоскости u некоторые области. Пусть $0 < \delta < 1/6$; $O_0(\delta)$ — введенный в предыдущем пункте круг с центром в точке

$(-1/2, 0)$ и радиусом $(2/3 - \delta)$; $O_k(\delta) = \lambda^{-k}(O_0(\delta))$, $k = \overline{1-\rho, \rho-1}$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{gathered} O_j(\delta) \cap O_k(\delta) = \emptyset, \quad j \neq k; \\ \alpha_k, \beta_k \in O_k(\delta), \quad k = \overline{1-\rho, \rho-1}; \quad \lambda^p(O_k(\delta)) = O_{k-p}(\delta). \end{gathered} \tag{6.13}$$

Увеличивая δ, мы уменьшаем размеры $O_k(\delta)$, т. е.

$$O_k(\delta_1) \supset O_k(\delta_2) \text{ при } \delta_1 < \delta_2,$$

причем вложение — компактно.

Будем обозначать

$$\overline{\mathbb{C}}_k = \overline{\mathbb{C}}_k(\delta) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{\substack{0 \leqslant j \leqslant \rho-1 \\ j \neq k}} O_j(\delta).$$

Очевидно, $\overline{\mathbb{C}}_k(\delta_1) \subset \overline{\mathbb{C}}_k(\delta_2)$ при $\delta_1 < \delta_2$, причем включение — компактно и

$$\bigcup_{k=0}^{\rho-1} \overline{\mathbb{C}}_k(\delta) = \overline{\mathbb{C}},$$

т. е. $\overline{\mathbb{C}}_k(\delta)$, $k = \overline{0, \rho-1}$ — покрытие $\overline{\mathbb{C}}$ для любого $\delta \in (0, 1/6)$.

Соответственно на римановой поверхности D (6.11) введем области

$$D_k(\delta) = \{\, w = (u, v) \mid u \in \overline{\mathbb{C}}_k(\delta) \,\},$$

которые образуют покрытие D. Геометрически D_k — это риманова поверхность D с отрезанными от нее $(\rho - 1)$ перемычками, окружающими склеиваемые разрезы $[\alpha_j, \beta_j]$, $j \neq k$. Нетрудно видеть, что D_k — это торы с $(2\rho - 2)$ отверстиями (на месте вырезанных перемычек). В качестве карт атласа построим гомеоморфизмы областей D_k и квадрата T с вырезанными в нем $(2\rho - 2)$ отверстиями.

Для начала рассмотрим область D_0 и, соответственно, $\overline{\mathbb{C}}_0$, т. е. вырежем все отрезки $[\alpha_j, \beta_j]$ вместе с окружающими их кругами O_j, $j = \overline{1, \rho-1}$, кроме $[\alpha_0, \beta_0] = [-1, 0]$. Представим уравнение римановой поверхности (6.11) в виде

$$v^2 = (u-1)u(u+1)\prod_{k=1}^{\rho-1}(u - \alpha_k)(u - \beta_k) = u(u^2 - 1)f_1(u).$$

В области $\overline{\mathbb{C}}_0$ функция $f_1(u)$ аналитична, не обращается в нуль и, так как точки α_j, β_j, $j \neq 0$ вырезаются парами вместе с соединяющим их отрезком, то индекс $f_1(u)$ по любой замкнутой кривой в $\overline{\mathbb{C}}_0$ равен нулю. Тогда (утверждение 3, § 6) можно определить однозначную и аналитичную в $\overline{\mathbb{C}}_0$ ветвь $\ln f_1(u)$ и, соответственно, аналитическую и однозначную в $\overline{\mathbb{C}}_0$ функцию $F_1(u) = \sqrt{f_1(u)}$. Положим

$$T_0(\delta) = \{\, z = (x, y) \in T \mid \psi_0(z) \in \overline{\mathbb{C}}_0(\delta) \,\}.$$

По построению, очевидно, что $T_0(\delta)$ это квадрат T с вырезанными в нем $(2\rho - 2)$ отверстиями, причем все отверстия «нанизаны» на кривую $L^2(0) = \{\, z = (0, y) \,|\, y \in [0, 2\pi] \,\}$, из них половина — при $0 < y < \pi$ и другая половина — при $\pi < y < 2\pi$. Кроме того, $T_0(\delta_1)$ компактно вложено в $T_0(\delta_2)$ при $\delta_1 < \delta_2$. Введем отображение

$$h_0 : z \to w = (u, v) : \quad u = \psi_0(z), \quad v = \psi_1(z) F_1(\psi_0(z)). \tag{6.14}$$

Нетрудно видеть (см. далее доказательство теоремы 6.1), что отображение h_0 — гомеоморфизм класса C^∞, причем для $w = (u, v) = h_0(z)$ имеем

$$v^2 = \psi_1^2(z) f_1(\psi_0(z)) = u(u^2 - 1) f_1(u),$$

т. е. $h_0 : T_0(\delta) \to D$ и

$$h_0(T_0(\delta)) = \{\, w = (u, v) \in D \,|\, u \in \overline{\mathbb{C}}_0(\delta) \,\} = D_0(\delta).$$

Итак, имеем карту $h_0 : T_0(\delta) \to D_0(\delta)$.

Из формулы (6.12) следует, что

$$\lambda^j(\overline{\mathbb{C}}_j(\delta)) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{\substack{-j \leqslant k \leqslant \rho - 1 - j \\ k \neq 0}} O_k(\delta). \tag{6.15}$$

Аналогично предыдущему заключаем, что в области $\lambda^j(\overline{\mathbb{C}}_j(\delta))$ существует однозначная и аналитичная функция

$$F_j(u) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-j \\ k \neq 0}}^{\rho-1-j} (u - \alpha_k)(u - \beta_k)}\,.$$

Пусть

$$T_j(\delta) = \{\, z \in T \mid \psi_0(z) \in \lambda^j(\overline{\mathbb{C}}_j(\delta)) \,\}, \quad j = \overline{1, \rho - 1}.$$

$T_j(\delta)$ — это квадрат T с вырезанными в нем $(2\rho - 2)$ отверстиями, при этом $2j$ отверстий «нанизаны» на кривую $L^2(\pi) = \{\, z = (\pi, y) \,|\, y \in [0, 2\pi] \,\}$, j из них при $0 < y < \pi$ и j — при $\pi < y < 2\pi$; оставшиеся $(2\rho - 2j - 2)$ отверстия «нанизаны» на $L^2(0)$, половина при $0 < y < \pi$ и половина при $\pi < y < 2\pi$. При этом $T_j(\delta_1)$ компактно включено в $T_j(\delta_2)$ при $\delta_1 < \delta_2$. Введем отображения

$$\begin{gathered} h_j : z \to w = (u, v) : \quad u = \lambda^{-j}(\psi_0(z)), \\ v = 3^{j(\rho + 1/2)} \psi_1(z) F_j(\psi_0(z)), \quad j = \overline{1, \rho - 1}. \end{gathered} \tag{6.16}$$

Отметим, что, если положить $j = 0$, $\lambda^0(u) \equiv u$, то формула (6.16) дает построенное ранее отображение h_0 (6.14).

Теорема 6.1. *Отображения* $h_j : T_j(\delta) \to D_j(\delta)$, $j = \overline{0, \rho - 1}$ *являются картами, составляющими атлас* D *для любого* $0 < \delta < 1/6$.

Доказательство. Покажем, что отображения h_j взаимно однозначны. Действительно, если $z_{1,2} \in T$, $z_1 \neq z_2$, но $u_1 = u_2$, т. е.

$$\lambda^{-j}(\psi_0(z_1)) = \lambda^{-j}(\psi_0(z_2)),$$

то $\psi_0(z_1) = \psi_0(z_2)$, откуда $z_1 = 2\pi + 2\pi i - z_2$. Тогда $\psi_1(z_1) = -\psi_1(z_2)$, т. е. $v_1 \neq v_2$.

Так как $\lambda : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ — конформное отображение, то очевидны бесконечная гладкость и сохранение ориентации для гомеоморфизмов h_j.

Наконец, если $w = (u, v) = h_j(z)$, то имеем равенство

$$v^2 = \psi_1^2(z) F_j^2(\psi_0(z)) 3^{(2\rho+1)j} = \psi_0(z)(\psi_0(z) - 1)(\psi_0(z) + 1) \times \\ \times \prod_{\substack{k=-j \\ k \neq 0}}^{\rho-1-j} (\psi_0(z) - \alpha_k)(\psi_0(z) - \beta_k) 3^{(2\rho+1)j} = \lambda^j(u)(\lambda^j(u) - 1) \times \\ \times (\lambda^j(u) + 1) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{\rho-1} (\lambda^j(u) - \alpha_{k-j})(\lambda^j(u) - \beta_{k-j}) 3^{(2\rho+1)j}.$$

По построению α_k, β_k имеем $0 = \lambda^j(\beta_j), 1 = \lambda^j(1), -1 = \lambda^j(\alpha_j), \alpha_{k-j} = \lambda^j(\alpha_k)$, $\beta_{k-j} = \lambda^j(\beta_k)$, откуда

$$v^2 = (\lambda^j(u) - \lambda^j(1))(\lambda^j(u) - \lambda^j(\alpha_j))(\lambda^j(u) - \lambda^j(\beta_j)) \times \\ \times \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{\rho-1} (\lambda^j(u) - \lambda^j(\alpha_k))(\lambda^j(u) - \lambda^j(\beta_k)) 3^{(2\rho+1)j}.$$

Наконец, с учетом равенства (6.9), получим

$$v^2 = (u - 1)(u - \alpha_j)(u - \beta_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{\rho-1} (u - \alpha_k)(u - \beta_k) \left(\frac{1}{3}\right)^{3j+2(\rho-1)j} \times \\ \times 3^{(2\rho+1)j} = (u - 1) \prod_{k=0}^{\rho-1} (u - \alpha_k)(u - \beta_k),$$

т. е. выполнено (6.7) и, значит, $h_j : T_j(\delta) \to D$.

Далее, $\lambda^{-j}(\psi_0(T_j(\delta))) = \lambda^{-j}(\lambda^j(\overline{\mathbb{C}}_j(\delta))) = \overline{\mathbb{C}}_j(\delta)$, откуда следует, что $h_j(T_j(\delta)) = D_j(\delta)$. Итак, $h_j : T_j \to D_j$ — гомеоморфизмы класса C^∞. Но, как уже отмечалось, области D_j, $j = \overline{0, \rho - 1}$ образуют покрытие D. Теорема доказана. Заметим, что гомеоморфизмы h_j не зависят от выбора δ.

Рассмотрим некоторые свойства построенного атласа. Выберем произвольную карту $h_j : T_j \to D_j$ и возьмем кривую

$$L^1(\pi) = \{\, z = (x, \pi) \,|\, x \in [0, 2\pi] \,\}.$$

Эта кривая лежит в T_j, $j = \overline{0, \rho - 1}$, т.е. не пересекает отверстий и в плоскости u — «первой координаты» гомеоморфизма h_j, $u = \lambda^{-j}(\psi_0(z))$, кривая $L^1(\pi)$ будет два раза проходимым отрезком $[\alpha_j, \beta_j]$, или, с точностью до гомотопии, кривой, «окружающей» круг $O_j(\delta)$ (в частности, границей этого круга). Гомотопический класс таких кривых на D — это одна из образующих гомотопической группы $\pi(D)$, будем обозначать его через L^1_j. При этом в плоскости другой карты $h_k^{-1} : D \to T_k(\delta), k \neq j$ кривая, обходящая круг $O_j(\delta)$, переходит в кривую, обходящую одно из отверстий области $T_k(\delta)$. Из построения областей $O_j(\delta)$, $\overline{\mathbb{C}}_j(\delta)$, $T_j(\delta)$ и свойств гомеоморфизма $h : z \to w = (u, v)$ п. 6.3 следует существование $\delta_0 > 0$ такого, что области

$$\{\, z = (x, y) \,|\, x \in [\pi/2 - \delta_0, \pi/2 + \delta_0], \quad y \in [0, 2\pi] \,\}$$

и

$$\{\, z = (x, y) \,|\, x \in [3\pi/2 - \delta_0, 3\pi/2 + \delta_0], \quad y \in [0, 2\pi] \,\}$$

лежат целиком внутри $T_j(\delta)$, $j = \overline{0, \rho - 1}$, т.е. не пересекаются с отверстиями. В частности, $L^2(x) = \{\, z = (x, y) \,|\, y \in [0, 2\pi] \,\} \subset T_j(\delta)$, $j = \overline{0, \rho - 1}$ при $|x - \pi/2| < \delta_0$. Гомотопический класс кривых $h_j(L^2(x)) = L^2_j$ — это другая образующая гомотопической группы $\pi(D)$. Классы $L^{1,2}_j$, $j = \overline{0, \rho - 1}$ — полная система образующих группы $\pi(D)$.

Лемма 6.2. *Имеют место утверждения*

1. $D_j(\delta) \cap D_k(\delta) = D_\rho(\delta)$ — *не зависит от* j *и* k, $j \neq k$, $j, k = \overline{0, \rho - 1}$.
2. $D_0(\delta) \cap D_1(\delta) = (D_0(\delta) \cup D_1(\delta)) \cap D_2(\delta) = \ldots = (D_0(\delta) \cup \ldots \cup D_{\rho-2}(\delta)) \cap D_{\rho-1}(\delta) = D_\rho(\delta)$.
3. $h_j^{-1}(D_\rho(\delta)) = T_j^\rho(\delta)$ — *связно.*

Доказательство. По построению, имеем

$$D_\rho(\delta) = \Big\{\, (u, v \in D \,|\, u \notin \bigcup_{j=0}^{\rho-1} O_j(\delta) \,\Big\} = D_j(\delta) \cap D_k(\delta) = D_j(\delta) \setminus \widetilde{O}_j(\delta), \tag{6.17}$$

где $\widetilde{O}_j(\delta) = \{\, (u, v) \in D \,|\, u \in O_j(\delta) \,\}$. Отсюда сразу следует первое утверждение леммы. Второе утверждение следует непосредственно из первого. Наконец, по построению гомеоморфизмов h_j с учетом (6.17), имеем

$$h_j^{-1}(D_\rho(\delta)) = h_j^{-1}(D_j(\delta) \setminus \widetilde{O}_j(\delta)) = T_j(\delta) \setminus h_0^{-1}(\widetilde{O}_0(\delta))$$

и в силу условия (6.10)

$$T_j^\rho(\delta) =$$

$$= h_j^{-1}(D_\rho(\delta)) = T_j(\delta) \setminus \{\, (x,y) \mid \pi - \psi_1(x) < y < \pi + \psi_1(2\pi - x) \,\} =$$

$$= \{\, (x,y) \in T_j(\delta) \mid \pi + \psi_1(2\pi - x) < y < 3\pi - \psi_1(x) \,\},$$

откуда $T_j^\rho(\delta)$ — связно. Лемма доказана.

Построим теперь набор срезающих функций на T и D. Пусть $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \delta_4 < \delta_5 < 1/6$. Положим $T_j^p = T_j(\delta_p)$, $D_j^p = D_j(\delta_p)$, $p = \overline{1,5}$, $j = \overline{0, \rho - 1}$. Как уже отмечалось, $T_j^p \subset T_j^{p+1}$, $p = \overline{1,4}$, причем включение компактное. Возьмем срезающие функции из класса $C^\infty(T)$:

$$\begin{gathered} \widetilde{\chi}_j^p(z) \in C_0^\infty(T_j^{p+1}), \quad \widetilde{\chi}_j^p(z) \equiv 1 \text{ при } z \in T_j^p, \\ j = \overline{0, \rho - 1}, \quad p = \overline{1,4} \end{gathered} \tag{6.18}$$

и пусть

$$\chi_j^p(w) = h_j^{-1}(\widetilde{\chi}_j^p \mid w), \quad j = \overline{0, \rho - 1}, \quad p = \overline{1,4}, \tag{6.19}$$

т. е. $\chi_j^p(w) \in C_0^\infty(D_j^{p+1})$, $\chi_j^p(w) \equiv 1$ при $w \in D_j^p$. Очевидны свойства:

$$\begin{gathered} \widetilde{\chi}_j^p(z)\widetilde{\chi}_j^{p+1}(z) \equiv \widetilde{\chi}_j^p(z), \quad (1 - \widetilde{\chi}_j^{p+1}(z))\widetilde{\chi}_j^p(z) \equiv 0, \quad z \in T; \\ \chi_j^p(w)\chi_j^{p+1}(w) \equiv \chi_j^p(w), \quad (1 - \chi_j^{p+1}(w))\chi_j^p(w) \equiv 0, \quad w \in D; \\ j = \overline{0, \rho - 1}, \quad p = \overline{1,4} \end{gathered} \tag{6.20}$$

и для набора срезающих функций $\chi_j^p(w)$, $j = \overline{0, \rho - 1}$ на D выполнено условие (6.2) при любом $p = \overline{1,4}$.

§ 7. Замена переменных в псевдодифференциальных операторах

Пусть $h : T \to T$ — гомеоморфизм класса C^∞. Аналогично предыдущему, определим операторы замены переменных: $hf = h(f \mid z) = f(h(z))$, $h^{-1}f = h^{-1}(f \mid z) = f(h^{-1}(z))$, $z \in T$. Отметим, что бесконечно гладкая замена переменных сохраняет класс $W_2^s(T)$, точнее, линейные операторы $h, h^{-1} : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — непрерывны (см., например, [42, с. 288–290]).

Пусть $A : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, $A = \mathrm{op}(a_0(z,\varphi(\xi)) + a_{-1}(z,\xi))$, причем выполнены дополнительные условия:

$$\left\| \frac{\partial^s a_0(z,\varphi)}{\partial \varphi^s} \right\|_{(\gamma_0)} \leqslant M(s) < \infty, \quad s = \overline{0,\infty}, \quad \gamma_0 > 4; \tag{7.1}$$

$$\operatorname{ind} a_0(z,\varphi) \Bigg|_{\varphi\in[0,2\pi]} = 0; \tag{7.2}$$

$a_{-1}(z,\xi)$ задан при всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ и

$$\left| \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \left(\frac{\partial^{|s|}}{\partial \xi_1^{s_1} \partial \xi_2^{s_2}} \, a_{-1}(z,\xi) \right) \right| \leqslant \frac{M(|s|)}{(1+|\xi|)^{|s|+1}}, \tag{7.3}$$

$|k| = k_1 + k_2 = \overline{0,4}$, $|s| = s_1 + s_2 = \overline{0,\infty}$, $z = (x,y)$, $\xi = (\xi_1,\xi_2)$. Очевидно, из условия (7.1) следует (1.5). В свою очередь, аналогично доказательству леммы 1.1, легко показать, что из (7.3) следует (1.6). В дальнейшмем под псевдодифференциальным оператором нулевого порядка на торе будем подразумевать только оператор с символом, удовлетворяющим условиям (7.1), (7.2), (7.3).

В данном пункте рассмотрим оператор A в плоскости гомеоморфизма h т. е. $B = h^{-1} \circ A \circ h$, где A — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка. Напомним, что мы приняли обозначение $z\xi = x\xi_1 + y\xi_2$ для $z = (x,y)$, $\xi = (\xi_1,\xi_2)$.

Рассматривая функции $f(z) \in W_2^s(T)$, как двоякопериодические на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, можем считать, что гомеоморфизм $h(z)$ определен на всей плоскости, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Обозначим $h'(z)$ — производную Фреше $h(z)$, это матрица (2×2), $p(z) = (h'(z))^T$ — транспонированная матрица. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^2$, $\chi(z) \in C_0^\infty(U)$. Для функции $\Phi(z,\xi)$, $(z,\xi) \in \mathbb{R}^4$ введем интеграл

$$I(\Phi(z,\xi)\,|\,z,\eta) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Phi(z,\xi)\chi(t) e^{i[(z-t)\xi + (h(t)-h(z))\eta]}\, dt\, d\xi,$$

$t = (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$, $\xi = (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $dt = dt_1 dt_2$, $d\xi = d\xi_1 d\xi_2$.

Лемма 7.1. *Справедливы утверждения*:

1. *Пусть* $\Phi(z,\xi)$ *удовлетворяет условию*

$$\left| \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \left(\frac{\partial^{|s|}}{\partial \xi_1^{s_1} \partial \xi_2^{s_2}} \, \Phi(z,\xi) \right) \right| \leqslant \frac{M(|s|)}{(1+|\xi|)^{|s|+1}}, \tag{7.4}$$

$|k| = k_1 + k_2 = \overline{0,4}$, $|s| = s_1 + s_2 = \overline{0,\infty}$. *Тогда* $I(\Phi\,|\,z,\eta)$ *также удовлетворяет условию* (7.4) (*с заменой* ξ *на* η).

2. *Пусть* $\Phi(z,\varphi)$, $z \in \mathbb{R}^2$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ *удовлетворяет условию*

$$\left|\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\left(\frac{\partial^s}{\partial\varphi^s}\,\Phi(z,\varphi)\right)\right| \leqslant M(s), \quad |k| = \overline{0,4}, \quad s = \overline{0,\infty}. \tag{7.5}$$

Тогда функция

$$\alpha_0(z,\eta) = I(\Phi(z,\varphi(\xi))\,|\,z,\eta) - \chi(z)\Phi(z,\varphi(p(z)\eta))$$

удовлетворяет условию (7.4).

Утверждения леммы по существу доказаны в [43, с. 115–116]. Отметим, что функция $\chi(z)\Phi(z,\varphi(p(z)\eta)) = \Phi_0(z,\varphi(\eta))$ — однородна по η и $\Phi_0(z,\varphi)$ удовлетворяет условиям (7.1), (7.2).

Чтобы непосредственно воспользоваться леммой 7.1, т. е. результатами [43], расширим псевдодифференциальный оператор на торе до оператора на плоскости. Пусть $T \subset U \subset \mathbb{R}^2$, причем включения — компактны. Введем пространства Соболева

$$W_2^s(U) = \left\{ f(z)\,|\,f(z) \equiv 0, z \notin U;\ \|f\|_s^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\,d\xi < \infty \right\},$$

где

$$\widehat{f}(\xi) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(z)e^{-iz\xi}\,dz, \qquad dz = dx\,dy.$$

Будем рассматривать линейные операторы $A : W_2^s(T) \to W_2^s(U)$. Как и ранее, разлагая функцию $f(z) \in W_2^s(T)$ в ряд Фурье, получим, что

$$Af = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2} a(z,\xi)S_\xi f,$$

где $a(z,\xi) = e^{-iz\xi}A(e^{iz\xi})$ — символ оператора A, $A = \mathrm{op}(a(z,\xi))$, $z \in \mathbb{R}^2$, $\xi \in \mathbb{Z}^2$ и, естественно, $a(z,\xi) \equiv 0$ при $z \notin U$. Будем называть оператор $A : W_2^s(T) \to W_2^s(U)$ *псевдодифференциальным оператором нулевого порядка*, если $a(z,\xi) = a_0(z,\varphi(\xi)) + a_{-1}(z,\xi)$, причем главный символ $a_0(z,\varphi)$ удовлетворяет условиям (7.1), (7.2), а символ $a_{-1}(z,\xi)$ — условию (7.3). Соответственно $A : W_2^s(T) \to W_2^s(U)$ — оператор порядка (-1), если $a_0(z,\varphi) \equiv 0$. Аналогично предыдущему (см. § 1), псевдодифференциальный оператор нулевого порядка $A : W_2^s(T) \to W_2^s(U)$ — непрерывен, а оператор порядка (-1) — вполне непрерывен. В частности, если ввести оператор умножения двоякопериодической функции $f(z) \in W_2^s(T)$ на функцию $\chi(z) \in C_0^\infty(U)$, $\chi : f \to \chi f$, то $\chi : W_2^s(T) \to W_2^s(U)$ — непрерывен.

Лемма 7.2. *Пусть* $\chi(z) \in C_0^\infty(U)$, $\chi(z) \equiv 1$ *при* $z \in T$; $A : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — *линейный оператор.* A — *псевдодифференциальный оператор нулевого порядка тогда и только тогда, когда* $\chi A : W_2^s(T) \to W_2^s(U)$ — *псевдодифференциальный оператор нулевого порядка. При этом символы операторов* A *и* χA *связаны равенством*:

$A = \mathrm{op}(a(z,\xi)) \iff \chi A = \mathrm{op}(\chi(z)a(z,\xi))$. *В частности, символ оператора A равен символу оператора χA при $z \in T$.*

Утверждения леммы очевидны.

Теперь пусть $A = \mathrm{op}(a(z,\xi)) : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$, причем символ $a(z,\xi)$ задан при всех $\xi \in \mathbb{C}$. Введем оператор $\widetilde{A} : W_2^s(U) \to W_2^s(U)$:

$$\widetilde{A}f = \chi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^2} a(z,\xi)e^{iz\xi}\left[-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t)e^{-it\xi}\,dt\right]d\xi$$

и пусть $\Psi(A) = \widetilde{A} \circ \chi : W_2^s(T) \to W_2^s(U)$.

Лемма 7.3. *Если $A = \mathrm{op}(a_0(z,\varphi(\xi)) + a_{-1}(z,\xi)) : W_2^s(T) \to \to W_2^s(T)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, то $\Psi(A) : W_2^s(T) \to W_2^s(U)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с главным символом $\chi^2(z)a_0(z,\varphi)$.*

Доказательство. Из условия (7.1) сразу следует условие (7.5) для $a_0(z,\varphi)$. Вычислим символ оператора $\Psi(A)$ непосредственно:

$$a_1(z,\eta) = e^{-iz\eta}\Psi(A)e^{iz\eta} =$$

$$= e^{-iz\eta}\chi(z)\int\limits_{\mathbb{R}^2} a(z,\xi)e^{iz\xi}\left[-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\chi(t)e^{-it\xi}e^{it\eta}\,dt\right]d\xi =$$

$$= -\frac{\chi(z)}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} a(z,\xi)\chi(t)e^{i[(z-t)\xi+(t-z)\eta]}\,dt\,d\xi =$$

$$= \chi(z)I(a_0(z,\varphi(\xi))\,|\,z,\eta) + \chi(z)I(a_{-1}(z,\xi)\,|\,z,\eta).$$

Применяя лемму 7.1 с $h(z) \equiv z$, получим

$$a_1(z,\eta) = \chi^2(z)a_0(z,\varphi(\eta)) + \alpha(z,\eta),$$

где $\alpha(z,\eta)$ удовлетворяет условию (7.4), т.е. условию (7.3). Лемма доказана.

Следствие. Оператор $(\chi^2 A - \Psi(A)) = \alpha : W_2^s(T) \to W_2^s(U)$ — псевдодифференциальный оператор порядка (-1).

Теорема 7.1. *Пусть $A = [op(a_0(z,\varphi(\xi)) + a_{-1}(z,\xi))] : W_2^s(T) \to \to W_2^s(T)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка. Тогда $B = h^{-1} \circ A \circ h : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с главным символом*

$$b_0(z,\varphi(\xi)) = a_0(h^{-1}(z), \varphi(p(h^{-1}(z))\xi)).$$

Доказательство. Так как $h^{-1}(z)$, $p(h^{-1}(z))$ — функция и матрица класса C^∞, то из условий (7.1), (7.2) для $a_0(z,\varphi)$ следует, что символ $b_0(z,\varphi)$ удовлетворяет тем же условиям (7.1), (7.2).

В силу леммы 7.2 достаточно доказать утверждение теоремы для оператора $\chi^2 B$, где $\chi \in C_0^\infty(U)$, $U \supset T$; $\chi(z) \equiv 1$ при $z \in T$. Пусть $\widetilde{\chi}(z) = \chi(h(z))$, имеем $\widetilde{\chi}(z) \in C_0^\infty(\widetilde{U})$, $\widetilde{U} = h(U)$. Так как $h(T) = T$, то $T \subset \widetilde{U} \subset \mathbb{C}$ и $\widetilde{\chi}(z) \equiv 1$ при $z \in T$. При этом $\chi^2 B = \chi^2 h^{-1} A h = h^{-1}\widetilde{\chi}^2 A h$. С учетом следствия леммы 7.3 и первого утверждения леммы 7.1 получим

$$\chi^2 B = h^{-1}\Psi(A_0)h + \alpha = A_1 + \alpha, \tag{7.6}$$

где α — псевдодифференциальный оператор порядка (-1),

$$\Psi(A_0)f = \widetilde{\chi}(z)\int\limits_{\mathbb{R}^2} a_0(z,\varphi(\xi))e^{iz\xi}\left[-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t)\widetilde{\chi}(t)e^{-it\xi}\,dt\right]d\xi,$$

$$\Psi(A_0) : W_2^s(T) \to W_2^s(\widetilde{U}).$$

Непосредственно вычислим символ оператора A_1:

$$a_1(z,\eta) = e^{-iz\eta}A_1 e^{iz\eta} =$$

$$= \frac{1}{h}\left[e^{-ih(z)\eta}\widetilde{\chi}(z)\int\limits_{\mathbb{R}^2} a_0(z,\varphi(\xi))e^{iz\xi}\left(-\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\widetilde{\chi}(t)e^{ih(t)\eta}e^{-it\xi}\,dt\right)d\xi\right] =$$

$$= h^{-1}\left[-\frac{\widetilde{\chi}(z)}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} a_0(z,\varphi(\xi))\widetilde{\chi}(t)e^{i[(z-t)\xi+(h(t)-h(z))\eta]}\,dt\,d\xi\right],$$

т. е.

$$a_1(h(z),\eta) = \widetilde{\chi}(z)I(a_0(z,\varphi(\xi))\,|\,z,\eta).$$

Пользуясь вторым утверждением леммы 7.1, получим, что

$$a_1(h(z),\eta) = \widetilde{\chi}^2(z)a_0(z,\varphi(p(z)\eta)) + \alpha(z,\eta), \tag{7.7}$$

где $\alpha(z,\eta)$ — удовлетворяет условию (7.3). Как вытекает из леммы 7.2, для вычисления символа оператора B следует взять $z \in T$, откуда $\widetilde{\chi}(z) = 1$ и из (7.7) и (7.6) следует утверждение теоремы.

Теперь пусть гомеоморфизм h действует на подмножествах T, $h : T_1 \to T_2$, $T_{1,2} \subset T$. Будем обозначать

$$W_2^s(T_{1,2}) = \left\{ f \in W_2^s(T)\,|\, f \equiv 0 \text{ при } z \notin T_{1,2} \right\}.$$

Тогда операторы замены переменных действуют в пространствах $W_2^s(T_{1,2})$, $h : W_2^s(T_2) \to W_2^s(T_1)$; $h^{-1} : W_2^s(T_1) \to W_2^s(T_2)$. Возьмем функции $\chi_{1,2}(z) \in C_0^\infty(T_{1,2})$. Пусть $A : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$, $B = h^{-1}\chi_1 A h \chi_2$ $(B : W_2^s(T) \to W_2^s(T_2) \subset W_2^s(T))$.

Теорема 7.2. *Если A — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, то B — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с главным символом*

$$b_0(z,\varphi(\eta)) = \chi_1(h^{-1}(z))\chi_2(z)a_0(h^{-1}(z),\varphi(p(h^{-1}(z))\eta)).$$

Отметим, что хотя отображение h^{-1} определено только для $z \in T_2$, но $b_0(z,\varphi)$ удовлетворяет условию (7.1) за счет множителя $\chi_1(h^{-1}(z))\chi_2(z)$.

Теорема 7.2 доказывается точно так же, как и теорема 7.1.

§ 8. Псевдодифференциальные операторы на римановой поверхности

Пусть $h_j : T_j \to D$ — заданный в § 6 атлас для римановой поверхности, $\chi_j(w)$ — заданный там же набор срезающих функций, удовлетворяющих условию (6.2) и $\chi_j^0(w)$ — разбиение единицы, построенное в лемме 6.1. Для единообразия далее будем указывать $j = \overline{0, \rho - 1}$, хотя при $\rho = 0$ $j = 0, 1$. Введем пространство функций

$$W_2^s(D) = \left\{ f(w) \,|\, h_j(\chi_j^0 f \,|\, z) \in W_2^s(T),\ j = \overline{0, \rho - 1} \right\}$$

и пусть

$$\|f(w)\|_s = \sum_j \|h_j(\chi_j^0 f)\|_s.$$

Пространство $W_2^s(T)$ инвариантно при бесконечно гладкой замене переменных (см., например, [42, с. 288–290]), откуда следует, что $W_2^s(D)$ не зависит от выбора атласа и разбиения единицы, однако $\|\cdot\|_s$ от атласа и срезающих функций зависит. Определим, как обычно, класс финитных функций

$$W_2^s(D_0) = \{ f \in W_2^s(D) \,|\, f \equiv 0 \text{ при } w \notin D_0 \}, \quad D_0 \subset D.$$

Пусть $A : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — линейный оператор. Будем говорить, что оператор A удовлетворяет *условию локальности* [40], [43, с. 113–114], если оператор $\tau_1 A \tau_2$ вполне непрерывен [1] в $W_2^s(D)$ для любых функций $\tau_{1,2}$ таких, что замыкания их носителей не пересекаются:

$$\overline{\operatorname{supp} \tau_1} \cap \overline{\operatorname{supp} \tau_2} = \emptyset, \quad \operatorname{supp} \tau = \{ w \in D \mid \tau(w) \neq 0 \}.$$

Отметим, что тогда $\tau_1(w)\tau_2(w) \equiv 0$. Если $A : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, то в силу теоремы 1.5 § 1 главный символ оператора $\tau_1 A \tau_2$ равен нулю, откуда, с учетом теоремы 1.2, следует, что любой псевдодифференциальный оператор нулевого порядка на торе удовлетворяет условию локальности.

Рассмотрим *локальное представление* оператора A:

$$A_j = h_j \circ \chi_j A \circ h_j^{-1} \widetilde{\chi}_j : W_2^s(T) \to W_2^s(T). \tag{8.1}$$

---

[1] Обычно требуется, чтобы оператор $\tau_1 A \tau_2$ был порядка $(-\infty)$ [43, с. 122]. Мы несколько ослабили это условие, так как для наших целей достаточно результатов с точностью до вполне непрерывного слагаемого.

Будем называть A *псевдодифференциальным оператором нулевого порядка на* D, если он удовлетворяет условию локальности и все его локальные представления A_j, $j=\overline{0,\rho-1}$ — псевдодифференциальные операторы нулевого порядка, т.е. их символы имеют вид (1.4), причем символ $a_0(z,\xi)$ удовлетворяет условиям (7.1), (7.2), а $a_{-1}(z,\xi)$ — условию (7.3). Аналогично A будет *псевдодифференциальным оператором порядка* m *на* D, если он удовлетворяет условию локальности и все его локальные представления A_j, $j=\overline{0,\rho-1}$ — псевдодифференциальные операторы порядка m (см. п. 1.1 § 1). В главах 3, 4 мы будем рассматривать только псевдодифференциальные операторы нулевого порядка.

Отметим, что из (8.1) следует $\chi_j A\chi_j = h_j^{-1}A_jh_j$, откуда

$$\chi_j\chi_k A\chi_k\chi_j = \chi_k h_j^{-1}A_jh_j\chi_k = \chi_j h_k^{-1}A_kh_k\chi_j$$

или

$$h_j^{-1}\chi_k(h_j(z))A_j\chi_k(h_j(z))h_j = h_k^{-1}\chi_j(h_k(z))A_k\chi_j(h_k(z))h_k.$$

Тогда для разных локальных представлений имеем

$$\chi_j(h_k(z))A_k\chi_j(h_k(z)) = h_kh_j^{-1}\chi_k(h_j(z))A_j\chi_k(h_j(z))h_jh_k^{-1}$$

или, с учетом формулы (6.1) § 6,

$$\tau_{kj}A_k\tau_{kj} = h_{jk}^{-1}\tau_{jk}A_j\tau_{jk}h_{jk} = h_{jk}^{-1}\tau_{jk}A_jh_{jk}\widetilde{\chi}_k, \tag{8.2}$$

где $\tau_{kj}(z)=\chi_j(h_k(z))=h_k(\chi_j\,|\,z)$, $h_{jk}=h_k^{-1}\circ h_j$. Отсюда, согласно теореме 7.2, следует, что класс псевдодифференциальных операторов нулевого порядка не зависит от выбора атласа и срезающих функций. В частности, в (8.1) можно брать в качестве срезающих функций $\chi_j^s(w)$ с любым $s=\overline{1,4}$. Кроме того, если $A_j=\operatorname{op}(a_0^j(z,\varphi(\xi))+a_{-1}^j(z,\xi))$, то главные символы $a_0^j(z,\varphi)$ при разных j связаны соотношением

$$\begin{gathered}(\tau_{kj}(z))^2a_0^k(z,\varphi(\xi)) = (\widetilde{\chi}_k(z))^2a_0^j(h_{jk}^{-1}(z),\varphi(p_{jk}(h_{jk}^{-1}(z))\xi)),\\ p_{jk}=(h'_{jk}(z))^T.\end{gathered} \tag{8.3}$$

Набор символов $a_0^j(z,\varphi)$, $j=\overline{0,\rho-1}$ будем называть *главным символом* оператора A.

Пусть $\chi_j(w)=\chi_j^4(w)$, $j=\overline{0,\rho-1}$ и $w\in D_j^4\cap D_k^4$, а, следовательно, $z=h_k^{-1}(w)\in T_k^4\cap h_k^{-1}(D_j^4)$. Тогда $\chi_j(w)=\chi_k(w)=1$, откуда $\widetilde{\chi}_k(z)= =\tau_{kj}(z)=1$ и при таком z равенство (8.3) примет вид

$$a_0^k(z,\varphi(\xi)) = a_0^j(h_{jk}^{-1}(z),\varphi(p_{jk}(h_{jk}^{-1}(z))\xi))$$

или

$$\begin{gathered}a_0^k(h_k^{-1}(w),\varphi(\xi)) = a_0^j(h_j^{-1}(z),\varphi(p_{jk}(h_j^{-1}(z))\xi)),\\ p_{jk}=((h_k\circ h_j^{-1})')^T.\end{gathered} \tag{8.4}$$

Равенство (8.4) означает, что главный символ есть функция $a_0(w, \varphi(\xi)) = a_0(w, \xi)$, инвариантно определенная на кокасательном расслоении $(w, \xi) \in T^*(D)$ над D (см. [42, с. 178–190], [43, с. 116]). В главах 3 и 4 нам будет достаточно данного выше неинвариантного определения главного символа $a_0^j(z, \varphi(\xi))$, однако в гл. 5 мы вернемся к определению главного символа, как функции на $T^*(D)$.

Установим некоторые свойства псевдодифференциальных операторов нулевого порядка на D. Пусть $h : \widetilde{T} \to D$ — гомеоморфизм, $\widetilde{T} \subset T$, $\widetilde{D} = h(\widetilde{T})$, $\widetilde{\tau}_1(z) \in C_0^\infty(\widetilde{T})$, $\tau_2(w) \in C_0^\infty(\widetilde{D})$.

Лемма 8.1. *Если $\alpha : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — вполне непрерывен, то*

$$A = h^{-1} \circ \widetilde{\tau}_1 \alpha \circ h\tau_2 : W_2^s(D) \to W_2^s(\widetilde{D}) \subset W_2^s(D)$$

— вполне непрерывен.

Утверждение леммы следует из очевидной непрерывности операторов $\tau_2 : W_2^s(D) \to W_2^s(\widetilde{D})$, $h : W_2^s(\widetilde{D}) \to W_2^s(\widetilde{T})$, $\widetilde{\tau}_1 : W_2^s(T) \to W_2^s(\widetilde{T})$, $h^{-1} : W_2^s(\widetilde{T}) \to W_2^s(\widetilde{D})$.

Следствие. Если $\alpha : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — оператор порядка (-1), то A — вполне непрерывен в $W_2^s(D)$.

Лемма 8.2. *Пусть $B = [op(b_0(z, \varphi(\xi)) + b_{-1}(z, \xi))] : W_2^s(T) \to$ $\to W_2^s(T)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка на T. Тогда $A = (h^{-1} \circ \widetilde{\tau}_1 B \circ h\tau_2) : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка на D с главным символом*

$$a_0^j(z, \varphi(\xi)) = \tau(z) b_0(\widetilde{h}_j^{-1}(z), \varphi(\widetilde{p}_j(\widetilde{h}_j^{-1}(z))\xi)),$$

где $\widetilde{h}_j = hh_j^{-1}$, $\widetilde{p}_j = (\widetilde{h}_j')^T$, $\tau(z) = (\widetilde{\chi}_j(z))^2 \widetilde{h}_j^{-1}(\widetilde{\tau}_1) h_j(\tau_2)$.

Доказательство. Если $\overline{\operatorname{supp} \tau_3} \cap \overline{\operatorname{supp} \tau_4} = \emptyset$, то

$$\tau_3 A \tau_4 = \tau_3 h^{-1} \widetilde{\tau}_1 B h \tau_2 \tau_4 = h^{-1} \widetilde{\tau}_3 \widetilde{\tau}_1 B \widetilde{\tau}_4 h \tau_2,$$

где $\widetilde{\tau}_{3,4} = h(\tau_{3,4} \,|\, z)$ и, следовательно, $\widetilde{\tau}_3 \cdot \widetilde{\tau}_4 \equiv 0$. Но тогда в силу теоремы 1.5 гл. 1, $\widetilde{\tau}_3 B \widetilde{\tau}_4 : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — оператор порядка (-1), откуда по следствию из леммы 8.1, $(\tau_3 A \tau_4)$ — вполне непрерывен в $W_2^s(D)$. Итак, для оператора A выполнено условие локальности.

Рассмотрим теперь локальные представления

$$A_j = h_j \chi_j A h_j^{-1} \widetilde{\chi}_j = h_j \chi_j h^{-1} \widetilde{\tau}_1 B h \tau_2 h_j^{-1} \widetilde{\chi}_j = \widetilde{h}_j^{-1} \tau_3 B \widetilde{h}_j \tau_4, \qquad (8.5)$$

где $\tau_3 = \widetilde{\tau}_1 \cdot h(\chi_j)$, $\tau_4 = \widetilde{\chi}_j \cdot h_j(\tau_2)$. Из (8.5) с учетом теоремы 7.2 следует, что $A_j : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с главным символом

$$\begin{aligned} a_0^j(z, \varphi(\xi)) &= \tau_3(\widetilde{h}_j^{-1}(z)) b_0(\widetilde{h}_j^{-1}(z), \varphi(\widetilde{p}_j(\widetilde{h}_j^{-1}(z))\xi)) \tau_4(z) = \\ &= \widetilde{h}_j^{-1}(\widetilde{\tau}_1) \widetilde{\chi}_j b_0(\widetilde{h}_j^{-1}(z), \varphi(\widetilde{p}_j(\widetilde{h}_j^{-1}(z))\xi)) \widetilde{\chi}_j \cdot h_j(\tau_2) = \\ &= \tau(z) b_0(\widetilde{h}_j^{-1}(z), \varphi(\widetilde{p}_j(\widetilde{h}_j^{-1}(z))\xi)), \end{aligned}$$

чем и завершается доказательство леммы.

Теорема 8.1. *Пусть A, B — псевдодифференциальные операторы нулевого порядка на D. Тогда*:

1. $A, B : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ *— непрерывны.*

2. *Если главный символ A равен нулю, $a_0^j(z,\varphi) \equiv 0$, $j = \overline{0, \rho - 1}$, то $A : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен.*

3. *$AB = C + \alpha$, где $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, C — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка на D с главным символом $c_0^j(z,\varphi) = a_0^j(z,\varphi)b_0^j(z,\varphi)$, $j = \overline{0, \rho - 1}$, где a_0^j, b_0^j — главные символы операторов A и B соответственно.*

4. *$AB - BA = \alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен.*

Третье утверждение теоремы означает, что при умножении операторов их главные символы перемножаются с точностью до вполне непрерывного слагаемого.

Доказательство. Пусть $\chi_j^0(w)$, $j = \overline{0, \rho - 1}$ — разбиение единицы, построенное в лемме 6.1 с помощью срезающих функций $\chi_j^2(w)$, т. е.

$$\chi_j^0(w) = \psi_j(w)\chi_j^2(w), \quad \psi_j(w) = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ \prod\limits_{k=0}^{j-1}(1 - \chi_k^2(w)), & j > 0. \end{cases} \tag{8.6}$$

Тогда из (6.6), (6.20) получим $\chi_j^0\chi_j^3 \equiv \chi_j^0\chi_j^4 \equiv \chi_j^0$, $j = \overline{0, \rho - 1}$. Представим

$$Af = A\Big(\sum \chi_j^0\Big) f = \Big(\sum A\chi_j^0\Big) f = \sum B_j\psi_j f,$$

где $B_j = A\chi_j^2$. Для доказательства непрерывности оператора A достаточно доказать непрерывность в $W_2^s(D)$ операторов B_j, $j = \overline{0, \rho - 1}$. Но

$$B_j = (\chi_j^3 + 1 - \chi_j^3)A\chi_j^2 = \chi_j^3 A\chi_j^2 + (1 - \chi_j^3)A\chi_j^2 = C_1 + \alpha,$$

причем из построения $\chi_j^{2,3}$ (см. (6.20), (6.6)) и условия локальности для оператора A следует, что $\alpha = (1 - \chi_j^3)A\chi_j^2 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен. В свою очередь из (8.1) с учетом (6.20), (6.6) следует, что

$$C_1 = \chi_j^3 A\chi_j^2 = \chi_j^3 A\chi_j^3\chi_j^2 = h_j^{-1}A_j h_j \chi_j^2, \tag{8.7}$$

где A_j — локальное представление оператора A (8.1). Так как по условию A_j — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка на T, то в силу теоремы 1.3 $A_j : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — непрерывен. Тогда из (8.7) следует непрерывность оператора $C_1 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$. Итак, первое утверждение теоремы доказано.

Далее, если главный символ A равен нулю, то A_j — операторы порядка (-1), т. е. вполне непрерывны в $W_2^s(T)$ (теорема 1.2 гл. 1). Тогда из леммы 8.1 следует, что оператор C_1 вполне непрерывен в $W_2^s(D)$, откуда непосредственно вытекает второе утверждение теоремы.

Обратимся к композиции $C_0 = AB$. Докажем сначала условие локальности для C_0. Пусть $\overline{\operatorname{supp}\tau_1} \cap \overline{\operatorname{supp}\tau_2} = \emptyset$. Возьмем множество $U_3 \supset \overline{\operatorname{supp}\tau_1}$ такое, что $\overline{U_3} \cap \overline{\operatorname{supp}\tau_2} = \emptyset$ и построим срезающую функцию $\tau(w) \in C_0^\infty(U_3)$, $\tau(w) \equiv 1$ при $w \in \overline{\operatorname{supp}\tau_1}$. Тогда

$$\tau_1 C_0 \tau_2 = \tau_1 A(\tau + 1 - \tau)B\tau_2 = \tau_1 A\tau B\tau_2 + \tau_1 A(1-\tau)B\tau_2 = C_3 + C_4,$$

причем по построению τ и в силу условия локальности операторы $\tau B\tau_2$ и $\tau_1 A(1-\tau)$ вполне непрерывны в $W_2^s(D)$, а операторы $\tau_1 A$ и $B\tau_2$ — просто непрерывны (первое утверждение теоремы). Отсюда $\tau_1 C_0 \tau_2$ — вполне непрерывен в $W_2^s(D)$.

Теперь возьмем локальные представления

$$A_j = h_j \chi_j^4 A h_j^{-1} \widetilde{\chi}_j^4 = \operatorname{op}(a_0^j(z, \varphi(\xi)) + a_{-1}^j(z, \xi));$$

$$B_j = h_j \chi_j^4 B h_j^{-1} \widetilde{\chi}_j^4 = \operatorname{op}(b_0^j(z, \varphi(\xi)) + b_{-1}^j(z, \xi));$$

т. е.

$$\chi_j^4 A \chi_j^4 = h_j^{-1} A_j h_j, \quad \chi_j^4 B \chi_j^4 = h_j^{-1} B_j h_j. \tag{8.8}$$

С учетом условия локальности (6.20), (6.6) и (8.8), (8.8) имеем

$$C_0 = AB = \sum \chi_j^0 AB = \sum \psi_j \chi_j^2 AB(\chi_j^3 + 1 - \chi_j^3) =$$

$$= \sum \psi_j \chi_j^2 AB\chi_j^3 + \alpha = \sum \psi_j \chi_j^2 A((\chi_j^4)^2 + 1 - (\chi_j^4)^2)B\chi_j^3 + \alpha =$$

$$= \sum \psi_j \chi_j^2 \chi_j^4 A \chi_j^4 \chi_j^4 B \chi_j^4 \chi_j^3 + \alpha = \sum \chi_j^0 h_k^{-1} A_j h_j h_j^{-1} B_j h_j \chi_j^3 + \alpha =$$

$$= \sum \chi_j^0 h_j^{-1} C_j h_j \chi_j^3 + \alpha = C + \alpha,$$

где $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен. Из теоремы 1.5 § 1 следует, что $C_j = A_j B_j : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — псевдодифференциальные операторы нулевого порядка с главным символом $c_0^j(z, \varphi) = a_0^j(z, \varphi) b_0^j(z, \varphi)$. Очевидно, символ $c_0^j(z, \varphi)$ удовлетворяет условиям (7.1), (7.2). Тогда из леммы 8.2 получим, что C — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка.

Найдем главный символ оператора C. Пусть $\widetilde{\chi}_j^0 = h_j(\chi_j^0)$, $\widetilde{\chi}_{kj}^0 = h_k(\chi_j^0)$. Из вида χ_j^0 (8.6) и формул (6.20), (6.6) следует, что

$$\sum_j \widetilde{\chi}_{kj}^0 \equiv 1, \quad z \in T_k^4; \qquad \widetilde{\chi}_{kj}^0 \, \tau_{kj}^{3,4} = \widetilde{\chi}_{kj}^0, \tag{8.9}$$

где $\tau_{kj}^{3,4} = h_k(\chi_j^{3,4})$. Кроме того, для символов a_0, b_0 выполнены условия (8.3) с $\tau_{kj} = \tau_{kj}^4$, $\widetilde{\chi}_k = \widetilde{\chi}_k^4$, откуда, перемножая равенства (8.3) для a_0 и b_0, получим

$$(\tau_{kj}^4)^4 c_0^k(z, \varphi(\xi)) = (\widetilde{\chi}_k^4)^4 c_0^j(h_{jk}^{-1}(z), \varphi(p_{jk}(h_{jk}^{-1}(z))\xi)). \tag{8.10}$$

Возьмем локальные представления оператора C в виде

$$\widetilde{C}_k = h_k(\chi_k^4)^2 C h_k^{-1}(\widetilde{\chi}_k^4)^2.$$

Подставив вместо C его выражение, найдем

$$\widetilde{C}_k = h_k(\chi_k^4)^2 \left[\sum_j \chi_j^0 h_j^{-1} C_j h_j \chi_j^3\right] h_k^{-1}(\widetilde{\chi}_k^4)^2 =$$
$$= \sum_j h_k(\chi_k^4)^2 h_j^{-1} \widetilde{\chi}_j^0 C_j h_j h_k^{-1} \tau_{kj}^3 (\widetilde{\chi}_k^4)^2 =$$
$$= \sum_j h_{jk}^{-1}(\tau_{jk}^4)^2 \widetilde{\chi}_j^0 C_j h_{jk} \tau_{kj}^3 (\widetilde{\chi}_k^4)^2.$$

Тогда по теореме 7.2 главный символ оператора $\widetilde{C}_k$ имеет вид

$$\widetilde{c}_0^k(z, \varphi(\xi)) =$$
$$= \sum_j h_{jk}^{-1}((\tau_{jk}^4)^2 \mid z) \cdot h_{jk}^{-1}((\widetilde{\chi}_j^0 \mid z) c_0^j(h_{jk}^{-1}(z), \varphi(p_{jk}(h_{jk}^{-1}(z))\xi)) \tau_{kj}^3 (\widetilde{\chi}_k^4)^2$$

и с учетом (8.9) и (8.10) приходим к соотношениям при $z \in T_k^4$

$$\widetilde{c}_0^k(z, \varphi(\xi)) = \sum_j (\widetilde{\chi}_k^4)^2 \widetilde{\chi}_{kj}^0 c_0^j(h_{jk}^{-1}(z), \varphi(p_{jk}(h_{jk}^{-1}(z))\xi)) \tau_{kj}^3 (\widetilde{\chi}_k^4)^2 =$$
$$= \sum_j \widetilde{\chi}_{kj}^0 (\tau_{kj}^4)^4 c_0^k(z, \varphi(\xi)) \tau_{kj}^3 = \sum_j \widetilde{\chi}_{kj}^0 c_0^k(z, \varphi(\xi)) = c_0^k(z, \varphi(\xi)),$$

чем и завершается доказательство третьего утверждения.

Четвертое утверждение теоремы следует из второго и третьего.

Пусть $A : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка на D. Будем говорить, что символ оператора A *не вырождается*, если главный символ локальных представлений (8.1) $a_0^j(z, \varphi) \neq 0$ при $\widetilde{\chi}_j(z) \neq 0$. Как следует из формулы (8.3), класс операторов с невырождающимся символом не зависит от выбора атласа и срезающих функций χ_j, $j = \overline{0, \rho - 1}$.

Возьмем в качестве срезающих функций $\chi_j^4(w)$, $j = \overline{0, \rho - 1}$, тогда символ $a_0^j(z, \varphi) \neq 0$ при $z \in T_j^4$. Если род поверхности $\rho = 0$, то T_j^4 — это круг (п. 6.2), т. е. любая кривая в T_j^4 гомотопна нулю и, следовательно, индекс $a_0^j(z,\varphi)$ по любой замкнутой кривой в T_j^4 равен нулю. Если $\rho \geqslant 1$, то области T_j^4 содержат кривые $L^1(\pi)$ и $L^2(\pi/2)$ (п. 6.4). Введем *индексы символа* оператора A

$$\varkappa_1^j = \operatorname{ind} a_0^j(z,\varphi)\Big|_{L^1(\pi)}, \quad \varkappa_2^j = \operatorname{ind} a_0^j(z,\varphi)\Big|_{L^2(\pi/2)}, \quad j=\overline{0,\rho-1}. \tag{8.11}$$

Фактически индексы символа вычисляются по всем образующим гомотопической группы $\pi(D)$. Из формулы (8.3) с учетом того, что индекс a_0^j по φ равен нулю, следует, что набор индексов $\varkappa_{1,2}^j$, $j=\overline{0,\rho-1}$ не зависят от выбора атласа и срезающих функций, причем индексы $\varkappa_1^j$ в другом локальном представлении — это индексы a_0^k, $k\neq j$ по кривой, обходящей одно из отверстий области T_k^4. В частности это означает, что если все индексы символа равны нулю, то индекс функции $a_0^j(z,\varphi)$ по любой замкнутой кривой в T_j^4 равен нулю, $j=\overline{0,\rho-1}$.

§ 9. Продолжение операторов

Пусть $\chi(w)\in C^\infty(D)$, $A: W_2^s(D)\to W_2^s(D)$ — линейный оператор, удовлетворяющий условию

$$(1-\chi(w))Af = (1-\chi(w))f, \quad \forall f\in W_2^s(D).$$

В дальнейшем это условие будет записываться в виде

$$(1-\chi)A = 1-\chi, \tag{9.1}$$

причем подразумевается, что в правой части стоит оператор умножения на функцию $1-\chi$. Если $A: W_2^s(T)\to W_2^s(T)$ — оператор с символом $a(z,\xi)$, $z\in T$, $\xi\in\mathbb{Z}^2$, то условие (9.1), очевидно, означает, что

$$(1-\chi(z))a(z,\xi)\equiv 1-\chi(z), \tag{9.2}$$

т. е. $a(z,\xi)\equiv 1$ при $z\in \operatorname{supp}(1-\chi)$.

Лемма 9.1. *Для псевдодифференциального оператора нулевого порядка на торе*

$$A = \operatorname{op}(a_0(z,\varphi(\xi)) + a_{-1}(z,\xi)) : W_2^s(T)\to W_2^s(T)$$

условие (9.1) *означает, что*

$$(1-\chi(z))a_0(z,\varphi)\equiv 1-\chi(z), \quad (1-\chi(z))a_{-1}(z,\xi)\equiv 0. \tag{9.3}$$

Действительно, в силу (7.3)

$$|a_{-1}(z,\xi)|\leqslant \frac{M}{1+|\xi|},$$

тогда, выбирая $\xi=\xi_0 t$ и, переходя в равенстве (9.2) к пределу при $t\to +\infty$, получим $(1-\chi)a_0(z,\varphi(\xi_0))\equiv 1-\chi$, откуда и следует (9.3).

Лемма 9.2. *Пусть операторы A и B удовлетворяют условию* (9.1). *Тогда*:

1. *Композиция AB удовлетворяет* (9.1).

2. *Если A обратим справа, то правый обратный A^{-1} также удовлетворяет* (9.1). *При этом если $f \in \ker A$, т. е. $Af = 0$, то* $(1-\chi)f \equiv 0$.

3. *Если A обратим, то обратный A^{-1} удовлетворяет* (9.1).

Доказательство. Во-первых, если A и B удовлетворяют условию (9.1), то $(1-\chi)AB = (1-\chi)B = 1-\chi$, т. е. справедливо первое утверждение леммы. Далее, пусть A^{-1} — правый обратный к A, тогда с учетом (9.1)

$$1-\chi = (1-\chi)E = (1-\chi)A \circ A^{-1} = (1-\chi)A^{-1},$$

т. е. A^{-1} также удовлетворяет (9.1). Наконец, если $Af = 0$, то

$$(1-\chi)f = (1-\chi)Af \equiv 0.$$

Итак, второе утверждение леммы полностью доказано. Третье утверждение следует из второго.

Теперь опишем конструкцию продолжения оператора на торе $A : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$, удовлетворяющего условию (9.1), до оператора на римановой поверхности D $H(A) : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$, которой будем систематически пользоваться в дальнейшем.

Пусть $A : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$, $\widetilde{\chi}(z) \in C_0^\infty(U)$, $U \subset T$, причем для A выполнено условие (9.1) с $\chi = \widetilde{\chi}$. Тогда

$$A\widetilde{\chi} = \widetilde{\chi}A\widetilde{\chi} + (1-\widetilde{\chi})A\widetilde{\chi} = \widetilde{\chi}(A\widetilde{\chi} + 1 - \widetilde{\chi}),$$

т. е. $A\widetilde{\chi}f \in W_2^s(U)$, $A\widetilde{\chi} : W_2^s(U) \to W_2^s(U)$. Пусть, далее, имеется гомеоморфизм класса C^∞ $h : U \to D$, $h(U) = V$. Как уже отмечалось, тогда операторы замены переменных

$$h : W_2^s(V) \to W_2^s(U), \quad h^{-1} : W_2^s(U) \to W_2^s(V).$$

Обозначим $\chi = h^{-1}(\widetilde{\chi} \mid w) \in C_0^\infty(V)$ и построим операторы

$$\begin{aligned} H_0(A) = h^{-1}A\widetilde{\chi}h = h^{-1}Ah\chi : W_2^s(D) \to W_2^s(V) \subset W_2^s(D),\\ H(A) = H_0(A) + 1 - \chi : W_2^s(D) \to W_2^s(D). \end{aligned} \tag{9.4}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} H_0(A) = h^{-1}(\widetilde{\chi} + 1 - \widetilde{\chi})A\widetilde{\chi}h = h^{-1}\widetilde{\chi}A\widetilde{\chi}h + h^{-1}\widetilde{\chi}(1-\widetilde{\chi})h =\\ = \chi H_0(A) + \chi(1-\chi) = \chi H(A). \end{aligned} \tag{9.5}$$

Теорема 9.1. *Пусть $A : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ удовлетворяет условию* (9.1) *с $\chi = \widetilde{\chi}(z)$. Тогда*:

1. *$H(A)$ также удовлетворяет* (9.1) *с $\chi = \chi(w)$.*

2. *Если* $B : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ *удовлетворяет* (9.1), *то* $H(AB) = H(A)H(B)$.

3. *Если* A *обратим справа, то* $H(A)$ *также обратим справа и* $H(A)^{-1} = H(A^{-1})$, *при этом*
$$f(z) \in \ker A \iff h^{-1}(f \mid w) \in \ker H(A).$$

4. *Если* A *обратим, то* $H(A)$ *обратим и* $H(A)^{-1} = H(A^{-1})$.

Доказательство. Используя (9.1), находим
$$(1-\chi)H(A) = (1-\chi)h^{-1}A\widetilde{\chi}h + (1-\chi)^2 = h^{-1}(1-\widetilde{\chi})A\widetilde{\chi}h + \\ + (1-\chi)^2 = h^{-1}(1-\widetilde{\chi})A\widetilde{\chi}h + (1-\chi)^2 = (1-\chi)\chi + (1-\chi)^2 = 1-\chi,$$
т. е. справедливо первое утверждение теоремы.

Обратимся ко второму утверждению. С учетом доказанного первого утверждения теоремы и формулы (9.5) имеем
$$\begin{aligned} H(A)H(B) &= H_0(A)H(B) + (1-\chi)H(B) = H_0(A)(H_0(B) + 1-\chi) + \\ &+ 1-\chi = h^{-1}Ah\chi h^{-1}Bh\chi + H_0(A)(1-\chi) + 1-\chi = \\ &= h^{-1}A\widetilde{\chi}Bh\chi + H_0(A)(1-\chi) + 1-\chi = \\ &= h^{-1}A(1-(1-\widetilde{\chi}))Bh\chi + H_0(A)(1-\chi) + 1-\chi = \\ &= h^{-1}ABh\chi - h^{-1}A(1-\widetilde{\chi})h\chi + H_0(A)(1-\chi) + 1-\chi = \\ &= H_0(AB) - H_0(A)(1-\chi) + H_0(A)(1-\chi) + 1-\chi = H(AB). \end{aligned}$$
Второе утверждение доказано.

Очевидно, единичный оператор удовлетворяет условию (9.1), причем $H(E) = E$, тогда из второго утверждения теоремы с учетом леммы 9.2 сразу следует $H(A)H(A^{-1}) = E$ для правого обратного оператора и $H(A)H(A^{-1}) = H(A^{-1})H(A) = E$ для двустороннего обратного.

Наконец, пусть $f \in \ker A$, т. е. $Af = 0$, тогда из второго утверждения леммы 9.2 следует, что $(1-\widetilde{\chi})f \equiv 0$, т. е. $\widetilde{\chi}f \equiv f$ и, значит, $f \in W_2^s(U)$. Тогда $\widetilde{f} = h^{-1}f \in W_2^s(V)$ и
$$H(A)\widetilde{f} = h^{-1}Ah\chi h^{-1}f + (1-\chi)h^{-1}f = \\ = h^{-1}A\widetilde{\chi}f + h^{-1}(1-\widetilde{\chi})f = h^{-1}Af = 0.$$
Наоборот, если $H(A)\widetilde{f} = 0$, то с учетом первого утверждения теоремы
$$(1-\chi)\widetilde{f} = (1-\chi)H(A)\widetilde{f} = 0 \Longrightarrow \chi\widetilde{f} \equiv \widetilde{f}, \quad \widetilde{f} \in W_2^s(V),$$
тогда $h\widetilde{f} = f \in W_2^s(U)$ и аналогично предыдущему $0 = H(A)\widetilde{f} = h^{-1}Af$, откуда $Af = 0$. Теорема доказана.

Теорема 9.2. *Пусть $A : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка на торе T, удовлетворяющий условию* (9.1) *с $\chi = \widetilde{\chi}(z)$. Тогда*:

1. $H(A) = C + \alpha$, *где $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен и удовлетворяет условию $(1-\chi)\alpha = 0$; $C : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка на D, удовлетворяющий условию* (9.1) *с $\chi = \chi(w)$.*

2. *Если главный символ оператора A $a_0(z,\varphi) \neq 0$, $(z,\varphi) \in \widetilde{T}$, то символ оператора C не вырождается.*

3. *Если при этом*

$$\operatorname{ind} a_0(z,\varphi)\Big|_{L^{1,2}} = 0,$$

то все индексы символа оператора C равны нулю.

Доказательство. Пусть $A = \operatorname{op}(a_0(z,\varphi(\xi)) + a_{-1}(z,\xi)) = A_0 + \alpha$, $A_0 = \operatorname{op}(a_0(z,\varphi(\xi)))$. Так как A удовлетворяет условию (9.1) с $\chi = \widetilde{\chi}$, то в силу леммы 9.1 имеем

$$(1-\widetilde{\chi})A_0 = 1-\widetilde{\chi}, \quad (1-\widetilde{\chi})\alpha = 0. \tag{9.6}$$

Тогда $H(A) = H_0(A_0) + H_0(\alpha) + 1 - \chi = C + H_0(\alpha)$,

$$H_0(\alpha) = h^{-1}\alpha\widetilde{\chi}h = h^{-1}(\widetilde{\chi} + 1 - \widetilde{\chi})\alpha\widetilde{\chi}h = h^{-1}\widetilde{\chi}\alpha h\chi$$

и, очевидно, $(1-\chi)H_0(\alpha) = 0$, а из следствия леммы 8.1 § 8 следует, что $H_0(\alpha) : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен.

В свою очередь с учетом (9.6)

$$H_0(A_0) = h^{-1}A_0\widetilde{\chi}h = h^{-1}(\widetilde{\chi} + 1 - \widetilde{\chi})A_0\widetilde{\chi}h = h^{-1}\widetilde{\chi}A_0h\chi + \chi(1-\chi)$$

и из леммы 8.2 § 8 вытекает, что $H_0(A_0) : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, откуда, очевидно, и $C = H_0(A_0) + 1 - \chi$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка. При этом из (9.6) и первого утверждения теоремы 9.1 следует, что C удовлетворяет условию (9.1) с $\chi = \chi(w)$. Итак, первое утверждение теоремы доказано.

Далее, пусть $a_0(z,\varphi) \neq 0$. Согласно той же лемме 8.2 § 8 главный символ оператора C имеет вид

$$c_0^j(z,\varphi(\xi)) = (\widetilde{\chi}_j(z))^2\widetilde{h}_j^{-1}(\widetilde{\chi}\,|\,z)h_j(\chi\,|\,z)a_0(\widetilde{h}_j^{-1}(z),\varphi(\widetilde{p}_j(\widetilde{h}_j^{-1}(z))\xi)) +$$

$$+ (\widetilde{\chi}_j(z))^2h_j(\chi\,|\,z)h_j(1-\chi\,|\,z) + (\widetilde{\chi}_j(z))^2h_j(1-\chi\,|\,z), \tag{9.7}$$

где $\widetilde{h}_j = hh_j^{-1}$, $\widetilde{p}_j = (\widetilde{h}'_j)^T$. Положим

$$\widetilde{a}_0(z,\varphi(\xi)) = a_0(\widetilde{h}_j^{-1}(z),\varphi(\widetilde{p}_j(\widetilde{h}_j^{-1}(z))\xi)), \tag{9.8}$$

$h_j(\chi\,|\,z) = \tau_j(z)$, тогда $\widetilde{h}_j^{-1}(\widetilde{\chi}\,|\,z) = h_j h^{-1}(h\chi) = h_j(\chi) = \tau_j$, т. е. из (9.7) получим

$$c_0^j(z,\varphi) = (\widetilde{\chi}_j(z))^2\left[(\tau_j)^2\widetilde{a}_0(z,\varphi) + \tau_j(1-\tau_j) + 1 - \tau_j\right].$$

Наконец, из (9.6) следует, что $(1-\tau_j)\widetilde{a}_0 \equiv 1-\tau_j$, откуда

$$c_0^j(z,\varphi) = (\widetilde{\chi}_j(z))^2\left[\tau_j^2\widetilde{a}_0 + \tau_j(1-\tau_j)\widetilde{a}_0 + (1-\tau_j)\widetilde{a}_0\right] = \\ = (\widetilde{\chi}_j(z))^2\widetilde{a}_0(z,\varphi). \quad (9.9)$$

Если $a_0(z,\varphi)\neq 0$, то и $\widetilde{a}_0(z,\varphi)\neq 0$, таким образом при $\widetilde{\chi}_j(z)\neq 0$ символ $c_0^j\neq 0$, т. е. доказано второе утверждение теоремы.

Наконец, если индексы $a_0(z,\varphi)$ по $L^{1,2}$ равны нулю, а индекс $a_0(z,\varphi)$ по φ равен нулю в силу (7.1), то индекс $a_0(z,\varphi)$ по любой замкнутой кривой в $\widetilde{T}$ равен нулю. Тогда из (9.9) следует, что индекс $c_0^j(z,\varphi)$ по любой замкнутой кривой в T_j равен нулю, откуда непосредственно вытекает третье утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 9.3. *Пусть* $\tau_{0,1}(w)\in C_0^\infty(V_{0,1})$, $V_0\subset V_1$, *причем*

$$\tau_0(w)\tau_1(w)\equiv\tau_0(w), \quad (9.10)$$

т. е. $\tau_1(w)\equiv 1$ *при* $w\in\operatorname{supp}\tau_0$; $h^{-1}(V_{0,1}) = U_{0,1}\subset T$. *Тогда любой оператор* $A: W_2^s(D)\to W_2^s(D)$ *вида*

$$A = A_0\tau_0 + 1 - \tau_0, \quad (9.11)$$

где $A_0: W_2^s(D)\to W_2^s(D)$ *— удовлетворяет условию* (9.1) *с* $\chi=\tau_0(w)$, *можно представить в виде*

$$A = H(B) = h^{-1}Bh\tau_1 + 1 - \tau_1,$$

где $B: W_2^s(T)\to W_2^s(T)$ *— оператор на торе, удовлетворяющий условию* (9.1) *с* $\chi = \widetilde{\tau}_1(z) = h(\tau_1\,|\,z)\in C_0^\infty(U_1)$.

При этом если $f(w)$ *есть решение уравнения* $Af=g$, $g\in W_2^s(D)$, *то*

$$f = h^{-1}(\widetilde{f}_1\,|\,w) + (1-\tau_1)g, \quad (9.12)$$

где $\widetilde{f}_1(z)$ *есть решение уравнения*

$$B\widetilde{f}_1 = \widetilde{g}_1 = h(\tau_1 g\,|\,z)\in W_2^s(U_1)\subset W_2^s(T). \quad (9.13)$$

Обратно, если $\widetilde{f}_1$ *есть решение уравнения* (9.13), *то* $\widetilde{f}_1\equiv 0$ *при* $z\notin U_1$ *и функция* $f(w)$ *вида* (9.12) *есть решение уравнения* $Af=g$.

Доказательство. Из условия (9.10) следует, что

$$(1-\tau_1)\tau_0\equiv 0, \quad (1-\tau_0)(1-\tau_1)\equiv 1-\tau_1. \quad (9.14)$$

Обозначим $\widetilde{\tau}_{0,1} = h(\tau_{0,1}\,|\,z)$. Очевидно, $\widetilde{\tau}_{0,1}\in C_0^\infty(U_{0,1})$ и из (9.10), (9.14) вытекает, что

$$\widetilde{\tau}_0\widetilde{\tau}_1\equiv\widetilde{\tau}_0, \quad (1-\widetilde{\tau}_1)\widetilde{\tau}_0\equiv 0, \quad (1-\widetilde{\tau}_0)(1-\widetilde{\tau}_1)\equiv 1-\widetilde{\tau}_1, \quad z\in T. \quad (9.15)$$

Введем операторы

$$B_1 = h\tau_0 A_0 \tau_0 h^{-1} = \widetilde{\tau}_0 (hA_0h^{-1})\widetilde{\tau}_0, \quad B = B_1 + 1 - \widetilde{\tau}_0^2. \tag{9.16}$$

С учетом условия (9.1) для A_0 и формулы (9.15), получим

$$(1-\widetilde{\tau}_1)B = (1-\widetilde{\tau}_1)(h\tau_0A_0\tau_0h^{-1} + (1-\widetilde{\tau}_1)(1-\widetilde{\tau}_0^2) =$$
$$= h(1-\tau_1)\tau_0A_0\tau_0h^{-1} + 1 - \widetilde{\tau}_1 = 1 - \widetilde{\tau}_1,$$

т. е. для оператора B выполнено условие (9.1) с $\chi = \widetilde{\tau}_1(z) \in C_0^\infty(U_1)$. Далее, из условия (9.1) для A_0 находим

$$H(B) = h^{-1}B\widetilde{\tau}_1h + 1 - \tau_1 =$$
$$= h^{-1}\left[h\tau_0A_0\tau_0h^{-1}\right]\widetilde{\tau}_1h + h^{-1}[(1-\widetilde{\tau}_0^2)\widetilde{\tau}_1]h + 1 - \tau_1 =$$
$$= \tau_0A_0\tau_0\tau_1 + (1-\tau_0^2)\tau_1 + 1 - \tau_1 = \tau_0A_0\tau_0 + \tau_1 - \tau_0^2 + 1 - \tau_1 =$$
$$= \tau_0A_0\tau_0 + (1-\tau_0)\tau_0 + 1 - \tau_0 = \tau_0A_0\tau_0 + (1-\tau_0)A_0\tau_0 + 1 - \tau_0 =$$
$$= A_0\tau_0 + 1 - \tau_0 = A.$$

Теперь пусть $Af = g \in W_2^s(D)$. Поскольку в силу условия (9.1) $A_0\tau_0 = \tau_0A_0\tau_0 + (1-\tau_0)\tau_0 = \tau_0A$, то с учетом (9.14) имеем

$$(1-\tau_1)g = (1-\tau_1)Af = (1-\tau_1)A_0\tau_0f + (1-\tau_1)(1-\tau_0)f = (1-\tau_1)f,$$

т. е. $f = \tau_1f + (1-\tau_1)f = f_1 + (1-\tau_1)g$, где $f_1 = \tau_1f \equiv 0$ при $w \notin V_1$. Тогда с учетом (9.14) уравнение $Af = g$ примет вид

$$g = A_0\tau_0(f_1 + (1-\tau_1)g) + (1-\tau_0)(f_1 + (1-\tau_1)g) =$$
$$= A_0\tau_0f_1 + (1-\tau_0)f_1 + (1-\tau_1)g,$$

т. е.$Af_1 = \tau_1g = g_1$, или, с учетом (9.1),

$$g_1 = (\tau_0 + 1 - \tau_0)A_0\tau_0f_1 + (1-\tau_0)f_1 =$$
$$= \tau_0A_0\tau_0f_1 + (1-\tau_0)\tau_0f_1 + (1-\tau_0)f_1 = \tau_0A_0\tau_0f_1 + (1-\tau_0^2)f_1.$$

Пусть $\widetilde{f}_1 = h(f_1 \,|\, z)$ ($\widetilde{f}_1 \equiv 0$ при $z \notin U_1$), $\widetilde{g}_1 = h(g_1 \,|\, z)$ ($\widetilde{g}_1 \in W_2^s(U_1)$), тогда

$$\widetilde{g}_1 = h(\tau_0A_0\tau_0f_1 + (1-\tau_0^2)f_1) = h(\tau_0A_0\tau_0)h^{-1}\widetilde{f}_1 + (1-\widetilde{\tau}_0^2)\widetilde{f}_1 = B\widetilde{f}_1;$$

т. е. для $f(w)$ имеет место представление (9.12), (9.13).

Обратно, пусть $B\widetilde{f}_1 = \widetilde{g}_1 = h(\tau_1g \,|\, z)$. Так как $B_1 = \widetilde{\tau}_0(hA_0h^{-1})\widetilde{\tau}_0$, то $B_1\widetilde{f}_1 \equiv 0$ при $z \notin U_0$, тем более при $z \notin U_1$. Кроме того, так как $\widetilde{\tau}_0(z) \in C_0^\infty(U_0) \subset C_0^\infty(U_1)$, $\widetilde{g}_1 \in W_2^s(U_1)$, то $\widetilde{\tau}_0(z) \equiv \widetilde{g}_1(z) \equiv 0$ при $z \notin U_1$. Тогда при $z \notin U_1$ имеем

$$0 \equiv \widetilde{g}_1(z) = B_1\widetilde{f}_1 + (1-\widetilde{\tau}_0^2)\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_1(z),$$

т. е. $\widetilde{f}_1(z) \equiv 0$ при $z \notin U_1$. Пусть теперь

$$f = h^{-1}(\widetilde{f}_1 \mid w) + (1-\tau_1)g = f_1(w) + (1-\tau_1)g,$$

и поскольку

$$\widetilde{g}_1 = h(\tau_1 g) = B\widetilde{f}_1 = h\tau_0 A_0 \tau_0 h^{-1}\widetilde{f}_1 + (1-\widetilde{\tau}_0^2)\widetilde{f}_1,$$

то

$$\tau_1 g = h^{-1}(\widetilde{g}_1) = \tau_0 A_0 \tau_0 f_1 + (1-\tau_0^2) f_1 = \\ = \tau_0 A_0 \tau_0 f_1 + (1-\tau_0)\tau_0 f_1 + (1-\tau_0) f_1 = A_0 \tau_0 f_1 + (1-\tau_0) f_1.$$

Следовательно, с учетом (9.14) получим

$$Af = A_0\tau_0(f_1 + (1-\tau_1)g) + (1-\tau_0)(f_1 + (1-\tau_1)g) = \\ = A_0\tau_0 f_1 + (1-\tau_0) f_1 + (1-\tau_1)g = \tau_1 g + (1-\tau_1)g = g.$$

Теорема доказана.

Теорема 9.3 позволяет сводить вопросы обращения оператора $A : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ вида (9.11) (т. е. решения уравнения $Af = g$) к обращению оператора $B : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ вида (9.16), который строится непосредственно по оператору A_0. В частности, из нее следует третье утверждение теоремы 9.1.

§ 10. Обращение оператора с невырожденным символом

Пусть $A : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом. Покажем, что оператор A — нетеровский нулевого индекса, т. е. $A = \widetilde{A} + \alpha$, где $\widetilde{A}$ — обратим в $W_2^s(D)$, $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен.

Итак, пусть для локальных представлений (8.1) § 8 с $\chi_j = \chi_j^4(w)$ главный символ операторов A_j $a_0^j(z,\varphi) \neq 0$ при $z \in T_j^4$. Обозначим через $\varkappa_j^{1,2}$, $j = \overline{0, \rho-1}$ индексы символа. Вначале приведем оператор к случаю, когда все индексы символа равны нулю.

Зададим на T функции:

$$\widetilde{\mu}_j^1(z) \equiv x, \quad \widetilde{\mu}_j^2(z) \equiv y \text{ при } z \in T_j^1;$$

$$\widetilde{\mu}_j^{1,2}(z) \in C_0^\infty(T_j^2), \quad j = \overline{0, \rho-1}.$$

Очевидно,

$$\Delta\, \widetilde{\mu}_j^1(z) \Big|_{L^1(\pi)} = 2\pi, \quad \Delta\, \widetilde{\mu}_j^1(z) \Big|_{L^2(\pi/2)} = 0,$$

$$\Delta\,\widetilde{\mu}^2_j(z)\,\Big|_{L^1(\pi)} = 0, \quad \Delta\,\widetilde{\mu}^2_j(z)\,\Big|_{L^2(\pi/2)} = 2\pi$$

и приращения $\widetilde{\mu}^{1,2}_j$ равны нулю при обходе вокруг отверстий области T^2_j. Положим

$$t^{1,2}_j = \exp\big(ih^{-1}_j(\widetilde{\mu}^{1,2}_j \mid w)\big). \tag{10.1}$$

Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\operatorname{ind} t^{1,2}_j\,\Big|_{L^{1,2}_k} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \qquad \operatorname{ind} t^{1,2}_j\,\Big|_{L^{2,1}_k} = 0, \quad \forall\, j, k.$$

Введем функцию

$$t(w) = \prod_{j=0}^{\rho-1} (t^1_j)^{\varkappa^1_j} (t^2_j)^{\varkappa^2_j}, \qquad \operatorname{ind} t(w)\,\Big|_{L^{1,2}_j} = \varkappa^{1,2}_j, \quad j = \overline{0, \rho-1}.$$

Пусть $A^1 = \dfrac{1}{t(w)}\,A$. Тогда главный символ оператора A^1

$$a^j_1(z,\varphi) = \frac{1}{h_j(t \mid z)}\,a^j_0(z,\varphi)$$

и по построению

$$\operatorname{ind} a^j_1(z,\varphi)\,\Big|_{L^1(\pi)} = \varkappa^1_j - \varkappa^1_j = 0, \quad \operatorname{ind} a^j_1(z,\varphi)\,\Big|_{L^2(\pi/2)} = \varkappa^2_j - \varkappa^2_j = 0,$$

т. е. все индексы символа оператора A^1 равны нулю. Далее будем рассматривать оператор A^1, сохранив для его локальных представлений и главного символа обозначения A_j и a^j_0, соответственно.

Поскольку все индексы символа A^1 равны нулю, то, как отмечено в конце § 8, индексы главного символа $a^j_0(z,\varphi)$ по всем замкнутым кривым в T^4_j равны нулю. Тогда, пользуясь утверждением 3 п. 6.1, можно представить $a^j_0(z,\varphi) = \exp\big(\beta_j(z,\varphi)\big)$, $z \in T^4_j$, где $\beta_j(z,\varphi) = \ln a^j_0(z,\varphi)$ удовлетворяет условию (7.1) при $z \in T^4_j$. Пользуясь утверждением 2 п. 6.1, продолжим β_j из области T^2_j до нуля вне T^3_j с сохранением условия (7.1). Итак, пусть продолжение $\widetilde{\beta}_j(z,\varphi)$ удовлетворяет условию (7.1) и

$$\widetilde{\beta}_j(z,\varphi) = \begin{cases} \beta_j(z,\varphi), & z \in T^2_j; \\ 0, & z \notin T^3_j; \end{cases}$$

причем $\widetilde{\beta}_j(z,\varphi)$ определена при всех $(z,\varphi)\in\widetilde{T}$. Пусть $b_0^j(z,\varphi) = \exp\left(\widetilde{\beta}_j(z,\varphi)\right)$. По построению $b_0^j(z,\varphi)\neq 0$, $(z,\varphi)\in\widetilde{T}$;

$$b_0^j(z,\varphi) = \begin{cases} a_0^j(z,\varphi), & z\in T_j^2; \\ 1, & z\notin T_j^3; \end{cases} \tag{10.2}$$

символ $b_0^j(z,\varphi)$ удовлетворяет условиям (7.1), (7.2). В частности, из (10.2) следует, что

$$(1-\widetilde{\chi}_j^3(z))b_0^j(z,\varphi)\equiv 1-\widetilde{\chi}_j^3(z). \tag{10.3}$$

Согласно теореме 1.6 § 1 оператор с символом $b_0^j(z,\varphi(\xi))$ обратим с точностью до конечномерного слагаемого, точнее, при достаточно больших R обратим оператор $B_j^0 = \mathrm{op}(b_0^R(z,\xi))$, где

$$b_0^R(z,\xi) = \exp\left[\chi_R(|\xi|)\widetilde{\beta}_j(z,\varphi(\xi))\right]$$

— уточненный символ, причем условие (9.2) выполнено и для $b_0^R(z,\xi)$. Обратный оператор представляется в виде

$$(B_j^0)^{-1} = \mathrm{op}\left(\frac{1}{b_0^j(z,\varphi(\xi))}\right)+\alpha, \tag{10.4}$$

где α — оператор порядка (-1). Далее, из теоремы 1.5 гл. 1 следует, что

$$(B_j^0)^{-1}A_j = \mathrm{op}\left(\frac{a_0^j(z,\varphi(\xi))}{b_0^j(z,\varphi(\xi))}\right)+\alpha = P_j+\alpha, \tag{10.5}$$

где α — оператор порядка (-1). Из (10.5) и (10.2) имеем

$$\widetilde{\chi}_j^1 P_j = \widetilde{\chi}_j^1. \tag{10.6}$$

Далее, из условия (10.3) для уточненного символа $b_0^R(z,\xi)$ следует, что оператор $B_j^0 : W_2^s(T)\to W_2^s(T)$ удовлетворяет соотношению

$$(1-\widetilde{\chi}_j^3)B_j^0 = 1-\widetilde{\chi}_j^3, \tag{10.7}$$

т. е. условию (9.1) § 9. Продолжим оператор B_j^0 до оператора $B_j = H(B_j^0) : W_2^s(D)\to W_2^s(D)$:

$$B_j = h_j^{-1}B_j^0\widetilde{\chi}_j^3 h_j + (1-\chi_j^3) =$$
$$= h_j^{-1}\widetilde{\chi}_j^3 B_j^0\widetilde{\chi}_j^3 h_j + \chi_j^3(1-\chi_j^3) + 1-\chi_j^3 = h_j^{-1}\widetilde{\chi}_j^3 B_j^0\widetilde{\chi}_j^3 h_j + 1-(\chi_j^3)^2.$$

При этом оператор B_j обратим и с учетом (10.4), лемм 8.1, 8.2 § 8 и теоремы 9.2 § 9 имеем

$$B_j^{-1} = h_j^{-1}\widetilde{\chi}_j^3 \left(\operatorname{op}\left(\frac{1}{b_0^j(z,\varphi(\xi))}\right) + \alpha\right) \widetilde{\chi}_j^3 h_j + 1 - (\chi_j^3)^2 =$$

$$= h_j^{-1}\widetilde{\chi}_j^3 \operatorname{op}\left(\frac{1}{b_0^j(z,\varphi(\xi))}\right) \widetilde{\chi}_j^3 h_j + 1 - (\chi_j^3)^2 + \alpha = c_j^0 + 1 - (\chi_j^3)^2 + \alpha =$$

$$= C_j + \alpha,$$

где $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, а $C_j = C_j^0 + 1 - (\chi_j^3)^2$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом и все индексы символа C_j равны нулю.

Рассмотрим произведение

$$B_j^{-1}A^1 = C_jA^1 + \alpha A^1 = (1 - (\chi_j^3)^2)A^1 + C_j^0 A^1(\chi_j^4 + 1 - \chi_j^4) + \alpha =$$

$$= (1 - (\chi_j^3)^2)A^1 + h_j^{-1}\widetilde{\chi}_j^3 \operatorname{op}\left(\frac{1}{b_0^j(z,\varphi(\xi))}\right) h_j \chi_j^3 A^1 \chi_j^4 +$$

$$+ h_j^{-1}\widetilde{\chi}_j^3 \operatorname{op}\left(\frac{1}{b_0^j(z,\varphi(\xi))}\right) h_j \chi_j^3 A^1 (1 - \chi_j^4) + \alpha.$$

Так как $\chi_j^3 A^1(1 - \chi_j^4) = \alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, то, продолжая равенство, с учетом (8.1), (6.6), (6.20) получим

$$B_j^{-1}A^1 = (1 - (\chi_j^3)^2)A^1 + h_j^{-1}\widetilde{\chi}_j^3 \operatorname{op}\left(\frac{1}{b_0^j(z,\varphi(\xi))}\right) \widetilde{\chi}_j^3 h_j \chi_j^4 A^1 \chi_j^4 h_j^{-1} h_j +$$

$$+ \alpha = (1 - (\chi_j^3)^2)A^1 + h_j^{-1}\widetilde{\chi}_j^3 \operatorname{op}\left(\frac{1}{b_0^j(z,\varphi(\xi))}\right) \widetilde{\chi}_j^3 A_j h_j + \alpha.$$

По условию $A_j = \operatorname{op}(a_0^j(z,\varphi(\xi))) + \alpha$, где $\alpha : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — оператор порядка (-1). В свою очередь из теоремы 1.5 § 1 следует, что

$$\widetilde{\chi}_j^3 \operatorname{op}\left(\frac{1}{b_0^j}\right) \widetilde{\chi}_j^3 op(a_0^j) = (\widetilde{\chi}_j^3)^2 \operatorname{op}\left(\frac{a_0^j}{b_0^j}\right) + \alpha,$$

α — оператор порядка (-1). Тогда с учетом леммы 8.1

$$B_j^{-1}A^1 = (1 - (\chi_j^3)^2)A^1 + h_j^{-1}(\widetilde{\chi}_j^3)^2 \operatorname{op}\left(\frac{a_0^j}{b_0^j}\right) h_j + \alpha = A^2 + \alpha,$$

где $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, а

$$A^2 = (1 - (\chi_j^3)^2)A^1 + h_j^{-1}(\widetilde{\chi}_j^3)^2 \operatorname{op}\left(\frac{a_0^j}{b_0^j}\right) h_j$$

— псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом и все индексы символа A^2 равны нулю. При этом из (10.2) следует, что $\widetilde{\chi}_j^1 op(a_0^j/b_0^j) = \widetilde{\chi}_j^1$, откуда с учетом (6.6), (6.20)

$$\chi_j^1 A^2 = \chi_j^1(1-\chi_j^3)(1-\chi_j^3)A^1 + h_j^{-1}(\widetilde{\chi}_j^3)^2\widetilde{\chi}_j^1 \operatorname{op}\left(\frac{a_0^j}{b_0^j}\right) h_j =$$
$$= 0 + h_j^{-1}\widetilde{\chi}_j^1 h_j = \chi_j^1. \quad (10.8)$$

Тем самым имеет место представление

$$A^1 = B_j A^2 + B_j\alpha = B_j A^2 + \alpha,$$

причем B_j — обратимый псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом, $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, A^2 — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом, все индексы символа A^2 равны нулю и $\chi_j^1 A^2 = \chi_j^1$.

Далее будем действовать следующим образом: первый шаг — возьмем $j = 0$ и представим

$$A = t(w)A^1 = t(w)B_0 A^2 + \alpha_0, \quad (10.9)$$

$\alpha_0 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, A^2 — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом, все индексы символа A^2 равны нулю и

$$\chi_0^1 A^2 = \chi_0^1. \quad (10.10)$$

Будем по-прежнему главный символ оператора A^2 обозначать $a_0^j(z,\varphi)$, а его локальные представления A_j.

Второй шаг: берем $j = 1$, из условия (10.9) следует, что для локального представления A_1

$$\tau_0^1 A_1 = \tau_0^1, \quad \tau_0^1 = h_1(\chi_0^1 \,|\, z), \quad (10.11)$$

откуда с помощью леммы 9.1 § 9

$$\tau_0^1(z)a_0^1(z,\varphi) \equiv \tau_0^1(z), \quad (10.12)$$

т. е. $a_0^1(z,\varphi) \equiv 1$ при $z \in T_1^2 \cap h_1^{-1}(D_0^2)$ (когда $\tau_0^1(z) \neq 0$). Поскольку в силу леммы 6.2 множество $T_1^2 \cap h_1^{-1}(D_0^2) = h_1^{-1}(D_1^2 \cap D_0^2) = T_1^\rho(\delta_2)$ связно, то можно определить $\beta_1(z,\varphi) = \ln a_0^1(z,\varphi)$ так, чтобы $\beta_1(z,\varphi) \equiv 0$ при $\tau_0^1(z) \neq 0$. То же самое условие будет выполнено и для продолжения $\widetilde{\beta}_1(z,\varphi)$:

$$\tau_0^1(z)b_0^1(z,\varphi) \equiv \tau_0^1(z).$$

Отсюда, построив обратимый оператор $B_1^0 : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$, операторы $B_1 = H(B_1^0) : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ и $B_1^{-1} = C_1 + \alpha$, имеем

$$\tau_0^1 C_1 = \tau_0^1 \operatorname{op}\left(\frac{1}{b_0^1(z, \varphi(\xi))}\right) = \tau_0^1,$$

и с учетом (10.10)

$$\tau_0^1 C_1 A_1 = \tau_0^1. \tag{10.13}$$

Таким образом, приходим к представлению

$$B_1^{-1} A^2 = A^3 + \alpha,$$

$\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен и $\chi_1^1 A^3 = \chi_1^1$, а с учетом (10.10), (10.11) и (10.12) получим, что и $\chi_0^1 A^3 = \chi_0^1$.

Итак, $A = t(w) B_0 B_1 A^3 + \alpha_1$, $\alpha_1 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, B_0, B_1 — обратимые псевдодифференциальные операторы нулевого порядка с невырожденным символом, A^3 — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом, все индексы символа A^3 равны нулю и $\chi_{0,1}^1 A^3 = \chi_{0,1}^1$. В частности, полагая $\chi_0^0 = \chi_0^1$, $\chi_1^0 = (1 - \chi_0^1)\chi_1^1$ получим $\chi_{0,1}^0 A^3 = \chi_{0,1}^0$.

Пусть теперь $j = 2$, снова с использованием леммы 6.2 построим $\widetilde{\beta}_2(z, \varphi)$ — продолжение $\beta_2(z, \varphi) = \ln a_0^2(z, \varphi)$ такое, что $\widetilde{\beta}_2(z, \varphi) \equiv 0$ при $\tau_{0,1}^2 = h_2(\chi_{0,1}^1 \mid z) \neq 0$, т. е. $\tau_{0,1}^2(z) b_0^2(z, \varphi) \equiv \tau_{0,1}^2(z)$. Тогда, аналогично предыдущему, получим $A = \nu(w) B_0 B_1 B_2 A^4 + \alpha_2$, $\alpha_2 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, $\chi_{0,1,2}^0 A^4 = \chi_{0,1,2}^0$, где $\chi_2^0 = (1 - \chi_0^1)(1 - \chi_1^1)\chi_2^1$.

Продолжая аналогичным образом, через ρ шагов придем к представлению

$$A = t(w) B_0 B_1 \ldots B_{\rho-1} A^{\rho+1} + \alpha,$$

$\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен; B_j, $j = \overline{0, \rho - 1}$ — обратимые псевдодифференциальные операторы нулевого порядка с невырожденным символом, а $A^{\rho+1}$ удовлетворяет условиям

$$\chi_j^0 A^{\rho+1} = \chi_j^0, \quad j = \overline{0, \rho-1}; \qquad \chi_j^0 = \prod_{k=0}^{j-1} (1 - \chi_k^1)\chi_j^1.$$

По построению χ_j^0, $j = \overline{0, \rho - 1}$ — это разбиение единицы, полученное в лемме 6.1 п. 6.1, т. е.

$$A^{\rho+1} = \sum_j \chi_j^0 A^{\rho+1} = \sum_j \chi_j^0 = E.$$

Итак, окончательно

$$A = t(w) \prod_{j=0}^{\rho-1} B_j + \alpha.$$

Теорема 10.1. *Пусть* $A : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ *— псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом. Тогда существует вполне непрерывный оператор* $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ *такой, что* $\widetilde{A} = A - \alpha$ *— обратимый псевдодифференциальный оператор нулевого порядка. При этом обратный* $\widetilde{A}^{-1} = C + \alpha_0$, *где* $\alpha_0 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ *— вполне непрерывен, а* C *— псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с главным символом* $c_0^j(z, \varphi) = 1/a_0^j(z, \varphi)$, $z \in T_j^3$, *где* $a_0^j(z, \varphi) \neq 0$ *при* $z \in T_j^3$ *— главный символ оператора* A.

Последнее утверждение теоремы следует из второго утверждения теоремы 8.1 § 8.

Глава 4
ОПЕРАТОРЫ С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ СИМВОЛОМ

§ 11. Класс операторов с вырождающимся символом

Пусть A — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, главный символ которого может вырождаться, т. е. обращаться в нуль. Введем множество

$$V = V(A) = \left\{ w \in D \mid \exists\, j, \varphi : w \in D_j^1,\ a_0^j(h_j^{-1}(w), \varphi) = 0 \right\}.$$

Замкнутое множество $V(A)$ будем называть *областью вырождения* оператора A. Примем в дальнейшем, что $V \neq D$. Из формулы (8.3) § 8 следует, что V не зависит от выбора атласа и срезающих функций, удовлетворяющих условию (6.2) п. 6.1. Компоненты связности V будем называть *локальными областями вырождения* и обозначать V_k, $k = \overline{1,n}$. Как и ранее (условие (7.2)), будем считать, что вне области вырождения индекс главного символа по φ равен нулю:

$$\operatorname{ind} a_0^j(z,\varphi)\Bigg|_{\varphi\in[0,2\pi]} = 0, \quad z = h_j^{-1}(w), \quad w \in D_j^1 \setminus V, \quad j = \overline{0, \rho-1}.$$

Примем условие, что все V_k можно гомеоморфно отобразить в тор, т. е. существуют гомеоморфизмы класса C^∞ $\mu_k : Y_k \to D$, $Y_k \subset T$ такие, что $V_k \subset \mu_k(Y_k)$, $k = \overline{1,n}$. Пусть $U_k = \mu_k^{-1}(V_k)$. U_k — это локальная область вырождения в плоскости гомеоморфизма μ_k^{-1}. Из условия $V \neq D$ следует, что $U_k \neq T$. Действительно, в противном случае наличие гомеоморфизма $\mu_k : T \to D$ означает, что D — тоже тор, а равенство $U_k = T$ дает $V = \mu(U_k) = D$.

Выберем открытые окрестности локальных областей вырождения: $V_k \subset V_k^1 \subset V_k^2 \subset V_k^3 \subset V_k^4$ так, что V_k^p компактно вложено в V_k^{p+1}, $p = \overline{1,4}$ и замыкания V_k^4 не пересекаются при разных k. Без ограничения общности будем считать, что $V_k^4 \subset \mu_k(Y_k)$. Соответственно, обозначим $U_k^p = \mu_k^{-1}(V_k^p)$, $p = \overline{1,4}$, $k = \overline{1,n}$. U_k^p — открытые окрестности локальных областей вырождения U_k, $U_k \subset U_k^1 \subset U_k^2 \subset U_k^3 \subset U_k^4 \subset Y_k$, $k = \overline{1,n}$.

Введем срезающие функции

$$\tau_k^p(w) \in C_0^\infty(V_k^{p+1}), \quad \tau_k^p(w) \equiv 1 \text{ при } w \in V_k^p, \quad 0 \leqslant \tau_k^p(w) \leqslant 1,$$

$$\widetilde{\tau}_k^p(z) = \mu_k(\tau_k^p \mid z), \quad k = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,3}.$$

Будем обозначать

$$\tau^p(w) = \sum_{k=1}^{n} \tau_k^p(w), \quad p = \overline{1,3}.$$

Очевидны свойства:

$$\begin{gathered}
\widetilde{\tau}_k^p(z) \in C_0^\infty(U_k^{p+1}), \quad \widetilde{\tau}_k^p(z) \equiv 1 \text{ при } z \in U_k^p; \\
\widetilde{\tau}_k^p(z)\widetilde{\tau}_k^{p+1}(z) \equiv \widetilde{\tau}_k^p(z), \quad (1 - \widetilde{\tau}_k^{p+1}(z))\widetilde{\tau}_k^p(z) \equiv 0, \\
z \in T, \quad k = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,3}; \\
\tau_k^p(w)\tau_k^{p+1}(w) \equiv \tau_k^p(w), \quad (1 - \tau_k^{p+1}(w))\tau_k^p(w) \equiv 0, \\
w \in D, \quad k = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,3}; \\
\overline{\operatorname{supp} \tau_k^4} \cap \overline{\operatorname{supp} \tau_j^4} = \emptyset, \quad k \neq j, \quad k, j = \overline{1,n}; \\
\tau^p(w)\tau^{p+1}(w) \equiv \tau^p(w), \quad (1 - \tau^{p+1}(w))\tau^p(w) \equiv 0, \\
w \in D, \quad p = \overline{1,3}.
\end{gathered} \tag{11.1}$$

Зафиксируем выбранную систему множеств и срезающих функций.

Для каждой локальной области вырождения зададим локальное представление оператора A:

$$A_k' = \mu_k \tau_k^3 A \mu_k^{-1} \widetilde{\tau}_k^3 = \operatorname{op}(a_0^k(z, \varphi(\xi)) + a_{-1}^k(z, \xi)), \tag{11.2}$$

которое, по условию, будет псевдодифференциальным оператором нулевого порядка на торе T, причем $a_0^k(z,\varphi) \neq 0$ при $z \notin U_k$ и $\widetilde{\tau}_k^3(z) \neq 0$. Здесь штрих подчеркивает, что A_k' не совпадает, вообще говоря, с локальными представлениями A_j для атласа $h_j : T_j \to D$, $j = \overline{0, \rho - 1}$. При этом, чтобы не умножать количество обозначений, для символов локальных представлений A_k' использовано то же обозначение $a_{0,-1}$, что и для символов локальных представлений A_j.

Условие A0. *Для каждой локальной области вырождения V_k существует гомеоморфизм класса C^∞ $\mu_k : Y_k \to D$, $Y_k \subset T$, $V_k \subset \mu_k(Y_k)$, такой, что главный символ локального представления* (11.2) $a_0^k(z,\varphi)$ *удовлетворяет условиям* (3.1), (3.2) *§ 3, т. е.*

$$M_1 |\sin\varphi| \leqslant |a_0^k(z,\varphi)| \leqslant M_2, \quad z \in U_k^3; \tag{11.3}$$

$$\sup_{x,\varphi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p_k(x,y,\varphi)|\, dy = \beta_0 < \infty, \quad |\widetilde{p}_k(z,\varphi)| \leqslant M, \quad z = (x,y) \in T, \tag{11.4}$$

где

$$p_k(z,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}\ln\dfrac{a_0^k(z,-\varphi)}{a_0^k(z,\varphi)}, & z\in U_k^3,\quad \sin\varphi\neq 0,\\ 0, & z\notin U_k^3,\end{cases}$$

$$\widetilde{p}_k(z,\varphi)=\begin{cases}\ln\dfrac{a_0^k(z,-\varphi)}{a_0^k(z,\varphi)}, & z\in U_k^3,\quad \sin\varphi\neq 0,\\ 0, & z\notin U_k^3.\end{cases}$$

Отметим, что главный символ локального представления (11.2) $a_0^k(z,\varphi)$ определен при $z\in Y_k$, т. е. по крайней мере на множестве

$$\widetilde{T}_1=\{\,(z,\varphi)\in\widetilde{T}\mid z\in U_k^3\,\},$$

а из условия (11.3) следует, что $a_0^k(z,\varphi)$ может обращаться в нуль только при $\sin\varphi=0$, т. е.

$$\{\,(z,\varphi)\in\widetilde{T}_1\mid a_0^k(z,\varphi)=0\,\}\subset\{\,(z,\varphi)\mid z\in U_k,\sin\varphi=0\,\}=\widetilde{T}_0.$$

Очевидно, множество $\widetilde{T}_1\setminus\widetilde{T}_0$ связно.

Введем локальные индексы оператора A. Пусть

$$L(x)=\{\,z=(x,y)\mid z\in U_k\,\},\qquad x=\mathrm{const}$$

— «вертикальное сечение» локальной области вырождения U_k. Кривые $L(x)$ гомотопны при разных x. Так как $U_k\neq T$, то существует $x_0\in[0,2\pi]$ такое, что $L(x_0)\neq[0,2\pi]$. Тогда $L(x_0)$ можно заключить в отрезок $L(x_0)\subset[\alpha,\beta]$, $0<\alpha<\beta<2\pi$ и

$$\alpha=\inf_{z\in L(x_0)}y,\qquad \beta=\sup_{z\in L(x_0)}y.$$

Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы $z_1=(x_0,\alpha-\varepsilon)\in U_k^3$, $z_2=(x_0,\beta+\varepsilon)\in U_k^3$ и $\alpha-\varepsilon>0$, $\beta+\varepsilon<2\pi$. Следовательно, $a_0^k(z_{1,2},\varphi)\neq 0\ \forall\,\varphi$. Используя связность множества $\widetilde{T}_1\setminus\widetilde{T}_0$, соединим точки $(z_{1,2},0)\in\widetilde{T}_1\setminus\widetilde{T}_0\subset\widetilde{T}$ кривыми $L^\pm=\{\,(z,\varphi^\pm(z))\,\}$ так, чтобы

$$\pm\sin\varphi^\pm(z)>0 \text{ при } z\in U_k. \tag{11.5}$$

По условию (11.5) $L^\pm\subset\widetilde{T}_1\setminus\widetilde{T}_0$. Пусть $L=L^- - L^+$ — замкнутая кривая в $\widetilde{T}_1\setminus\widetilde{T}_0$, представляющая собой переход от $(z_1,0)$ к $(z_2,0)$ по L^- и обратное возвращение по L^+. *Локальный индекс*

$$\varkappa_k=\varkappa_k(A)=\operatorname{ind}a_0^k(z,\varphi)\Big|_L.$$

Поскольку $L\subset\widetilde{T}_1\setminus\widetilde{T}_0$, то на L $a_0^k\neq 0$, т. е. определение $\varkappa_k$ корректно. При этом $\varkappa_k$ не зависит от выбора L с точностью до гомотопии в $\widetilde{T}_1 \setminus \widetilde{T}_0$. Отметим при этом, что, вообще говоря, кривая L не гомотопна нулю, так как при стягивании ее в точку она может пересекать множество $\widetilde{T}_0$. Следовательно, индекс $\varkappa_k$ может быть отличен от нуля. Однако, если $\exists\, x : L(x) = \emptyset$, то кривая L гомотопна нулю в $\widetilde{T}_1 \setminus \widetilde{T}_0$ и $\varkappa_k = 0$. Тем более $\varkappa_k = 0$, если в области U_k главный символ $a_0^k(z,\varphi)$ не обращается в нуль.

Наконец, введем *индекс оператора* A:

$$\varkappa = \varkappa(A) = \sum_{k=1}^{n} \varkappa_k(A).$$

В дальнейшем, чтобы отличить введенные здесь индексы $\varkappa_k$ от рассмотренных в § 8 индексов символа $\varkappa_j^{1,2}$, $j = \overline{0, \rho - 1}$ по гомотопическому базису D будем называть $\varkappa_k$ локальными индексами *оператора* A, $\varkappa$ — индексом *оператора* A, а $\varkappa_j^{1,2}$ — индексами *символа*. Так, в частности, если в области V_k главный символ $a_0^k(z,\varphi)$ не обращается в нуль, то $\varkappa_k = 0$. Следовательно, для оператора с невырожденным символом локальные индексы оператора равны нулю, тогда как индексы символа могут быть отличны от нуля.

Локальные индексы $\varkappa_k$ не являются, вообще говоря, топологическими инвариантами оператора A.

Пример. Рассмотрим псевдодифференциальный оператор нулевого порядка на торе с однородным символом

$$a_0(z,\varphi) = a_0(z,\varphi,\varepsilon) = \cos y - 1 + \varepsilon + i \sin\varphi,$$

$z = (x, y)$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, причем будем считать $x \in [0, 2\pi]$, $y \in [-\pi, \pi]$.

Символ вырождается (обращается в нуль) только при $\sin\varphi = 0$ и $\cos y - 1 + \varepsilon = 0$, т.е. $y = \pm\arccos(1-\varepsilon)$. Итак, при $\varepsilon > 0$ имеем две локальные области вырождения

$$V_{1,2} = \{\, (x, \pm\arccos(1-\varepsilon)) \mid x \in [0, 2\pi] \,\}.$$

При вычислении локального индекса для области V_1 возьмем $z_1 = (x_0, -\pi)$, $z_2 = (x_0, 0)$, $x_0 \in [0, 2\pi]$ — произвольное. Соединим $(z_1, 0)$ и $(z_2, 0)$ кривыми

$$L^{\pm} = \{\, (z, \varphi^{\pm}) \mid z = (x_0, t), \quad \varphi^{\pm} = \mp t, \quad t \in [-\pi, 0] \,\}.$$

При этом $\pm\sin\varphi^{\pm} = -\sin t > 0$ при $t \in (-\pi, 0)$, т.е. кривые $L^{\pm}$ удовлетворяют условию (11.5). При этом

$$\Delta \arg a_0(z,\varphi,\varepsilon)\Big|_{L^-} = \Delta\arg(\cos t - 1 + \varepsilon + i\sin t)\Big|_{t\in[-\pi,0]} =$$
$$= \Delta\arg(e^{it} - 1 + \varepsilon)\Big|_{t\in[-\pi,0]};$$

$$\Delta \arg a_0(z,\varphi,\varepsilon)\Big|_{L^+} = \Delta\arg(\cos t - 1 + \varepsilon - i\sin t)\Big|_{t\in[-\pi,0]} =$$
$$= -\Delta\arg(e^{it} - 1 + \varepsilon)\Big|_{t\in[0,\pi]};$$

откуда

$$\varkappa_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\Delta \arg a_0(z,\varphi,\varepsilon)\Big|_{L^-} - \Delta \arg a_0(z,\varphi,\varepsilon)\Big|_{L^+}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\,\Delta\arg(e^{it} - 1 + \varepsilon)\Big|_{t\in[-\pi,\pi]} = \operatorname{ind}(z - 1 + \varepsilon)\Big|_{L_1} = 1,$$

так как функция $f(z) = z - 1 + \varepsilon$ имеет единственный однократный нуль $z_0 = 1 - \varepsilon$ при $|z| < 1$.

Соответственно для локальной области вырождения V_2 возьмем $z_1 = (x_0, 0)$, $z_2 = (x_0, \pi)$,

$$L^\pm = \{\,(z, \varphi^\pm \,|\, z = (x_0, t), \quad \varphi^\pm = \pm t, \quad t \in [0,\pi]\,\},$$

(при этом $\pm\sin\varphi^\pm = \sin t > 0$, $t \in (0,\pi)$);

$$\Delta \arg a_0(z,\varphi,\varepsilon)\Big|_{L^-} = \Delta\arg(e^{-it} - 1 + \varepsilon)\Big|_{t\in[0,\pi]} =$$
$$= -\Delta\arg(e^{it} - 1 + \varepsilon)\Big|_{t\in[-\pi,0]};$$

$$\Delta \arg a_0(z,\varphi,\varepsilon)\Big|_{L^+} = \Delta\arg(e^{it} - 1 + \varepsilon)\Big|_{t\in[0,\pi]};$$

откуда

$$\varkappa_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\Delta \arg a_0(z,\varphi,\varepsilon)\Big|_{L^-} - \Delta \arg a_0(z,\varphi,\varepsilon)\Big|_{L^+}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\,\Delta\arg(e^{it} - 1 + \varepsilon)\Big|_{t\in[-\pi,\pi]} = -\operatorname{ind}(z - 1 + \varepsilon)\Big|_{L_1} = -1.$$

Итак, при $\varepsilon > 0$ $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = -1$. Однако при $\varepsilon = 0$ области V_1 и V_2 «сливаются», символ $a_0(z,\varphi,0)$ вырождается в области

$$V_0 = \{\, z = (x, 0) \,|\, x \in [0, 2\pi]\,\}.$$

Здесь можно взять $z_1 = (x_0, -\pi)$, $z_2 = (x_0, \pi)$,

$$L^\pm = \{\,(z, \varphi^\pm) \,|\, z = (x_0, t), \quad \varphi^\pm = \pm(\pi/2 - t/2), \quad t \in [-\pi,\pi]\,\}$$

($\pm\sin\varphi^{\pm} = \sin(\pi/2 - t/2) = \cos t/2 > 0$ при $t \in (-\pi, \pi)$). При этом $a_0(z_1, 0, 0) = a_0(z_2, 0, 0) = -2$ и поскольку $\cos t - 1 \leqslant 0$, $\cos t/2 \geqslant 0$, то

$$\Delta \arg a_0(z, \varphi, 0)\Big|_{L^{\pm}} = \Delta\arg(\cos t - 1 \pm i\cos t/2)\Big|_{t\in[-\pi,\pi]} = 0,$$

т. е. индекс $\varkappa_0 = 0$.

Итак, при $\varepsilon > 0$ имеем два локальных индекса $\varkappa_{1,2} = \pm 1$, а при $\varepsilon = 0$ — один $\varkappa_0 = 0$. При $\varepsilon < 0$ символ вообще не вырождается, локальные индексы равны нулю.

Заметим, что в рассмотренном примере индекс оператора $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 = 0$ не зависит от ε (см. далее теорему 11.1).

Индексы $\varkappa_k$ можно вычислять, используя любой атлас, в том числе введенный в § 6 атлас $h_j : T_j \to D_j$, $j = \overline{0, \rho - 1}$. Именно, пусть локальная область вырождения $V_k \subset D_j$. В силу формулы (8.3) после переотображения карт $h_j^{-1} \circ \mu_k$ область вырождения символа

$$\widetilde{T}_0 = \{\, (z, \varphi) \mid z \in U_k,\ \sin\varphi = 0 \,\}$$

перейдет в плоскости карты h_j^{-1} в область

$$\widetilde{T}^0 = \{\, (z, \varphi) \mid z \in \widetilde{U}_k,\ \sin(\varphi - \varphi_k(z)) = 0 \,\}.$$

При этом замкнутые кривые $L = \{\, (z, \varphi(z)) \,\} \subset \widetilde{T}_1 \setminus \widetilde{T}_0$ переходят в некоторые замкнутые кривые $L_0 = \{\, (z, \varphi_1(z)) \,\} \subset T_j^0 \setminus \widetilde{T}^0$,

$$T_j^0 = \{\, (z, \varphi) \in \widetilde{T} \mid z \in T_j \,\},$$

по которым и следует вычислять локальные индексы

$$\varkappa_k = \operatorname{ind} a_0^j(z, \varphi)\Big|_{L_0}.$$

Пусть область D_j содержит несколько локальных областей вырождения $V_1, \ldots, V_p$, которые в плоскости карты h_j^{-1} дают области вырождения символа

$$\widetilde{T}^k = \{\, (z, \varphi) \mid z \in \widetilde{U}_k,\ \sin(\varphi - \varphi_k(z)) = 0 \,\}, \quad k = \overline{1, p};$$

$\widetilde{U}_k \cap \widetilde{U}_j = \emptyset$, $k \neq j$. Соответственно

$$\varkappa_k = \operatorname{ind} a_0^j(z, \varphi)\Big|_{\widetilde{L}_k}, \quad \widetilde{L}_k \subset \widetilde{T}_{p+1} = T_j^0 \setminus \bigcup_{l=1}^{p} \widetilde{T}^l, \quad k = \overline{1, p}.$$

Тогда

$$\varkappa_0 = \sum_{k=1}^{p} \varkappa_k = \operatorname{ind} a_0^j(z, \varphi)\Big|_{\widetilde{L}^0}, \quad \widetilde{L}^0 = \sum_{k=1}^{p} \widetilde{L}^k.$$

Кривую $\widetilde{L}^0$ гомотопируем в $\widetilde{T}_{p+1}$ (т. е. не пересекая $\widetilde{T}^l$, $l = \overline{1, p}$) до кривой

$$\widetilde{L} = \{\, (z, \varphi(z)) \,|\, |\sin(\varphi(z) - \varphi_k(z))| \geqslant \delta_0 > 0 \,\},$$
$$\varkappa_0 = \operatorname{ind} a_0^j(z, \varphi) \Big|_{\widetilde{L}}. \tag{11.6}$$

Но условие (11.6) сохраняется при малом изменении символа $a_0^j(z, \varphi)$, что приводит к малому изменению $\varphi_k(z)$ и $\widetilde{U}_k$. Следовательно, сумма индексов $\varkappa_k$ по всем локальным областям вырождения $V_k \subset D_j$ есть топологический инвариант. Отсюда, очевидно, следует утверждение

Теорема 11.1. *Индекс оператора $\varkappa = \varkappa(A)$ есть топологический инвариант в классе операторов, удовлетворяющих условию $A0$.*

В заключение отметим, что локальные индексы оператора не меняются при умножении его слева или справа на оператор с невырожденным символом.

Теорема 11.2. *Пусть B — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом, $C = AB$ или $C = BA$. Тогда*:

1. $C = C_1 + \alpha$, *где* $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — *вполне непрерывен, а* C_1 — *псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, удовлетворяющий условию* $A0$.

2. $V(C_1) = V(A)$.

3. $\varkappa_k(C_1) = \varkappa_k(A)$, $k = \overline{1, n}$.

Доказательство. Из второго утверждения теоремы 8.1 § 8 следует представление $C = C_1 + \alpha$, причем главный символ C_1 равен произведению главных символов A и B:

$$c_1^j(z, \varphi) = b_0^j(z, \varphi) a_0^j(z, \varphi). \tag{11.7}$$

Отсюда сразу следует, что $c_1^j = 0 \iff a_0^j = 0$, т. е. справедливо второе утверждения теоремы. Кроме того, локальные индексы C_1 равны сумме локальных индексов A и B. Но, как уже отмечалось, локальные индексы B равны нулю. Отсюда следует третье утверждение.

Далее, из теоремы 7.2 § 7 аналогично выводу формулы (8.3) вытекает, что формула (11.7) справедлива и для локальных представлений оператора C_1 вида (11.2). Кроме того, для локальный представлений вида (11.2) имеем

$$M_1^0 \leqslant |b_0^k(z, \varphi)| \leqslant M_2^0, \quad z \in U_k^3$$

и, следовательно, с учетом условия (11.3) для $a_0^k(z, \varphi)$ имеем

$$M_1 M_1^0 |\sin\varphi| \leqslant |c_1^k(z, \varphi)| \leqslant M_2 M_2^0,$$

т. е. для $c_1^k(z,\varphi)$ выполнено (11.3). Наконец, пусть

$$\widetilde{q}_k(z,\varphi) = \ln \frac{c_1^k(z,-\varphi)}{c_1^k(z,\varphi)} = \widetilde{p}_k(z,\varphi) + \ln \frac{b_0^k(z,-\varphi)}{b_0^k(z,\varphi)},$$

$$q_k(z,\varphi) = \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{c_1^k(z,-\varphi)}{c_1^k(z,\varphi)} = p_k(z,\varphi) + \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{b_0^k(z,-\varphi)}{b_0^k(z,\varphi)} =$$

$$= p_k(z,\varphi) + \left(\frac{(b_0^k)_y(z,-\varphi)}{b_0^k(z,-\varphi)} - \frac{(b_0^k)_y(z,\varphi)}{b_0^k(z,\varphi)} \right).$$

Так как $|b_0^k| \geqslant M_0$ и $b_0^k(z,\varphi) \in C^{\gamma_0}(T)$, $\gamma_0 > 4$, то

$$|\ln b_0^k(z,\varphi)| + \left| \frac{(b_0^k)_y(z,\varphi)}{b_0^k(z,\varphi)} \right| \leqslant M \text{ при } z \in U_k^3,$$

откуда следует, что для функций $\widetilde{q}_k(z,\varphi)$ и $q_k(z,\varphi)$ выполнены условия (11.4), т. е. оператор C_1 удовлетворяет предположению A0, чем и завершается доказательство теоремы.

§ 12. Локализация оператора

В данном пункте оператор с вырождающимся символом, удовлетворяющий условию A0, приведем к виду (9.11) § 9:

$$A = A_1\tau + 1 - \tau + \alpha, \quad (1-\tau)A_1 = 1 - \tau,$$

где $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен.

Пусть A — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, удовлетворяющий условию A0, $U = D \setminus V(A)$ — область, где главный символ оператора не обращается в нуль. Вначале добьемся того, чтобы индексы символа A по любой замкнутой кривой в U были равны нулю. Напомним, что из формулы (8.3) § 8 и условия (7.2) следует, что индекс главного символа по замкнутым кривым в U есть гомотопический инвариант.

Пусть $U_1, \ldots, U_m$ — компоненты связности U. Тогда границы U_l состоят из компонент связности границ V_k. Но множества V_k по условию гомеоморфно отображаются в тор, а так как при этом главный символ $a_0^k(z,\varphi) \neq 0$ при $\sin\varphi \neq 0$, то замкнутые контуры вблизи границы V_k можно гомотопировать «через» V_k без изменения индекса главного символа. Отсюда, в частности, следует, что индекс главного символа A по всем замкнутым кривым в U, которые на D гомотопны нулю, равен нулю.

Далее, пусть U содержит какую-то замкнутую кривую L_0 из гомотопического класса $L_j^{1,2}$ и по этой кривой индекс главного символа равен $\varkappa$. Тогда этот индекс равен $\varkappa$ по всем содержащимся в U кривым, гомотопным L_0. Умножив оператор слева на функцию $(t_j^{1,2})^{-\varkappa}$

(см. § 10), приведем его к виду, в котором индекс по всем кривым в U из гомотопического класса $L_j^{1,2}$ равен нулю.

Проделав эту операцию со всеми замкнутыми кривыми в U, принадлежащими каким-либо гомотопическим классам $L_j^{1,2}$, $j = \overline{0, \rho - 1}$, приведем оператор к виду $A = t(w)\widetilde{A}$, где $t(w) \neq 0$, а у главного символа $\widetilde{A}$ индексы по всем замкнутым кривым в U равны нулю. Будем главный символ $\widetilde{A}$ обозначать снова $a_0^j(z, \varphi)$.

Пусть $U^{1,2} = D \setminus V^{1,2}$ и $U_l^{1,2}$, $l = \overline{1, m}$ — компоненты связности $U^{1,2}$, т. е.

$$U^{1,2} = \bigcup_{l=1}^{m} U_l^{1,2}; \quad \overline{U_{l_1}^{1,2}} \cap \overline{U_{l_2}^{1,2}} = \emptyset, \quad l_1 \neq l_2;$$

$U_l^{1,2}$ — связные и так как $V^1 \subset V^2$, то $U_l^2 \subset U_l^1$, $l = \overline{1, m}$. Далее, функция $[1 - \tau^2(w)] \neq 0$ только при $w \in U^2$, т. е. можно представить

$$1 - \tau^2 = \sum_{l=1}^{m} \psi_l(w), \quad \psi_l(w) \in C_0^\infty(U_l^2).$$

Отсюда, если $f(w) \equiv 1$ при $z \in U_l^2$, то $\psi_l f \equiv \psi_l$.

Возьмем карту $h_j : T_j \to D_j$ и пусть $W_j^l = D_j^2 \cap U_l^2$, $\widetilde{W}_j^l = h_j^{-1}(W_j^l)$. По условию $a_0^j(z, \varphi) \neq 0$ при $z \in \widetilde{W}_j^l$ и индекс $a_0^j(z, \varphi)$ по любой замкнутой кривой в $\widetilde{W}_j^l$ и по φ равен нулю. Тогда (утверждение 3 п. 6.1) в $\widetilde{W}_j^l$ можно определить логарифм $\beta_j^l(z, \varphi) = \ln a_0^j(z, \varphi)$, $z \in \widetilde{W}_j^l$. Пользуясь утверждением 2 п. 6.1, построим продолжение β_j^l на все T_j^2, равное нулю в $\widetilde{X}_j^l = h_j^{-1}(D_j^2 \setminus U_l^1)$ с сохранением условия гладкости (7.1), т. е. $\widetilde{\beta}_j^l(z, \varphi) = \beta_j^l(z, \varphi)$ при $z \in \widetilde{W}_j^l$ и $\widetilde{\beta}_j^l(z, \varphi) \equiv 0$ при $z \in \widetilde{X}_j^l$. Пусть $b_0^{j,l}(z, \varphi) = \exp\left(\widetilde{\beta}_j^l(z, \varphi)\right)$, тогда $b_0^{j,l}(z, \varphi) = a_0^j(z, \varphi)$ при $z \in \widetilde{W}_j^l$; $b_0^{j,l}(z, \varphi) \equiv 1$ при $z \in \widetilde{X}_j^l$. Отсюда $\widetilde{\psi}_l b_0^{j,l} = \widetilde{\psi}_l a_0^j$, где $\widetilde{\psi}_l = h_j^{-1}(\psi_l \mid z)$.

Далее действуем так же, как при обращении оператора в § 10: продолжим символ $b_0^{j,l}$ до единицы вне области T_j^3, возьмем обратимый оператор $B_{j,l}^0$ с главным символом $b_0^{j,l}$, тогда главный символ оператора $(B_{j,l}^0)^{-1} A_j$ равен единице при $z \in \widetilde{W}_j^l$. Продолжив операторы на торе $B_{j,l}^0, (B_{j,l}^0)^{-1} : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ до операторов на D $B_j^l, (B_j^l)^{-1} : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$, получим представление $\widetilde{A} = B_j^l \widetilde{A}_l^2 + \alpha$, причем $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, а $\chi_j^1 \psi_l \widetilde{A}_l^2 = \chi_j^1 \psi_l$. Последнее равенство означает, что символ $\widetilde{A}_l^2$ равен единице в $W_j^l = D_j^2 \cap U_l^2$.

Возьмем $l = 1$ и будем действовать описанным образом (как в § 10) последовательно во всех картах, начиная с h_0 и до $h_{\rho-1}$. Отметим, что при переходе на очередную карту h_j, уже имея $\chi_p^1\psi_1\widetilde{A}_1^j = \chi_p^1\psi_1$ для $p < j$, следует определять логарифм символа равным тождественно нулю в $h_j^{-1}(D_j^2 \cap U_1^2) \setminus h_j^{-1}(D_0^2 \cup \ldots \cup D_{j-1}^2) = h_j^{-1}(D_\rho(\delta_2) \cap U_1^2)$, что возможно в силу связности множеств $D_\rho(\delta_2)$ (лемма 6.2) и U_1^2, а, значит, и их пересечения. Тогда в результате получим

$$A = t(w)\widetilde{A} = t(w)\prod_{j=0}^{\rho-1} B_j^1 \circ \widetilde{A}_1^\rho + \alpha_1 = P_1 \circ \widetilde{A}_1 + \alpha_1,$$

причем $\alpha_1 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, P_1 — обратимый псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом, а

$$\chi_j^1\psi_1\widetilde{A}_1 = \chi_j^1\psi_1, \quad j = \overline{0, \rho - 1},$$

откуда, построив с помощью срезающих функций χ_j^1 разбиение единицы, получим аналогично § 10, что $\psi_1\widetilde{A}_1 = \psi_1$. При этом по построению и с учетом теоремы 8.1 оператор $\widetilde{A}_1$ удовлетворяет условию A0, $V(\widetilde{A}_1) = V(A)$; $\varkappa_k(\widetilde{A}_1) = \varkappa_k(A)$, $k = \overline{1, n}$.

Далее возьмем $l = 2$ и будем действовать совершенно аналогичным образом с оператором $\widetilde{A}_1$. Так как в очередной карте продолжение $\widetilde{\beta}_j^2(z, \varphi) \equiv 0$ при $z \in \widetilde{X}_j^2 = h_j^{-1}(D_j^2 \setminus U_2^2)$, а, очевидно, $U_1^2 \subset D \setminus U_2^2$, то символ $b_0^{j,2}(z, \varphi) \equiv 1$ при $z \in h_j^{-1}(D_j^2 \cap U_1^2)$, откуда легко следует, что для операторов B_j^2, $(B_j^2)^{-1}$ имеем $\psi_1 B_j^2 = \psi_1(B_j^2)^{-1} = \psi_1$. Тогда в результате получим

$$\widetilde{A}_1 = \prod_{j=0}^{\rho-1} B_j^2 \widetilde{A}_2^\rho + \alpha_2 = P_2\widetilde{A}_2 + \alpha_2,$$

$\alpha_2 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, P_2 — обратимый псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом, а $\psi_2\widetilde{A}_2 = \psi_2$. Но при этом

$$\psi_1\widetilde{A}_1 = \psi_1 P_2 = \psi_1(P_2)^{-1} = \psi_1\alpha_2 = \psi_1,$$

откуда

$$\psi_1\widetilde{A}_2 = \psi_1(P_2^{-1}(\widetilde{A}_1 - \alpha_2)) = \psi_1,$$

т. е.

$$(\psi_1 + \psi_2)\widetilde{A}_2 = \psi_1 + \psi_2.$$

При этом исходный оператор принимает вид

$$A = P_1\widetilde{A}_1 + \alpha_1 = P_1 P_2\widetilde{A}_2 + P_1\alpha_2 + \alpha_1 = P_1 P_2\widetilde{A}_2 + \widetilde{\alpha}_2.$$

Далее берем $l = 3$ и полностью аналогично получим

$$A = P_1 P_2 P_3 \widetilde{A}_3 + \widetilde{\alpha}_3, \quad (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)\widetilde{A}_3 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3.$$

Продолжая этот процесс до $l = m$, придем к представлению

$$A = \prod_{k=1}^{m} P_k \circ \widetilde{A}_m + \widetilde{\alpha}_m = P_0 A_1 + \alpha,$$

где $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, P_0 — обратимый псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденныи символом, а для A_1 имеем

$$(1 - \tau^2)A_1 = \sum_{l=1}^{m} \psi_l A_1 = \sum_{l=1}^{m} \psi_l = 1 - \tau^2. \tag{12.1}$$

При этом оператор A_1 удовлетворяет условию A0, $V(A_1) = V(A)$; $\varkappa_k(A_1) = \varkappa_k(A)$, $k = \overline{1, n}$.

Представив, с учетом (12.1),

$$A_1 = \tau^2 A_1 + (1 - \tau^2)A_1 = A_1\tau^2 + 1 - \tau^2 + \alpha,$$

где $\alpha = \tau^2 A_1 - A_1\tau^2 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен в силу четвертого утверждения теоремы 8.1 § 8, окончательно получим

$$A = P_0(A_1\tau^2 + 1 - \tau^2) + \alpha = P_0 A_0 + \alpha. \tag{12.2}$$

Теорема 12.1. *Для псевдодифференциального оператора нулевого порядка A, удовлетворяющего условию $A0$, имеем представление* (12.2), *где $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, P_0 — обратимый псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом, оператор A_0 имеет вид*

$$A_0 = A_1\tau^2 + 1 - \tau^2,$$

A_1 — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка, удовлетворяющий условию $A0$ и

$$(1 - \tau^2)A_1 = 1 - \tau^2; \tag{12.3}$$

причем $V(A_1) = V(A)$; $\varkappa_k(A_1) = \varkappa_k(A)$, $k = \overline{1, n}$.

Условие (12.3), в частности, означает, что главный символ оператора A_1 равен единице вне области V^2.

Представление (12.2) позволяет рассматривать обращение оператора A, т. е. решение уравнения $Af = g$, на классе функций f, равных нулю вблизи области вырождения символа. Рассмотрим пространство функций

$$W_2^s(D, \tau^2) = \{\, f \in W_2^s(D) \mid \tau^2 f \equiv 0 \,\}.$$

Очевидно, $W_2^s(D,\tau^2)$ — замкнутое подпространство $W_2^s(D)$. Пусть, далее,

$$X = A(W_2^s(D,\tau^2)) = \{\, g \in W_2^s(D) \mid \exists f \in W_2^s(D,\tau^2): \; g = Af \,\}$$

— образ оператора A на пространстве $W_2^s(D,\tau^2)$. Покажем, что оператор $A : W_2^s(D,\tau^2) \to X$ имеет конечномерное ядро и непрерывный правый обратный.

Теорема 12.2. *Справедливы утверждения*:

1. X *— замкнутое подпространство* $W_2^s(D)$.

2. *Ядро* A *на* $W_2^s(D,\tau^2)$ *— конечномерно.*

3. *Существует непрерывный оператор* $B : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ *такой, что* $B : X \to W_2^s(D,\tau^2)$ *и* $ABg = g, \forall\, g \in X$, *т. е.* $f = Bg \in W_2^s(D,\tau^2)$ *— частное решение уравнения* $Af = g \in X$.

Первое условие теоремы означает, что оператор A *нормально разрешим* на пространстве $W_2^s(D,\tau^2)$ [32, с. 29].

Доказательство. В первую очередь отметим, что если $f \in W_2^s(D,\tau^2)$, т. е. $\tau^2 f \equiv 0$, то

$$A_0 f = A_1\tau^2 f + (1-\tau^2)f = (1-\tau^2)f = f.$$

С учетом представления (12.2) это означает, что при $f \in W_2^s(D,\tau^2)$ уравнение $Af = g$ принимает вид $(P_0 + \alpha)f = g$. Но так как оператор P_0 — обратим, а α — вполне непрерывен, то оператор $P = P_0 + \alpha$ — нетеров нулевого индекса, т. е. его ядро имеет конечную размерность m, а образ — конечную коразмерность m. Точнее, существует система линейно независимых функций $f_k \in W_2^s(D)$ (базис ядра P) и функционалов $\psi_k : W_2^s(D) \to \mathbb{C}$ (базис коядра P), $k = \overline{1,m}$ и непрерывный оператор $P_1 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ такие, что

$$(P_0+\alpha)f = g \Longleftrightarrow \psi_k(g) = 0, \quad k = \overline{1,m}; \qquad f = P_1 g + \sum_{k=1}^{m} c_k f_k, \tag{12.4}$$

где c_k — произвольные константы [43, 32].

Отсюда, в частности, ядро оператора A на пространстве $W_2^s(D,\tau^2)$ — это функции вида $\sum c_k f_k$ такие, что $\sum c_k\tau^2 f_k \equiv 0$. Выберем базис f_k так, чтобы $\tau^2 f_k \equiv 0$ при $k = \overline{1,m_0}$ и $\widetilde{f_k} = \tau^2 f_k$, $k = \overline{m_0+1,m}$ — линейно независимы (возможно, $m_0 = 0$ или $m_0 = m$). В таком случае ядро оператора A на пространстве $W_2^s(D,\tau^2)$ — это конечномерное пространство размерности m_0 $\{\, f = \sum\limits_{k=1}^{m_0} c_k f_k \,\}$, т. е. верно второе утверждение теоремы.

Далее, пусть $g \in X$, т. е.

$$g = Af = (P_0+\alpha)f, \quad f \in W_2^s(D,\tau^2).$$

Тогда, во-первых, $\psi_k(g) = 0$, $k = \overline{1, m}$ и, во-вторых,

$$f = P_1 g + \sum_{k=1}^{m} c_k f_k,$$

что с учетом выбора базиса f_k дает условие

$$\tau^2 f = \tau^2 P_1 g + \sum_{k=m_0+1}^{m} c_k \widetilde{f}_k \equiv 0.$$

Рассмотрим конечномерное пространство размерности $(m - m_0)$

$$X_1 = \Big\{ f = \sum_{k=m_0+1}^{m} c_k \widetilde{f}_k \Big\}.$$

Из предыдущих рассуждений следует, что

$$X = \{g \in W_2^s(D) \mid \psi_k(g) = 0, k = \overline{1, m};\ \tau^2 P_1 g \in X_1\} = X_0 \cap X_2, \tag{12.5}$$

$$X_0 = \{g \mid \psi_k(g) = 0, k = \overline{1, m}\}, \quad X_2 = \{g \mid \tau^2 P_1 g \in X_1\}.$$

Очевидно, X_0 — замкнутое подпространство $W_2^s(D)$. Но X_2 — это прообраз конечномерного пространства X_1 при действии непрерывного оператора $\tau^2 P_1 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$, следовательно, тоже замкнутое подпространство [32]. Тогда и $X = X_0 \cap X_2$ — замкнуто, т. е. доказано первое утверждение теоремы.

Наконец, так как $X_1 \subset W_2^s(D)$ — конечномерно, то пространство $W_2^s(D)$ можно разложить в прямую сумму [32, с. 27]

$$W_2^s(D) = X_1 \oplus \widetilde{X},$$

т. е. существует непрерывный проектор

$$Q : W_2^s(D) \to X_1, \quad Qf = \sum_{k=m_0+1}^{m} \widetilde{c}_k(f) \widetilde{f}_k,$$

где $\widetilde{c}_k : W_2^s(D) \to \mathbb{C}$ — линейно независимые функционалы, причем

$$f \in X_1 \Longleftrightarrow Qf = f.$$

Рассмотрим оператор

$$Bg = P_1 g - \sum_{k=m_0+1}^{m} \widetilde{c}_k(\tau^2 P_1 g) f_k.$$

Очевидно, $B : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — непрерывен. Пусть $g \in X$, т.е. $\psi_k(g) = 0$, $k = \overline{1,m}$ и $\tau^2 P_1 g \in X_1$. Но если $\tau^2 P_1 g \in X_1$, то

$$0 = \tau^2 P_1 g - Q(\tau^2 P_1 g) = \tau^2 P_1 g - \sum_{k=m_0+1}^{m} \widetilde{c}_k(\tau^2 P_1 g)\widetilde{f}_k,$$

откуда

$$\tau^2 Bg = \tau^2(P_1 g - \sum_{k=m_0+1}^{m} \widetilde{c}_k(\tau^2 P_1 g) f_k) = \\ = \tau^2 P_1 g - \sum_{k=m_0+1}^{m} \widetilde{c}_k(\tau^2 P_1 g)\widetilde{f}_k = 0,$$

т.е. $Bg \in W_2^s(D, \tau^2)$ или $B : X \to W_2^s(D, \tau^2)$. Далее, в силу (12.4), если $\psi_k(g) = 0$, $k = \overline{1,m}$, то $(P_0 + \alpha)P_1 g = g$. Отсюда получим, что при $g \in X$

$$ABg = (P_0 + \alpha)Bg = (P_0 + \alpha)P_1 g - \sum_{k=m_0+1}^{m} \widetilde{c}_k(P_0 + \alpha) f_k = g.$$

Теорема доказана.

Теперь продолжим локализацию оператора. Разобьем локальные области вырождения на две части:

$$W^1 = \bigcup_{k=1}^{p} V_k, \quad W^2 = \bigcup_{k=p+1}^{n} V_k$$

и пусть

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{p} \tau_k^2, \quad \sigma_2 = \sum_{k=p+1}^{n} \tau_k^2.$$

Очевидно,

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \tau^2, \quad \sigma_1\sigma_2 \equiv 0, \quad \overline{\operatorname{supp}\sigma_1} \cap \overline{\operatorname{supp}\sigma_2} = \emptyset. \tag{12.6}$$

Введем операторы $B_{1,2} = \sigma_{1,2}A_1 + 1 - \sigma_{1,2}$. С учетом (12.3) и (12.6) получим

$$(1 - \sigma_1)B_1 = (1 - \tau^2 + \sigma_2)\sigma_1 A_1 + (1 - \sigma_1)^2 = \sigma_1(1 - \tau^2) + (1 - \sigma_1)^2 = \\ = \sigma_1(1 - \sigma_1 - \sigma_2) + (1 - \sigma_2)^2 = \sigma_1(1 - \sigma_1) + (1 - \sigma_1)^2 = 1 - \sigma_1.$$

Это означает, что главный символ B_1 равен единице вне окрестности W^1, в частности, в окрестности W^2. При этом

$$B_1 = \sigma_1 A_1 + 1 - \tau^2 + \sigma_2 = \sigma_1 A_1 + (1 - \tau^2)A_1 + \sigma_2 = \\ = (1 - \sigma_2)A_1 + \sigma_2 = A_1 + \sigma_2(E - A_1),$$

т. е. в области, где $\sigma_2 \equiv 0$, в частности, в окрестности W^1, главный символ B_1 равен главному символу A_1. Таким образом, оператор B_1 «теряет» область вырождения символа W^2, где он действует, как единичный, но сохраняет полностью область вырождения W^1 с условием A0 и локальными индексами $\varkappa_k$, $k = \overline{1,p}$. Аналогично $(1-\sigma_2)B_2 = 1 - \sigma_2$, т. е. B_2 действует как единичный вне окрестности W^2, в том числе и в окрестности W^1, а в окрестности W^2 его главный символ равен главному символу оператора A_1. Таким образом, операторы $B_{1,2}$ «разделяют» области вырождения символа $W^{1,2}$.

Лемма 12.1. *Пусть A — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с вырождающимся символом, удовлетворяющий условию $A0$. Тогда имеет место представление*

$$A = P_0 C_1 C_2 + \alpha, \tag{12.7}$$

где $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, P_0 — обратимый псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом,

$$C_{1,2} = B_{1,2}\sigma_{1,2} + 1 - \sigma_{1,2}; \tag{12.8}$$

причем операторы C_1 и C_2 коммутируют и

$$(1-\sigma_{1,2})B_{1,2} = 1 - \sigma_{1,2}; \tag{12.9}$$

операторы $B_{1,2}$ удовлетворяют условию $A0$; $V(B_{1,2}) = W^{1,2}$; $\varkappa_k(B_{1,2}) = \varkappa_k(A)$ для $V_k \subset W^{1,2}$.

Доказательство. С учетом сказанного выше осталось показать, что C_1 и C_2 коммутируют и

$$A_0 = A_1\tau^2 + 1 - \tau^2 = C_1C_2 + \alpha.$$

Из (12.9) следует

$$B_2\sigma_2 = \sigma_2 B_2 \sigma_2 + (1-\sigma_2)\sigma_2 = \sigma_2 C_2,$$

откуда с учетом (12.9) и (12.6) находим

$$\begin{aligned} C_1C_2 &= (B_1\sigma_1 + 1 - \sigma_1)(B_2\sigma_2 + 1 - \sigma_2) = \\ &= B_1\sigma_1\sigma_2C_2 + (1-\sigma_1)\sigma_2C_2 + B_1\sigma_1(1-\sigma_2) + (1-\sigma_1)(1-\sigma_2) = \\ &= 0 + \sigma_2C_2 + B_1\sigma_1 + 1 - \sigma_1 - \sigma_2 = B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + 1 - \tau^2, \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$C_2C_1 = B_2\sigma_2 + B_1\sigma_1 + 1 - \tau^2.$$

Отсюда вытекает, что C_1 и C_2 коммутируют. Кроме того, используя (12.3) и (12.6), получим

$$\begin{aligned} A_1\sigma_1 &= \sigma_1A_1\sigma_1 + \sigma_2A_1\sigma_1 + (1-\tau^2)A_1\sigma_1 = \\ &= \sigma_1A_1\sigma_1 + \alpha_1 + (1-\tau^2)\sigma_1 = B_1\sigma_1 + \alpha_1, \end{aligned} \tag{12.10}$$

где $\alpha_1 = \sigma_2 A_1 \sigma_1 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен в силу условия локальности. Аналогично

$$A_1\sigma_2 = B_2\sigma_2 + \alpha_2. \tag{12.11}$$

Из (12.11), (12.12) и (12.10) имеем

$$A_0 = A_1\tau^2 + 1 - \tau^2 = A_1\sigma_1 + A_1\sigma_2 + 1 - \tau^2 =$$
$$= B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + 1 - \tau^2 + \alpha_1 + \alpha_2 = C_1C_2 + \alpha,$$

$\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, что и завершает доказательство леммы.

Очевидно, что можно и далее разделять компоненты связности V_k по группам. Таким образом, продолжая разделение особенностей, приходим к общему утверждению:

Теорема 12.3 (о локализации особенностей). *Произвольно сгруппируем локальные области вырождения* V_k:

$$W^j = \bigcup_{k\in O_j} V_k,\ j = \overline{1,m};\ \ \bigcup_{j=1}^{m} O_j = \{1,2,\ldots,n\};\ \ O_{j_1}\cap O_{j_2} = \emptyset,\ j_1 \neq j_2$$

(*в частности, можно взять* $O_j = \{j\}$, $j = \overline{1,n}$, *т. е.* $W^k = V_k$, $k = \overline{1,n}$). *Тогда*

$$A = P_0 \prod_{j=1}^{m} C_j + \alpha, \tag{12.12}$$

где $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — *вполне непрерывен,* P_0 — *обратимый псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом,*

$$C_j = B_j\sigma_j^2 + 1 - \sigma_j^2, \quad \sigma_j^2 = \sum_{k\in O_j} \tau_k^2,$$

причем

$$(1-\sigma_j^2)B_j = 1 - \sigma_j^2,$$

операторы B_j *удовлетворяют условию* $A0$, $V(B_j) = W^j$, $j = \overline{1,m}$; *их локальные индексы*

$$\varkappa_k(B_j) = \varkappa_k(A), \quad k \in O_j.$$

При этом операторы C_j *попарно коммутируют.*

Следствие. Индексы операторов C_j:

$$\varkappa_j = \varkappa(C_j) = \sum_{k\in O_j} \varkappa_k(A).$$

Операторы B_j, C_j будем называть *локализованными* на областях вырождения W^j.

§ 13. Обращение локализованных операторов

Пусть оператор локализован на одной локальной области вырождения V_k:

$$\begin{gathered} C_k = B_k\tau_k + 1 - \tau_k; \quad (1-\tau_k)B_k = 1-\tau_k, \quad \tau_k = \tau_k^2; \\ V(B_k) = V_k, \quad \varkappa(B_k) = \varkappa_k(A). \end{gathered} \tag{13.1}$$

Тогда, согласно теореме 9.3 § 9, можно представить

$$C_k = H(C_k^0) = \mu_k^{-1}C_k^0\widetilde{\tau}_k^3\mu_k + 1 - \tau_k^3, \tag{13.2}$$

где

$$C_k^0 = \mu_k\tau_k^2B_k\tau_k^2\mu_k^{-1} + 1 - (\widetilde{\tau}_k^2)^2.$$

Но B_k удовлетворяет условию A0, т. е. в локальном представлении (11.2)

$$B_k' = \mu_k\tau_k^3B_k\mu_k^{-1}\widetilde{\tau}_k^3 = \mathrm{op}(b_0^k(z,\varphi(\xi)) + b_{-1}^k(z,\xi))$$

и символ $b_0^k(z,\varphi)$ удовлетворяет условиям (11.3), (11.4). При этом с учетом (11.1)

$$C_k^0 = \widetilde{\tau}_k^2\mu_k\tau_k^3B_k\mu_k^{-1}\widetilde{\tau}_k^3\widetilde{\tau}_k^2 + 1 - (\widetilde{\tau}_k^2)^2 = \widetilde{\tau}_k^2B_k'\widetilde{\tau}_k^2 + 1 - (\widetilde{\tau}_k^2)^2$$

и главный символ оператора C_k^0

$$c_0^k(z,\varphi) = (\widetilde{\tau}_k^2)^2b_0^k(z,\varphi) + 1 - (\widetilde{\tau}_k^2)^2.$$

Таким образом, при $\widetilde{\tau}_k^2 = 1$, т. е. в области U_k^2, имеем $c_0^k(z,\varphi) \equiv b_0^k(z,\varphi)$, а вне области U_k^3 (где $\widetilde{\tau}_k^2 \equiv 0$), $c_0^k(z,\varphi) \equiv 1$. Далее, из условий (13.1) следует, что

$$(1-\widetilde{\tau}_k^2)B_k' = \mu_k\tau_k^3(1-\tau_k^2)B_k\mu_k^{-1}\widetilde{\tau}_k^3 = (1-\widetilde{\tau}_k^2)(\widetilde{\tau}_k^3)^2,$$

откуда, аналогично доказательству леммы 9.1,

$$(1-\widetilde{\tau}_k^2)b_0^k(z,\varphi) = (\widetilde{\tau}_k^3)^2(1-\widetilde{\tau}_k^2).$$

В частности, в области U_k^3 (здесь $\widetilde{\tau}_k^3 \equiv 1$) имеем $(1-\widetilde{\tau}_k^2)b_0^k = 1-\widetilde{\tau}_k^2$, т. е. $b_0^k \equiv 1$ при $\widetilde{\tau}_k^2 \neq 1$. Тогда

$$b_0^k = \widetilde{\tau}_k^2b_0^k + (1-\widetilde{\tau}_k^2)b_0^k = \widetilde{\tau}_k^2b_0^k + 1 - \widetilde{\tau}_k^2,$$

т. е. при $z \in U_k^3 \setminus U_k^2$

$$\begin{aligned} c_0^k(z,\varphi) &= (\widetilde{\tau}_k^2)^2b_0^k(z,\varphi) + 1 - (\widetilde{\tau}_k^2)^2 = \\ &= (\widetilde{\tau}_k^2)^3b_0^k(z,\varphi) + (\widetilde{\tau}_k^2)^2(1-\widetilde{\tau}_k^2) + 1 - \widetilde{\tau}_k^2 = 1 + (\widetilde{\tau}_k^2)^3(b_0^k(z,\varphi) - 1). \end{aligned}$$

Так как при $\widetilde{\tau}_k^2 \neq 1$ $b_0^k \equiv 1$, то

$$c_0^k(z,\varphi) = \begin{cases} b_0^k(z,\varphi), & \widetilde{\tau}_k^2 = 1, \\ 1, & \widetilde{\tau}_k^2 \neq 1. \end{cases}$$

При этом $c_0^k(z,\varphi)$ непрерывна по z и φ. Окончательно приходим к выводу, что $c_0^k(z,\varphi)$ — это продолжение $b_0^k(z,\varphi)$ из области U_k^2 до единицы вне U_k^3, причем символ $c_0^k(z,\varphi) \neq 0$ при $z \notin U_k^2$. Отсюда следует, что $c_0^k(z,\varphi)$ обращается в нуль точно в тех же точках $(z,\varphi) \in \widetilde{T}$, что и $b_0^k(z,\varphi)$, причем для $c_0^k(z,\varphi)$ выполнены условия (11.3), (11.4).

Далее, кривую L в $\widetilde{T}_1 \setminus \widetilde{T}_0$, по которой вычислялся локальный индекс $\varkappa_k$ (см. § 11), можно в области $\widetilde{T} \setminus \widetilde{T}_0$ (где $c_0^k \neq 0$) гомотопировать до кривой $L(x) = L^-(x) - L^+(x)$,

$$L^\pm(x) = \bigl\{(z,\varphi(z)) \,|\, z = (x,y),\ y \in [0,2\pi],\ \varphi(x,0) = \\ = \varphi(x,2\pi) = 0;\ \pm\sin\varphi(z) > 0 \ \text{ при } \ z \in U\bigr\},$$

причем $c_0^k(z,\varphi) = 1$ при $z = (x,0) = (x,2\pi)$. Это означает, что $L^\pm$ — сами по себе замкнутые кривые в $\widetilde{T} \setminus \widetilde{T}_0$, которые можно гомотопировать до кривых

$$L_\pm(x) = \bigl\{(z,\varphi) \,|\, z = (x,y),\ y \in [0,2\pi],\ x,\varphi = \mathrm{const},\ \pm\sin\varphi > 0\bigr\}.$$

Таким образом, локальный индекс

$$\varkappa_k = \operatorname{ind} c_0^k(z,\varphi)\Big|_L = \operatorname{ind} c_0^k\Big|_{L^-} - \operatorname{ind} c_0^k\Big|_{L^+} = \operatorname{ind} \frac{c_0^k(z,-\varphi)}{c_0^k(z,\varphi)}\Big|_{L^2},$$

$$\sin\varphi > 0, \quad L^2 = \{\, z = (x,y) \,|\, y \in [0,2\pi] \,\},$$

т. е. локальный индекс $\varkappa_k$ оператора C_k^0 на торе можно вычислить по формуле (3.3) § 3. Итак, приходим к следующему утверждению.

Теорема 13.1. *Оператор* $C_k^0 = \mathrm{op}(c_0^k(z,\varphi(\xi))) + \alpha$, *где* $\alpha : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ *— оператор порядка* (-1), *а главный символ* $c_0^k(z,\varphi)$ *удовлетворяет условиям* (11.3), (11.4), *т. е. условиям* (3.1), (3.2) *§ 3, причем* $\varkappa_k$ *— это индекс, вычисляемый по формуле* (3.3) *§ 3.*

Утверждение теоремы 13.1 означает, что к оператору C_k^0 можно применить результаты § 5, т. е. построить факторизацию, правый или левый обратный и найти ядро и условия разрешимости. Сформулируем результаты § 5 применительно к данному случаю: пусть $\delta = \nu/(2\nu+1)$, $\nu = \beta_0 + 6$, β_0 — из условия (11.4), $s < \min(\gamma_1 - 3, \gamma_0 - 4)$.

Теорема 13.2. *Справедливы утверждения*:

1. *Имеет место представление*

$$C_k^0 = \widetilde{C}_k^0 + \widetilde{\alpha}_k = \widetilde{P}_{1,k} Q_{\varkappa_k} \widetilde{P}_{2,k} + \widetilde{\alpha}_k, \tag{13.3}$$

где $\widetilde{\alpha}_k : W_2^s(T) \to W_2^s(T)$ — *вполне непрерывен*;

$$(1-\widetilde{\tau}_k^2)\widetilde{C}_k^0 = 1-\widetilde{\tau}_k^2;$$

существуют операторы $\widetilde{P}_{j,k}^{-1}$, $j=1,2$, *такие, что* $\widetilde{P}_{j,k}\widetilde{P}_{j,k}^{-1} = \widetilde{P}_{j,k}^{-1}\widetilde{P}_{j,k} = E$. *При этом* $\widetilde{P}_{j,k}, \widetilde{P}_{j,k}^{-1} : W_2^s(T) \to W_2^{s-\delta}(T)$ — *непрерывны.*

2. *При* $\varkappa_k = 0$ *решение уравнения* $\widetilde{C}_k^0 f = g \in W_2^s(T)$ *существует и единственно*,

$$f = \widetilde{P}_k^0 g = \widetilde{P}_{2,k}^{-1} \circ \widetilde{P}_{1,k}^{-1} g, \tag{13.4}$$

причем $\widetilde{P}_k^0 : W_2^s(T) \to W_2^{s-2\delta}(T)$ — *непрерывен.*

3. *При* $\varkappa_k > 0$

$$\widetilde{C}_k^0 f = g \iff f = \widetilde{P}_k^0 g + \sum_{j=0}^{\varkappa_k-1} \widetilde{P}_{2,k}^{-1}\left[f_j(z_1)z_2^j(1-z_2^{-\varkappa_k})\right];$$

где $f_j(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$ — *произвольные функции*, $j=\overline{0,\varkappa_k-1}$; $\widetilde{P}_k^0 = \widetilde{P}_{2,k}^{-1} Q_{-\varkappa_k} \widetilde{P}_{1,k}^{-1}$.

В этом случае решение задачи

$$\begin{cases} \widetilde{C}_k^0 f = g, \quad g(z) \in W_2^s(T), \\ \displaystyle\int_{L_1} z_2^j \widetilde{P}_{2,k} f\,dz_2 = \psi_j(z_1), \quad j=\overline{0,\varkappa_k-1}, \end{cases} \tag{13.5}$$

где $\psi_j(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$ — *заданные (произвольно) функции, существует, единственно и имеет вид*

$$f = \widetilde{P}_0 g - \sum_{j=0}^{\varkappa_k-1} \widetilde{P}_{2,k}^{-1}\left[\psi_{\varkappa_k-1-j}(z_1)z_2^j(1-z_2^{-\varkappa_k})\right]. \tag{13.6}$$

При этом $f \in W_2^{s-2\delta}(T)$ *есть непрерывный оператор над* $g(z) \in W_2^s(T)$; $\psi_j(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$, $j=\overline{0,\varkappa_k-1}$.

4. *При* $\varkappa_k < 0$

$$\widetilde{C}_k^0 f = g \Longleftarrow f = \widetilde{P}_k^0 g,$$

$\widetilde{P}_k^0 = \widetilde{P}_{2,k}^{-1}\widetilde{Q}_{-\varkappa_k}\widetilde{P}_{1,k}^{-1}$ *и для разрешимости уравнения* $\widetilde{C}_k^0 f = g$ *необходимо и достаточно выполнения условий разрешимости*

$$\int_{L_1} z_2^j(\widetilde{P}_{1,k}^{-1} g)\,dz_2 \equiv 0, \quad j=\overline{0,|\varkappa_k|-1}. \tag{13.7}$$

В этом случае решение задачи

$$\widetilde{C}_k^0 f = g + \sum_{j=0}^{|\varkappa_k|-1} (E - \widetilde{C}_k^0)\widetilde{P}_{1,k}\left[\psi_j(z_1) z_2^{-j-1}\right], \tag{13.8}$$

где $\psi_j(z_1)$ — искомые функции, существует, единственно и имеет вид

$$\begin{cases} \psi_j(z_1) = -\displaystyle\int_{L_1} z_2^j(\widetilde{P}_{1,k}^{-1} g)\, dz_2, \quad k = \overline{0, |\varkappa_k|-1}; \\ f = \widetilde{P}_k^0 g - \displaystyle\sum_{j=0}^{|\varkappa_k|-1} \widetilde{P}_{1,k}\left[\psi_j(z_1) z_2^{-j-1}\right]. \end{cases} \tag{13.9}$$

При этом $f(z) \in W_2^{s-2\delta}(T)$; $\psi_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$ есть непрерывные операторы над $g(z) \in W_2^s(T)$.

Действительно, условие

$$(1 - \widetilde{\tau}_k^2)\widetilde{C}_k^0 = 1 - \widetilde{\tau}_k^2$$

следует из аналогичного предположения об операторе C_k^0, леммы 9.1 § 9 и построения регуляризованного оператора $\widetilde{C}_k^0$ (п. 5.1). Остальные утверждения — это переформулировка теоремы 5.7 п. 5.3, причем в случае $\varkappa_k < 0$ используется постановка задачи, предложенная в замечании к этой теореме (формулы (5.34), (5.35)).

Из результатов § 9 следует утверждение.

Лемма 13.1. *Пусть $g(z) \in W_2^s(U_k^4)$, т. е. $g(z) \equiv 0$ при $z \notin U_k^4$. Тогда функции $f(z)$ вида (13.4) при $\varkappa_k = 0$, (13.6) при $\varkappa_k > 0$ и (13.9) при $\varkappa_k < 0$, а также функции*

$$\widetilde{\psi}_j = (E - \widetilde{C}_k^0)\widetilde{P}_{1,k}\left[\psi_j(z_1) z_2^{-j-1}\right], \quad j = \overline{0, |\varkappa_k| - 1}$$

при $\varkappa_k < 0$ равны нулю при $z \notin U_k^4$.

Доказательство. В случае $\varkappa_k = 0$, $\widetilde{P}_k^0$ есть обратный к $\widetilde{C}_k^0$, т. е. $\widetilde{C}_k^0 \widetilde{P}_k^0 = E$, тогда в силу третьего утверждения леммы 9.2 § 9

$$(1 - \widetilde{\tau}_k^2)\widetilde{P}_k^0 = 1 - \widetilde{\tau}_k^2,$$

откуда при $z \notin U_k^4$ (когда $\widetilde{\tau}_k^2(z) \equiv 0$)

$$f(z) = (1 - \widetilde{\tau}_k^2) f(z) = (1 - \widetilde{\tau}_k^2)\widetilde{P}_k^0 g = (1 - \widetilde{\tau}_k^2) g(z) = g(z) = 0,$$

т. е. утверждение леммы справедливо для $f(z)$ вида (13.4).

Аналогично при $\varkappa_k > 0$, $\widetilde{P}_k^0$ есть правый обратный к $\widetilde{C}_k^0$, а

$$\sum_{j=0}^{\varkappa_k - 1} \widetilde{P}_{2,k}^{-1}\left[\psi_{\varkappa_k - 1 - j}(z_1) z_2^j (1 - z_2^{-\varkappa_k})\right] \in \ker \widetilde{C}_k^0$$

и из второго утверждения леммы 9.2 § 9 следует утверждение леммы для $f(z)$ вида (13.6).

Наконец, при $\varkappa_k < 0$ из условия

$$(1 - \widetilde{\tau}_k^2)\widetilde{C}_k^0 = 1 - \widetilde{\tau}_k^2$$

следует

$$(1 - \widetilde{\tau}_k^2)\widetilde{\psi}_j = (1 - \widetilde{\tau}_k^2)(E - \widetilde{C}_k^0)\widetilde{P}_{1,k}\left[\psi_j(z_1)z_2^{-j-1}\right] = 0,$$

т. е. утверждение леммы выполнено для $\widetilde{\psi}_j$. Кроме того, в этом случае $f(z)$ есть решение уравнения

$$\widetilde{C}_k^0 f = g + \sum_{j=0}^{|\varkappa_k|-1} \widetilde{\psi}_j$$

и условие $f(z) \equiv 0$ при $z \notin U_k^4$ следует из теоремы 9.3 § 9. Лемма доказана.

Результаты § 9, вместе с леммой 13.1, позволяют перенести теорему 13.2 на оператор C_k на D: пусть

$$\widetilde{P}_k = H(\widetilde{P}_k^0) = \mu_k^{-1}\widetilde{P}_k^0\mu_k\tau_k^3 + (1 - \tau_k^3).$$

Теорема 13.3. *Выполняются утверждения.*

1. *Имеет место представление*

$$C_k = \widetilde{C}_k + \alpha_k, \tag{13.10}$$

где $\alpha_k : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен;

$$(1 - \tau_k^3)\widetilde{C}_k = 1 - \tau_k^3, \quad \widetilde{C}_k = H(\widetilde{C}_k^0) = \mu_k^{-1}\widetilde{C}_k^0\mu_k\tau_k^3 + 1 - \tau_k^3.$$

2. *При $\varkappa_k = 0$ решение уравнения $\widetilde{C}_k f = g \in W_2^s(D)$ существует и единственно,*

$$f = \widetilde{P}_k g. \tag{13.11}$$

При этом $f(w) \in W_2^{s-2\delta}(D)$ есть непрерывный оператор над $g(w) \in W_2^s(D)$.

3. *При $\varkappa_k > 0$*

$$\widetilde{C}_k f = g \Longleftrightarrow f = \widetilde{P}_k g + \sum_{j=0}^{\varkappa_k-1} \mu_k^{-1}\widetilde{P}_{2,k}^{-1}\left[f_j(z_1)z_2^j(1 - z_2^{-\varkappa_k})\right];$$

где $f_j(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$ — произвольные функции, $j = \overline{0, \varkappa_k - 1}$.

В этом случае корректная постановка задачи для уравнения $\widetilde{C}_k f = g$ *имеет вид*

$$\left\{\begin{aligned} &\widetilde{C}_k f = g, \quad g(z) \in W_2^s(D), \\ &\int\limits_{L_1} z_2^j (\widetilde{P}_{2,k}\mu_k \tau_k^3 f)\, dz_2 = \psi_j(z_1), \quad j = \overline{0, \varkappa_k - 1}, \end{aligned}\right. \tag{13.12}$$

где $\psi_j(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$ *— заданные (произвольно) функции, т. е. решение* (13.12) *существует, единственно и имеет вид*

$$f = \widetilde{P}_k g - \sum_{j=0}^{\varkappa_k - 1} \mu_k^{-1} \widetilde{P}_{2,k}^{-1} \left[\psi_{\varkappa_k - 1 - j}(z_1) z_2^j (1 - z_2^{-\varkappa_k})\right]. \tag{13.13}$$

При этом $f \in W_2^{s-2\delta}(D)$ *есть непрерывный оператор над* $g(w) \in$ $\in W_2^s(D)$; $\psi_j(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$, $j = \overline{0, \varkappa_k - 1}$.

4. *При* $\varkappa_k < 0$

$$\widetilde{C}_k f = g \Longleftarrow f = \widetilde{P}_k g$$

и для разрешимости уравнения $\widetilde{C}_k f = g$ *необходимо и достаточно выполнения условий разрешимости*

$$\int\limits_{L_1} z_2^j (\widetilde{P}_{1,k}^{-1} \mu_k \tau_k^3 g)\, dz_2 \equiv 0, \quad j = \overline{0, |\varkappa_k| - 1}. \tag{13.14}$$

В этом случае корректная постановка задачи для уравнения $\widetilde{C}_k f = g$ *имеет вид*

$$\widetilde{C}_k f = g + \sum_{j=0}^{|\varkappa_k| - 1} \mu_k (E - \widetilde{C}_k^0) \widetilde{P}_{1,k} \left[\psi_j(z_1) z_2^{-j-1}\right], \tag{13.15}$$

где $\psi_j(z_1)$ *— искомые функции, т. е. решение* (13.15) *существует, единственно и представляется в виде*

$$\psi_j(z_1) = -\int\limits_{L_1} z_2^j (\widetilde{P}_{1,k}^{-1} \mu_k \tau_k^3 g)\, dz_2, \quad k = \overline{0, |\varkappa_k| - 1};$$

$$f = \mu_k^{-1} \left(\widetilde{P}_k^0 \mu_k \tau_k^3 g - \sum_{j=0}^{|\varkappa_k| - 1} \widetilde{P}_{1,k} \left[\psi_j(z_1) z_2^{-j-1}\right] \right) + (1 - \tau_k^3) g. \tag{13.16}$$

При этом $f(w) \in W_2^{s-2\delta}(D)$; $\psi_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$ *есть непрерывные операторы над* $g(w) \in W_2^s(D)$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из первого утверждения теоремы 13.2 и теоремы 9.2 § 9. Далее, в силу теоремы 9.3

§ 9 уравнение $\widetilde{C}_k f = g$ сводится к уравнению $\widetilde{C}_k^0 \widetilde{f} = \mu_k \tau_k^3 g$, причем $f = \mu_k^{-1} \widetilde{f} + (1 - \tau_k^3) g$, откуда, с учетом теоремы 13.2 и леммы 13.1 и вытекают все остальные утверждения теоремы.

Теперь рассмотрим случай, когда оператор локализован на группе локальных областей вырождения. Пусть

$$W^j = \bigcup_{k \in O_j} V_k, \quad j = \overline{1, m};$$

$$\bigcup_{j=1}^{m} O_j = \{1, 2, \ldots, n\}; \quad O_{j_1} \cap O_{j_2} = \emptyset, \quad j_1 \neq j_2.$$

Тогда по теореме 12.3 § 12

$$A = P_0 \prod_{j=1}^{m} C_j + \alpha,$$

где $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, P_0 — обратимый псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом,

$$C_j = B_j \sigma_j^2 + 1 - \sigma_j^2, \quad \sigma_j^2 = \sum_{k \in O_j} \tau_k^2, \quad (1 - \sigma_j^2) B_j = 1 - \sigma_j^2.$$

Операторы B_j удовлетворяют условию A0, $V(B_j) = W^j$, $j = \overline{1, m}$, а их локальные индексы равны индексам оператора A:

$$\varkappa_k(B_j) = \varkappa_k(A), \quad k \in O_j.$$

Зафиксируем j и рассмотрим операторы C_j, B_j. Пусть $O_j = \{k_1, \ldots, k_m\}$. Потребуем, чтобы V_k, $k \in O_j$ гомеоморфно отображались в тор внутрь «полос»

$$\mu_k^{-1}(V_k) = U_k \subset \{\, z \mid x \in [0, 2\pi], \quad y \in [\alpha_k, \beta_k], \quad 0 < \alpha_k < \beta_k < 2\pi\}. \tag{13.17}$$

Из формул замены переменных в псевдодифференциальном операторе § 7 нетрудно видеть, что переотображение $y \to Ay + b$, $A, B = \mathrm{const}$, $A \neq 0$ не влияет на выполнение условий (11.3), (11.4). Тогда с точностью до переотображения $y \to \psi(y)$, $\psi : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$, $\psi'(y) > 0$, $\psi(y) = Ay + B$ при $y \in [\alpha_k - \varepsilon, \beta_k + \varepsilon]$ можно считать числа $0 < \alpha_k < \beta_k < 2\pi$ произвольными. В таком случае без ограничения общности

$$\mu_k^{-1}(V_k^3) = U_k^3 \subset \{\, z \mid x \in [0, 2\pi], \quad y \in [\alpha_k, \beta_k]\,\}, \quad k \in O_j, \tag{13.18}$$

$0 < \alpha_{k_1} < \beta_{k_1} < \ldots < \alpha_{k_m} < \beta_{k_m} < 2\pi$. При этом имеем локальные представления (11.2)

$$B'_{j,k} = \mu_k \tau_k^3 B_j \mu_k^{-1} \widetilde{\tau}_k^3 = \mathrm{op}(b_0^{j,k}(z, \varphi(\xi)) + b_{-1}^{j,k}(z, \xi)), \quad k \in O_j$$

и $b_0^{j,k}(z,\varphi)\neq 0$ при $z\in U_k^2\setminus U_k$; $b_0^{j,k}\equiv 0$ при $z\notin U_k^3$;

$$\varkappa_k=\varkappa_k(A)=\operatorname{ind} b_0^{j,k}(z,\varphi)\,\Big|_{L_k},\quad k\in O_j;$$

$$L_k\subset\widetilde{T}_k\setminus\widetilde{T}_{0,k},\quad \widetilde{T}_k=\{\,(z,\varphi)\in\widetilde{T}\mid z\in U_k^3\,\},$$

$$\widetilde{T}_{0,k}=\{\,(z,\varphi)\in\widetilde{T}_k\mid z\in U_k,\ \sin\varphi=0\,\}.$$

Из (13.18) следует, что замыкания U_k^3 не пересекаются при разных k.

Положим

$$U^j=\bigcup_{k\in O_j}U_k=\bigcup_{k\in O_j}\mu_k^{-1}(V_k);\quad U_p^j=\bigcup_{k\in O_j}U_k^p,$$

$$\sigma_j^p=\sum_{k\in O_j}\tau_k^p,\quad \widetilde{\sigma}_j^p=\sum_{k\in O_j}\widetilde{\tau}_k^p,\quad p=2,3$$

и введем гомеоморфизм

$$\mu_j:U_3^j\to D\quad:\quad \mu_j(z)=\mu_k(z)\ \text{при}\ z\in U_k^3,\quad k\in O_j.$$

По построению имеем

$$\mu_j(U^j)=W^j,\quad \mu(U_p^j)=W_p^j=\bigcup_{k\in O_j}V_k^p,\quad \widetilde{\sigma}_j^p=\sigma_j^p(\mu_j(z)),\quad p=2,3.$$

Рассмотрим следующее локальное представление оператора B_j:

$$B_j'=\mu_j\sigma_j^3B_j\mu_j^{-1}\widetilde{\sigma}_j^3=\mu_j\Bigl[\sum_{k\in O_j}\tau_k^3B_j\sum_{k\in O_j}\tau_k^3\Bigr]\mu_j^{-1}=$$

$$=\sum_{k,l\in O_j}\mu_k\tau_k^3B_j\tau_l^3\mu_l^{-1}=\sum_{k\in O_j}B_{j,k}'+\alpha,$$

где $\alpha:W_2^s(T)\to W_2^s(T)$ — вполне непрерывен, так как в силу условия локальности операторы $\tau_k^3B_j\tau_l^3:W_2^s(D)\to W_2^s(D)$ вполне непрерывны при $k\neq l$. Отсюда

$$B_j'=\operatorname{op}(b_0^j(z,\varphi(\xi)))+\alpha,\quad b_0^j(z,\varphi)=\sum_{k\in O_j}b_0^{j,k}(z,\varphi),$$

а $\alpha:W_2^s(T)\to W_2^s(T)$ — вполне непрерывен. Отметим, что так как $b_0^{j,k}(z,\varphi)\neq 0$ только при $z\in U_k^3$, а множества U_k^3 попарно не пересекаются, то в сумме для $b_0^j(z,\varphi)$ всегда имеется не более одного слагаемого, отличного от нуля:

$$b_0^j(z,\varphi)=b_0^{j,k}(z,\varphi)\ \text{при}\ z\in U_k^3,\quad k\in O_j.$$

Полностью аналогично предыдущему, представим

$$C_j = H(C_j^0) = \mu_j^{-1} C_j^0 \mu_j \sigma_j^3 + 1 - \sigma_j^3,$$

$$C_j^0 = \mu_j \sigma_j^2 B_j \sigma_j^2 \mu_j^{-1} + 1 - (\widetilde{\sigma}_j^2)^2 = \widetilde{\sigma}_j^2 B_j' \widetilde{\sigma}_j^2 + 1 - (\widetilde{\sigma}_j^2)^2,$$

причем главный символ оператора C_j^0 $c_0^j(z,\varphi) = (\widetilde{\sigma}_j^2)^2 b_0^j(z,\varphi) + 1 - (\widetilde{\sigma}_j^2)^2$, $c_0^j(z,\varphi) = b_0^{j,k}(z,\varphi)$ при $z \in U_k^3$, $k \in O_j$; $c_0^j(z,\varphi) = 1$ при $z \notin U_j^3$; $c_0^j(z,\varphi) \neq 0$ при $z \in U_j^3 \setminus U^j$ и для $c_0^j(z,\varphi)$ выполнены условия (11.3), (11.4). Следовательно, символ $c_0^j(z,\varphi) \neq 0$ в области

$$\widetilde{T}_1 = \widetilde{T} \setminus \bigcup_{k \in O_j} \widetilde{T}_{0,k}.$$

При этом

$$\varkappa_k = \varkappa_k(A) = \operatorname{ind} b_0^{j,k}(z,\varphi) \Big|_{L_k} = \operatorname{ind} c_0^j(z,\varphi) \Big|_{L_k}, \quad k \in O_j.$$

Выберем точки y_k, $k = k_1, k_2, \ldots, k_m, k_{m+1}$ следующим образом:

$$y_{k_1} = 0; \quad \beta_{k_{j-1}} < y_{k_j} < \alpha_{k_j}, \quad j = \overline{2,m}; \quad y_{k_{m+1}} = 2\pi.$$

Контуры L_k, $k \in O_j$ можно в области $\widetilde{T}_1$ гомотопировать к контурам $L_{k_p}(x) = L_{k_p}^-(x) - L_{k_p}^+(x)$,

$$L_{k_p}^{\pm}(x) = \big\{ (z,\varphi(z)) \,|\, y \in [y_{k_p}, y_{k_{p+1}}];\ \pm \sin\varphi(z) > 0 \text{ при } z \in U_{k_p} \big\},$$

$p = \overline{1,m}$, причем $\varphi(x, y_{k_p}) = 0$. Пусть

$$L = \sum_{p=1}^{m} L_{k_p}(x),$$

тогда индекс оператора C_j

$$\varkappa_j = \varkappa(C_j) = \sum_{k \in O_j} \varkappa_k(A) = \sum_{p=1}^{m} \varkappa_{k_p} = \operatorname{ind} c_0^j(z,\varphi) \Big|_{L}.$$

В свою очередь, кривую L в области $\widetilde{T}_1$ гомотопируем до кривой $L(x) = L^-(x) - L^+(x)$,

$$L^{\pm}(x) = \big\{ (z,\varphi(z)) \,|\, y \in [0,2\pi];\ \pm\sin\varphi(z) > 0 \text{ при } z \in U^j;\ \varphi(x,0) = \varphi(x,2\pi) = 0 \big\}.$$

Отсюда, аналогично предыдущему, получим

$$\varkappa_j = \operatorname{ind} \frac{c_0^j(z,-\varphi)}{c_0^j(z,\varphi)}\bigg|_{L^2}, \quad \sin\varphi > 0.$$

Таким образом, к оператору C_j^0 тоже можно применить результаты § 5. Все рассуждения здесь совершенно аналогичны предыдущим, поэтому сразу сформулируем окончательный результат для оператора C_j.

Теорема 13.4. *Справедливы утверждения*:

1. *Имеет место представление*

$$C_j = \widetilde{C}_j + \alpha_j, \tag{13.19}$$

где $\alpha_j : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен;

$$\widetilde{C}_j = H(\widetilde{C}_j^0) = \mu_j^{-1}\widetilde{C}_j^0\mu_j\sigma_j^3 + 1 - \sigma_j^3; \qquad \widetilde{C}_j^0 = \widetilde{P}_1^j Q_{\varkappa_j}\widetilde{P}_2^j,$$

причем существуют операторы $(\widetilde{P}_{1,2}^j)^{-1}$ такие, что

$$\widetilde{P}_{1,2}^j(\widetilde{P}_{1,2}^j)^{-1} = (\widetilde{P}_{1,2}^j)^{-1}\widetilde{P}_{1,2}^j = E$$

и $\widetilde{P}_{1,2}^j, (\widetilde{P}_{1,2}^j)^{-1} : W_2^s(T) \to W_2^{s-\delta}(T)$ — непрерывны.

2. *При $\varkappa_j = 0$ решение уравнения $\widetilde{C}_j f = g \in W_2^s(D)$ существует и единственно*,

$$\begin{gathered} f = \mu_j^{-1}\widetilde{P}_0^j\mu_j\sigma_j^3 g + (1-\sigma_j^3)g = H(\widetilde{P}_0^j)g = \widetilde{P}_j g, \\ \widetilde{P}_0^j = (\widetilde{P}_2^j)^{-1}(\widetilde{P}_1^j)^{-1}. \end{gathered} \tag{13.20}$$

При этом $f(w) \in W_2^{s-2\delta}(D)$ есть непрерывный оператор над $g(w) \in W_2^s(D)$.

3. *При $\varkappa_j > 0$*

$$\widetilde{C}_j f = g \Longleftrightarrow f = \widetilde{P}_j g + \sum_{p=0}^{\varkappa_j - 1} \mu_j^{-1}(\widetilde{P}_2^j)^{-1}\left[f_p(z_1)z_2^p(1 - z_2^{-\varkappa_j})\right],$$

$$\begin{gathered} \widetilde{P}_j = H(\widetilde{P}_0^j) = \mu_j^{-1}\widetilde{P}_0^j\mu_j\sigma_j^3 + (1-\sigma_j^3), \\ \widetilde{P}_0^j = (\widetilde{P}_2^j)^{-1}Q_{-\varkappa_j}(\widetilde{P}_1^j)^{-1}; \end{gathered} \tag{13.21}$$

где $f_p(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$ — произвольные функции, $p = \overline{0, \varkappa_j - 1}$.

В этом случае корректная постановка задачи для уравнения $\widetilde{C}_j f = g$ имеет вид

$$\left\{\begin{aligned} &\widetilde{C}_j f = g, \quad g(z) \in W_2^s(D), \\ &A_p^j f = \int\limits_{L_1} z_2^p(\widetilde{P}_2^j \mu_j \sigma_j^3 f)\, dz_2 = \psi_p(z_1), \quad p = \overline{0, \varkappa_j - 1}, \end{aligned}\right. \tag{13.22}$$

где $\psi_p(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$ — произвольно заданные функции, т. е. решение (13.22) существует, единственно и представляется в виде

$$\begin{gathered} f = \widetilde{P}_j g + \sum_{p=0}^{\varkappa_j - 1} \overline{A}_p^j \psi_p(z_1); \\ \overline{A}_p^j \psi_p(z_1) = -\mu_j^{-1}(\widetilde{P}_2^j)^{-1}\left[\psi_p(z_1) z_2^{\varkappa_j - 1 - p}(1 - z_2^{-\varkappa_j})\right]. \end{gathered} \tag{13.23}$$

При этом $f \in W_2^{s-2\delta}(D)$ есть непрерывный оператор над $g(w) \in \in W_2^s(D)$; $\psi_p(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$, $p = \overline{0, \varkappa_j - 1}$.

4. *При $\varkappa_j < 0$*

$$\widetilde{C}_j f = g \Longleftarrow f = \widetilde{P}_3^j g,$$

$$\begin{gathered} \widetilde{P}_3^j = H(\widetilde{P}_0^j) = \mu_j^{-1} \widetilde{P}_0^j \mu_j \sigma_j^3 + (1 - \sigma_j^3), \\ \widetilde{P}_0^j = (\widetilde{P}_2^j)^{-1} \widetilde{Q}_{-\varkappa_j} (\widetilde{P}_1^j)^{-1} \end{gathered} \tag{13.24}$$

и для разрешимости уравнения $\widetilde{C}_j f = g$ необходимо и достаточно выполнения условий разрешимости

$$\overline{B}_p^{jg} = -\int\limits_{L_1} z_2^p((\widetilde{P}_1^j)^{-1} \mu_j \sigma_j^3 g)\, dz_2 = 0, \quad p = \overline{0, |\varkappa_j| - 1}. \tag{13.25}$$

В этом случае корректная постановка задачи для уравнения $\widetilde{C}_j f = g$:

$$\widetilde{C}_j f = g + \sum_{p=0}^{|\varkappa_j| - 1} B_p^j \psi_p(z_1), \tag{13.26}$$

где

$$B_p^j \psi_p(z_1) = \mu_j (E - \widetilde{C}_j^0) \widetilde{P}_1^j \left[\psi_p(z_1) z_2^{-p-1}\right], \tag{13.27}$$

$\psi_p(z_1)$ — искомые функции. Итак, решение (13.26) существует, единственно и имеет вид

$$\psi_p(z_1) = -\int\limits_{L_1} z_2^p((\widetilde{P}_1^j)^{-1}\mu_j\sigma_j^3 g)\,dz_2 = \overline{B}_p^{jg}, \quad p = \overline{0, |\varkappa_j|-1};$$
$$f = \widetilde{P}_3^j\Big(g + \sum_{p=0}^{|\varkappa_j|-1} B_p^j\psi_p(z_1)\Big) = \widetilde{P}_j g. \tag{13.28}$$

При этом $f(w) \in W_2^{s-2\delta}(D)$; $\psi_p(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$, $p = \overline{0, |\varkappa_j|-1}$ есть непрерывные операторы над $g(w) \in W_2^s(D)$.

Оператор $\widetilde{P}_j$ — обобщенный обратный к оператору $\widetilde{C}_j$ (он обратный справа при $\varkappa_j \geqslant 0$ и слева при $\varkappa_j \leqslant 0$).

Замечание. Утверждения теоремы 13.4 означают, что при $\varkappa_j \geqslant 0$ оператор $\widetilde{C}_j$ обратим справа и его ядро параметризуется $l = \varkappa_j$-мерными вектор-функциями одной переменной; при $\varkappa_j \leqslant 0$ оператор $\widetilde{C}_j$ обратим слева и его коядро параметризуется $l^* = |\varkappa_j|$-мерными вектор-функциями одной переменной.

Рассмотрим теперь непересекающиеся группы локальных областей вырождения

$$W^j = \bigcup_{k \in O_j} V_k, \quad j = \overline{1, m}.$$

Пусть

$$W_p^j = \bigcup_{k \in O_j} U_k^p$$

— окрестности W_j,

$$\sigma_j^p = \sum_{k \in O_j} \tau_k^p$$

— соответствующие W_p^j срезающие функции, $p = 2, 3$; $\mu_j : U_p^j \to W_p^j$ — гомеоморфизмы, $U_p^j \subset T$ (построение гомеоморфизмов μ_j см. § 13);

$$C_j = B_j\sigma_j^2 + 1 - \sigma_j^2, \quad j = \overline{1, m}$$

— операторы, локализованные на W^j, $\widetilde{C}_j$ — соответствующие регуляризованные операторы, $\widetilde{P}_j$ — обобщенные обратные к $\widetilde{C}_j$, $j = \overline{1, m}$; A_p^j, $\overline{A}_p^j$ — операторы в постановке задачи для оператора $\widetilde{C}_j$ (13.22) и ее решении (13.23) при $\varkappa_j > 0$, $p = \overline{0, \varkappa_j - 1}$; B_p^j, $\overline{B}_p^j$ — операторы в постановке задачи для оператора $\widetilde{C}_j$ (13.26), (13.27) и ее решении (13.28) при $\varkappa_j < 0$, $p = \overline{0, |\varkappa_j| - 1}$.

Лемма 13.2. *Операторы $\widetilde{C}_j$, $j=\overline{1,m}$ попарно коммутируют, операторы $\widetilde{P}_j$, $j=\overline{1,m}$ также попарно коммутируют и оператор $\prod\limits_j \widetilde{P}_j : W_2^s(D) \to W_2^{s-2\delta}(D)$ — непрерывен. Кроме того,*

$$\begin{gathered}
A_p^j \prod_{k\neq j} \widetilde{C}_k = A_p^j, \quad \prod_{k\neq j} \widetilde{P}_k \circ \overline{A}_p^j = \overline{A}_p^j, \quad p=\overline{0,\varkappa_j-1}, \quad \varkappa_j>0;\\
\overline{B}_p^j \prod_{k\neq j} \widetilde{C}_k = \overline{B}_p^j, \quad \prod_{k\neq j} \widetilde{P}_k \circ B_p^j = B_p^j, \quad p=\overline{0,|\varkappa_j|-1}, \quad \varkappa_j<0.
\end{gathered} \tag{13.29}$$

Доказательство. По построению имеет место представление

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_j &= \mu_j^{-1}\widetilde{C}_j^0\mu_j\sigma_j^2 + 1 - \sigma_j^2 = H_j^2 + 1 - \sigma_j^2,\\
\widetilde{P}_j &= \mu_j^{-1}\widetilde{P}_j^0\mu_j\sigma_j^3 + 1 - \sigma_j^3 = H_j^3 + 1 - \sigma_j^3,
\end{aligned} \tag{13.30}$$

причем

$$(1-\sigma_j^2)H_j^2 = (1-\sigma_j^2)\sigma_j^2, \quad (1-\sigma_j^3)H_j^3 = (1-\sigma_j^3)\sigma_j^3, \tag{13.31}$$

откуда

$$\begin{aligned}
H_j^2 &= \sigma_j^2 H_j^2 + (1-\sigma_j^2)\sigma_j^2 = \sigma_j^2\widetilde{C}_j,\\
H_j^3 &= \sigma_j^3 H_j^3 + (1-\sigma_j^3)\sigma_j^3 = \sigma_j^3\widetilde{P}_j.
\end{aligned} \tag{13.32}$$

Пусть $j_1 \neq j_2$, тогда $\sigma_{j_1}^3\sigma_{j_2}^3 \equiv 0$, и так как $\sigma_j^2\sigma_j^3 = \sigma_j^2$ (см. (11.1), § 11), то

$$\sigma_{j_1}^2\sigma_{j_2}^2 = \sigma_{j_1}^2\sigma_{j_2}^3 = \sigma_{j_1}^3\sigma_{j_2}^2 = \sigma_{j_1}^3\sigma_{j_2}^3 \equiv 0. \tag{13.33}$$

Тогда в силу (13.30), (13.31) $H_{j_{1,2}}^2\sigma_{j_{2,1}}^2 = 0$, откуда с учетом (13.33), (13.32) получим

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_{j_1}\widetilde{C}_{j_2} &= (H_{j_1}^2 + 1 - \sigma_{j_1}^2)(H_{j_2}^2 + 1 - \sigma_{j_2}^2) =\\
&= H_{j_1}^2(\sigma_{j_2}^2\widetilde{C}_{j_2}) + (1-\sigma_{j_2}^2)\sigma_{j_2}^2\widetilde{C}_{j_2} + H_{j_1}^2(1-\sigma_{j_2}^2) + (1-\sigma_{j_1}^2)(1-\sigma_{j_2}^2) =\\
&= 0 + \sigma_{j_2}^2\widetilde{C}_{j_2} + H_{j_1}^2 + 1 - \sigma_{j_1}^2 - \sigma_{j_2}^2 = H_{j_1}^2 + H_{j_2}^2 + 1 - \sigma_{j_1}^2 - \sigma_{j_2}^2.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\widetilde{C}_{j_2}\widetilde{C}_{j_1} = H_{j_2}^2 + H_{j_1}^2 + 1 - \sigma_{j_2}^2 - \sigma_{j_1}^2 = \widetilde{C}_{j_1}\widetilde{C}_{j_2}; \tag{13.34}$$

$$\widetilde{P}_{j_1}\widetilde{P}_{j_2} = \widetilde{P}_{j_2}\widetilde{P}_{j_1} = H_{j_1}^3 + H_{j_2}^3 + 1 - \sigma_{j_1}^3 - \sigma_{j_2}^3. \tag{13.35}$$

Итак, операторы $\widetilde{C}_j$, $\widetilde{P}_j$ коммутируют. Кроме того, как и при выводе формул (13.34), (13.35), получим

$$\prod_j \widetilde{C}_j = \sum_j H_j^2 + 1 - \sum_j \sigma_j^2, \quad \prod_j \widetilde{P}_j = \sum_j H_j^3 + 1 - \sum_j \sigma_j^3. \tag{13.36}$$

Из формулы (13.36) и вида операторов H_j^3 (13.30) непосредственно следует, что оператор

$$\prod_j \widetilde{P}_j : W_2^s(D) \to W_2^{s-2\delta}(D)$$

— непрерывен.

Перейдем к доказательству формул (13.29). Из вида операторов A_p^j (13.22), формул (13.32) и (13.33) вытекает, что $A_p^j H_k^2 = 0$, $k \neq j$, следовательно, с учетом (13.36):

$$A_p^j \prod_{k\neq j} \widetilde{C}_k = A_p^j \left(\sum_{k\neq j} H_k^2 + 1 - \sum_{k\neq j} \sigma_k^2 \right) = A_p^j.$$

Совершенно аналогично из вида $\overline{B}_p^j$ (13.28), формул (13.32) и (13.33) имеем $\overline{B}_p^j H_k^3 = 0$, $k \neq j$, что с учетом (13.36) приводит к равенству

$$\overline{B}_p^j \prod_{k\neq j} \widetilde{C}_k = \overline{B}_p^j \left(\sum_{k\neq j} H_k^2 + 1 - \sum_{k\neq j} \sigma_k^2 \right) = \overline{B}_p^j.$$

Далее, так как $\overline{A}_p^j \psi_p \in \ker \widetilde{C}_j$, а $(1-\sigma_j^3)\widetilde{C}_j = 1 - \sigma_j^3$, то в силу второго утверждения леммы 9.2 § 9 имеем $(1-\sigma_j^3)\overline{A}_p^j = 0$, откуда

$$\overline{A}_p^j = \sigma_j^3 \overline{A}_p^j + (1-\sigma_j^3)\overline{A}_p^j = \sigma_j^3 \overline{A}_p^j. \tag{13.37}$$

Тогда с учетом (13.36), (13.30) и (13.33)

$$\prod_{k\neq j} \widetilde{P}_k \circ \overline{A}_p^j = \left(\sum_{k\neq j} H_k^3 + 1 - \sum_{k\neq j} \sigma_k^3 \right) \sigma_j^3 \overline{A}_p^j = \sigma_j^3 \overline{A}_p^j = \overline{A}_p^j.$$

Наконец, из вида B_p^j (13.27) и условия $(1-\widetilde{\sigma}_j^3)\widetilde{C}_j^0 = 1 - \widetilde{\sigma}_j^3$ имеем

$$(1-\sigma_j^3) B_p^j \psi_p = \mu_j \left[(1-\widetilde{\sigma}_j^3)E - (1-\widetilde{\sigma}_j^3)\widetilde{C}_j^0 \right] \widetilde{P}_1^j z_2^{-p-1} \psi_p \equiv 0,$$

т. е. $(1-\sigma_j^3)B_p^j = 0$, откуда $B_p^j = \sigma_j^3 B_p^j$ и аналогично предыдущему

$$\prod_{k\neq j} \widetilde{P}_k \circ B_p^j = \left(\sum_{k\neq j} H_k^3 + 1 - \sum_{k\neq j} \sigma_k^3 \right) \sigma_j^3 B_p^j = \sigma_j^3 B_p^j = B_p^j.$$

Лемма доказана.

§ 14. Обращение оператора

Вернемся к рассмотрению исходного оператора, который после локализации (теорема 12.3 § 12) и регуляризации локализованных операторов представляется в виде

$$A = P_0 \prod_{j=1}^{m} \widetilde{C}_j + \alpha = \widetilde{A} + \alpha, \tag{14.1}$$

где $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, P_0 — обратимый псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с невырожденным символом,

$$\widetilde{C}_j = \mu_j^{-1} \widetilde{C}_j^0 \mu_j \sigma_j^3 + 1 - \sigma_j^3$$

— операторы, локализованные на областях

$$W^j = \bigcup_{k \in O_j} V_k$$

с индексами

$$\varkappa_j = \varkappa(\widetilde{C}_j) = \sum_{k \in O_j} \varkappa_k(A).$$

Так как операторы $\widetilde{C}_j$ коммутируют (лемма 13.2 § 13), то расположим их в произведении в таком порядке, чтобы

$$\begin{gathered} \varkappa_j < 0, \quad j = \overline{1, p_-}; \qquad \varkappa_j = 0, \quad j = \overline{p_- + 1, m - p_+}; \\ \varkappa_j > 0, \quad j = \overline{m - p_+ + 1, m}. \end{gathered} \tag{14.2}$$

Итак, сначала идут p_- операторов с отрицательными индексами (если их нет, то $p_- = 0$), далее $(m - p_- - p_+)$ операторов с нулевыми индексами и, наконец, p_+ операторов с положительными индексами.

В теореме 13.4 § 13 описано обращение оператора $\widetilde{C}_j$, т. е. корректная постановка задачи и ее решение для уравнения $\widetilde{C}_j f = g$. В частности, при $\varkappa_j < 0$ оператор $\widetilde{C}_j$ обратим слева и его коядро параметризуется $|\varkappa_j|$-мерными вектор-функциями одной переменной, при $\varkappa_j > 0$ — обратим справа и ядро параметризуется $\varkappa_j$-мерными вектор-функциями одной переменной, при $\varkappa_j = 0$ оператор $\widetilde{C}_j$ обратим.

По-прежнему будем обозначать $\delta = \nu/(2\nu + 1)$, $\nu = \beta_0 + 6$, β_0 — из условия (11.4), $s < \min(\gamma_1 - 3, \gamma_0 - 4)$.

Лемма 14.1. *Пусть оператор C_1 обратим слева и его коядро параметризуется l^*-мерными вектор-функциями одной переменной, т. е. корректная постановка задачи для уравнения $C_1 f = g$ имеет вид*

$$C_1 f = g + \sum_{k=1}^{l^*} B_k^1 \psi_k(z_1), \quad z_1 \in L_1, \quad g \in W_2^s(D),$$

где $\psi_k(z_1)$ — искомые функции, а ее решение

$$f = C_1^{-1} g; \quad \psi_k(z_1) = \overline{B}_k^1 g, \quad k = \overline{1, l^*}.$$

Здесь C_1^{-1} — левый обратный к оператору C_1, условия $\psi_k(z_1) \equiv 0$, $k = \overline{1, l^*}$ необходимы и достаточны для разрешимости уравнения $C_1 f = g$.

Пусть оператор C_2 обратим справа и его ядро параметризуется l-мерными вектор-функциями одной переменной, т. е. корректная постановка задачи для уравнения $C_2 f = g$ имеет вид

$$\begin{cases} C_2 f = g \in W_2^s(D); \\ A_k^2 f = f_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1), \quad k = \overline{1, l}, \end{cases}$$

где $f_k(z_1)$ — произвольно заданные функции, а ее решение

$$f = C_2^{-1} g + \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k^2 f_k(z_1),$$

где C_2^{-1} — правый обратный к C_2.

Пусть, наконец, $C = C_1 C_2$. Тогда ядро оператора C параметризуется l-мерными вектор-функциями одной переменной, коядро параметризуется l^*-мерными вектор-функциями одной переменной, т. е. корректная постановка задачи для уравнения $Cf = g$ имеет вид

$$\begin{cases} Cf = g + \sum\limits_{k=1}^{l^*} B_k \psi_k(z_1), \quad z_1 \in L_1, \quad g \in W_2^s(D); \\ A_k f = f_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1), \quad k = \overline{1, l}, \end{cases} \tag{14.3}$$

где $\psi_k(z_1)$, $k = \overline{1, l^*}$ — искомые функции; а $f_k(z_1)$, $k = \overline{1, l}$ — произвольно заданные функции. Решение (14.3) существует, единственно и имеет вид

$$\begin{cases} f = C^{-1} g + \sum\limits_{k=1}^{l} \overline{A}_k f_k(z_1); \\ \psi_k(z_1) = \overline{B}_k g, \quad k = \overline{1, l^*}. \end{cases} \tag{14.4}$$

При этом условия

$$\psi_k(z_1) = \overline{B}_k g \equiv 0, \quad k = \overline{1, l^*} \tag{14.5}$$

необходимы и достаточны для разрешимости уравнения $Cf = g$. Здесь $B_k = B_k^1$, $\overline{B}_k = \overline{B}_k^1$, $k = \overline{1, l^*}$; $A_k = A_k^2$, $\overline{A}_k = \overline{A}_k^2$, $k = \overline{1, l}$; $C^{-1} = C_2^{-1} C_1^{-1}$.

Доказательство. Так как уравнение $C_2 f = \widetilde{f}$ разрешимо для любой функции $\widetilde{f}$, то уравнение $g = Cf = C_1 \widetilde{f}$ разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение $C_1\widetilde{f} = g$, т. е. когда выполнены условия (14.5). Соответственно, существует и единственно решение задачи

$$C_1\widetilde{f} = g + \sum_{k=1}^{l^*} B_k^1\psi_k(z_1) = g + \sum_{k=1}^{l^*} B_k\psi_k(z_1),$$

причем

$$\psi_k(z_1) = \overline{B}_k^1 g = \overline{B}_k g, \quad \widetilde{f} = C_1^{-1}g.$$

В свою очередь, уравнение $C_2 f = \widetilde{f} = C_1^{-1}g$ всегда разрешимо и для его однозначной разрешимости достаточно задать на f дополнительные условия $A_k f = A_k^2 f = f_k(z_1)$, $k = \overline{1, l}$. При этом решением задачи с дополнительными условиями будет

$$f = C_2^{-1}C_1^{-1}g + \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k^2 f_k(z_1) = C^{-1}g + \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k f_k(z_1).$$

Лемма доказана.

Оператор $C^{-1} = C_2^{-1}C_1^{-1}$ — обобщенный обратный к C.

Лемма 14.2. *Пусть операторы C_j обратимы слева и коядро их параметризуется l_j^*-мерными вектор-функциями одной переменной, т. е. корректные постановки задачи для уравнений $C_j f = g$ имеют вид*

$$C_j f = g + \sum_{k=1}^{l_j^*} B_k^j\psi_k^j(z_1), \quad z_1 \in L_1, \quad g \in W_2^s(D),$$

где $\psi_k(z_1)$, $k = \overline{1, l_j^*}$ — искомые функции, а решения их

$$f_j = C_j^{-1}g; \quad \psi_k^j(z_1) = \overline{B}_k^j g, \quad k = \overline{1, l_j^*}; \quad j = \overline{1, p}.$$

Здесь C_j^{-1} — левые обратные к C_j, условия $\psi_k^j(z_1) \equiv 0$, $k = \overline{1, l_j^*}$ необходимы и достаточны для разрешимости уравнений $C_j f = g$), $j = \overline{1, p}$.

Пусть $C = \prod_{j=1}^{p} C_j$. Тогда оператор C обратим слева и его коядро параметризуется l^*-мерными вектор-функциями одной переменной, $l^* = \sum_{j=1}^{p} l_j^*$, т. е. корректная постановка задачи для уравнения $Cf = g$ имеет вид

$$Cf = g + \sum_{k=1}^{l^*} B_k\psi_k(z_1), \quad z_1 \in L_1, \quad g \in W_2^s(D) \tag{14.6}$$

где $\psi_k(z_1)$, $k=\overline{1,l^*}$ *— искомые функции. Решение* (14.6) *существует, единственно и представляется в виде*

$$f = C^{-1}g; \quad \psi_k = \overline{B}_k g, \quad k=\overline{1,l^*}.$$

Здесь

$$C^{-1} = \prod_{j=p}^{1} C_j^{-1} = C_p^{-1}\dots C_1^{-1};$$

$$B_k = \prod_{j=1}^{j(k)-1} C_j \circ B_{k-l(k)}^{j(k)}, \quad \overline{B}_k = \overline{B}_{k-l(k)}^{j(k)} \circ \prod_{j=j(k)-1}^{1} C_j^{-1}, \quad k=\overline{1,l^*};$$

где $j(k)$, $l(k)$ *определяются из условия*

$$\sum_{j=1}^{j(k)-1} l_j^* + 1 \leqslant k \leqslant \sum_{j=1}^{j(k)} l_j^*, \quad l(k) = \sum_{j=1}^{j(k)-1} l_j^*,$$

причем при $k \leqslant l_1^*$ *считается*

$$j(k)=1, \quad l(k)=0, \quad \prod_{j=1}^{0} C_j = \prod_{j=0}^{1} C_j^{-1} = E.$$

Доказательство леммы легко строится по индукции по p. Пусть $C = C^1 C_{p+1}$ и для $C^1 = \prod\limits_{j=1}^{p} C_j$ выполнено утверждение леммы. Рассмотрим задачу

$$Cf = C^1C_{p+1}f = g + \sum_{k=1}^{m^*} \widetilde{B}_k^1 \psi_k(z_1) + \sum_{k=m^*+1}^{l^*} C^1 B_{k-m^*}^{p+1} \psi_k(z_1) = \\ = g + \sum_{k=1}^{l^*} B_k \psi_k(z_1), \quad (14.7)$$

где

$$m^* = \sum_{k=1}^{p} l_j^*, \quad l^* = \sum_{k=1}^{p+1} l_j^* = m^* + l_{p+1}^*; \quad \widetilde{B}_k^1 = \prod_{j=1}^{j(k)-1} C_j \circ B_{k-l(k)}^{j(k)}, \\ k=\overline{1,m^*}.$$

Уравнению (14.7) придадим вид

$$C^1\left[C_{p+1}f - \sum_{k=m^*+1}^{l^*} B_{k-m^*}^{p+1}\psi_k(z_1)\right] = g + \sum_{k=1}^{m^*} \widetilde{B}_k^1 \psi_k(z_1).$$

По предположению индукции это уравнение имеет единственное решение

$$\psi_k(z_1) = \overline{B}_k g = \overline{B}^{j(k)}_{k-l(k)} \prod_{j=j(k)-1}^{1} C_j^{-1} g, \quad k = \overline{1, m^*};$$

$$C_{p+1} f - \sum_{k=m^*+1}^{l^*} B^{p+1}_{k-m^*} \psi_k(z_1) = (C^1)^{-1} g = \prod_{j=p}^{1} C_j^{-1} g. \tag{14.8}$$

Но по условию леммы уравнение (14.8) имеет единственное решение

$$f = C_{p+1}^{-1} (C^1)^{-1} g = C_{p+1}^{-1} \prod_{j=p}^{1} C_j^{-1} g = C^{-1} g;$$

$$\psi_k(z_1) = \overline{B}^{p+1}_{k-m^*} (C^1)^{-1} g = \overline{B}^{p+1}_{k-m^*} \prod_{j=p}^{1} C_j^{-1} g = \overline{B}_k g, \quad k = \overline{m^* + 1, l^*}.$$

Итак, задача (14.7) имеет единственное решение

$$f = C^{-1} g;$$

$$\psi_k(z_1) = \overline{B}_k g = \overline{B}^{j(k)}_{k-l(k)} \prod_{j=j(k)-1}^{1} C_j^{-1} g, \quad k = \overline{1, m^*};$$

$$\psi_k(z_1) = \overline{B}_k g = \overline{B}^{p+1}_{k-m^*} \prod_{j=p}^{1} C_j^{-1} g, \quad k = \overline{m^* + 1, l^*}.$$

Если учесть, что при $k = \overline{m^* + 1, l^*}$ имеем $j(k) = p + 1$, $l(k) = m^*$, то получим утверждение леммы для $(p + 1)$. Лемма доказана.

Лемма 14.3. *Пусть операторы C_j обратимы справа и ядро их параметризуется l_j-мерными вектор-функциями одной переменной, т. е. корректные постановки задачи для уравнений $C_j f = g$ имеют вид*

$$C_j f = g \in W_2^s(D); \quad A_k^j f = f_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1), \quad k = \overline{1, l_j},$$

где $f_k(z_1)$, $k = \overline{1, l_j}$ — произвольно заданные функции, а их решения

$$f = C_j^{-1} g + \sum_{k=1}^{l_j} \overline{A}_k^j f_k(z_1), \quad j = \overline{1, p}$$

(C_j^{-1} — правый обратный к оператору C_j), $j = \overline{1, p}$.

Пусть $C = \prod_{j=1}^{p} C_j$. *Тогда оператор* C *обратим справа и ядро его параметризуется* l*-мерными вектор-функциями одной переменной,* $l = \sum_{j=1}^{p} l_j$, *т. е. корректная постановка задачи для уравнения* $Cf = g$ *имеет вид*

$$Cf = g \in W_2^s(D); \quad A_k f = f_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1), \quad k = \overline{1, l}, \tag{14.9}$$

где $f_k(z_1)$, $k = \overline{1, l}$ — *произвольно заданные функции. Решение* (14.9) *существует, единственно и представляется в форме*

$$f = C^{-1} g + \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k f_k(z_1).$$

При этом

$$C^{-1} = \prod_{j=p}^{1} C_j^{-1};$$

$$A_k = A_{k-l(k)}^{j(k)} \prod_{j=j(k)+1}^{s} C_j, \quad \overline{A}_k = \prod_{j=p}^{j(k)+1} C_j^{-1} \circ \overline{A}_{k-l(k)}^{j(k)}, \quad k = \overline{1, l};$$

$j(k)$, $l(k)$ *определяются из условия*

$$\sum_{j=1}^{j(k)-1} l_j + 1 \leqslant k \leqslant \sum_{j=1}^{j(k)} l_j, \quad l(k) = \sum_{j=1}^{j(k)-1} l_j,$$

где при $k \leqslant l_1$ $j(k) = 1$, $l(k) = 0$; *при*

$$k > \sum_{j=1}^{p-1} l_j \quad j(k) = p \text{ и } \prod_{j=p+1}^{p} C_j = \prod_{j=p}^{p+1} C_j^{-1} = E.$$

Доказательство леммы проводится по индукции аналогично доказательству леммы 14.2: пусть $C = C^1 C_{p+1}$ и для $C^1 = \prod_{j=1}^{p} C_j$ выполнено утверждение леммы. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} Cf = C^1 C_{p+1} f = g; \\ A_k f = f_k(z_1), \quad k = \overline{1, l}; \end{cases}$$

где

$$l = \sum_{j=1}^{p+1} l_j = \sum_{j=1}^{p} l_j + l_{p+1} = m + l_{p+1};$$

$$A_k = A^{j(k)}_{k-l(k)} \prod_{j=j(k)+1}^{p+1} C_j = A^{j(k)}_{k-l(k)} \prod_{j=j(k)+1}^{p} C_j \circ C_{p+1}, \quad k = \overline{1,m};$$

$$A_k = A^{j(k)}_{k-l(k)} \prod_{j=j(k)+1}^{p+1} C_j = A^{p+1}_{k-m}, \quad k = \overline{m+1,l}.$$

Здесь при $k = \overline{m+1,l}$ $j(k) = p+1$, $l(k) = m$, $\prod\limits_{j=p+2}^{p+1} C_j = E$.

Пусть $\widetilde{f} = C_{p+1} f$. Тогда по предположению индукции задача

$$\begin{cases} Cf = C^1 \widetilde{f} = g; \\ A_k f = A^{j(k)}_{k-l(k)} \prod\limits_{j=j(k)+1}^{p} C_j \widetilde{f} = f_k(z_1), \quad k = \overline{1,m} \end{cases}$$

имеет единственное решение

$$\widetilde{f} = (C^1)^{-1} g + \sum_{k=1}^{m} \overline{A}'_k f_k(z_1); \quad (C^1)^{-1} = \prod_{j=p}^{1} C_j^{-1};$$

$$\overline{A}'_k = \prod_{j=p}^{j(k)+1} C_j^{-1} \circ \overline{A}^{j(k)}_{k-l(k)}, \quad k = \overline{1,m}.$$

Для функции f остается задача

$$C_{p+1} f = \widetilde{f}; \quad A_k f = A^{p+1}_{k-m} f = f_k(z_1), \quad k = \overline{m+1,l}. \tag{14.10}$$

По условию леммы задача (14.10), в свою очередь, имеет единственное решение

$$f = C_{p+1}^{-1} \widetilde{f} + \sum_{k=m+1}^{l} \overline{A}^{p+1}_{k-m} f_k(z_1) = C_{p+1}^{-1} (C^1)^{-1} g +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} C_{p+1}^{-1} \overline{A}'_k f_k(z_1) + \sum_{k=m+1}^{l} \overline{A}^{p+1}_{k-m} f_k(z_1) = C^{-1} g + \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k f_k(z_1),$$

где

$$C^{-1} = C_{p+1}^{-1} (C^1)^{-1} = \prod_{j=p+1}^{1} C_j^{-1}; \quad \overline{A}_k = C_{p+1}^{-1} \overline{A}'_k = \prod_{j=p+1}^{j(k)+1} C_j^{-1} \circ \overline{A}^{j(k)}_{k-l(k)}$$

при $k = \overline{1, m}$ и $\overline{A}_k = \overline{A}^{p+1}_{k-m} = \prod\limits_{j=p+1}^{j(k)+1} C_j^{-1} \circ \overline{A}^{j(k)}_{k-l(k)}$ при $k = \overline{m+1, l}$, когда $j(k) = p+1$, $l(k) = m$, $\prod\limits_{j=p+1}^{s+2} C_j^{-1} = E$. Лемма доказана.

Теорема 14.1. *Пусть*

$$\widetilde{A} = P_0 \prod_{j=1}^{m} \widetilde{C}_j,$$

где P_0 — обратимый в $W_2^s(D)$ оператор, $\widetilde{C}_j$ — локализованные на W^j и регуляризованные операторы с вырождающимся символом, причем порядок следования $\widetilde{C}_j$ таков, что выполнено условие (14.2). *Тогда ядро оператора $\widetilde{A}$ параметризуется l-мерными вектор-функциями одной переменной,*

$$l = \sum_{j=m-p_{+}+1}^{m} \varkappa_j,$$

а коядро — l^*-мерными вектор-функциями одной переменной,

$$l^* = \sum_{j=1}^{p_{-}} |\varkappa_j|,$$

т. е. корректная постановка задачи для уравнения $\widetilde{A}f = g$ имеет вид

$$\begin{cases} \widetilde{A}f = g + \sum\limits_{k=1}^{l^*} B_k \psi_k(z_1), \quad z_1 \in L_1, \quad g \in W_2^s(D); \\ A_k f = f_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1), \quad k = \overline{1, l}, \end{cases} \tag{14.11}$$

где $\psi_k(z_1)$, $k = \overline{1, l^*}$ — искомые функции, $f_k(z_1)$, $k = \overline{1, l}$ — произвольно заданные функции, решение (14.11) *существует, единственно и имеет вид*

$$f = \widetilde{P}g + \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k f_k(z_1); \qquad \psi_k(z_1) = \overline{B}_k g, \quad k = \overline{1, l^*}. \tag{14.12}$$

При этом $f \in W_2^{s-2\delta}(D)$; $\psi_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$, $k = \overline{1, l^*}$ есть непрерывные операторы над $g \in W_2^s(D)$; $f_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$, $k = \overline{1, l}$. Здесь $\widetilde{P} = \prod\limits_{j=m}^{1} \widetilde{P}_j \circ P_0^{-1}$, а операторы $\widetilde{P}_j$ имеют вид, соответственно, (13.20) *при $\varkappa_j = 0$,* (13.21) *при $\varkappa_j > 0$ и* (13.24) *при $\varkappa_j < 0$;*

$$B_k = P_0 B^{j^*(k)}_{k-l^*(k)}, \quad \overline{B}_k = \overline{B}^{j^*(k)}_{k-l^*(k)} P_0^{-1}, \quad k = \overline{1, l^*},$$

где $j^*(k)$, $l^*(k)$ определяются из условия

$$\sum_{j=1}^{j^*(k)-1} |\varkappa_j| + 1 \leqslant k \leqslant \sum_{j=1}^{j^*(k)} |\varkappa_j|, \quad l^*(k) = \sum_{j=1}^{j^*(k)-1} |\varkappa_j|,$$

причем при $k \leqslant |\varkappa_1|$ считается, что $j^*(k) = 1$, $l^*(k) = 0$. Здесь B_k^j, $\overline{B}_k^j$, $k = \overline{1, |\varkappa_j|}$, $j = \overline{1, p_-}$ имеют вид, соответственно, (13.26), (13.28);

$$A_k = A_{k-l(k)}^{j(k)}, \quad \overline{A}_k = \overline{A}_{k-l(k)}^{j(k)}, \quad k = \overline{1, l},$$

$j(k)$, $l(k)$ определяются из условия

$$\sum_{j=m-s_+ +1}^{j(k)-1} \varkappa_j + 1 \leqslant k \leqslant \sum_{j=m-s_+ +1}^{j(k)} \varkappa_j, \quad l(k) = \sum_{j=m-s_+ +1}^{j(k)-1} \varkappa_j,$$

при $k \leqslant \varkappa_{m-s_+ +1}$ $j(k) = m - s_+ + 1$, $l(k) = 0$, при

$$k > \sum_{j=m-s_+ +1}^{m-1} \varkappa_j, \quad j(k) = m,$$

A_k^j, $\overline{A}_k^j$, $k = \overline{1, \varkappa_j}$, $j = \overline{m - p_+ + 1, m}$ имеют вид, соответственно, (13.22) *и* (13.23).

Действительно, из теоремы 13.4 § 13 и лемм 14.1, 14.2, 14.3 следуют утверждения теоремы с операторами

$$B_k = P_0 \prod_{j=1}^{j^*(k)-1} \widetilde{C}_j \circ B_{k-l^*(k)}^{j^*(k)},$$

$$\overline{B}_k = \overline{B}_{k-l^*(k)}^{j^*(k)} \prod_{j=j^*(k)-1}^{1} \widetilde{P}_j \circ P_0^{-1}, \quad k = \overline{1, l^*};$$

$$A_k = A_{k-l(k)}^{j(k)} \prod_{j=j(k)+1}^{m} \widetilde{C}_j, \quad \overline{A}_k = \prod_{j=m}^{j(k)+1} \widetilde{P}_j \circ \overline{A}_{k-l(k)}^{j(k)}, \quad k = \overline{1, l};$$

откуда с учетом леммы 13.2 и, в частности, формулы (13.29), окончательно получим все утверждения теоремы.

Теорема 14.2. *Пусть все локальные области вырождения V_k удовлетворяют условию* (13.17) *и $\varkappa_k$ — соответствующие локальные индексы, $k = \overline{1, n}$. Пусть, далее, $l \geqslant 0$ и $-l^* \leqslant 0$ — числа, равные сумме части (или всех) локальных индексов:*

$$l = \sum_{\varkappa_j \in O_+} \varkappa_j, \quad -l^* = \sum_{\varkappa_j \in O_-} \varkappa_j,$$

причем l и l^* связаны соотношением

$$l - l^* = \varkappa = \varkappa(A) = \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j.$$

Тогда существует вполне непрерывный оператор $\alpha : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ такой, что ядро оператора $\widetilde{A} = A - \alpha$ параметризуется l-мерными вектор-функциями одной переменной, а коядро — l^*-мерными вектор-функциями одной переменной. Это означает, что существуют непрерывный оператор $\widetilde{P} : W_2^s(D) \to W_2^{s-2\delta}(D)$ и непрерывные операторы $B_k : W_2^s(L_1) \to W_2^{s-\delta}(D)$, $\overline{B}_k : W_2^s(D) \to W_2^{s-\delta}(L_1)$, $k = \overline{1, l^*}$; $A_k : W_2^s(D) \to W_2^{s-\delta}(L_1)$, $\overline{A}_k : W_2^s(L_1) \to W_2^{s-\delta}(D)$, $k = \overline{1, l}$ такие, что корректная постановка задачи для уравнения $\widetilde{A}f = g$ имеет вид

$$\widetilde{A}f = g + \sum_{k=1}^{l^*} B_k \psi_k, \quad A_k f = f_k, \quad k = \overline{1, l},$$

где $f_k(z_1) \in W_2^{s-\delta}(L_1)$ — произвольно заданные функции, $\psi_k(z_1)$ — искомые функции, а ее решение представляется в форме

$$f = \widetilde{P}g + \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k f_k, \quad \psi_k = \overline{B}_k g, \quad k = \overline{1, l^*}.$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что, если

$$l = \sum_{\varkappa_j \in O_+} \varkappa_j \text{ и } (l - l^*) = \varkappa = \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j,$$

то

$$-l^* = \sum_{\varkappa_j \in O_-} \varkappa_j, \quad O_- = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus O_+.$$

Обратно, если

$$-l^* = \sum_{\varkappa_j \in O_-} \varkappa_j \text{ и } l - l^* = \varkappa,$$

то

$$l = \sum_{\varkappa_j \in O_+} \varkappa_j, \quad O_+ = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus O_-.$$

Итак, в любом случае

$$l = \sum_{\varkappa_j \in O_+} \varkappa_j, \quad -l^* = \sum_{\varkappa_j \in O_-} \varkappa_j,$$

$$O_+ \cup O_- = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad O_+ \cap O_- = \emptyset.$$

Разобьем локальные области вырождения на две группы

$$W^1 = \bigcup_{j \in O_+} V_j, \quad W^2 = \bigcup_{j \in O_-} V_j.$$

Тогда все утверждения теоремы непосредственно следуют из теоремы о локализации особенностей 12.3 § 12 и теоремы 14.1.

Отметим, что различных чисел l и L^*, удовлетворяющих условиям теоремы 14.2, может быть достаточно много. Особенно просто варианты выбора l и l^* выглядят, когда локальные индексы по модулю не превосходят единицы.

Следствие. Пусть все локальные индексы $\varkappa_j$ равны нулю или ± 1. Обозначим в этом случае

$$\varkappa^+ = \varkappa^+(A) = \sum_{\varkappa_j = 1} \varkappa_j, \quad \varkappa^- = \varkappa^-(A) = \sum_{\varkappa_j = -1} \varkappa_j.$$

$\pm\varkappa^\pm$ — это число соответственно положительных и отрицательных локальных индексов. Тогда утверждения теоремы 14.2 верны для любых чисел $l \in [\max(0, \varkappa), \varkappa^+]$ и $l^* \in [\varkappa^-, \min(0, \varkappa)]$, связанных соотношением $(l - l^*) = \varkappa$.

Отметим специально, что хотя числа l и l^* могут принимать различные значения, но их разность $\varkappa = l - l^* = \varkappa(A)$ остается постоянной и равной индексу оператора, т. е. является топологическим инвариантом в рассматриваемом классе символов.

Глава 5
ВЫРОЖДАЮЩАЯСЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 15. Постановка задачи с наклонной производной. Граничные операторы

С точностью до гомеоморфизма риманову поверхность D рода $\rho \geqslant 0$ можно представить как сферу с ρ ручками, т. е. как край ограниченной области в трехмерном пространстве: $D = \partial D^+$, $D^+ \subset \mathbb{R}^3$ [41, 1] (в частности при $\rho = 0$ сфера D — граница шара). Пусть $y = (y_1, y_2, y_3) \in \in \mathbb{R}^3$. Будем обозначать $C^\infty(D^+ \cup D)$ множество функций, которые продолжаются как функции класса C^∞ в некоторую окрестность ограниченного замкнутого множества $D^+ \cup D$, т. е. в принятых ранее обозначениях

$$f(y) \in C^\infty(D^+ \cup D) \Longleftrightarrow \exists\, \widetilde{D} \supset D^+ \cup D \text{ и } F(y) \in C_0^\infty(\widetilde{D}) : \\ F(y) \equiv f(y) \ \text{ при } \ y \in D^+ \cup D. \tag{15.1}$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} P(y, \partial)u = 0, & y \in D^+, \\ (b(y), \nabla u) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} l_j(y) \frac{\partial u}{\partial y_j} = g(y), & y \in D. \end{cases} \tag{15.2}$$

Здесь $P(y, \partial)$ — линейный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с вещественными коэффициентами класса C^∞:

$$P(y, \partial)u = \sum_{|q|=0}^{2} p_q(y) \frac{\partial^{|q|} u}{\partial y^q}, \tag{15.3}$$

$$\frac{\partial^{|q|} u}{\partial y^q} = \frac{\partial^{|q|} u}{\partial y_1^{q_1} \partial y_2^{q_2} \partial y_3^{q_3}}, \quad q = (q_1, q_2, q_3), \quad |q| = q_1 + q_2 + q_3,$$

$$p_q(y) \in C^\infty(D^+ \cup D). \tag{15.4}$$

Введем *главную часть* оператора $P(y, \partial)$:

$$P_0(y, \partial) = \sum_{|q|=2} p_q(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^q} = \sum_{j,k=1}^{3} p_{j,k}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k}.$$

Оператор $P(y,\partial)$ называется *эллиптическим* [43], если его *главный символ*

$$p(y,\eta)=-\sum_{j,k=1}^{3}p_{j,k}(y)\eta_j\eta_k\neq 0 \qquad (15.5)$$
$$\forall\, y\in D^+\cup D,\ \eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbb{R}^3,\quad \eta\neq 0.$$

В частности, в роли $P(y,\partial)$ может выступать оператор Лапласа $P(y,\partial)=\Delta$, при этом главный символ $p(y,\eta)=-|\eta|^2$.

Наконец, пусть граничное векторное поле $b:D\to\mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям

$$|b(y)|\geqslant M>0,\quad y\in D;$$
$$b(y)=(b_1(y),b_2(y),b_3(y))\in C^\gamma(D),\quad \gamma>4. \qquad (15.6)$$

Здесь под $C^\gamma(D)$ подразумевается множество функций $f(w)$, которые в плоскости любого гомеоморфизма класса C^∞ $h:\mathbb{C}\to D$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем γ, т. е.

$$|f_h^{(k)}(z_1)-f_h^{(k)}(z_2)|\leqslant M|z_1-z_2|^\alpha,\quad \alpha=\gamma-n,$$

где n — целая часть γ,

$$f_h^{(k)}(x,y)=\frac{\partial^{|k|}f_h}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}},\quad k=(k_1,k_2),\quad |k|=k_1+k_2\leqslant n,$$

$f_h(z)=f(h(z))$ (для сравнения см. определения класса $C^\gamma(T)$ в п. 1.1 § 1 и класса $W_2^s(D)$ в § 8).

Задачу (15.1) с оператором (15.2) и условиями (15.3), (15.4), (15.5) называют краевой задачей с наклонной производной для эллиптического дифференциального оператора второго порядка.

В § 16 мы сведем задачу (15.1) к псевдодифференциальному оператору нулевого порядка на D. Пока обратимся к эллиптическим граничным задачам, рассмотренным в [43].

Локально вблизи каждой точки $y\in D$ введем систему координат $y=(w,t)$, где $w=(x_1,x_2)\in D$,

$$t=0\Longleftrightarrow y\in D;\qquad t>0\Longleftrightarrow y\in D^+,$$

причем производная по внешней нормали

$$\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial t}.$$

Далее для краткости точки $y=(w,0)\in D\subset\mathbb{R}^3$ будем иногда обозначать просто $w\in D$. Для каждой точки $y=(w,0)\in D$ можно разложить вектор $\eta\in\mathbb{R}^3$ следующим образом:

а) $\eta=\tau+\eta_t n$, где $n=n(w)$ — единичная внешняя нормаль к D, $\eta_t\in\mathbb{R}$; $\tau=(\tau_1,\tau_2)$ и $(w,\tau)\in T(D)$, где $T(D)$ — касательное расслоение над D;

б) $\eta = \xi + \xi_t n^*$, где $n^* = n^*(w)$ — внешняя конормаль к D, $\xi_t \in \in \mathbb{R}$; $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ и $(w, \xi) \in T^*(D)$, где $T^*(D)$ — кокасательное расслоение над D [42, с. 178–190].

Рассмотрим граничный оператор $B : C^\infty(D^+ \cup D) \to C^\infty(D)$. Пусть $\chi_D(y)$ — характеристическая функция множества $D^+ \cup D$:

$$\chi_D(y) = \begin{cases} 1, & y \in D^+ \cup D, \\ 0, & y \notin D^+ \cup D, \end{cases}$$

точка $y_0 = (w, 0) \in D$, $U_{1,2} \subset \mathbb{R}^3$ — открытые множества такие, что $y_0 \in \in U_1 \subset U_2$, причем включение $U_1 \subset U_2$ — компактно и $\chi_0(y) \in C_0^\infty(U_2)$, $\chi_0(y) \equiv 1$ при $y \in U_1$. Введем символ граничного оператора B таким образом:

$$b(w, \eta) = \mathrm{e}^{-iw\xi} B(\chi_0(y)\chi_D(y)\mathrm{e}^{iy\eta}) \Bigg|_{y=(w,0)}, \quad \eta = \xi + \xi_t n^*, \tag{15.7}$$

где $w\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2$, $y\eta = w\xi + t\xi_t$ и будем рассматривать операторы B с символом, однородным по η порядка m и класса C^∞, т. е.

$$b(w, \eta) = b(w, \eta/|\eta|) \cdot |\eta|^m, \quad b(w, \zeta) \in C^\infty(D \times S^2), \tag{15.8}$$

где S^2 — двумерная сфера. Отметим, что данное определение является весьма частным случаем более общего понятия символа граничного оператора [43]. Для наших целей такого определения вполне достаточно.

Пусть $u(y) \in C^\infty(D^+ \cup D)$, рассмотрим оператор $Hu = = (g_0(y), g(y))$, где

$$P(y, \partial)u = g_0(y), \quad y \in D^+; \qquad Bu = g(y), \quad y \in D, \tag{15.9}$$

$H : C^\infty(D^+ \cup D) \to C^\infty(D^+ \cup D) \oplus C^\infty(D)$. Введем пространства Соболева [43]

$$\begin{gathered} W_2^s(D^+ \cup D) = \{\, f(y) \mid \exists\, \widetilde{D} \supset D^+ \cup D,\ F(y) \in W_2^s(\widetilde{D}) : \\ F(y) \equiv f(y),\ y \in D^+ \cup D\,\}; \qquad \|f\|_s = \inf \|F\|_s. \end{gathered} \tag{15.10}$$

Теорема 15.1. *Пусть $P(y, \partial)$ — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с главным символом $p(y, \eta)$, B — граничный оператор с символом (15.6) $b(w, \eta)$ порядка m, удовлетворяющим условию (15.7); M^+ — множество решений уравнения*

$$p(w, \xi - in^*\partial/\partial t)u(t) = 0, \tag{15.11}$$

ограниченных при $t \to +\infty$, где $w \in D$, $(w, \xi) \in T^*(D)$, $n^* = n^*(w)$ — внешняя конормаль. Если отображение

$$M^+ \ni u(t) \to b(w, \xi - in^*\partial/\partial t)u \Bigg|_{t=0} \tag{15.12}$$

взаимно однозначно, то оператор $H : W_2^s(D^+ \cup D) \to W_2^{s-2}(D^+ \cup$ $\cup D) \oplus W_2^{s-m-1/2}(D)$ *— нетеров нулевого индекса,* $s \geqslant 2$.

Теорема 15.1 — это применение к оператору H результатов [43, с. 311–354].

Граничная задача (15.8), удовлетворяющая условиям теоремы 15.1, называется *эллиптической* [43, с. 313].

Из теоремы 15.1 следует, что существует конечномерный оператор $K : W_2^s(D^+ \cup D) \to W_2^{s-2}(D^+ \cup D) \oplus W_2^{s-m-1/2}(D)$ такой, что оператор $H + K$ обратим, т. е.

$$(H+K)u = (g_0, g) \Longleftrightarrow u = \widetilde{H}_0 g_0 + \widetilde{H} g;$$

$$\widetilde{H}_0 : W_2^{s-2}(D^+ \cup D) \to W_2^s(D^+ \cup D);$$

$$\widetilde{H} : W_2^{s-m-1/2}(D) \to W_2^s(D^+ \cup D).$$

В частности, отсюда следует

Лемма 15.1. *Пусть для операторов* $P(y, \partial)$ *и* B *граничная задача* (15.8) *эллиптична, тогда существует конечномерный граничный оператор* $K : W_2^s(D^+ \cup D) \to W_2^{s-m-1/2}(D)$, $s \geqslant 2$ *такой, что задача*

$$P(y, \partial)u = 0, \quad y \in D^+; \qquad Bu + Ku = f(y), \quad y \in D,$$

имеет единственное решение $u = \widetilde{H} f$, $\widetilde{H} : W_2^s(D) \to W_2^{s+m+1/2}(D^+ \cup$ $\cup D)$, $s \geqslant 3/2 - m$.

Вернемся к оператору $P(y, \partial)$. Локально в переменных $y = (w, t) =$ $= (x_1, x_2, t)$ главная часть оператора $P(y, \partial)$ имеет вид

$$P_0(y, \partial) = \sum_{j,k=1}^{2} p_{j,k}^0(y) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \left(\sum_{j=1}^{2} p_j^1(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial t} + p_2(y) \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Соответственно, разложив вектор η (см. § 15) $\eta = \xi + \xi_t n^*$, $\xi_t \in \mathbb{R}$, $n^* =$ $= n^*(w)$ — внешняя конормаль, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in H_w \subset T^*(D)$, H_w — слой кокасательного расслоения над точкой $w \in D$, получим для главного символа оператора $P(y, \partial)$

$$p(y, \eta) = -\sum_{j,k=1}^{2} p_{j,k}^0(y) \xi_j \xi_k - \sum_{j=1}^{2} p_j^1(y) \xi_j \xi_t - p_2(y) \xi_t^2 =$$
$$= -p_0(y, \xi) - p_1(y, \xi) \xi_t - p_2(y) \xi_t^2. \quad (15.13)$$

По условию эллиптичности (15.4) $p(y, \eta) \neq 0$ при $\eta \neq 0$. Без ограничения общности будем считать $p(y, \eta) < 0$ (как для оператора Лапласа, у которого главный символ $p(y, \eta) = -|\eta|^2$). Из условия $p(y, \eta) < 0$ и представления (15.11) очевидно следует, что

$p_{0,1,2}$ — вещественные функции при $\xi \in \mathbb{R}^2$;

$p_0(y,\xi)$ — однородная по ξ функция второго порядка, т. е.

$$p_0(y,\xi) = p_0(y,\xi/|\xi|)|\xi|^2 = p_0(y,\varphi(\xi))|\xi|^2, \tag{15.14}$$

причем $p_0(y,\varphi) \geqslant M_0 > 0$;

$p_1(y,\xi)$ — однородная по ξ функция первого порядка, т. е.

$$p_1(y,\xi) = p_1(y,\xi/|\xi|)|\xi| = p_1(y,\varphi(\xi))|\xi|; \tag{15.15}$$

$p_2(y) \geqslant M_0 > 0$.

Найдем в данном случае множество M^+, т. е. рассмотрим уравнение (15.9)

$$p(w,\xi - in^*\partial/\partial t)u(t) = 0,$$

где $w \in D$, $(w,\xi) \in T^*(D)$, $n^* = n^*(w)$ — внешняя конормаль и найдем его решения, ограниченные при $t \to +\infty$. С учетом представления (15.11) уравнение (15.9) имеет вид

$$-p_0(w,\xi)u + ip_1(w,\xi)u_t + p_2(w)u_{tt} = 0. \tag{15.16}$$

Это — обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение

$$0 = -p_0(w,\xi) + ip_1(w,\xi)\lambda + p_2(w)\lambda^2 = p(w,\eta),$$

где $\eta = \xi + i\lambda n^*$. В силу условия эллиптичности (15.4) $p(w,\eta) \neq 0$ при $\eta \neq 0$, $\eta \in \mathbb{R}^3$, тогда из условия $p(w,\eta) = 0$, $\eta = \xi + i\lambda n^*$ следует $i\lambda \notin \mathbb{R}$, а значит $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$. Найдем λ непосредственно:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-ip_1 \pm \sqrt{-p_1^2 + 4p_0p_2}}{2p_2} = \pm\alpha - i\beta,$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{4p_0p_2 - p_1^2}}{2p_2} = \alpha(w,\xi), \quad \beta = \frac{p_1}{2p_2} = \beta(w,\xi), \tag{15.17}$$

причем в силу условий $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ и $p_2 > 0$ имеем $\alpha(w,\xi) > 0$. Тогда решение уравнения (15.14) имеет вид

$$u(t) = C_1e^{(-\alpha-i\beta)t} + C_2e^{(\alpha-i\beta)t}, \quad C_{1,2} = \mathrm{const}$$

и, выбирая ограниченные при $t \to +\infty$ решения, получим

$$u(t) = Ce^{(-\alpha-i\beta)t} = u(0)e^{(-\alpha-i\beta)t}.$$

Лемма 15.2. *Пусть $P(y,\partial)$ — линейный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка. Тогда*

$$M^+ = \{\, u(t) \mid u(t) = u(0)e^{\lambda t}, \quad \lambda = \lambda(w,\xi) = -\alpha - i\beta \,\},$$

где α,β имеют вид (15.15). *В частности, для $u \in M^+$ соответствие $u(t) \to u(0)$ взаимно однозначно.*

Применим теперь лемму 15.1 к задаче Дирихле

$$P(y,\partial)u = 0, \quad y \in D^+; \qquad Bu = u(y) = f(y), \quad y \in D.$$

В этом случае, очевидно, символ оператора B (15.6) $b(w,\eta) \equiv 1$, т. е. порядка $m = 0$ и отображение (15.10) имеет вид $u(t) \to u(0)$. С учетом леммы 15.2 отсюда следует, что выполнены все условия теоремы 15.1 и леммы 15.1.

Лемма 15.3. *Существует конечномерный оператор*

$$K_0 : W_2^{s+1/2}(D^+ \cup D) \to W_2^s(D), \quad s \geqslant 3/2$$

такой, что задача

$$P(y,\partial)u = 0, \quad y \in D^+, \quad u(y) + K_0 u = f(y), \quad y \in D, \tag{15.18}$$

имеет единственное решение $u = \widetilde{H} f$, $\widetilde{H} : W_2^s(D) \to W_2^{s+1/2}(D^+ \cup D)$, $s \geqslant 3/2$.

При этом граничное значение

$$u\,\Big|_{y\in D} = f(y) - K_0 u = f - K_0 \widetilde{H} f = f + K_1 f, \tag{15.19}$$

где $K_1 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ *— конечномерный оператор.*

Далее, обратим внимание, что если $u(t) = u(0)\mathrm{e}^{\lambda t}$, то отображение (15.10) имеет вид

$$u(t) \to u(0) b(w, \xi - in^* \partial/\partial t)\mathrm{e}^{\lambda t}\,\Big|_{t=0} = b_0(w,\xi)u(0),$$

где

$$b_0(w,\xi) = b(w, \xi - in^* \partial/\partial t)\mathrm{e}^{\lambda t}\,\Big|_{t=0}. \tag{15.20}$$

Теорема 15.2. *Пусть граничный оператор B имеет символ* (15.6) $b(w,\eta)$, *удовлетворяющий условию* (15.7); $\widetilde{H} : W_2^s(D) \to W_2^{s+1/2}(D^+ \cup \cup D)$ *— оператор решения задачи* (15.16) *из леммы* 15.3. *Тогда* $B_0 = = B\widetilde{H} : W_2^s(D) \to W_2^{s-m}(D)$ *— псевдодифференциальный оператор порядка m на D с главным символом $b_0(w,\xi)$ вида* (15.18).

Доказательство этой теоремы фактически содержится в [43, с. 311–354], хотя формально такое утверждение там отсутствует. Чтобы избежать слишком подробного цитирования [43], опишем только общую схему рассуждений.

Локально в переменных $y = (w,t)$ с точностью до младших членов оператор B_0 имеет вид $B_0 f = Bu$, где $u(y)$ есть решение задачи

$$P_0(w,\partial)u = 0, \quad t > 0; \quad u\,\Big|_{t=0} = f(w), \tag{15.21}$$

$P_0(w,\partial)$ — главная часть оператора $P(y,\partial)$ с «замороженными» по t при $t=0$ коэффициентами (т. е. $y=(w,0)=w$). Будем локально вычислять главный символ B_0 по стандартной формуле $b_0(w,\xi) = \mathrm{e}^{-iw\xi}B_0(\mathrm{e}^{iw\xi})$ (см. (1.3) или [43, с. 114]). Итак, возьмем $f=\mathrm{e}^{iw\xi}$ и будем искать решение задачи (15.19) в виде $u=u(t)\mathrm{e}^{iw\xi}$, где $u(t)$ — ограничена при $t\to+\infty$. Тогда для функции $u(t)$ получим уравнение (15.14)

$$-p_0(w,\xi)u + ip_1(w,\xi)u_t + p_2(w)u_{tt} = 0$$

и начальное условие $u(0)=1$, откуда $u(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$, $\lambda=-\alpha-i\beta$, где α,β имеют вид (15.15). В свою очередь, с точностью до младших членов

$$Bu = B(\mathrm{e}^{\lambda t+iw\xi}) = b(w,\xi - in^*\partial/\partial t)(\mathrm{e}^{\lambda t+iw\xi})\Big|_{t=0},$$

откуда и следует формула (15.18)

$$b_0(w,\xi) = \mathrm{e}^{-iw\xi}B(\mathrm{e}^{\lambda t+iw\xi}) = b(w,\xi - in^*\partial/\partial t)\mathrm{e}^{\lambda t}\Big|_{t=0}.$$

Более точные рассуждения с оценками младших членов полностью аналогичны [43, с. 311–354]. Заметим, что из рассуждений [43] следует, что оператор B_0 будет удовлетворять условию более жесткому, чем условие локальности (см. примечание 1 в § 8) и условия (1.4), (7.1), (7.3) на символ локальных представлений. Во всяком случае, оператор B_0 будет псевдодифференциальным оператором порядка m в смысле нашего определения (§ 8).

Отметим, что в теореме 15.2 главный символ оператора сразу определяется как функция на кокасательном расслоении $T^*(D)$ (см. § 8).

§ 16. Сведение краевой задачи с наклонной производной к псевдодифференциальному оператору

Разложим вектор $b=b(w)\in\mathbb{R}^3$ по нормали и касательной к D (см. § 15):

$$b(w) = b_\tau(w) + a_n(w)n,$$

где $n=n(w)$ — единичная внешняя нормаль к D, $a_n(w)\in\mathbb{R}$ и с учетом (15.5) $a_n(w)$ — функция на D класса $C^\gamma(D)$, $\gamma>4$; $(w,b_\tau(w))\in T(D)$, где $T(D)$ — касательное расслоение над D. Тогда

$$\left(b(w),\nabla u\Big|_{y=w\in D}\right) = a_n(w)\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y=w\in D} + \left(b_\tau(w),\nabla u\Big|_{y=w\in D}\right) =$$

$$= a_n(w)B_1u + B_0f_0,$$

где

$$f_0(w) = u\Big|_{y=w\in D}; \qquad B_0 f_0 = b_1(w)\frac{\partial f_0}{\partial x_1} + b_2(w)\frac{\partial f_0}{\partial x_2}$$

— оператор касательного дифференцирования, $w = (x_1, x_2)$, $b_\tau(w) = (b_1, b_2)$. Оператор B_0 — дифференциальный оператор первого порядка на многообразии D с символом

$$b_0(w,\xi) = i(b_1(w)\xi_1 + b_2(w)\xi_2) = ib_0(w,\varphi(\xi))|\xi|, \quad (w,\xi) \in T^*(D), \tag{16.1}$$

причем в силу (15.5) главный символ

$$b_0(w,\varphi) = b_1(w)\cos\varphi + b_2(w)\sin\varphi$$

локально удовлетворяет условию (7.1) § 7. Оператор B_1 — оператор взятия нормальной производной

$$B_1 u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y\in D} = -\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}.$$

Следовательно, символ B_1 (15.6)

$$b_1(w,\eta) = -\mathrm{e}^{-iw\xi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\chi(w,t)\mathrm{e}^{i(w\xi + t\xi_t)}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= -\mathrm{e}^{it\xi_t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\chi(w,t)\right)\Big|_{t=0} - i\xi_t(\chi(w,t)\mathrm{e}^{it\xi_t})\Big|_{t=0} = -i\xi_t.$$

Таким образом, символ оператора B_1 имеет порядок $m = 1$ и удовлетворяет условию (15.7). Тогда в силу теоремы 15.2 главный символ оператора $A_0 = B_1\widetilde{H} : W_2^s(D) \to W_2^{s-1}(D)$, $s \geqslant 3/2$ равен

$$a_0(w,\xi) = -i\left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathrm{e}^{\lambda t}\Big|_{t=0} = -\lambda = -(-\alpha - i\beta) = \alpha + i\beta, \tag{16.2}$$

где α, β имеют вид (15.15).

Лемма 16.1. *Функция $u(y)$ будет решением задачи* (15.1)–(15.5) *тогда и только тогда, когда $u = \widetilde{H} f_1$, где $f_1(w)$ есть решение уравнения*

$$A_1 f_1 = a_n(w) A_0 f_1 + B_0 f_1 + K_2 f_1 = g. \tag{16.3}$$

Здесь $\widetilde{H}$ — оператор решения задачи (15.16) *из леммы* 15.3; $A_0 = B_1\widetilde{H}$; *B_0 — оператор касательного дифференцирования; $K_2 = C_0 K_1$ — конечномерный оператор, K_1 — конечномерный оператор в лемме* 15.3 (*формула* (15.17)).

Доказательство. Пусть $u(y)$ — решение задачи (15.1),

$$f_1(w) = u\Big|_{y=w\in D} + K_0 u,$$

где K_0 — конечномерный оператор из леммы 15.3 (задача (15.16)). Тогда по лемме 15.3 $u = \widetilde{H} f_1$, откуда в силу граничного условия в задаче (15.1) и формулы (16.1) имеем

$$g(w) = \left(b(w), \nabla u \Big|_{y=w\in D}\right) = a_n(w) B_1 \widetilde{H} f_1 + B_0\left(\widetilde{H} f_1 \Big|_{y=w\in D}\right).$$

Но в силу формулы (15.17) и леммы 15.3

$$\widetilde{H} f_1 \Big|_{y=w\in D} = f_1(w) + K_1 f_1,$$

откуда окончательно

$$g(w) = a_n(w) B_1 \widetilde{H} f_1 + B_0(f_1 + K_1 f_1) = a_n A_0 f_1 + B_0 f_1 + K_2 f_1,$$

т. е. $f_1(w)$ есть решение уравнения (16.4).

Обратно, пусть $f_1(w)$ — решение уравнения (16.4). Обозначим $u = \widetilde{H} f_1$. Тогда в силу формулы (15.17)

$$u \Big|_{y=w\in D} = f_1(w) + K_1 f_1.$$

Кроме того, из (15.16) следует

$$P(y, \partial) u(y) = 0, \quad y \in D^+;$$

а с учетом (16.1)

$$\left(b(w), \nabla u \Big|_{y=w\in D}\right) = a_n(w) B_1 u + B_0\left(u \Big|_{y=w\in D}\right) =$$

$$= a_n A_0 f_1 + B_0 f_1 + K_2 f_1 = A_1 f_1 = g(w),$$

т. е. $u(y)$ есть решение задачи (15.1). Лемма доказана.

Лемма 16.1 означает, что задача (15.1) сводится к уравнению на D с псевдодифференциальным оператором A_1. Отметим, что оператор A_1 — первого порядка. Действительно, его главный символ в силу формул (16.3) и (16.2) имеет вид

$$a_1(w, \xi) = a_n(w)(\alpha(w, \xi) + i\beta(w, \xi)) + ic_0(w, \xi), \tag{16.4}$$

а из формул (15.12), (15.13) и (15.15) следует, что

$$\alpha(w, \xi) = \frac{\sqrt{4p_0 p_2 - p_1^2}}{2p_2} =$$

$$= \frac{\sqrt{4p_0(w, \varphi(\xi)) p_2(w) |\xi|^2 - p_1^2(w, \varphi(\xi)) |\xi|^2}}{2p_2(w)} = \alpha_0(w, \varphi(\xi)) |\xi|,$$

$$\beta(w,\xi) = \frac{p_1}{2p_2} = \frac{p_1(w,\varphi(\xi))|\xi|}{2p_2(w)} = \beta_0(w,\varphi(\xi))|\xi|, \tag{16.5}$$

причем

$$\alpha_0(w,\varphi) \geqslant M_0 > 0. \tag{16.6}$$

В свою очередь из (16.5), (16.6) и (16.2) следует

$$a_1(w,\xi) = (a_n(w)(\alpha_0(w,\varphi(\xi)) + i\beta_0(w,\varphi(\xi))) + ic_0(w,\varphi(\xi)))|\xi|. \tag{16.7}$$

Итак, оператор A_1 — первого порядка. Сведем, наконец, задачу (15.1) к оператору нулевого порядка на D. Для этого применим лемму 15.3 к задаче Дирихле для уравнения Лапласа, а лемму 16.1 — к задаче Неймана для уравнения Лапласа:

Лемма 16.2. *Справедливы утверждения*:

1. *Существует конечномерный оператор* $K_{0,0} : W_2^{s+1/2}(D^+ \cup D) \to \to W_2^s(D)$, $s \geqslant 3/2$ *такой, что задача*

$$\Delta u = 0, \quad y \in D^+; \qquad u(y) + K_{0,0}u = f(y), \quad y \in D$$

имеет единственное решение $u = \widetilde{H}_0 f$, $\widetilde{H}_0 : W_2^s(D) \to \to W_2^{s+1/2}(D^+ \cup D)$.

При этом граничное значение

$$u\Big|_{y=w\in D} = f(w) + K_{0,1}f,$$

где $K_{0,1} : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ *— конечномерный оператор.*

2. *Функция* $u(y)$ *будет решением задачи Неймана для уравнения Лапласа*

$$\Delta u = 0, \quad y \in D^+; \qquad B_1 u = \frac{\partial u}{\partial n} = g(y), \quad y \in D$$

тогда и только тогда, когда $u = \widetilde{H}_0 f$, *где* f *есть решение уравнения* $A_{0,1}f = g$, *причем* $A_{0,1} = B_1\widetilde{H}_0$ *— псевдодифференциальный оператор с главным символом* $a_{0,1}(w,\xi) = |\xi|$.

Действительно, первое утверждение леммы — это просто лемма 15.3, примененная к задаче Дирихле для оператора Лапласа. Для получения второго утверждения следует применить лемму 16.1 к задаче Неймана для оператора Лапласа. В данном случае главный символ оператора $P(y,\partial) = \Delta$ равен $p(y,\eta) = -|\eta|^2$, откуда в представлении (15.11) $p_0 = |\xi|^2$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, подставив их в формулу (15.15), получим $\alpha = |\xi|$, $\beta = 0$. Кроме того, в граничном условии (16.1) имеем $a_n(w) = 1$, $C_0 = 0$, откуда окончательно следует второе утверждение леммы.

Отметим, что главный символ $a_{0,1}(w,\xi) = |\xi|$ оператора $A_{0,1}$ не обращается в нуль при $\xi \neq 0$. Отсюда следует ([43], также см. теорему

10.1 § 10), что оператор $A_{0,1}$ нетеров нулевого индекса, т. е. существует конечномерный оператор $K_{0,2}$ такой, что $(A_{0,1}+K_{0,2})$ — обратим. Пусть $(A_{0,1}+K_{0,2})^{-1}=A_{0,2}$, т. е. $(A_{0,1}+K_{0,2})f=g \Longleftrightarrow f=A_{0,2}g$. Тогда $A_{0,2}$ — псевдодифференциальный оператор порядка (-1) с главным символом

$$a_{0,2}(\xi)=\frac{1}{|\xi|},\quad \xi\neq 0;\qquad a_{0,2}(\xi)=1,\quad \xi=0. \tag{16.8}$$

При этом $A_{0,2}: W_2^{s-1}(D)\to W_2^s(D)$ — непрерывен, $s\geqslant 3/2$. Оператор $A_{0,2}$ — это с точностью до конечномерного слагаемого оператор решения задачи Неймана для уравнения Лапласа.

Если теперь искать решение уравнения (16.4) в виде $f_1=A_{0,2}f$, то окончательно задача (15.1) сводится к псевдодифференциальному оператору нулевого порядка на D.

Теорема 16.1. *Функция* $u(y)\in W_2^s(D^+\cup D)$, $s\geqslant 2$ *будет решением задачи* (15.1) *с оператором* $P(y,\partial)$ *вида* (15.2) *и условиями* (15.3)–(15.5) *тогда и только тогда, когда* $u=Hf$, $f\in W_2^s(D)$, $s\geqslant 1/2$, *где* $H=\widetilde{H}A_{0,2}: W_2^s(D)\to W_2^{s+3/2}(D)$, *а* $f(w)$ *есть решение уравнения* $Af=g$, *где*

$$A=a_n(w)A_0A_{0,2}+C_0A_{0,2}+K_2A_{0,2}=\widetilde{A}+K, \tag{16.9}$$

$K=K_2A_{0,2}: W_2^s(D)\to W_2^s(D)$ — *конечномерный оператор*, $\widetilde{A}$ — *псевдодифференциальный оператор нулевого порядка на* D *с главным символом*

$$a(w,\varphi)=a_n(w)(\alpha_0(w,\varphi)+i\beta_0(w,\varphi))+ic_0(w,\varphi). \tag{16.10}$$

Здесь $\widetilde{H}$ — *оператор решения задачи* (15.16) *из леммы* 15.3; $A_{0,2}= (A_{0,1}+K_{0,2})^{-1}$, $A_{0,1}=B_1\widetilde{H}_0$ — *оператор из второго утверждения леммы* 16.2, *а* $K_{0,2}$ — *конечномерный оператор такой, что* $A_{0,1}+K_{0,2}$ — *обратим* (*см. выше*); $A_0=B_1\widetilde{H}$, C_0 *и* K_2 — *операторы из леммы* 16.1.

Доказательство. Эквивалентность задачи (15.1) и уравнения $Af=g$, решения которых связаны равенством $u=Hf=\widetilde{H}A_{0,2}f$, следует непосредственно из леммы 16.1. Далее, из теоремы об умножении символов ([43, с. 102], см. также теорему 8.1 § 8) и формул (16.3), (16.6) и (16.9) вытекает, что $A_2=A_0A_{0,2}$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с главным символом

$$a_0^2(w,\varphi(\xi))=\alpha_0(w,\varphi(\xi))+i\beta_0(w,\varphi(\xi)),$$

где α_0,β_0 имеют вид (16.6). Отметим, что символы локальных представлений оператора A_2 имеют вид (1.4) § 1, причем условия (7.1) и (7.3) § 7 выполнены для любых $\gamma_0>0$, $\gamma_1>0$. В свою очередь, в силу условия (15.5) функция $a_n(w)\in C^\gamma(D)$, $\gamma>4$, откуда, очевидно, $A_3= a_n(w)A_2$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с главным символом

$$a_0^3(w,\varphi(\xi)) = a_n(w)a_0^2(w,\varphi(\xi)) = a_n(w)(\alpha_0(w,\varphi(\xi)) + i\beta_0(w,\varphi(\xi))),$$

причем условия (7.1), (7.3) для его локальных представлений выполнены при $\gamma_0 = \gamma > 4$, $\gamma_1 = \gamma$. Наконец, из (16.2) и (16.9) с учетом (15.5) следует, что $A_4 = C_0 A_{0,2}$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка на D с главным символом

$$a_0^4(z,\varphi(\xi)) = i(c_1(w)\cos\varphi(\xi) + c_2(w)\sin\varphi(\xi)).$$

Итак, $\widetilde{A} = A_3 + A_4$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка на D с главным символом $a(w,\varphi(\xi))$ вида (16.11). Осталось показать, что для $a(w,\varphi)$ выполнено условие (7.2) § 7, т. е.

$$\operatorname{ind} a(w,\varphi)\Big|_{\varphi} = 0. \tag{16.11}$$

Очевидно, $\operatorname{Re} a(w,\varphi) = a_n(w)\alpha_0(w,\varphi)$. Если $a_n(w) \neq 0$, то из условия (16.7) $\alpha_0(w,\varphi) \geqslant M_0 > 0$ вытекает (16.12). Если же $a_n(w) = 0$, то $a(w,\varphi) = i(c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi)$ — чисто мнимое, откуда снова следует (16.12). Теорема доказана.

Оператор A вида (16.10) будем называть *оператором задачи с наклонной производной*. Отметим, что $A = \widetilde{A} + K$, где K — конечномерный оператор, а $\widetilde{A}$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с главным символом вида (16.11). Оператор $\widetilde{A}$ будем называть *главной частью* оператора задачи с наклонной производной.

§ 17. Вырождение символа оператора задачи с наклонной производной. Условия на граничное векторное поле

Найдем точки $w \in D$, в которых главный символ оператора $\widetilde{A}$ может обращаться в нуль. Главный символ $a(w,\varphi(\xi))$ задается формулой (16.11) и, как уже отмечалось, $\operatorname{Re} a(w,\varphi) = a_n(w)\alpha_0(w,\varphi)$, причем в силу (16.7) $\alpha_0(w,\varphi) \geqslant M_0 > 0$. Таким образом, если $a_n(w) \neq 0$, то $a(w,\varphi(\xi)) \neq 0\ \forall\,\xi$. Если же $a_n(w) = 0$, то

$$a(w,\varphi(\xi)) = i(b_1(w)\cos\varphi(\xi) + b_2(w)\sin\varphi(\xi))$$

и, очевидно, для любых значений $b_{1,2}(w) \in \mathbb{R}$ всегда существует угол $\varphi_0 = \varphi(\xi_0)$ такой, что $a(w,\varphi_0) = 0$ (например, $\varphi_0 = -\operatorname{arctg}(b_1/b_2)$ при $b_2 \neq 0$, $\varphi_0 = \pi/2$ при $b_2 = 0$).

Лемма 17.1. *Если нормальная составляющая вектора $b(w)$ в задаче* (15.1) $a_n(w) \neq 0$, $w \in D$, *то символ оператора $\widetilde{A}$ не вырождается и задача* (15.1) *— нетерова индекса нуль.*

В противном случае символ оператора $\widetilde{A}$ *вырождается, причем область вырождения*

$$V = V(\widetilde{A}) = \{\, w \in D \mid a_n(w) = 0 \,\}.$$

Действительно, утверждение о виде области вырождения символа следует из предыдущих рассуждений. Если же $a_n(w) \neq 0$, то $a(w, \varphi(\xi)) \neq 0$, откуда следует (теорема 10.1 § 10), что оператор $\widetilde{A}$ — нетеров нулевого индекса. Но тогда и оператор задачи с наклонной производной $A = \widetilde{A} + K$ тоже нетеров индекса нуль [32, 43], откуда в силу теоремы 16.1 задача (15.1) — также нетерова нулевого индекса.

Для задачи с наклонной производной условие $a_n(w) \neq 0$, обеспечивающее ее нетеровость, называют *условием дополнительности Лопатинского* [13], [43].

Далее будем рассматривать только задачи с вырождающимся символом.

В соответствии с построениями § 11 гл. 4, обратимся к локальным областям вырождения, т. е. к компонентам связности V_k области $V(\widetilde{A})$. Пусть V_k гомеоморфно отображается в тор, т. е. существует гомеоморфизм $\mu_k : Y_k \to D$, $Y_k \subset T$ такой, что $\mu_k(Y_k) \supset V_k$. Как и в § 11, введем открытые окрестности локальной области на D и ее гомеоморфного образа в торе: $U_k = \mu_k^{-1}(V_k) \subset U_k^3$, $V_k \subset V_k^3 = \mu_k(U_k^3)$. В силу формулы (16.11), главный символ локального представления оператора $\widetilde{A}$ в плоскости гомеоморфизма μ_k имеет вид

$$a_0^k(z, \varphi(\xi)) = a_n(\mu_k(z))(\alpha_0^k(z, \varphi(\xi)) + i\beta_0^k(z, \varphi(\xi))) + \\ + i(c_1^k(z)\cos\varphi(\xi) + c_2^k(z)\sin\varphi(\xi)), \quad (17.1)$$

где $z \in U_k^3 \subset T$, $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$\alpha_0^k(z, \varphi(\xi)) + i\beta_0^k(z, \varphi(\xi)) = (\alpha_0(w, \varphi(\eta)) + i\beta_0(w, \varphi(\eta)))\Big|_{(w,\eta)=\zeta_k(z,\xi)},$$

$$c_1^k(z)\cos\varphi(\xi) + c_2^k(z)\sin\varphi(\xi) = \\ = (c_1(w)\cos\varphi(\eta) + c_2(w)\sin\varphi(\eta))\Big|_{(w,\eta)=\zeta_k(z,\xi)},$$

$\zeta_k : U_k^3 \times \mathbb{R}^2 \to T^*(D)$ — локальная тривиализация кокасательного расслоения $T^*(D)$ с помощью гомеоморфизма μ_k [42, с. 183].

В случае, когда $z \in U_k$, т. е. $a_n(\mu_k(z)) = 0$, имеем

$$a_0^k(z, \varphi) = i(c_1^k(z)\cos\varphi + c_2^k(z)\sin\varphi).$$

Отметим, что из условия (15.5) $|b(w)| \geqslant M > 0$, $w \in D$ следует, что при $a_n(w) = 0$ модуль касательного вектора $|b_\tau(w)| \geqslant M$, т. е. в области вырождения символа само касательное векторное поле не вырождается.

В таком случае из условия (11.3) (оно имеет вид $|a_0^k(z,\varphi)| \geqslant M_1|\sin\varphi|$, см. условие А0 § 11) следует, что $b_1^k(z) \equiv 0$ при $z \in U_k$. Это значит, что в области V_k в плоскости локального гомеоморфизма μ_k касательное векторное поле $b_\tau(z) = (b_1^k, b_2^k)$ «выпрямлено», т. е. все векторы $b_\tau(z)$ направлены в одну сторону. Пусть это условие выполнено в окрестности V_k^3 локальной области вырождения V_k. Это обеспечивает выполнение условия (11.3) для главного символа оператора $\widetilde{A}$ (см. ниже лемму 17.2).

Для того, чтобы символ оператора $\widetilde{A}$ полностью удовлетворял условию А0, следует потребовать от функций вида (17.1) выполнения условий (11.4):

$$\begin{gathered}\sup_{x,\varphi} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |p_k(x,y,\varphi)|\,dy = \widetilde{\beta}_0 < \infty,\\ |\widetilde{p}_k(z,\varphi)| \leqslant M, \quad z = (x,y) \in T,\end{gathered} \tag{17.2}$$

где

$$p_k(z,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y} \ln \dfrac{a_0^k(z,-\varphi)}{a_0^k(z,\varphi)}, & z \in U_k^3,\ \sin\varphi \neq 0,\\ 0, & z \notin U_k^3,\end{cases}$$

$$\widetilde{p}_k(z,\varphi) = \begin{cases} \ln \dfrac{a_0^k(z,-\varphi)}{a_0^k(z,\varphi)}, & z \in U_k^3,\ \sin\varphi \neq 0,\\ 0, & z \notin U_k^3.\end{cases}$$

Отметим, что если в (17.1) $a_n(\mu_k(z)) = c_1^k(z) = 0$, то $a_0^k(z,\varphi) = ib_2^k(z)\sin\varphi$, откуда $\widetilde{p}_k(z,\varphi) = \ln(-1) = \mathrm{const}$, $p_k(z,\varphi) = 0$, т. е. во внутренних точках локальной области вырождения условие (17.2) выполнено автоматически. Таким образом, (17.2) характеризует поведение символа $a_0^k(z,\varphi)$ при приближении z к границе области вырождения U_k. Приведем для (17.2) более простое достаточное условие.

Условие А1. *Пусть векторное поле $b(w) : D \to \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условию* (15.5);

$$V = \{\, w \in D \mid a_n(w) = (b(w), n(w)) = 0 \,\} = \bigcup_{k=1}^{n_0} V_k \neq \emptyset,$$

где V_k — компоненты связности V, $n(w)$ — единичная внешняя нормаль к D и пусть для каждой компоненты связности V_k существует открытая окрестность $V_k^3 \supset V_k$ и гомеоморфизм класса C^∞ $\mu_k : Y_k \to D$, $Y_k \subset T$, $V_k^3 \subset \mu_k(Y_k)$ такие, что выполнены условия:

(i) *оператор касательного дифференцирования $C_0 = (l_\tau(w), \nabla)$, $l_\tau(w) = b(w) - a_m(w)n(w)$ в плоскости переменной $z = \mu_k^{-1}(w)$*

имеет вид

$$(l_\tau(w),\nabla)\Bigg|_{w=\mu_k(z)} = b_2^k(z)\frac{\partial}{\partial y}, \quad z=(x,y)\in U_k^3 = \mu_k^{-1}(V_k^3)\subset T;$$

(ii) *существует* $\varepsilon_0>0$ *такое, что* $\forall\, x\in[0,2\pi]$ *множества*

$$L^2(x,\varepsilon_0)=\{\, y\in[0,2\pi] \mid |a_n(\mu_k(z))|\leqslant\varepsilon_0,\ z=(x,y)\in U_k^3\,\} \tag{17.3}$$

есть объединение конечного числа отрезков

$$L^2(x,\varepsilon_0)=\bigcup_{j=1}^{j_0(x)}[\alpha_j(x),\beta_j(x)],$$

причем $\beta_j(x)\geqslant\alpha_{j+1}(x)$, $j=\overline{1,j_0(x)-1}$ *и* $j_0(x)\leqslant j_0=\mathrm{const}$ (*возможно*, $j_0(x)=0$, *т. е. при данном* x $L^2(x,\varepsilon_0)=\emptyset$);

(iii) *для любого* $x\in[0,2\pi]$ *такого, что* $L^2(x,\varepsilon_0)\neq\emptyset$ *существуют функции* $\psi_j(x,y)$, *заданные на отрезках* $y\in[\alpha_j(x),\beta_j(x)]$, $j=\overline{1,j_0(x)}$ *такие, что*

$$\begin{gathered}|a_n(\mu_k(z))'_y|\leqslant(\psi_j(x,y))'_y, \quad |a_n(\mu_k(z))|\geqslant|\psi_j(x,y)|,\\ z=(x,y), \quad y\in[\alpha_j(x),\beta_j(x)].\end{gathered} \tag{17.4}$$

Далее для краткости будем обозначать $\widetilde{a}_n(z)=a_n(\mu_k(z))$, $\widetilde{c}_2(z)=b_2^k(z)$. Условие (i) уже отмечалось ранее, оно означает, что касательное векторное поле $l_\tau(w)$ в плоскости локального параметра μ_k «выпрямлено» в области $U_k^3=\mu_k^{-1}(V_k^3)$. Условие (ii) характеризует границу локальной области вырождения $L_k=\partial U_k$. Фактически оно означает, что для любого $x\in[0,2\pi]$ кривые

$$L^2(x)=\{\, z=(x,y)\in T\mid y\in[0,2\pi]\,\}$$

пересекают границу L_k лишь в конечном числе точек, не превосходящем некоторой общей константы. Тогда при достаточно малом ε_0, если $L^2(x,\varepsilon_0)\neq\emptyset$, то $L^2(x,\varepsilon_0)$ будет объединением конечного числа непересекающихся отрезков (возможно, обращающихся в точку), каждый из которых может быть дополнительно разбит еще на несколько смежных отрезков. В свою очередь, условие (iii) характеризует поведение нормальной составляющей $\widetilde{a}_n(z)$ вблизи границы L_k, оно означает, что функция $\widetilde{a}_n(z)=\widetilde{a}_n(x,y)$ не должна слишком сильно колебаться по y при приближенни к границе L_k. В частности, оно автоматически выполнено, если $\widetilde{a}_n(x,y)$ кусочно монотонна по y вблизи L_k, т. е. $L^2(x,\varepsilon_0)$ можно для любого x разбить на конечное (не превосходящее общей константы j_0) число смежных или непересекающихся отрезков $[\alpha_j(x),\beta_j(x)]$, на каждом из которых производная $(\widetilde{a}_n(x,y))'_y$

имеет фиксированный знак. В этом случае $\psi_j(x,y) = \pm\widetilde{a}_n(x,y)$, $y \in [\alpha_j(x), \beta_j(x)]$, причем знак «+» или «−» выбирается с таким расчетом, что $(\psi_j(x,y))'_y \geqslant 0$.

Теорема 17.1. *Пусть граничное векторное поле* $b(w)$ *в задаче с наклонной производной* (15.1) *удовлетворяет условию A1 и* $\widetilde{A}$ *— главная часть оператора задачи с наклонной производной. Тогда оператор* $\widetilde{A}$ *удовлетворяет условию A0 § 11.*

Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных лемм. Во-первых, из условия (i) следует, что главный символ (17.1) $a_0^k(z,\varphi)$ имеет вид

$$a_0^k(z,\varphi) = \widetilde{a}_n(z)(\alpha_0^k(z,\varphi) + i\beta_0^k(z,\varphi)) + i\widetilde{c}_2(z)\sin\varphi, \quad z \in U_k^3. \tag{17.5}$$

Во-вторых, из условий (15.3), (15.5) и формул (15.15), (16.6), (16.7) следует, что

$$|\alpha_0^k(z,\varphi)| + |(\alpha_0^k)'_y| + |\beta_0^k(z,\varphi)| + |(\beta_0^k)'_y| + |\widetilde{a}_n(z)| + \\ + |(\widetilde{a}_n)'_y| + |\widetilde{c}_2(z)| + |(\widetilde{c}_2)'_y| \leqslant M_1,$$

$$\alpha_0^k(z,\varphi) \geqslant M_0 > 0, \quad |\widetilde{a}_n(z)| + |\widetilde{c}_2(z)| \geqslant M_2 > 0, \quad z \in U_k^3. \tag{17.6}$$

Кроме того, без ограничения общности можно считать, что $|\widetilde{a}_n(z)| \leqslant \min(M_2/2, M_2/(2M_1))$ при $z \in U_k^3$, откуда $|\widetilde{a}_n(z)\beta_0^k(z,\varphi)| \leqslant M_2/2$ и, следовательно,

$$|\widetilde{c}_2(z)| \geqslant M_2/2 > 0, \quad z \in U_k^3. \tag{17.7}$$

$$|\widetilde{c}_2(z)| - |\widetilde{a}_n(z)\beta_0^k(z,\varphi)| \geqslant M_2/2 > 0, \quad z \in U_k^3. \tag{17.8}$$

Лемма 17.2. *Пусть* $a_0^k(z,\varphi)$ *имеет вид* (17.5), *причем выполнены условия* (17.6) *и* (17.7). *Тогда*

$$|a_0^k(z,\varphi)| \geqslant M|\sin\varphi|, \quad z \in U_k^3, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \tag{17.9}$$

где $M = M_0M_2/(4(M_0 + M_1))$.

Доказательство. Пусть $M_3 = M_2/(2(M_0 + M_1))$. Тогда

$$M = \frac{M_3M_0}{2} \quad \text{и} \quad M = \frac{M_2}{4} - \frac{M_3M_1}{2}. \tag{17.10}$$

Из (17.5), очевидно, следует, что $\operatorname{Re} a_0^k = \widetilde{a}_n\alpha_0^k$, $\operatorname{Im} a_0^k = \widetilde{a}_n\beta_0^k + \widetilde{c}_2\sin\varphi$, откуда

$$|a_0^k(z,\varphi)| \geqslant \frac{1}{2}\,|\widetilde{a}_n(z)||\alpha_0^k(z,\varphi)| + \frac{1}{2}\,|\widetilde{c}_2(z)\sin\varphi + \widetilde{a}_n(z)\beta_0^k(z,\varphi)|. \tag{17.11}$$

Рассмотрим случай $|\widetilde{a}_n(z)| \geqslant M_3|\sin\varphi|$. Тогда из (17.11), (17.6) и (17.10) следует, что

$$|a_0^k(z,\varphi)| \geqslant \frac{1}{2}\,M_3|\sin\varphi|M_0 = \frac{M_0M_3}{2}\,|\sin\varphi| = M|\sin\varphi|,$$

т. е. выполнено (17.9).

Если же $|\widetilde{a}_n(z)| \leqslant M_3|\sin\varphi|$, то из (17.11) с учетом (17.7), (17.6), и (17.10) получим

$$|a_0^k(z,\varphi)| \geqslant \frac{1}{2}\left(|\widetilde{c}_2(z)||\sin\varphi| - |\widetilde{a}_n(z)||\beta_0^k(z,\varphi)|\right) \geqslant \frac{1}{2}|\sin\varphi| \times \\ \times \left(\frac{M_2}{2} - M_3M_1\right) = |\sin\varphi|\left(\frac{M_2}{4} - \frac{M_3M_1}{2}\right) = M|\sin\varphi|,$$

т. е. вновь выполнено (17.9). Лемма доказана.

Лемма 17.3. *Пусть числа* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *и удовлетворяют условиям* $\alpha \geqslant M_0 > 0$, $|\beta| \leqslant M_1$. *Тогда* $\forall\, p \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{M} \leqslant \left|\frac{\alpha+i\beta-ip}{\alpha+i\beta+ip}\right| \leqslant M, \quad M = \max\left(2, \sqrt{\frac{16M_1^2}{M_0^2}+1}\right) > 0. \quad (17.12)$$

Доказательство. Покажем, что

$$\left|\frac{\alpha+i\beta-ip}{\alpha+i\beta+ip}\right| = \frac{\alpha^2+(p-\beta)^2}{\alpha^2+(p+\beta)^2} \leqslant M^2. \quad (17.13)$$

Рассмотрим сначала случай $|p| \geqslant 3M_1$. Из условий леммы следует, что

$$M^2 - 1 \geqslant \frac{16M_1^2}{M_0^2},$$

откуда

$$(M^2-1)\alpha^2 \geqslant (M^2-1)M_0^2 \geqslant 16M_1^2,$$

или

$$\alpha^2 + 16M_1^2 \leqslant M^2\alpha^2.$$

Тогда, с учетом условий $|\beta| \leqslant M_1$, $|p| \leqslant 3M_1$, получим

$$\alpha^2+(p-\beta)^2 \leqslant \alpha^2 + (|p|+|\beta|)^2 \leqslant \alpha^2 + 16M_1^2 \leqslant M^2\alpha^2 \leqslant \\ \leqslant M^2(\alpha^2+(p+\beta)^2),$$

т. е. выполнено (17.13).

Если же $|p| \geqslant 3M_1$, то $|p| + M_1 \leqslant 2(|p| - M_1)$ или $(|p|+M_1)^2 \leqslant 4(|p|-M_1)^2$, откуда

$$\alpha^2+(p-\beta)^2 \leqslant \alpha^2 + (|p|+M_1)^2 \leqslant 4\alpha^2 + 4(|p|-M_1)^2 \leqslant \\ \leqslant 4(\alpha^2+(p+\beta)^2) \leqslant M^2(\alpha^2+(p+\beta)^2),$$

т. е. снова выполнено (17.13). Итак, неравенство (17.13) доказано.

Далее, если в (17.13) поменять знак β, то получим

$$\frac{\alpha^2+(p-\beta)^2}{\alpha^2+(p+\beta)^2} \geqslant \frac{1}{M^2}. \quad (17.14)$$

Из (17.13) и (17.14) следует неравенство (17.12). Лемма доказана.

Лемма 17.4. *Пусть числа $p, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a = \alpha + i\beta$. Тогда*

$$\frac{|\alpha p|}{|p^2a^2+1|} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{17.15}$$

Если при этом

$$\alpha \geqslant M_0 > 0, \quad |\alpha| + |\beta| \leqslant M_1, \tag{17.16}$$

то

$$\frac{p^2+1}{|p^2a^2+1|} \leqslant M, \quad M = \frac{1}{\min\left(1, M_0/2, M_0^2/2, \sqrt{3}\, M_0^2/(2M_1^2+1)\right)}. \tag{17.17}$$

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение леммы. Имеем

$$|p^2a^2+1| = |p^2(\alpha^2-\beta^2)+1+2ip^2\alpha\beta| =$$

$$= \sqrt{(p^2(\alpha^2-\beta^2)+1)^2+4p^4\alpha^2\beta^2}\,.$$

Тогда неравенство (17.15) эквивалентно неравенству

$$4\alpha^2p^2 \leqslant (p^2(\alpha^2-\beta^2)^2+1)^2+4p^4\alpha^2\beta^2$$

или

$$p^4(\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4)+2p^4(\alpha^2-\beta^2)+1+4p^4\alpha^2\beta^2-4\alpha^2p^2 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство, в свою очередь, имеет вид

$$p^4(\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4+4\alpha^2\beta^2)-2p^2(\alpha^2+\beta^2)+1 \geqslant 0$$

или

$$p^4(\alpha^2+\beta^2)^2-2p^2(\alpha^2+\beta^2)+1 \geqslant 0,$$

что означает

$$(p^2(\alpha^2+\beta^2)-1)^2 \geqslant 0.$$

Первое утверждение леммы доказано.

Обратимся ко второму утверждению. Аналогично предыдущему, оно сводится к неравенству

$$p^4(\alpha^2+\beta^2)^2-2p^2(\alpha^2-\beta^2)+1 \geqslant M_3^2(p^4+2p^2+1), \quad M_3 = 1/M,$$

т. е.

$$Ap^4+2Bp^2+C \geqslant 0, \tag{17.18}$$

где

$$A = (\alpha^2+\beta^2)^2-M_3^2, \quad B = \alpha^2-\beta^2-M_3^2, \quad C = 1-M_3^2.$$

Из условий (17.17) и (17.16) следует, что $C \geqslant 0$, $A > M_0^4 - M_0^4/4 > 0$.

Рассмотрим случай $\beta^2 \leqslant 3M_0^2/4$. Тогда

$$B = \alpha^2-\beta^2-M_3^2 \geqslant M_0^2-\frac{3}{4}\,M_0^2-\frac{1}{4}\,M_0^2 \geqslant 0,$$

т. е. у биквадратного трехчлена в (17.18) все коэффициенты положительны и, следовательно, неравенство (17.18) верно.

Пусть теперь $\beta^2 \geqslant 3M_0^2/4$. Найдем дискриминант квадратного трехчлена в (17.18):

$$\widetilde{D} = B^2 - AC = (\alpha^2 - \beta^2 - M_3^2)^2 - ((\alpha^2 + \beta^2)^2 - M_3^2)(1 - M_3^2) =$$
$$= (\alpha^2 - \beta^2)^2 - 2M_3^2(\alpha^2 - \beta^2) + M_3^4 - (\alpha^2 + \beta^2)^2 +$$
$$+ M_3^2((\alpha^2 + \beta^2)^2 + 1) - M_3^4 - 4\alpha^2\beta^2 + M_3^2((\alpha^2 + \beta^2)^2 + 1 - 2(\alpha^2 - \beta^2)).$$

Но из (17.16) следует, что

$$\alpha^2 \geqslant M_0^2, \quad (\alpha^2 + \beta^2)^2 \leqslant 4M_1^4, \quad |\alpha^2 - \beta^2| \leqslant 2M_1^2,$$

а из (17.17), что $M_3^2 \leqslant 3M_0^4/(2M_1^2 + 1)^2$, откуда с учетом условия $\beta^2 \geqslant 3M_0^2/4$ получим

$$\widetilde{D} \leqslant -4M_0^2 \frac{3}{4}\, M_0^2 + \frac{3M_0^4}{(2M_1^2 + 1)^2}\,(4M_1^4 + 1 + 4M_1^2) = -3M_0^4 + 3M_0^4 = 0.$$

Итак, дискриминант квадратного трехчлена в (17.18) не превосходит нуля, а так как $A > 0$, то неравенство (17.18) вновь справедливо. Итак, доказано неравенство (17.18), а, значит, и неравенство (17.17). Лемма доказана.

Лемма 17.5. *Пусть числа $a_0, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причем $|\alpha| + |\beta| \leqslant M_1$, $\alpha \geqslant M_0 > 0$. Тогда*

$$\frac{|ba_0(\alpha + i\beta)|}{|a_0^2(\alpha + i\beta)^2 + b^2|} \leqslant \frac{M_1}{2M_0}. \tag{17.19}$$

Доказательство. Если $b = 0$, то неравенство (17.19), очевидно, выполнено. Пусть $b \neq 0$, тогда, разделив числитель и знаменатель левой части неравенства (17.19) на b^2, получим

$$\frac{|p(\alpha + i\beta)|}{|p^2(\alpha + i\beta)^2 + 1|} \leqslant \frac{M_1}{2M_0}, \quad p = \frac{a_0}{b}. \tag{17.20}$$

Но в силу условий леммы

$$|p(\alpha + i\beta)| \leqslant |p|M_1 \leqslant |p|\frac{M_1}{M_0}\,|\alpha| \leqslant \frac{M_1}{M_0}\,|p\alpha|,$$

откуда, используя первое утверждение леммы 17.4, имеем

$$\frac{|p(\alpha + i\beta)|}{|p^2(\alpha + i\beta)^2 + 1|} \leqslant \frac{M_1}{M_0}\,\frac{|p\alpha|}{|p^2a^2 + 1|} \leqslant \frac{M_1}{2M_0}.$$

Итак, неравенство (17.20), а, следовательно, и неравенство (17.19) доказано.

Лемма 17.6. *Пусть* $a_0, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \leqslant M_1$, $\alpha \geqslant M_0 > 0$. *Тогда*

$$\frac{a_0^2 + b^2}{|a_0^2(\alpha + i\beta)^2 + b^2|} \leqslant M, \qquad M = \frac{1}{\min\left(1, M_0/2, M_0^2/2, \sqrt{3}\, M_0^2/(2M_1^2+1)\right)}. \tag{17.21}$$

Доказательство. При $b = 0$ получим

$$\frac{a_0^2}{|a_0^2(\alpha + i\beta)^2|} \leqslant \frac{a_0^2}{M_0^2 a_0^2} \leqslant \frac{2}{M_0^2} \leqslant M,$$

т. е. неравенство (17.21) справедливо. В случае $b \neq 0$, разделив числитель и знаменатель дроби в левой части (17.21) на b^2, придем к неравенству

$$\frac{p^2 + 1}{|p^2 a^2 + 1|} \leqslant M, \quad p = \frac{a_0}{b}, \quad a = \alpha + i\beta,$$

которое справедливо в силу второго утверждения леммы 17.4. Лемма доказана.

Лемма 17.7. *Пусть при* $y \in [y_1, y_2]$ *функция* $f(y)$ *удовлетворяет условиям*

$$|f'(y)| \leqslant \psi'(y), \quad |f(y)| \geqslant |\psi(y)|.$$

Тогда

$$I = |\sin\varphi| \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{|f'(y)|}{f^2(y) + M^2 \sin^2\varphi}\, dy \leqslant \frac{\pi}{M}, \quad \forall\, M > 0.$$

Доказательство. Используя условие леммы, непосредственно получим

$$I \leqslant |\sin\varphi| \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{d\psi(y)}{\psi^2(y) + M^2 \sin^2\varphi} = \frac{1}{M} \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{d(\psi(y)/M|\sin\varphi|)}{1 + (\psi(y)/M|\sin\varphi|)^2} =$$

$$= \frac{1}{M} \operatorname{arctg} \frac{\psi(y)}{M|\sin\varphi|}\Big|_{y_1}^{y_2} \leqslant \frac{\pi}{M}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 17.1. Для доказательства теоремы необходимо установить выполнение условий (11.3) и (11.4) § 11 для символа $a_0^k(z, \varphi)$ вида (17.1). Но, как уже отмечалось, условие (i) означает, что при $z \in U_k^3$ символ a_0^k имеет вид (17.5)

$$a_0^k(z, \varphi) = \widetilde{a}_n(z)(\alpha_0^k(z, \varphi) + i\beta_0^k(z, \varphi)) + i\widetilde{c}_2(z) \sin\varphi,$$

причем выполнены условия (17.6) и (17.7). Тогда из леммы 17.1 сразу следует, что для a_0^k выполнено условие (17.9), т. е. соотношение (11.3) § 11.

Докажем теперь для $a_0^k(z,\varphi)$ вида (17.5) выполнение условия (11.4) § 11 и, тем самым (17.2). Во-первых, в силу (17.5)

$$J = \left|\frac{a_0^k(z,-\varphi)}{a_0^k(z,\varphi)}\right| = \left|\frac{\widetilde{a}_n(\alpha_0^k + i\beta_0^k) - i\widetilde{c}_2\sin\varphi}{\widetilde{a}_n(\alpha_0^k + i\beta_0^k) + i\widetilde{c}_2\sin\varphi}\right|. \tag{17.22}$$

Пусть $\widetilde{a}_n(z) \neq 0$, тогда, разделив числитель и знаменатель дроби на $\widetilde{a}_n(z)$, получим

$$J = \left|\frac{\alpha_0^k + i\beta_0^k - ip}{\alpha_0^k + i\beta_0^k + ip}\right|, \quad p = \frac{\widetilde{c}_2(z)\sin\varphi}{\widetilde{a}_n(z)} = p(z,\varphi) \in \mathbb{R}.$$

Так как для α_0^k, β_0^k выполнены условия (17.6), то из леммы 17.3 следует

$$\frac{1}{M} \leqslant J \leqslant M, \quad M = M(M_0, M_1) = \mathrm{const}. \tag{17.23}$$

Если $\widetilde{a}_n(z) = 0$, то $J = 1$, т. е. неравенство (17.23), очевидно, тоже верно. Но из (17.23) следует, что

$$|\widetilde{p}_k(z,\varphi)| = \left|\ln\frac{a_0^k(z,-\varphi)}{a_0^k(z,\varphi)}\right| \leqslant M = \mathrm{const}, \quad z \in U_k^3. \tag{17.24}$$

Осталось рассмотреть функцию

$$p_k(z,\varphi) = \frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{a_0^k(z,-\varphi)}{a_0^k(z,\varphi)}, \quad z \in U_k^3, \quad \sin\varphi \neq 0.$$

Из представления (17.5), очевидно, следует, что

$$p_k(z,\varphi) = \frac{(\widetilde{a}_n(\alpha_0^k + i\beta_0^k))'_y - i(\widetilde{c}_2)'_y\sin\varphi}{\widetilde{a}_n(\alpha_0^k + i\beta_0^k) - i\widetilde{c}_2\sin\varphi} - \frac{(\widetilde{a}_n(\alpha_0^k + i\beta_0^k))'_y + i(\widetilde{c}_2)'_y\sin\varphi}{\widetilde{a}_n(\alpha_0^k + i\beta_0^k) + i\widetilde{c}_2\sin\varphi},$$

$\widetilde{a}_n = \widetilde{a}_n(z)$, $\alpha_0^k = \alpha_0^k(z,\varphi)$, $\beta_0^k = \beta_0^k(z,\varphi)$, $\widetilde{c}_2 = \widetilde{c}_2(z)$, $z = (x,y)$. Приведя дроби к общему знаменателю, получим

$$p_k(z,\varphi) = \frac{2i(\widetilde{c}_2\sin\varphi(\widetilde{a}_n(\alpha_0^k + i\beta_0^k))'_y - \widetilde{a}_n(\alpha_0^k + i\beta_0^k)(\widetilde{c}_2)'_y\sin\varphi)}{(\widetilde{a}_n)^2(\alpha_0^k + i\beta_0^k)^2 + \widetilde{c}_2^2\sin^2\varphi}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p_k(z,\varphi)|\,dy \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{(\alpha_0^k + i\beta_0^k)\widetilde{c}_2\sin\varphi(\widetilde{a}_n)'_y}{(\widetilde{a}_n)^2(\alpha_0^k + i\beta_0^k)^2 + \widetilde{c}_2^2\sin^2\varphi}\right|dy +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\widetilde{a}_n(\alpha_0^k + i\beta_0^k)'_y\widetilde{c}_2\sin\varphi}{(\widetilde{a}_n)^2(\alpha_0^k + i\beta_0^k)^2 + \widetilde{c}_2^2\sin^2\varphi}\right|dy +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\widetilde{a}_n(\alpha_0^k+i\beta_0^k)(\widetilde{c}_2)'_y\sin\varphi}{(\widetilde{a}_n)^2(\alpha_0^k+i\beta_0^k)^2+\widetilde{c}_2^2\sin^2\varphi}\right|dy = I_1+I_2+I_3.$$

Рассмотрим интеграл I_3. Используя (17.6) и (17.7), получим

$$J_3=\left|\frac{\widetilde{a}_n(\alpha_0^k+i\beta_0^k)(\widetilde{c}_2)'_y\sin\varphi}{(\widetilde{a}_n)^2(\alpha_0^k+i\beta_0^k)^2+\widetilde{c}_2^2\sin^2\varphi}\right|\leqslant\frac{M_1}{M_2/2}\left|\frac{\widetilde{a}_n(\alpha_0^k+i\beta_0^k)\widetilde{c}_2\sin\varphi}{(\widetilde{a}_n)^2(\alpha_0^k+i\beta_0^k)^2+\widetilde{c}_2^2\sin^2\varphi}\right|.$$

Применяя к J_3 лемму 17.5 с $b=\widetilde{c}_2\sin\varphi$, $a_0=\widetilde{a}_n$, $\alpha+i\beta=\alpha_0^k+i\beta_0^k$, находим

$$J_3\leqslant\frac{2M_1}{M_2}\,\frac{M_1}{2M_0}=M.$$

Откуда

$$I_3=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}J_3\,dy\leqslant 2M=\text{const}<\infty. \tag{17.25}$$

Аналогично из леммы 17.5 с учетом (17.6) и, очевидно, вытекающего из (17.6) условия $|\alpha_0^k+i\beta_0^k|\geqslant|\alpha_0^k|\geqslant M_0>0$ следует, что

$$I_2\leqslant\frac{M_1}{\pi M_0}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\widetilde{a}_n(\alpha_0^k+i\beta_0^k)\widetilde{c}_2\sin\varphi}{(\widetilde{a}_n)^2(\alpha_0^k+i\beta_0^k)^2+\widetilde{c}_2^2\sin^2\varphi}\right|dy\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M_1^2}{2M_0^2}\cdot\frac{2\pi}{\pi}=\text{const}<\infty. \tag{17.26}$$

Осталось оценить интеграл I_1. Отметим, что, если $|\widetilde{a}_n(z)|\geqslant\varepsilon_0$, то из (17.6) с помощью леммы 17.5, получим

$$J_1=\left|\frac{(\alpha_0^k+i\beta_0^k)\widetilde{c}_2\sin\varphi(\widetilde{a}_n)'_y}{(\widetilde{a}_n)^2(\alpha_0^k+i\beta_0^k)^2+\widetilde{c}_2^2\sin^2\varphi}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M_1}{\varepsilon_0}\left|\frac{(\alpha_0^k+i\beta_0^k)\widetilde{c}_2\sin\varphi\,\widetilde{a}_n}{(\widetilde{a}_n)^2(\alpha_0^k+i\beta_0^k)^2+\widetilde{c}_2^2\sin^2\varphi}\right|\leqslant\frac{M_1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{M_1}{2M_0}=M_3.$$

Из (17.27) и определения $L^2(x,\varepsilon_0)$ (17.3) сразу следует, что, если при данном x $L^2(x,\varepsilon_0)=\emptyset$, т. е. $|\widetilde{a}_n(x,y)|\geqslant\varepsilon_0$, $(x,y)\in L^2(x)$, то

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}J_1\,dy\leqslant 2M_3=\text{const}<\infty. \tag{17.27}$$

Если же $L^2(x,\varepsilon_0)\neq\emptyset$, то, используя условие (ii), представим

$$I_1=\frac{1}{\pi}\Bigg[\int\limits_0^{\alpha_1(x)}\ldots dy+\sum_{j=1}^{j_0(x)}\int\limits_{\alpha_j(x)}^{\beta_j(x)}\ldots dy+\sum_{j=1}^{j_0(x)-1}\int\limits_{\beta_j(x)}^{\alpha_{j+1}(x)}\ldots dy+\\
+\int\limits_{\beta_{j_0(x)}(x)}^{2\pi}\ldots dy\Bigg]=I_{11}+I_{12}+I_{13}+I_{14}.$$

Опять из (17.27) и определения $L^2(x,\varepsilon_0)$ (17.3) находим

$$I_{11}+I_{13}+I_{14}\leqslant 2M_3. \tag{17.28}$$

Далее, из условия (17.6) и леммы 17.6 имеем

$$\frac{1}{|(\widetilde{a}_n)^2(\alpha_0^k+i\beta_0^k)^2+\widetilde{c}_2^2\sin^2\varphi|}\leqslant\frac{M(M_0,M_1)}{\widetilde{a}_n^2+\widetilde{c}_2^2\sin^2\varphi}. \tag{17.29}$$

Тогда, используя условия (17.6) и (17.4) из (iii), а также и лемму 17.7, получим

$$I_{12}^j=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha_j(x)}^{\beta_j(x)}\left|\frac{(\widetilde{a}_n)'_yC_2\sin\varphi(\alpha_0^k+i\beta_0^k)}{(\widetilde{a}_n)^2(\alpha_0^k+i\beta_0^k)^2+\widetilde{c}_2^2\sin^2\varphi}\right|dy\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2M_1^2M(M_0,M_1)|\sin\varphi|}{\pi}\int\limits_{\alpha_j(x)}^{\beta_j(x)}\frac{|(\widetilde{a}_n)'_y|}{\widetilde{a}_n^2+(M_2/2)^2\sin^2\varphi}\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2M_1^2M(M_0,M_1)}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{M_2}=M_4,$$

откуда с учетом (ii)

$$I_{12}=\sum_{j=1}^{j_0(x)}I_{12}^j\leqslant M_4j_0(x)\leqslant M_4j_0.$$

Итак, используя (17.29), приходим к неравенству

$$I_1=I_{11}+I_{12}+I_{13}+I_{14}\leqslant 2M_3+M_4j_0=\mathrm{const}<\infty$$

в случае $L^2(x,\varepsilon_0)\neq\emptyset$. С помощью неравенств (17.28) при $L^2(x,\varepsilon_0)=\emptyset$ и (17.25), (17.26), получим окончательно

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|p_k(z,\varphi)|\,dy\leqslant I_1+I_2+I_3\leqslant\widetilde{\beta}_0=\mathrm{const}. \tag{17.30}$$

Неравенства (17.31) и (17.24) означают, что для символа $a_0^k(z,\varphi)$ вида (17.21) выполнено условие (17.2), т. е. свойство (11.4) § 11. Теорема доказана.

Из теоремы 17.1 следует, что для оператора задачи с наклонной производной $A = \widetilde{A} + K$ можно применить результаты § 14 (теоремы 14.1, 14.2). При этом требуется найти локальные индексы $\varkappa_k = \varkappa_k(\widetilde{A})$.

§ 18. Вычисление локальных индексов. Разрешимость задачи

Вычислим локальные индексы в терминах векторного поля $b(w)$. Для простоты пусть окрестности локальных областей вырождения V_k^3 удовлетворяют условию (13.17) § 13, т. е.

$$\mu_k^{-1}(V_k^3) = U_k^3 \subset \{z \mid x \in [0,2\pi],\ y \in [\alpha_k,\beta_k],\ 0 < \alpha_k < \beta_k < 2\pi\}. \tag{18.1}$$

Обратимся вновь к кривым

$$L^2(x) = \{z = (x,y) \in T \mid y \in [0,2\pi]\}.$$

Если существует такое $x \in [0,2\pi]$, что $L^2(x) \cap U_k = \emptyset$, то, как отмечалось при определении локального индекса (см. § 11), $\varkappa_k = 0$. Пусть

$$\forall\, x \in [0,2\pi] \quad L^2(x) \cap U_k \neq \emptyset. \tag{18.2}$$

Положим

$$\alpha_-(x) = \inf_{(x,y)\in L^2(x)\cap U_k} y, \qquad \alpha_+(x) = \sup_{(x,y)\in L^2(x)\cap U_k} y.$$

Из (18.1) следует, что $0 < \alpha_k \leqslant \alpha_-(x) \leqslant \alpha_+(x) \leqslant \beta_k < 2\pi$. Пусть

$$\widetilde{U}_k^{\pm} = \{\, z = (x,y) \in U_k^3 \mid \pm y > \pm\alpha_{\pm}(x)\,\}.$$

$\widetilde{U}_k^{\pm}$ — связные области в торе T, в которых $\widetilde{a}_n(z) \neq 0$ ($\widetilde{U}_k^{-}$ расположено «ниже» по y области вырождения U_k, а $\widetilde{U}_k^{+}$ — «выше»). Тогда в $\widetilde{U}_k^{\pm}$ функция $\widetilde{a}_n(z)$ имеет фиксированный знак. Пусть

$$\widetilde{a}_{\pm} = \operatorname{sgn}\widetilde{a}_n(z), \qquad z \in \widetilde{U}_k^{\pm}, \qquad \operatorname{sgn} t = \begin{cases} +1, & t > 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Далее, из условия (17.7) следует, что функция $\widetilde{c}_2(z)$ сохраняет постоянный знак во всей области U_k^3. Пусть $c = \operatorname{sgn}\widetilde{c}_2(z)$, $z \in U_k^3$.

Теорема 18.1. *Если не выполнено условие* (18.2) *или при выполнении* (18.2) $\widetilde{a}_+ = \widetilde{a}_-$ (*т. е. знаки* $\widetilde{a}_n(z)$ *в* $\widetilde{U}_k^{\pm}$ *совпадают*), *то локальный индекс* $\varkappa_k = 0$. *Если же выполнено* (18.2) *и* $\widetilde{a}_+ = -\widetilde{a}_-$, *то* $\varkappa_k = 1$ *при* $c = \widetilde{a}_+$, $\varkappa_k = -1$ *при* $c = \widetilde{a}_-$.

Доказательство. Следует рассмотреть только случай, когда условие (18.2) выполнено. Зафиксируем произвольно значение $x \in [0,2\pi]$

и возьмем точки $z_{1,2} = (x, y_{1,2})$, $\widetilde{z}_{1,2} = (x, \widetilde{y}_{1,2})$ такие, что $z_{1,2}, \widetilde{z}_{1,2} \in U_k^3$ и $y_1 < \widetilde{y}_1 < \alpha_-(x)$, $y_2 > \widetilde{y}_2 > \alpha_+(x)$. Для вычисления индекса $\varkappa_k$ необходимо соединить точки $(z_{1,2}, 0) \in \widetilde{T}$ кривыми

$$L^{\pm} = \{\, (z, \varphi^{\pm}(z)) \mid \pm \sin \varphi^{\pm}(z) > 0 \text{ при } z \in U_k \,\}$$

и найти приращение аргумента символа $a_0^k(z, \varphi)$ вида (17.21) вдоль кривой $L = L^- - L^+$ (см. § 11).

Введем функции $\varphi_{1,2}(y) = \pi(y - y_{1,2})/(2(\widetilde{y}_{1,2} - y_{1,2}))$, т. е. $\varphi_{1,2}(y)$ — непрерывные функции такие, что $\varphi_{1,2}(y_{1,2}) = 0$, $\varphi_{1,2}(\widetilde{y}_{1,2}) = \pi/2$,

$$0 \leqslant \varphi_1(y) \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ при } y \in [y_1, \widetilde{y}_1], \quad 0 \leqslant \varphi_2(y) \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ при } y \in [\widetilde{y}_2, y_2].$$

Пусть

$$\varphi^{\pm}(z) = \varphi^{\pm}(x, y) = \begin{cases} \pm\varphi_1(y), & y \in [y_1, \widetilde{y}_1], \\ \pm\pi/2, & y \in [\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2], \\ \pm\varphi_2(y), & y \in [\widetilde{y}_2, y_2]. \end{cases}$$

Очевидно, $\varphi^{\pm}(z)$ — непрерывные функции, $\pm \sin \varphi^{\pm}(z) \geqslant 0$, $\varphi^{\pm}(z_{1,2}) = 0$. Кроме того, по определению $\alpha_{\pm}(x)$ имеем, что, если $z = (x, y) \in U_k$, то $\alpha_-(x) \leqslant y \leqslant \alpha_+(x)$ и, с учетом неравенства $\widetilde{y}_1 < \alpha_-(x) \leqslant \alpha_+(x) < \widetilde{y}_2$ получим $\varphi^{\pm}(z) = \pm\pi/2$, т. е. $\pm \sin \varphi^{\pm}(z) = 1 > 0$ при $z \in U_k$. Итак, в качестве кривых $L^{\pm}$ можно взять $L^{\pm} = \{\, (z, \varphi^{\pm}(z) \,\}$.

Из вида $a_0^k(z, \varphi)$ (17.5) следует, что

$$\operatorname{Re} a_0^k(z, \varphi^{\pm}(z)) = \widetilde{a}_n(z) \alpha_0^k(z, \varphi^{\pm}(z)),$$

$$\operatorname{Im} a_0^k(z, \varphi^{\pm}(z)) = \widetilde{c}_2(z) \sin \varphi^{\pm}(z) + \widetilde{a}_n(z) \beta_0^k(z, \varphi^{\pm}(z)).$$

Отсюда, во-первых, так как $\alpha_0^k > 0$ (17.6), то

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Re} a_0^k(z, \varphi^{\pm}(z)) = \operatorname{sgn} \widetilde{a}_n(z),$$

во-вторых, при $y \in [\alpha_-(x), \alpha_+(x)] \subset [\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2]$ имеем $\sin \varphi^{\pm}(z) = \sin(\pm\pi/2) = \pm 1$, т. е.

$$\operatorname{Im} a_0^k(z, \varphi^{\pm}(z)) = \pm \widetilde{c}_2(z) + \widetilde{a}_n(z) \beta_0^k(z, \varphi^{\pm}(z)),$$

что с учетом условия (17.8) позволяет сделать вывод, что $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} a_0^k(z, \varphi^{\pm}(z)) = \pm \operatorname{sgn} \widetilde{c}_2(z)$. Итак,

$$\begin{cases} \operatorname{sgn} \operatorname{Re} a_0^k(z, \varphi^{\pm}(z)) = \widetilde{a}_-, & y \in [y_1, \alpha_-(x)), \\ \operatorname{sgn} \operatorname{Re} a_0^k(z, \varphi^{\pm}(z)) = \widetilde{a}_+, & y \in (\alpha_+(x), y_2], \\ \operatorname{sgn} \operatorname{Im} a_0^k(z, \varphi^{\pm}(z)) = \pm c, & y \in [\alpha_-(x), \alpha_+(x)]. \end{cases} \tag{18.3}$$

Начнем доказательство формул для локальных индексов со случая, когда $\widetilde{a}_+ = \widetilde{a}_-$, т. е. $\widetilde{a}_n(z)$ имеет одинаковый знак в областях $\widetilde{U}_k^{\pm}$. Пусть, скажем, $\widetilde{a}_+ = \widetilde{a}_- = 1$ и $c = 1$, т. е. $\widetilde{c}_2(z) > 0$ при $z \in U_k^3$. Обход кривой $L = L^- - L^+$ начнем с точки $(z_1, 0)$. Из формул (18.3) следует, что при движении точки (z, φ) по кривой L^- значение $a_0^k(z, \varphi)$ будет располагаться в правой полуплоскости ($\mathrm{Re}\, a_0^k > 0$), пока $y \in [y_1, \alpha_-(x))$. Затем при $y \in [\alpha_-(x), \alpha_+(x)]$ значение $a_0^k(z, \varphi)$ будет расположено в нижней полуплоскости ($\mathrm{Im}\, a_0^k < 0$). Наконец при $y \in (\alpha_+(x), y_2]$ значение $a_0^k(z, \varphi)$ вновь расположено в правой полуплоскости. При возвращении по кривой L^+ от $(z_2, 0)$ к $(z_1, 0)$ значение $a_0^k(z, \varphi)$ будет располагаться последовательно в правой полуплоскости ($\mathrm{Re}\, a_0^k > 0$ при $y \in (\alpha_+(x), y_2]$), верхней полуплоскости ($\mathrm{Im}\, a_0^k > 0$ при $y \in [\alpha_-(x), \alpha_+(x)]$) и вновь в правой полуплоскости ($\mathrm{Re}\, a_0^k > 0$ при $y \in [y_1, \alpha_-(x))$). Таким образом, при обходе кривой L значение $a_0^k(z, \varphi)$ ни разу не пересекает «отрицательный» вещественный луч $\{\, t \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, t = 0,\ t < 0 \,\}$ и, следовательно, не обходит нуля, т. е.

$$\varkappa_k = \mathrm{ind}\, a_0^k(z, \varphi) \Big|_L = 0.$$

Совершенно аналогично получим нулевой локальный индекс во всех случаях, когда $\widetilde{a}_- = \widetilde{a}_+$ — значение a_0^k при обходе L возвращается к исходному, не пересекая «отрицательного» вещественного луча при $\widetilde{a}_- = \widetilde{a}_+ = 1$ и «положительного» вещественного луча $\{\, t \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, t = 0,\ t > 0 \,\}$ при $\widetilde{a}_- = \widetilde{a}_+ = -1$.

Теперь пусть $\widetilde{a}_- = -1$, $\widetilde{a}_+ = c = +1$. Тогда из (18.1) получим, что при обходе L значение $a_0^k(z, \varphi)$ сначала лежит в левой полуплоскости (по L^- при $y \in [y_1, \alpha_-(x))$), затем оно располагается в нижней полуплоскости (по L^- при $y \in [\alpha_-(x), \alpha_+(x)]$), затем — в правой полуплоскости (по L^- при $y \in (\alpha_+(x), y_2]$ и возвращение по L^+ при $y \in (\alpha_+(x), y_2]$), затем — верхняя полуплоскость (по L^+ при $y \in [\alpha_-(x), \alpha_+(x)]$) и, наконец, снова левая полуплоскость (по L^+ при $y \in [y_1, \alpha_-(x))$). Итак, при обходе L значение a_0^k обходит нуль один раз против часовой стрелки, т. е.

$$\varkappa_k = \mathrm{ind}\, a_0^k \Big|_L = 1.$$

Совершенно аналогично получим, что $\varkappa_k = 1$ при $\widetilde{a}_+ = c = -1, \widetilde{a}_- = -1$, при этом значение a_0^k будет изменяться следующим образом: по L^-: правая полуплоскость — верхняя — левая; назад по L^+: левая — нижняя — правая.

В случае $c = \widetilde{a}_- = -1$, $\widetilde{a}_+ = 1$ аналогичным образом получим, что значение a_0^k при движении точки (z, φ) по L изменяется следующим образом: по L^-: левая полуплоскость — верхняя — правая; назад по L^+: правая — нижняя — левая. Таким образом, значение a_0^k обходит нуль один раз по часовой стрелке, т. е.

$$\varkappa_k = \mathrm{ind}\, a_0^k \Big|_L = -1.$$

Аналогично при $c = \widetilde{a}_- = 1$, $\widetilde{a}_+ = -1$ имеем траекторию правая полуплоскость — нижняя — левая — верхняя — правая, т. е. снова $\varkappa_k = -1$. Теорема доказана.

Теоремы 16.1, 17.1 и 18.1 позволяют применить к задаче с наклонной производной (15.1) теорему 14.2 § 14 и ее следствие. Сформулируем окончательный результат.

Теорема 18.2. *Пусть оператор* $P(y, \partial)$ *вида* (15.2) *удовлетворяет условиям* (15.3) *и* (15.4); *векторное поле* $b(w)$, $l : D \to \mathbb{R}^3$ — *условиям* (15.5) *с* $\gamma > 11/2$, *A1 и* (18.1), *причем* $\delta = (\widetilde{\beta}_0 + 6)/(2\widetilde{\beta}_0 + 13)$, *где* $\widetilde{\beta}_0$ — *константа из условия* (17.2), *зависящая от векторного поля* $b(w)$; $\varkappa_j$, $j = \overline{1, n_0}$ — *локальные индексы для векторного поля* $b(w)$, *вычисляемые с помощью теоремы* 18.1 *и*

$$\varkappa^+ = \sum_{\varkappa_j = 1} \varkappa_j, \quad \varkappa_- = \sum_{\varkappa_j = -1} \varkappa_j, \quad \varkappa = \sum_{j=1}^{n_0} \varkappa_j = \varkappa^+ + \varkappa^- .$$

Тогда для любых целых чисел

$$l \in [\max(0, \varkappa), \varkappa^+], \quad l^* \in [\max(0, -\varkappa), -\varkappa^-],$$

связанных соотношением $(l - l^*) = \varkappa$ *существуют вполне непрерывный оператор* $\widetilde{\alpha} : W_2^s(D^+ \cup D) \to W_2^{s-3/2}(D)$ *и непрерывные операторы*

$$\widetilde{P} : W_2^s(D) \to W_2^{s+3/2-2\delta}(D^+ \cup D);$$

$$\overline{A}_k : W_2^s(L_1) \to W_2^{s+3/2-\delta}(D^+ \cup D),$$

$$A_k : W_2^s(D^+ \cup D) \to W_2^{s+3/2-\delta}(L_1), \quad k = \overline{1, l};$$

$$B_k : W_2^s(L_1) \to W_2^{s-\delta}(D), \quad \overline{B}_k : W_2^s(D) \to W_2^{s-\delta}(L_1), \quad k = \overline{1, l^*};$$

$2\delta + 1/2 \leqslant s < \gamma - 4$ *такие, что задача*

$$\begin{cases} P(y, \partial)u = 0, & y \in D^+, \\ (b(y), \nabla u)\Big|_{y \in D} + \widetilde{\alpha} u = g(y) + \sum\limits_{k=1}^{l^*} B_k \psi_k, & y \in D, \quad g \in W_2^s(D), \\ A_k u = f_k, & k = \overline{1, l}, \end{cases}$$

где $\psi_k \in W_2^{s-\delta}(L_1)$, $k = \overline{1, l^*}$ — *искомые, а* $f_k \in W_2^{s-\delta}(L_1)$, $k = \overline{1, l}$ — *произвольно заданные функции, имеет единственное решение*

$$u(y) = \widetilde{P} g + \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k f_k; \quad \psi_k = \overline{B}_k g, \quad k = \overline{1, l^*}.$$

Доказательство. Отметим, что, так как $\delta < 1$, а $\gamma > 11/2$, то существуют числа s, удовлетворяющие условию $2\delta + 1/2 \geqslant s < \gamma - 4$.

Далее, из теоремы 17.1 следует, что для главной части $\widetilde{A}$ оператора задачи с наклонной производной выполнено условие A0, а из теоремы 18.1 — что локальные индексы $\widetilde{A}$ равны нулю или ± 1. Тогда по следствию из теоремы 14.2 § 14 решение задачи

$$Af + \alpha_1 f = g + \sum_{k=1}^{l^*} B_k \psi_k; \quad A_k^1 f = f_k, \quad k = \overline{1, l}, \tag{18.4}$$

существует, единственно и представляется в виде

$$f = \widetilde{P}^1 g + \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k^1 f_k; \quad \psi_k = \overline{B}_k g, \quad k = \overline{1, l^*}. \tag{18.5}$$

Здесь $A = \widetilde{A} + K$ — оператор задачи с наклонной производной, $\alpha_1 : W_2^s(D) \to W_2^s(D)$ — вполне непрерывен, операторы

$$\widetilde{P}^1 : W_2^s(D) \to W_2^{s-2\delta}(D);$$

$$B_k : W_2^s(L_1) \to W_2^{s-\delta}(D), \quad \overline{B}_k : W_2^s(D) \to W_2^{s-\delta}(L_1), \quad k = \overline{1, l^*};$$

и

$$A_k^1 : W_2^s(D) \to W_2^{s-\delta}(L_1), \quad \overline{A}_k^1 : W_2^s(L_1) \to W_2^{s-\delta}(D), \quad k = \overline{1, l}$$

— непрерывны. Но по теореме 16.1 (а также леммам 15.3, 16.1, 16.2), если $u = Hf = \widetilde{H} A_{0,2} f$, то

$$P(y, \partial) u = 0, \quad y \in D^+; \quad (b(y), \nabla u) \Big|_{y \in D} = Af,$$

причем $H : W_2^s(D) \to W_2^{s+3/2}(D^+ \cup D)$ — непрерывен. Имеем

$$u \Big|_{y \in D} = H_1 f = (E + K_1) A_{0,2} f$$

или

$$A_{0,2} f = u \Big|_{y \in D} + K_0 u, \quad f = (A_{0,1} + K_{0,2}) \left(u \Big|_{y \in D} + K_0 u \right) = H_2 u,$$

$H_2 : W_2^s(D^+ \cup D) \to W_2^{s-3/2}(D)$ — непрерывен. Тогда задача (18.4) принимает форму

$$P(y, \partial) u = 0, \quad y \in D^+,$$

$$Af + \alpha_1 H_2 u = (b(y), \nabla u) \Big|_{u \in D} + \widetilde{\alpha} u = g + \sum_{k=1}^{l^*} B_k \psi_k,$$

$$A_k u = A_k^1 H_2 u = f_k, \quad k = \overline{1, l}.$$

Здесь $\widetilde{\alpha} = \alpha_1 H_2 : W_2^s(D^+ \cup D) \to W_2^{s-3/2}(D)$ — вполне непрерывен,

$$A_k = A_k^1 H_2 : W_2^s(D^+ \cup D) \to W_2^{s-3/2-\delta}(L_1), \quad k = \overline{1, l}$$

— непрерывны. При этом решение (18.5) имеет вид

$$\psi_k = \overline{B}_k g, \quad k = \overline{1, l^*}, \quad u = H(\widetilde{P}^1 g + \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k^1 f_k) = \widetilde{P} g + \sum_{k=1}^{l} \overline{A}_k f_k,$$

где

$$\overline{A}_k = H\overline{A}_k^1 : W_2^s(L_1) \to W_2^{s+3/2-\delta}(D^+ \cup D), \quad k = \overline{1, l};$$

$$\widetilde{P} = H\widetilde{P}^1 : W_2^s(D) \to W_2^{s+3/2-2\delta}(D^+ \cup D)$$

— непрерывны. Теорема доказана.

Отметим, что к задаче (15.1), т. е. к уравнению $Af = g$, где A — оператор задачи с наклонной производной, можно применить и теорему 12.2 § 12 о разпешимости уравнения $Af = g$ для пространства функций f, равных нулю в окрестности области вырождения V. Итак, пусть $\tau(w) = \tau^2(w)$ — срезающая функция из § 12, т. е.

$$\tau(w) \in C_0^\infty(V^3), \quad \tau(w) \equiv 1 \text{ при } w \in V^2,$$

где $V^2 \supset V$ — окрестность области вырождения V, компактно вложенная в

$$V^3 = \bigcup_{k=1}^{n_0} V_k^3;$$

$$W_2^s(D^+ \cup D, \tau) = \{\, u \in W_2^s(D^+ \cup D) \mid \tau(w) u(w) \equiv 0, w \in D \,\};$$

$$X = \Big\{ g(w) = (b(y), \nabla u) \Big|_{y=w\in D} \quad |P(y, \partial) u =$$

$$= 0, y \in D^+;\ u \in W_2^s(D^+ \cup D, \tau) \Big\}.$$

Для простоты будем считать, что векторное поле $b(w) \in C^\infty(D)$.

Теорема 18.3. *Пусть $b(w) \in C^\infty(D)$ и удовлетворяет условию A1, оператор $P(y, \partial)$ вида (15.2) удовлетворяет условиям (15.3) и (15.4). Тогда:*

1. *X — замкнутое подпространство $W_2^s(D)$, $s \geqslant 1/2$.*

2. *Пространство решений однородной ($g \equiv 0$) задачи (15.1), принадлежащих $W_2^s(D^+ \cup D, \tau)$, $s \geqslant 2$ — конечномерно.*

3. *Существует непрерывный оператор $B : W_2^s(D) \to W_2^{s+3/2}(D^+ \cup \cup D)$, $s \geqslant 1/2$ такой, что $B : X \to W_2^{s+3/2}(D^+ \cup D, \tau)$, причем*

$u = Bg \in W_2^{s+3/2}(D^+ \cup D, \tau)$ — *частное решение задачи* (15.1), *т. е.*

$$P(y, \partial)Bg = 0, \quad y \in D^+; \qquad (b(y), \nabla Bg)\Bigg|_{y \in D} = g(y).$$

Доказательство. В силу леммы 16.1 задача (15.1) эквивалентна уравнению

$$g = A_1 f_1 = (a_n(w)A_0 + C_0 + K_2)f_1,$$

причем из условия $b(w) \in C^\infty(D)$ следует, что A_1 — псевдодифференциальный оператор первого порядка в смысле определения [43]. Тогда из теоремы об умножении символов [43, с. 102] следует, что $A = A_{0,2}A_1$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с главным символом $a(w, \varphi(\xi))$ вида (16.11). Далее, функция f_1 и искомое решение u связаны соотношением

$$f_1(w) = u\Bigg|_{y=w \in D} + K_0 u$$

(см. доказательство леммы 16.1). Отсюда следует, что уравнение $A_1 f_1 = g$ эквивалентно уравнению

$$g_1 = A_{0,2}g = A_{0,2}A_1 f_1 = A\Bigg(u\Bigg|_{y \in D}\Bigg) + Ku,$$

K — конечномерный оператор. Теперь утверждения теоремы непосредственно следуют из теоремы 12.2 § 12.

Список литературы

1. *Gunning R. C.* Lectures on Riemann surfaces: Jacobi varieties // Princeton Math. Notes. 1972. V. 12.
2. *Monakhov V. N., Verkhovod D. B., Semenko E. V.* Boundary-Value Problemmas for Conjugation of Quasi-Analytic Functions on Compact Riemann Surfaces // Boundary Value and Initial Value Problemmas in Complex Analysis: Studies in Complex Analysis and its Applications to Partial Differential Equations 1. Pitman Research Notes in Mathematics Series 256, London, 1991. P. 48–85.
3. *Rodin J. L.* Generalized analitic functions on Riemann surfaces // Lect. Notes Math. 1987. V. 1288. P. 1–128.
4. *Альфорс Л., Берс Л.* Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961.
5. *Бикчантаев И. А.* Дифференциальные краевые задачи для эллиптических систем первого порядка на римановых поверхностях // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. ь 10. С. 1725–1735.
6. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959.
7. *Верховод Д. Б.* Обобщенный обратный оператор задачи сопряжения аналитических функций на компактных римановых поверхностях и его применение // В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1988. Вып. 85. С. 22–33.
8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. 640 с.
9. *Говоров В. Н.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. — М.: Наука, 1986. 238 с.
10. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфых функций. — М.: Наука, 1970. 591 с.
11. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. — М.: Наука, 1968. 646 с.
12. *Дыбин В. Б.* Корректные задачи для сингулярных интегральных уравнений. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1988.
13. *Егоров Ю. В., Кондратьев В. А.* О задаче с косой производной // Мат. сб. 1969. Т. 78. № 1. С. 148–176.
14. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровых классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. № 1. С. 113–179.
15. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. 750 с.
16. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981. 344 с.

17. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.

18. *Литвинчук Г.С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. — М.: Наука, 1977. 448 с.

19. *Монахов В.Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 422 с.

20. *Монахов В.Н., Семенко Е.В.* О корректных постановках краевых задач сопряжения с бесконечным индексом для квазианалитических функций // сб.: Некорректные задачи математической физики и анализа. ВЦ Сиб. отд-ния АН СССР. — Новосибирск: Наука, 1984. С. 91–101.

21. *Монахов В.Н., Селезнев В.А.* О некоторых свойствах квазиконформных динамических систем в целом // ДАН. 1992. Т. 324, № 1. С. 26–29.

22. *Монахов В.Н., Семенко Е.В.* Сингулярные интегральные уравнения с бесконечным индексом в пространствах L_p // В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1984. Вып. 65. С. 148–151.

23. *Монахов В.Н., Семенко Е.В.* Классы корректности краевых задач сопряжения аналитических функций с бесконечным индексом // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 1. С. 27–30.

24. *Монахов В.Н., Семенко Е.В.* Краевые задачи с бесконечным индексом в пространствах Харди // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 3. С. 544–547.

25. *Монахов В.Н., Семенко Е.В.* Корректность краевых задач сопряжения аналитических функций на компактной римановой поверхности // В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1987. Вып. 83. С. 99–113.

26. *Монахов В.Н., Семенко Е.В.* Краевые задачи с бесконечным индексом на римановых поверхностях // В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1988. Вып. 85. С. 74–83.

27. *Монахов В.Н., Верховод Д.Б., Семенко Е.В.* Краевые задачи для квазианалитических функций на компактных римановых поверхностях. — Новосибирск: Изд. ИГ СОАН СССР, 1990. 85 с.

28. *Монахов В.Н., Семенко Е.В.* Краевые задачи на компактных римановых поверхностях. — Новосибирск: Изд. СО РАН, 1996. 150 с.

29. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1969. 510 с.

30. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. 475 с.

31. *Пламеневский Б.А.* Алгебры псевдодифференциальных операторов. — М.: Наука, 1986. 254 с.

32. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. — М.: Мир, 1979. 493 с.

33. *Семенко Е. В.* Разложение Гахова псевдодифференциальных операторов на торе. Препринт. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1995. 55 с.
34. *Семенко Е. В.* Разложение Гахова симметричных операторов с вырождающимся символом. Препринт. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1995. 58 с.
35. *Семенко Е. В.* Разложение Гахова псевдодифференциальных операторов с вырождающимся символом // Сибирский математический журнал. 1997. Т. 38. № 6. С. 1362–1373.
36. *Семенко Е. В.* О корректной постановке вырождающейся задачи с наклонной производной // Динамика сплошной среды. 1998. Вып. 113. С. 135–138.
37. *Семенко Е. В.* Разложение Гахова вырождающихся псевдодифференциальных операторов // Доклады РАН. 1998. Т. 359. № 5. С. 597–599.
38. *Семенко Е. В.* Гладкость решений уравнений с вырождающимся псевдодифференциальным оператором // Доклады РАН. 1999. Т. 365. № 2. С. 167–169.
39. *Семенко Е. В.* Вырождающаяся задача с косой производной на римановой поверхности // Динамика сплошной среды. 2001. Вып. 118. С. 70–74.
40. *Симоненко И. Б.* О многомерных дискретных свертках // Матем. исследования, Кишинев, 1968. Т. 3. № 1. С. 107–122.
41. *Форстер О.* Римановы поверхности. — М.: Мир, 1980.
42. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1: Теория распределений и анализ Фурье. — М.: Мир, 1986. 462 с.
43. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3: Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1987. 694 с.
44. *Чибрикова Л. И.* Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях // Итоги науки и техники. Сер. математический анализ. 1980. Т. 18.
45. *Шурыгин В. М.* Аэродинамика тел со струями. — М.: Машиностроение, 1977.

Научное издание

МОНАХОВ В.Н.
СЕМЕНКО Е.В.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Редактор *Е.С. Артоболевская*
Оригинал-макет: *В.В. Худяков*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 08.04.03.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 26. Уч.-изд. л. 28,6. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука».
121099 Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0049-1

9 785922 100496