Банди Брайан

ЭКОНОМИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ИНЖЕНЕРЛІК ЕСЕПТЕРДІ ТИІМДІ ЕСЕПТЕУДІҢ НЕГІЗІ МЕН ӘДІСТЕМЕЛЕРІ

Банди Брайаннің екі кітабін ағылшын тілінен орыс тіліне О.В.Шихеева аударған «Основы линейного программирования» және «Методы оптимизации» екі кітәбінің қазақша аудармасы

Абайылданов К.Н., Абайылданов Б.К., Абайылданова Л.К.

АЛМАТЫ , 2015

ӘОЖ 519.7 (07)
КБЖ 22.18я7
А13

Абайылданов К.Н.
А13 Экономикалық және инженерлік есептерді
тиімді есептеудің негізі мен әдістемелері: оқулық/
К.Н.Абайылданов, Б.К.Абайылданов, Л.К.Абайылданова - АЛМАТЫ - 2015. – 228 б.

Кітәп екі бөлімнен құрастырылған:
бірінші бөлімі - «Основы линейного программирования»;
екінші бөлімі - «Методы оптимизации».

Ағылшын авторы бірінші кітәпта сызықты программалудың тәсілдерін және негізгі нұсқаларын сипаттайды. Симплекс-тәсілінің негізін, компьютірді қолданып іске асыруы қарастырылған, тәсілдің сезгіштігін, есепті тағайындауды, тасмалдау есебі, егізделген симплекс-тәсілі және т.б.-да әдістер көрсетілген.

Паскаль (Дельфи) мен Фортран алгоритімдық тілдеріне программаларды ауыстырудың еш қиындығы болмайды, егерде, әр түрлі есептердің алгоритм шешімі сызықтық программалауда Бейсик алгоритімдық тілінде орындалса.

Сызықтық программалауға қатысты экономикалық және инженерлік есептерді есептеп қолданатын оқырмандарға арналған.

Екінші кітәпта ағылшын авторы үздіксіз дифференциалды функцияның шектеулі және шектеусіз оптимизациялық алгоритмнің теориясы мен нұсқауын сипаттаған.

Келтірілген алгоритімдердің есептеп орындалуы Бейсик алгоритмдық тілінде программасы корсетіліп орындалуы іске асырылуы көрсетілген.

Әр түрлі есептердің шешімдерін оптимизациялау тәсілін қолдануда, бірнеше мысалдар және жатығулар ұсынылған.

Есептердің оптималды шешіміне қатысты есептеп ізденудегі алгоритмдері көрсетіліп және экономикалық-инженерлік есепті есептейтін оқырмандардың қолдануына арналған.

ӘОЖ 519.7 (07)
КБЖ 22.18я7

ISBN 978-601-228-819-3
АЛМАТЫ «Әлішер», 2015

Жеңістің 70 жылдық ардагерлер
мерей тойына арналған

I - Бөлім

СЫЗЫҚТЫҚ ПРОГРАММАЛАУДЫҢ НЕГІЗІ

Алғы сөз

Сызықтық программалау, қырық жылдан аса тарихы бар операцияларды зерттеудің бөлімі болып табылады. Есептеуші техниканың дамуы, осы математика саласын зерттеулерге елеулі түрткі болды. Сызықтық программалау есептерін шешетін алгоритмдерінің ұлғаю қатары, алғашқы үлкен есептеуіш машиналардың (БЭСМ) дамуына ерекше әсер етті.

Сызықтық программалау бойынша оқулықтардың көбісі кеңес одағы кезінің 60-70-ші жылдарында шығарылған. Осы кезден бері (теориялық және қолданбалы саласы) талданып, зерттеліп жалғасыпележатыр. Дегенмен, сызықтық программалауды қолдануда, соңғы алгоритмдық тілдерді, меншікті есептеуіш машиналарды (компьютерлерді) қосып пайдалануына арналған оқулық құрал, іс жүзінде көп емес. Оқырмандар, осы кемшілікті толықтырады деген мақсатпен оқулық құрал ұсынылады.

Оқулық құрал, сызықтық программалау пәнімен таныс емес оқырмандарға түсіну үшін, алгоритімдық Бейсик тілі және матрицалардың теориясымен таныс болу жеткілікті.

Оқулық құралдың ерекшелігі және айырмашылығы қолданбалы ретінде жазылғаны. Оқулық құрал, міндетті түрде математикалық аппаратты толық ерекшеліктерін суреттейді және оның сипаттамасын программаның алгаритмдық Бейсик тілінде түсініктемсін көрсетіп, шешімін табу үшін қажет әдісті ұсынады. Оқырмандарға жазылған әдістемелерді ұғып, қолдану үшін ыңғайлы.

Кейінгі компьютерлердің негізгі алгоритмдық тілдердің ретінде бейсик, визиал бесик, визиал бесик скрип болғандықтан, оқулықтағы программалардың қызығушылық пен таралуының мүмкіндігін туғызады.

Көптеген есептерді есептеп шығару, тақырыпты түсінуді ұлғайтады. Оқулық құралдың әр бөліміндегі көрсетілген жаттығулар, өзіндік сынау жобалары, сызықты программалаудағы есептерін есептеуге тәжірибелік дағдыға үйретеді. Әр түрлі компьютерде есептелген нәтиже, кітәпта жазылған программаның нәтижесінен айырмашылығы болуы мүмкін, ол компьютерде колданатын программаларға және копьютердың дәрежелігіне байланысты болуы.

Қосымша әдибиеттер тізімі:

1. Юдин Д. Б., Гольдштейн Е. Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. - М.: Наука, 1969. - 424 с.
2. Еремин И. И., Астафьев Н. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. - М.: Наука, 1976. — 191 с.
3. Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. А. Численные методы линейного программирования/ Под ред. Л. В. Канторовича. - М.: Наука, 1977. - 367 с.
4. Раскин Л. Г., Кириченко И. О. Многоиндексные задачи линейного программирования. Теория, методы, приложения. - М.: Радио и связь, 1982. - 239 с.

<u>1 - тарау</u>
Негізгі түсініктемелер

§ I.1.1. Кіріспе

Операцияларды зерттеу саласының біраз есептерін шығаруға сызықтық программалау әдістері өте қолайлы болып өз орнын алды. “*Программалау*” деген сөзді біз пландау (болжау) деп түсінеміз және осы мағана осы пәндегі қарастырылатын есептердің мазмұнына сәйкес болады. Екінші Отан соғысы кезінде, соғыс операциясын жүргізуінің оптималдық стратегиясын іздеу үшін “Ойын теориясы” бір зерттеу пән ретінде пайда болды. Ол теорияны қолдану сызықтық программалау пәнін дамытуға әсер етті. Содан бастап осы саланың кеңінен қолдануы өндіріс, сауда, басқару жүйелерінде, мемлекет көлемінде, жергілікті жағдайда арта берді. Қарастырылатын әдістермен шектелген ресурстарды тиімді қолданып, қарастырылатын есептердің біразын шығаруымызға болады.

<u>*1 Мысал.*</u>

Фирма екі ***A*** және ***B*** түрлі тақтайдан жинақталатын кітәптарға арналған ілетін полка өндіреді деп есептейік. Осыны өндіру шикі зат (жақсы сапалы тақтай) пен және тақтайды машинада өңдеу уақыты мен шектеледі. Заттың ***A*** түрі $\boldsymbol{3м^2}$ тақтайды, ал ***B*** түрі - $\boldsymbol{4м^2}$ қажет ететін болсын. Бір аптада фирманы қамтамасыз ететіндер $\boldsymbol{1700м^2}$ тақтай жеткізіп алатыны белгілі болсын. ***A*** түрлі затты жасау үшін - ***12*** мин машина уақыты, ал ***B*** түрін жасау үшін - ***30*** минут машина уақытының керектігі белгілі болсын. Фирмаға бір аптаға ***160*** сағат машина уақыты бөлінсін.

Егерде бір аптада заттың ***A*** түрінің әкелетін пайдасы - ***2$***, ал әр бір ***B*** түрінің әкелетін пайдасы - ***4$*** болса. Аптасына қанша ***A*** және ***B*** түрлі заттарын шығару фирмаға тиімді (оптималды) ең үлкен прибілде болу үшін?

Есепті математикалық формада жазып келтіруіміз үшін: x_1 -айнымалысы арқылы ***A*** түрлі полканың санын белгілейік, ал x_2 айнымалысы арқылы шығарылатын ***B*** түрлі полкалардың санын белгілейік. Есеп негізінде ең тиімді (оптималды) x_1 және x_2 айнымалыларының бүтін мәнін іздеп табуға арналады. Көзіміздің жететіндігі, фирма апта бойы жұмыс істеп, яғни оның апталық пайдасы ең көп (максималды) болуы қажет. Апталық пайда келесі өрнектен құралады.

$$P = 2x_1 + 4x_2 \qquad \text{(I.1.1)}$$

Сондықтан, фирма максималды апталық пайда табу үшін осы бағытталған функцияның максимумын табуымыз қажет.

Оптимизацияның классикалық теориясы бойынша функция экстремумы, осы функцияның туындысы нольге тең болатын нүктелерде орналасатыны айқын, немесе анықталған облысының шекарасында орналасады. Қарасты есептегі функцияның туындысы жеткіліксіз, неге десеңіз

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 2 \quad \text{және} \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 4 .$$

Және ешқандай x_1, x_2 мәндері арқылы функция туындысы нөлге тең болмайды.

Шынында, P функцияның мәнін ұлғайту үшін, x_1 және x_2 мәндерін ұлғайту қажет. Бірақ (бұл ұлғайтуда проблеманы шешпейді) x_1 және x_2 мәндерін шексіз көбейтуге болмайды, неге десеңіз оларға шектелу шарты қойылған. Ол шектелу шарты шикі зат (тақтай саны) пен және өңдеу машина уақыты мен шектелген.

x_1 және x_2 айнымалары арқылы, заттардың апталық өндіру сандары белгіленгендіктен оның мәндері тіріс сан болалмайды, яғни

$x_1>0, x_2>0$ (I.1.2)

Енді бар тақтайға және өңдеу машинасының уақытына сәйкес шектелу шарттарын келесі теңсіздектер арқылы жазып көрсетеміз.

$3x_1 + 4x_2<=1700$ (тақтайлар үшін)

Машина уақыты үшін бір өлшемге келтірсек болады ***12мин***=0,2 сағат және ***30мин***=0,5 сағат. Сондықтан $0,2x_1+0,5x_2<=160$ оңға көбейтсек

$2x_1+5x_2<=1600$ (машина уақыты үшін)

$3x_1+4x_2<=1700$ (тақтайлар үшін) (I.1.3)

Сөйтіп, есеп мынандай болады:

$P = 2x_1 + 4x_2$ функциясының максимумы болатындай қылып x_1 және x_2 айнымалылар санын табу қажет. Бірақ x_1 және x_2 мәні оның оң мәнді екендігін білдіретін (I.1.2) шартын бұзбай және шектелу (I.1.3) шартын қанағаттандыратындай (бұзбайтындай қылып), сосын олар бүтін сан болуы қажеттілігін ескеріп.

Бұл екі өлшемді сызықтық программалау есебінің қарапайым үлгілі түрі: Бағытталған функция айнымалыларынан түзу сызықтық қатынаста, яғни функция түзу сызықтық функция дейміз және функцияның максимумын іздеуіміз қажет. Айнымалыларға қойылған шектелу шарттарды түзу сызықтық (олар I.1.1-сурете көрсетілген). Олардың теріс мәнді болалмайтындығын көрсететін шектелу (I.1.2) шарттар $x_1,x_2\geq 0$ бізге қарастыруымызға біріниші квадраты білдіреді, яғни оң мәнді квадраты.

Шектелу шекарасы түзу сызықтармен анықталады.

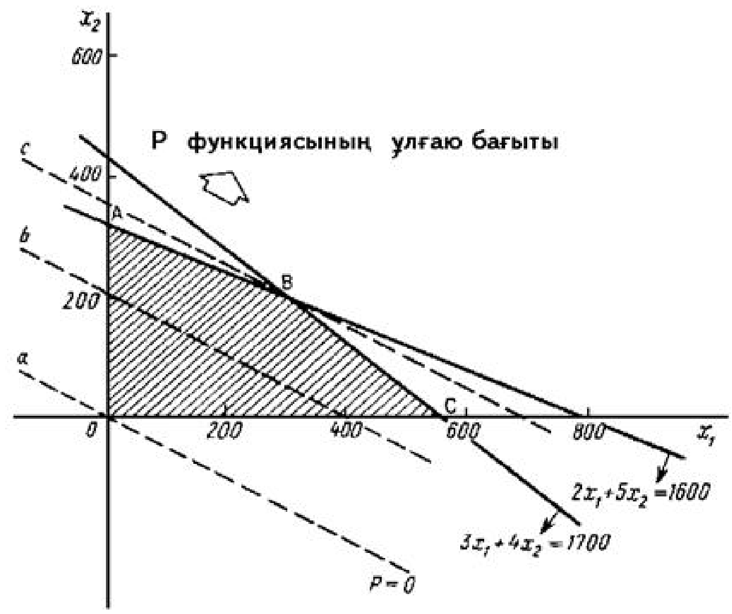
$3x_1 + 4x_2 = 1700$

$2x_1 + 5x_2 = 1600$

I.1.1-сурете шекаралардан көрестілген бағытталған стрелкалар, осы шекараның қай жағында қойылған шарт бұзылмайтындығын білдіреді. Штрихтеніп көрсетілген ***OABC*** облысы, (I.1.2) және (I.1.3) шарттарын қанағаттандыратын (бұзбайтын) нүктелер орналасқан анықталған облыс деп аталады. Бұл облас ішіндегі және осы областың шекарасындағы нүктелердегі бағытталған функция мәндері есептің анықталған шешімдерін хабарлайды. Анықталған шешімдер өте көп болады. Есеп шығарғандағы біздің мақсатымыз осы шешімдердің ішінен ең тиімдісын (іңғайлысын) тауып және сол шешімде Р функциясының максимумы орналасуы қажет.

I.1.1-сурете штрихталған сызықтар арқылы $\mathbf{2x_1+4x_2=0}$, $\mathbf{2x_1+4x_2=800}$ түзу сызықтары $\boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{b}$ деп белгіленіп сызылған. Бұл сызықтар бір-біріне параллель болып және олар ***P*** функциясының бір қалыпты деңгейлерін анықтайды, олардың мәні ***0*** және ***800*** санына тең болады.

P функциясының мәндері деңгейлік сызықтар координаттар басталатын ***0*** нүктеден оң мәнді квадраты қашықтаған сайын ұлғайып өседі.



І.1.1 - сурет.

Шынында да, $\dfrac{\partial p}{\partial x_1}, \dfrac{\partial p}{\partial x_2}$ компонентері бар вектор, яғни $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ компоненті вектор ***P*** функциясының ұлғаю бағытын көрсетеді. Ол вектор штрихталған түзу сызықтарына перпендикуляр болып оң мәнді квадратқа қарай бағытталып жүргізіледі.

P функциясының ең үлкен мәнді деңгейі бар штрихтелген сызық ***C*** сызығы болып табылады. Бұл сызық анықталған (қажетті) облыстың кем дегенде бір ортақ нүктесі болуы қажет. Сурет бойынша ол ***B*** нүктесі. Бұл нүкте де функция мәні ***1400*** тең және оның координаттары $x_1 = 300$, $x_2 = 200$ есептің оптималды шешімін көрсетеді. Бұл сандар екі түзу сызықтың қиылысқан нүктесінде орналасқаннан, келесі системаның шешімі болып табылады:

$3x_1 + 4x_2 = 1700$

$2x_1 + 5x_2 = 1600$

Сондықтан ең үлкен (максимальды) апталық пайда келесіні құрайды:

$2*300 + 4*200 = 1400$

Оптималды шешімде екі шектелу шарттары теңдікке айналғандығы, осы шарттардағы шикі затты (тақтайларды) және белгіленген машина уақытын толық қолданғанымызды білдіреді.

Қарастырылған есеп үш және оданда көп теріс мәнді емес айнымалыларға есептеліп шығарылады. Басқа қосымша шарттарды қарастырып еңгізуімізге болады, мысалы сатып алушының ақшасына байланысты, ол өндіретін зат шегеленетін болса осы шегенің санына байланысы б.с.с. шарттарды. Бұл жағдайда да есептің мазмұны өзгермейді, яғни бір неше теріс мәнді болалмайтын айнымалылардың байланысты түзу сызықты функциясының максимумын тауып шешуіміз қажет. Бірақ айнымалылар, шектелу теңсіздік түрінде берілген шарттарды қанағаттандыру (бұзбауы) қажет.

Сызықтық программалау есебінің жалпы түрінің құрылымы:

n айнымалысынан $x_1, x_2 ..., x_n$ байланысты

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (I.1.4)$$

сызықтық функциясының максимумы (немесе минимумын) іздеп табу.

Бірақ табылған шешім, айнымалылардың теріс мәнді болалмайтындық шартын

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \qquad (I.1.5)$$

және сызықтық **m** шектелу шарттарын

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ..., + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ..., + a_{2n}x_n \leq (=, \geq) b_2, \\ &.. \qquad (I.1.6) \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ..., + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m, \end{aligned}$$

қанағаттандырып бұзбауы қажет.

Шектелу шарттарда әр түрлі ≤ **,** = және ≥ таңбалар кездесуілері мүмкін. Есеп бағытталған функцияның максимумын (минимумын) тауып шешуден құралады. Тұрақты b_i, c_j және a_{ij} сандарының бәріде белгілі деп есептейміз. Осы сандардың тәжірибелік мазмұнын (*1мысалда сияқты*) жиі келтіріп қарастырамыз.

Есептің матрицалық түрін келесі көріністе жазаламыз:

функция максимумын (минимумын) табыңыз:

$$z = C^T x_0 \qquad (I.1.7)$$

мұнда

$$x_0 \geq 0 \qquad (I.1.8)^*$$

$$A_0 x_0 \leq (=, \geq) b \qquad (I.1.9)$$

және $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} - n \times 1$, бағана-векторы

ал

$$c^T = (c_1, c_2, ..., c_n) \; - \; 1\text{x}n \text{ жол - векторы}$$

Мұнда және төменде векторлық теңсіздік ретінде түсінетініміз барлық теңсіздіктердің координаттарына сәйкес орындалуы (автордың ескертуі).

Және $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} - m \times 1$ бағана-векторы

$A_0=(a_{ij})$ - m x n матрицасы

x_0 - векторындегі және A_0 матрицасындағы 0 индексі осылардың бастапқы (алғашқы) мәндері екенін көрсетіп білдіреді. Мұның мазмұны 1.3 тақырыбында түсінікті болады.

§ I.1.2. Екі өлшемді есептерді графикалық шешу.

Соңғы тақырыпта қарастырылған мысалда тәжірибеде сызықтық программалау есебінің қалай пайда болатынын және оны графикалық тәсіл мен шешуді, біз асықпай қарастырып көрсеттік. Енді тағыда жеткілікті қарапайым бір неше есептерді қарастырып сызықтық программалау есебінің жалпы қасиеттерін түсініп (шешім іздеудің қалай өтетінін) есептеу алгоритмының есептердің жалпы шешімін табудың жолына қарай бет бұрайық.

1-Мысал.

Функция максимумын табыңыз:

$Z= -3x_1 \ -4x_2$

Шектелу $x_1, x_2 \geq 0$

$x_1+x_2 \leq 20,$

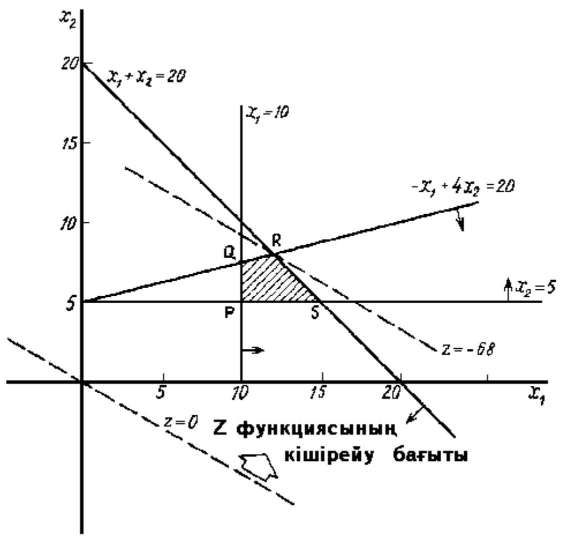
$-x_1+4x_2 \leq 20,$

$x_1 \quad \geq 10,$

$x_2 \geq 5.$ шарттар болған кезде.

I.1.2-суретінде анықталған керекті облыс көрсетілген, ол ***PQRS*** төртбұрышы болады. Соңғы екі шарт айнымалылардың теріс мәнді емес екендігінің шартын күшейте түседі. ***Z*** функциясы келесі вектор бағытында кішірейеді.

$$-\begin{pmatrix} \dfrac{dz}{dx_1} \\ \dfrac{dz}{dx_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



I.1.2 -сурет.

Функцияның минималды мәні $z=-68$ тең болады және ол R нүктесінде $(12,8)$ орналасады. 1.1 тақырыбындағыдай минимум анықталған облыстың шыңыда орналасады. Есептің оптималды шешімі $x_1=12,\ x_2=8$ нүктесі болады, мұнда функцияның минималды мәні $z=-68$ тең болады.

Кейде есептің бірден көп оптималдық шешімі болады.

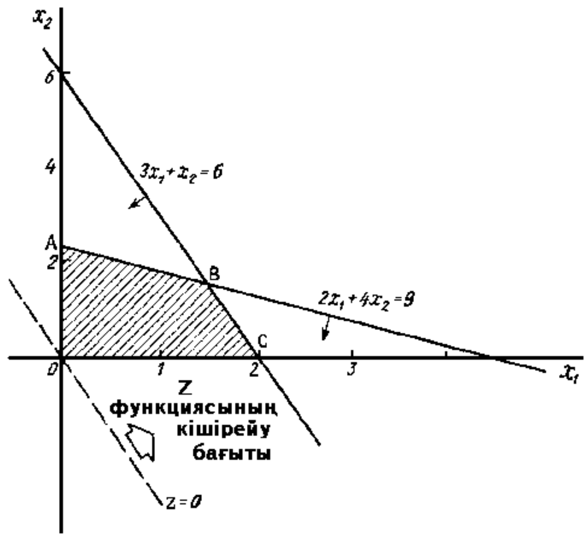
2 -Мысал.

$z=\ -6x_1\ -2x_2$ функциясының минимумын табайық. Келесі шектелу шарттарда: $x_1, x_2 \geq 0$

$2x_1+4x_2 \leq 9$

$3x_1+\ x_2 \leq 6$

I.1.3-суретінде ***OABC*** төртбұрышы анықталған керекті облысын көрсетеді $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}$=-6, $\dfrac{\partial z}{\partial x_2}$=-2, сөйтіп $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ векторының бағыты функцияның кему (кішірейу) бағытын көрсетеді.



I.1.3 -сурет

$$-6\left(2-\frac{1}{2}\theta\right)-2\left(1\frac{1}{2}\theta\right)=-12 \bullet$$

BC түзу сызығының бойындағы кез келген нүктеде оптималдық шешім орналасады. Мысалы төртбұрыштың $B=\left(1\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)$ және $C=(2,0)$ шындарындағы нүктелерде оптималдық шешім бір мәнге тең болады $z=-12.$

BC түзу сызық бойындағы кез келген нүкте келесі өрнекпен марапатталады.

$$\theta\left(1\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)+(1-\theta)(2,0)=\left(2-\frac{1}{2}\theta,1\frac{1}{2}\theta\right),$$

Мұнда $0 \leq \theta \leq 1.$

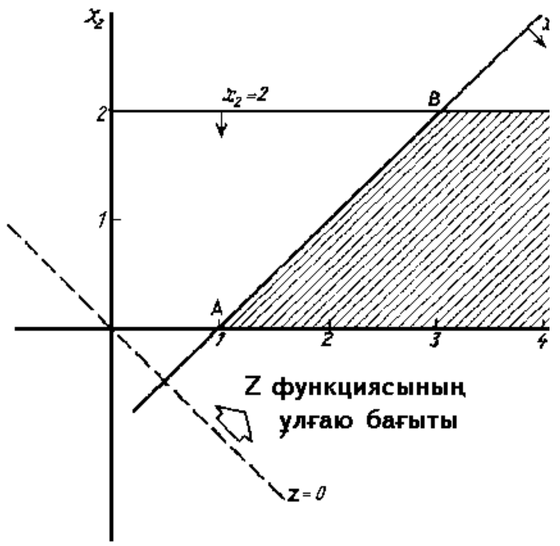
Кездейсоқ нүктеде функция мәні z тең болады

$$-6\left(2-\frac{1}{2}\theta\right)-2\left(1\frac{1}{2}\theta\right)=-12$$ z функциясының бір ғана минималдық мәні болады.

Кейде есептің шешімі шектелмеуі де мүмкін.

<u>3- *Мысал.*</u>

Шектелу $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 - x_2 \geq 1$, $x_2 \leq 2$ шарттарында $z = x_1 + x_2$ функциясының минимумын табайық. І.1.4-суретінде анықталған керекті облысы көрсетілген.



І.1.4-сурет.

z фукциясының ұлғаю бағытында, анықталған керекті облыстың шегі жоқ, яғни функцияның минимумы орналасатын нүкте жоқ. Сондықтан есептің шешімінің және z функциясының максималды мәнін анықтай алмаймыз, неге десеңіз олар шектелмеген. Бірақта анықталған керекті облыстың шегі жоқ болсада кейбір есептердің осы облыста шешімі болуы мүмкін. Мысалы $z' = x_2$ функциясының максимумунын осы мысалдағы шектелу шартында іздесек, оның шектелмеген шешімін табамыз.

Егерде осы шектелу облысында $z = x_1 + x_2$ функциясының минимумын іздесек, осы минимум бір ғана нүктеде орналасатын еді. Оның мәні $z(min) = 1$ бірге тең болып орналасатын нүктесі анықталған облысының шыңы болып табылады $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

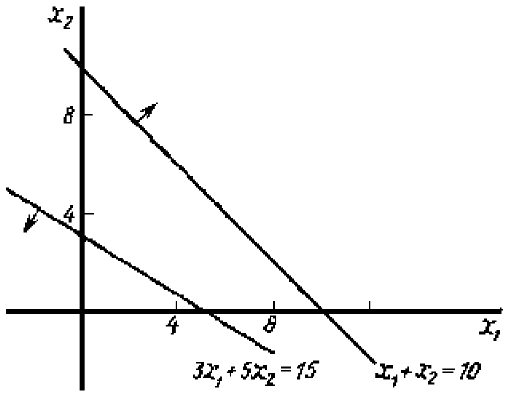
Кейде есептің шешімі болмауы да мүмкін, неге десеңіз берілген шарттардан шектелу облысы анықталмауы мүмкін.

<u>*4-Мысал.*</u>

Облыс келесі шектелу шарттарымен анықталғанда

$x_1, x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \geq 10$, $3x_1 + 5x_2 \leq 15$ функция $z = 2x_1 + 3x_3$ функция минимумын табыңыз.

Шектелу шарттар қайшылас болғандықтан, анықталған керекті шешімнің жоқ болғандығы (І.1.5 -сурет).



I.1.5-сурет

Жоғарыда қарастырылған мысалдардан қортып, сызықтық программалау есептерінің бір неше сол есептерге қатынасты қасиеттерін айтуымызға болады. Біріншіден, шектелу облысы әр уақытта дөңгейлік көпбұрыш болуы, тіпті ол областын шегі жоқ болған жағдайда да. Екіншіден, оптималды шешім барлық жағдайда анықталған областың щыңында орналасуы. *2-шi мысалда* ***B*** шыңыда және ***C*** шыңыда оптималды нүкте болып табылады.

Осы нәтижелерді жалпы жағдайғада көшіріп қарастыруымызға болады. Алғашында сызықтық программалау есептерін стандарттық форма келтіріп жазуымызға болатындығын көрсетейік.

§ I.1.3. Сызық программалау есебінің стандарттық қалпы.

Аңғарсақ сызықтық программалау есептері әр түрлі жазылып көрсетіледі. Бірақ, оларды келісілген стандарттық қалыпта жазуымызға болады. Мысалы осы оқулықтағы келісім бойынша біз бағытталған функцияның минмумын қарастыруымыз қажет, ал барлық шектелу шарттарын теңдік түрінде жазып және айнымалылар теріс мәнді болмауы қажет.

Есепті стандарттық қалпына келтіріп қарастыру өте оңай, егерде келесі ережелерді пайдаланып қолдансақ:

а) $z= c_1x_1+c_2x_2+\dots +c_nx_n$ функциясының максимумын іздеу, сол функцияны (-1) көбейтіп, яғни $z'= -c_1x_1 -c_2x_2 -\dots -c_nx_n$ функциясының минимумын іздеу есебі мен бірдей.

б) Шектелу шарттар теңсіздік түрінде болса, мысалы $3x_1+2x_2 -x_3 \le 6,$ оны стандарттық қалпына келтіруге болады $3x_1+2x_2 -x_3+x_4=6,$

мұнда теріс мәнді емес жаңа айнымалы ретінде x_4 қостық.

Шектелу $x_1-x_2+3x_3 \ge 10$ шартыда стандарттық формасына келтіреді $x_1-x_2+3x_3-x_5=10$, мұндағы теріс мәнді емес жаңа айнымалы ретінде x_5 болады.

в) Егерде кейбір x_k айнымалысы кездейсоқ сан болалса, осы айнымалы теріс мәнді болмас үшін, оны келесі түрге келтіріп қарастырамыз.

$x_k=x_k' -x_k''$, мұнда $x_k' \ge 0$ және $x_k'' \ge 0.$

Сөйтіп, есепті стандарттық қалпына келтіру кезінде қосымша айнымалылар еңгізуіміз қажет болуы мүмкін (олар теріс мәнді болалмайды).

Осыған ұқсас (I.1.7), (I.1.8), (I.1.9) қатынастарын да сызықтық программалау есебінің жалпы түрінде жазып келесідей өрнектейміз:

$\boldsymbol{z=c^Tx}$ функциясының минимумын табу қажет (I.1.10)

мұндағы $\boldsymbol{x\geq 0}$ (I.1.11)

және

$\boldsymbol{Ax=b}$, және де $\boldsymbol{b>0}$ (I.1.12)

Егерде, жоғарыда қарастырылған есептердің дүзетіліп стандарттық қалпына келтірілген есеп болса, онда бұл есепте қосымша айнымалылардың болғаны (және олар $\boldsymbol{A}$ матрицасына кіргені).

I.1.2 тақырыбындағы 1-ші мысалды стандарттық қалпына келтіріп келесі түрде қарастырайық:

$\boldsymbol{z=-3x_1-4x_2}$ функциясының минимумын табайық келесі шектелу шарттарында:

$x_1 \quad -x_3=10,$

$x_2 \quad -x_4=5,$

$x_2+x_2 \quad +x_5=20,$

$-x_1+4x_2 \quad +x_6=20$

және $\boldsymbol{x_i\geq 0,\ i=1,2,\ldots,6}$.

I.1.1 тақырыбындағы 1-ші мысалды келесі түрге келтіріп қарастыруымызға болады:

$\boldsymbol{z=-2x_1-4x_2}$ функциясының минимумын келесі шектелу шарттарында:

$\boldsymbol{3x_1+4x_2+x_3=1700}$

$\boldsymbol{2x_1+5x_2 \quad +x_4=1600}$

және $\boldsymbol{x_i\geq 0,\ i=1,\ldots,4}$.

Шектелу шарттарын матрицалық түрінде келесідегідей қылып жазамыз:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1700 \\ 1600 \end{pmatrix} \bullet$$

Олар төрт белгісіз айнымалысынан екі теңдеуден тұрады. Осы шектелу шартындағы кез келген теріс мәнді емес шешім- *анықталған керекті шешім* болып табылады.

Төрт белгісізі бар екі теңдеуді біле отыра, екі белгісізіне кездейсоқ мән тағайындап, қалған екі белгісізге теңдеудің шешімін табуымызға болады, бірақ бұл шешім *анықталған керекті облысқа* кірмуіде мүмкін. Өте қызықты шешім ретінде екі белгісіз айнымалыны нөлге теңеп қарастыратын шешім. Егерде, ондай шешім бір түйір болса (жалғыз ғана болса) ондай шешімді *базистық шешім* деп атаймыз. Егерде ол шешім қойылған шектелу шартын қанағаттандырып бұзбаса, оны *анықталған керекті базистық шешім* дейміз. $\boldsymbol{n}$ айнымалысы бар сызықтық программалау есебінің жалпы түрі үшін және ол есеп шектелу $\boldsymbol{m}$ шартында қарастырылса $\boldsymbol{(m<n)}$, шектелу шартарының

<u>базистық шешімін</u> ***(n-m)*** айнымалыларын нөлге теңеп, қалған ***m*** айнымалысының мәндерін ***m*** теңдеуден іздеп тапсақ болады. Бұл теңдеулер системасының бір ғана (жалғыз) шешімі болады деп болжаймыз. Нөлге теңелген айнымалыларды ***<u>базистық емес</u>*** деп атаймыз. Қалған айнымалыларды ***<u>базистық</u>*** дейміз және олар ***<u>базисты</u>*** құрайды.

Жоғарыда қарастырылған есептерде екі базистық емес айнымалысын алты тәсіл мен тағайындауымызға болады. Базистық шешімдерді кесте ретінде қарастырғанымыз ыңғайлы.

	x_1	x_2	x_3	x_4	Шыңдары
	0	0	1700	1600	0
	0	425	0	-525	
	0	320	420	0	A
	566 2/3	0	0	466 2/3	C
	800	0	-700	0	
	300	200	0	0	B

Кестеде әр шешімге сәйкес екі базистық емес айнымалылар ***$(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_1,x_4),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_3,x_4)$.*** 1.1-суретіндегі анықталған облыстық шыңдарына сәйкес, осы алты шешімнің ішінен төртеуі ғана анықталған керекті шешім бола алады.

Үш өлшемді жағдайда шектелу шарттар түзу сызық емес кеңістіктер болады. Сондықтан, анықталған керекті облыста дөңгеленген көп бүйрлі қалып болады. Есептің оптималдық шешіміне осы көп бүйрлі қалыптың сәйкес бір шыңы болады.

Осындай нәтижелер бір заңдылыққа бағынатынын көретін боламыз. ***n*** белгісіз айнымалыдан құралатын ***m*** теңдеудің системасын шешкендегі базистық шешіміміз анықталған керекті облысының шыңдарында орналасады. Сондықтан оптималдық шешімде (егер ол бар болса), анықталған базистық шешімге сәйкес болғандықтан, ол осы анықталған облыстың шыңынын біреуінде орналасады.

§ I.1.4. Жалпы жағдайда *n* айнымалы есепке тарату.

Жоғарыда көрсетіліп айтылған нәтижелерде анықтап алу үшін, кейбір геометриялық түсініктердің жалпы жағдайдағы мағанасын талғап толтырайық.

I.1.2 тақырыпта екі өлшемді есепті шешуге қолданған графикалық әдісті жалпы жағдайға таратуға болар еді. Бірақ ***n*** өлшемді кеңістікте ұқсас жағдайды көрсетіп, елестетіп түсіну өте қиын. Сондықтан, жалпы жағдайда геометриялық шешімді түсініп анықтау үшін, алгебралық тәсілдер, түсініктер қажет болады.

Дөңгеленген нүктелер жинағының анықтаудан бұрын, бір неше түсініктер еңгізейік. $\boldsymbol{n}$ өлшемді кеңістіктегі нүктені белгілеу үшін келесі $\boldsymbol{x}$ символын қолданайық:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

PQ аралығы (жыртысын), мұнда $\boldsymbol{P}$ және $\boldsymbol{Q}$ -екі нүкте $\boldsymbol{p}$ және $\boldsymbol{q}$ векторлары арқылы көрсетілген. ***PQ*** аралығындағы жыртыс келесі қатынасқан анықталған нүктелерден құралады.

$\boldsymbol{\theta p+(1-\theta)q;\quad 0 \le \theta \le 1.}$

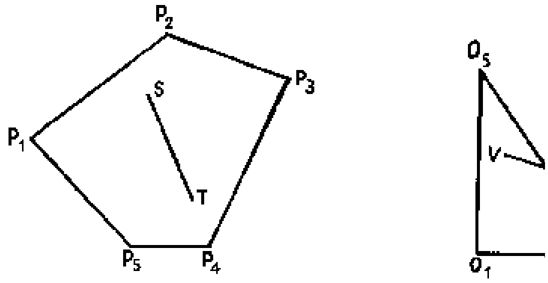
$\boldsymbol{S}$ нүктелер жиыннын дөңгейлік деп атаймыз, егерде осы жиынның кез келген $\boldsymbol{P}$ және $\boldsymbol{Q}$ нүктелерін қосатын ***PQ*** жыртысы (аралығы) осы $\boldsymbol{S}$ жиынның ішінде орналасқан болса.

Дөңгейлік жиынның ***экстремалды*** (*шыңы немесе бұршы*) ***нүктесі деп***, жиындағы әр түрлі нүктені қосқандағы кез келген аралықтың (жыртыстың) ішінде орналаспайтын, нүктені айтамыз.

$\boldsymbol{P_1, P_2, \ldots, P_k}$ нүктелерінің ***дөңгейлік қабығы*** деп $\boldsymbol{p_1, p_2, \ldots, p_k}$ векторлары арқылы анықталып көрсетілген нүктелер жиынын (тобын) айтамыз. Оның жазылатын түрі:

$\boldsymbol{\theta_1 p_1 + \theta_2 p_2 + \ldots \theta_k p_k}$

мұндағы $\boldsymbol{\theta_i \ge 0, (i=1,2, \ldots,k)}$ және $\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$



I.1.6 -сурет.

I.1.6а суретінде дөңгейлік нүктелер жиыны көрсетілген. I.1.6б суретінде дөңгейлік емес нүктелер жиыны көрсетілген, неге десеңіз, ***VW*** аралығындағы (жыртысындағы) кейбір нүктелер осы жиынның ішінде орналаспайды.

$\boldsymbol{P_1P_2P_3P_4P_5}$ бірінші жиынның шыңындағы нүктелері. Екі $\boldsymbol{P_1P_2}$ нүктелері үшін дөңгейлік қабыға ретінде түзу сызық болады. Үш $\boldsymbol{P_1P_2P_3}$ нүктенің дөңгейлік қабығы - үшбұрыш, $\boldsymbol{P_1P_2P_3P_4}$ төрт нүктенікі - тетраэдр, ал бес $\boldsymbol{P_1P_2P_3P_4P_5}$ нүктенікі - гиперкөпбүйірлі қалып, оның бұрыштары (шыңдары) осы нүктелерде орналасады.

§ I.1.5. Сызықтық программалаудың негізгі нәтижелері.

Сызықтық программалаудың жалпы есебін стандарттық қалпында келесі түрде жазамыз:

$z=c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ функциясының минимумын

шектелу $x_1, x_2, ..., x_n=0$ және

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ ... +a_{1n}x_n=b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+ ... +a_{2n}x_n=b_2$

…………………………..

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+ ... +a_{mn}x_n=b_m$

шарттарында табыңыз?

Шектелу шарттарын келесі түрде көрсетуімізге болады:

$Ax=b,\ x=0$

мұндағы A матрицасының рангы m тең $(m<n)$.

Енді сызықтық программалаудың негізгі анықтамаларын дәлелдейік.

Анықтама 1. Егерде шектелу облысында анықталған керекті шешім болса, онда осы шектелу шартын қанағаттандыратын (бұзбайтын) базистық шешемнінде болғаны.

Базистық анықталған керекті шешемді құрып осыны дәлелдейік. Анықталған шешімнің $n-r$ айнымалысы нөлге тең, ал қалғандарын оң мәнді деп есептесек. Онда есеп жалпы екендігін жоғалтпайды.

$x_j=0,\ j=r+1, ...,n,$

$$\sum_{j=1}^{r} x_j a_j = b, \text{ мұндағы } x_j>0\ (j=1,2, ...,r) \qquad \text{(I.1.13)}$$

Өрнекте a_j- A матрицасының бағанасы болады.

Егерде a_j бір - бірімен сызықтық байланыста болмаса, онда $r<=m$ - A матрицасының рангы, және шешім базистық анықталған керек шешім болады (($m-r$) нөлге тең базистық айнымалылар).

Егерде $a_1, a_2, ...,a_r$ - сызықтық байланыста болса, онда

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_j = 0 \qquad \text{(I.1.14)}$$

мұнда, барлық α_j нөлге тең емес немесе теріс мәнді (керек жағдайда бұл теңсіздікті (-1) көбейте аламыз).

$\alpha_k>0$ деп есептейік

$$a_k = \sum_{j=1}^{r} \frac{\alpha_j a_j}{\alpha_k} \qquad \text{(I.1.15)}$$

онда

$$\sum_{j=k}^{r} \left(x_j - \frac{\alpha_j x_k}{\alpha_k} \right) a_j = b$$

Егерде **k** келесідей істеп тағайындасақ

$$\frac{x_k}{\alpha_k} = \min\ (\frac{x_j}{\alpha_j};\quad \alpha_j > 0)$$

Онда жаңа мәндер

$$X_j = x_j - \alpha_j \cdot \left(\frac{x_k}{\alpha_k} \right), \ (j=1,2,...,r\ (j\#k)),$$

$$X_j=0, \quad j=k,\ r+1,\ ...,n) \qquad (I.1.16)$$

теріс емес болады, және сызықтан бұл шешім анықталған керекті шешім болғаны. Бұл шешімде кем дегенде ***(r-1)*** айнымалымыз нақты оң мәнді болғаны. Сондықтан, нақты оң мәнді айнымалылар саны бірге кеміп бір айнымалылыға кемиді. Осындай талқылау көз қарасты сөйтіп жалғастырып түбінде $r<=m$ жағдайына келіп тірелеміз, яғни базистық анықталған керекті шешімді табамыз.

Анықтама 2. Анықталған керекті облысымыз дөңгейлік нүктелер жиынынан құралады. Егерде x және y нүктелері анықталған керекті облыстың ішінде орналасса, яғни $Ax=b,\ Ay=b$ және $x\geq0,\ y\geq0$ онда, егерде

$w=\theta x+(1-\theta)y$, мұндағы $0 \leq \theta \leq 1$ яғни $w \geq 0$

Сондықтан

$$Aw=A\ \theta(x+(1-\theta)y)=\theta Ax+(1-\theta)Ay=\theta b+(1-\theta)b=b$$

Сөйтіп w нүктесіде анықталған керекті облыстың ішінде болатынын анықтадық, яғни анықталған керекті областың дөңгейлік нүктелер жиыны екенін анықтап көрсетіп дәлелдедік.

Анықтама 3. Базистық анықталған керекті шешімдер дөңгейлік нүктелер жиындысының шыңдарында орналасады.

$$x^0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_m \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$ - базистық анықталған керекті шешім деп есептесек

Онда, x^0 $Ax=b$ теңдеулер системасының жаңғыз шешімі болады, мұндағы $x\geq0$, және ***(n -m)*** соңғы x векторының координаттары нөлге тең болады.

Егерде, x^0 нүктелер жиынының шыңы болмаса, онда, өзге u және v екі нүктесін табуымызға болады. Олар үшін $x^0=\theta u+(1-\theta)v$ және $0<\theta<1$, және $Au=b,\ Av=b,\ u,v\geq0.$

Сөйтіп, онда соңғы ***(n-m)*** координаттарын келесі түрде жазуға мүмкіншілік туғаны:

$\theta u_{m+1} +(1-\theta)v_{m+1}=0,$

…………………

$\theta u_n +(1-\theta)v_n=0,$

Біракта θ, $(1-\theta)$, u_j және $v_j\geq 0$ $(j=1,2, \ldots, n)$ теңдеулер системасының

$\theta u_j+(1-\theta)v_j=0, \quad (j=m+1, \ldots, n)$

теккана $u_j=v_j=0$ тең болғанда шешімі болады, мұндағы $j=m+1, \ldots, n.$

Сөйтіп, аңғарғанымыз, u,v-базистық керекті шешімдер, олардыңда нөлге тең координаттары x^0 -векторындағы нүктелердегі нөлге сәйкес болғаны. Сондықтан, x^0 -системаның жалғыз шешімі болғандықтан, $x^0=u=v$, бұл жаңағы тағайындаға u және v нүктелеріне қайшылас кері болғаны. Сондықтан, кез келген базистық анықталған керекті шешім нүктесі - жиынның шыңы болғаны.

Керісінше түсінікті дәлелдеуімізге болады, яғни жиынның шыңдарында базистық анықталған керекті бір нүктенің болатынын.

Егерде x^0-анықталған керекті облыстың шыңында орналасқан және x^0 векторының r координаты нақты оң мәнді деп есептесек. Енді осы r санының m санынан үлкен еместігін $(r<=m)$ көрсетейік, яғни x^0- базистық анықталған керекті нүкте екенін көрсетейік.

Мысалы $x_1^0, x_2^0, .., \ x_r^0$ $(r>m)$ нақты оң мәнді координаттар болсын. Осыған сәйкес $a_1, a_2, \ldots, a_r$ - A матрицасының бағаналары делік, енді осы векторлер бірі-бірімен сызықтық байланыста деп есептейік.

1-ші анықтамада дәлелдеудегі сияқты, барлық нөлге тең болмайтын a_j табайық, олар келесі теңдікке бағынады:

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_j = 0$$

Мұнда жеңіл аңғаратынымыз, егерде $0 < \rho<\min \frac{x_j^0}{|a_j|}$ барлық $a_j\#0$ үшін онда векторлер.

$x_1=x^0+ \rho\ \alpha,\ x_2=x^0- \rho\ \alpha$

мұндағы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \alpha_r \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$ шарттарын қанағаттандыруы қажет.Неге десеңіз $A\alpha=0$, онда

$Ax_1=A(x^0+ \rho\ \alpha)=Ax^0+ \rho\ A\ \alpha =b.$

Осыған ұқсас $Ax_2=b.$

Сөйтіп, x_1 және x_2 - анықталған керекті шешімдер болғаны және $x=(1/2)(x_1+x_2)$. Сондықтан x^0- шыңдағы нүкте емес, ол сондай болған жағдай біздің x^0 тағайындауымызға қайшылас болғаны, сондықтан $r<=m$ үлкен емес.

Егерде n - айнымалыға шектелу m шарты берілген жағдайда, онда ең көп дегенде $\binom{n}{m}$ базистық анықталған керекті шешімнің (немесе шыңдардың) болғаны және олар осы дөңгейлік қабықтың анықталған керекті облысын көрсетіп тағайындағаны.

Анықтама 4. Егерде бағытталған функцияның минимумы болған жағдайда, онда кем дегенде бір оптималдық шешімнің базистық болғаны.

Егерде, базистық анықталған керекті шешімге $p_1, p_2, \ldots, p_k$ векторлерінің $P_1, P_2, \ldots, P_k$ нүктелері сәйкес болса және бұл нүктелерде бағытталған функция келесі мәндерге $z_1, z_2, \ldots, z_k$ тең болса.

Егерде $z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n=C^Tx$, онда

$z=c^Tp_i$ $(i = 1,2,\ldots,k$ үшін).

Кез келген анықталған облыстағы басқа нүктеге:

$$x=\theta_1p_1+\theta_2p_2+\ldots+\theta_kp_k, \text{ мұнда } \theta_i\theta 0,\ \sum_{i=1}^{k}\theta_i=1$$

және осы нүктедегі функциясының Z мәні

$$z=c^Tx=\theta_1c^Tp_1+\theta_2c^Tp_2+\ldots+\theta_kc^Tp_k=$$
$$=\theta_1z_1+\theta_2z_2+\ldots+\theta_kz_k.$$

Сөйтіп, доңгейлік қабықтағы функцияның минимумы орналасқан шыңдардағы нүктелердің $P_1, P_2, \ldots, P_k$ арасынан x нүктесін табу $\theta_i\geq 0$ сандарын іздеп есептеп шығару есебіне келіп тіреледі. Ол сандар $\sum_{i=1}^{k}\theta_i=1$ шартқа бағынуы қажет және z функциясының минимумыне жеткізуі қажет.

$z_1, z_2, \ldots, z_k$ мәндерінің ішінде ең кіші мәні болуы керек. (Бірақ ондай мән бір нешеу болуы мүмкін). Мысалы z_j мәні сондай болсын, яғни $z_j<=z_i$, $i=1,2, \ldots, k$ үшін.

$z_1, z_2, \ldots, z_k$ сандарын өлшенген ортақ сан ретінде $\sum\theta_i z_i$ саны болады. Олардың салмағы $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ максималды болу үшін, $\theta_j=1$ және $\theta_i=0, (i \# j)$ тең болуы қажет .

Сөйтіп z функциясының максимумы P_j шыңында орналасады.

Бұл көрсетілген нәтижелер арқылы түсінетініміз: анықталған керекті областа оптималдық шешім іздегенімізде тек қана базистық анықталған керекті шешімдердің арасында ғана іздеп шектелуімізге болатыны. Келесі бөлімдегі қарастырылатын ***симплекс*** - әдісі осындай іздеу процедурасына арналған және осындай базистық шешімдердің арасынан оптималды шешім табу процедурасына арналған.

§ I.1.6. Жаттығулар.

1. Екі ***A*** және ***B*** затын өндіретін фирманың заттарына сұраныс шектелмеген. Әр зат ***I, II, III*** машиналар арқылы өңделетін болсын. ***A*** және ***B*** заттарының өңдеуіне машиналардың қажетті өңдейтін сағат уақыттары төменде келтірілген:

	I	***II***	***III***
A	***0,5***	***0,4***	***0,2***
B	***0,25***	***0,3***	***,4***

Бір аптада ***I, II, III*** машиналардың жұмыс істеу уақыттарының нормасы ***40, 36*** және ***36*** сағат. ***A*** және ***B*** заттарын өткізгеннен кейін фирма түсетін пайда ***5*** және ***3*** доллар болсын. Осы пайданы максималды табу үшін, фирманың аптасына өндіретін заттардың нормасын табу қажет болсын. Осы есепті өрнектеп сызықтық программалау есебіне келтіріп және оны есептеп шығарыңыз.

2. $w=x_1+2x_2$ минимумын табыңыз, егерде шектелу шарттары

$x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0$

$-x_1+3x_2<=10,$

$x_1+x_2<=6,$

$x_1-x_2<=3,$

$x_1+4x_2\geq 4.$

3. 2-ші жаттығудағы есепті стандарттық формаға келтіріңіз. Оның 15 базистық шешімі бар екенін және оның 5 анықталған керекті екенін көрсетіңіз.

4. $z= -2x_1-x_2$ функциясының минимумын шектелу

$x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0$

$x_1+x_2<=11,$

$x_1+x_2<=6,$

$x_1-x_2<=2,$

$2x_1-4x_2<=3$ шарттарында табыңыз.

5. $z= -3x_1-x_2$ функциясының минимумын табыңыз егерде шектелу шарттары:

$x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0$

$x_1+x_2 \geq 1,$

$x_1-x_2<=1,$

$2x_1+x_2<=3,$

$2x_1-(x_2<=6.$

келесі жағдайларға:

а) $\alpha = \beta =1;$ б) $\alpha =2, \beta = 2/3;$ в) $\alpha =6, \beta = -6.$

6. $z= -x_1-5x_2$ функциясының минимумын келесі шектелу

$x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0;\ \ x_1+x_2 \geq 6;\ \ 3x_1+4x_2<=12.$ шарттарында табыңыз.

7. $3x_1+6x_2+2x_3$ функциясының минимумын шектелу

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$; $3x_1+4x_2+x_3<=2$; $x_1+3x_2+2x_3<=1$ шарттарында табыңыз. Осы үш өлшемді есептің анықталған облысы дөңгейлік көп бүйірлі фигура екенін және оптималдық шешім соның шыңдарында орналасатынын көрсетіңіз.

8. Фирмаға қажетті көмір құрамындағы фосфор ***0,03%*** артық болмауы қажет және күл аралас қосындылар көлемі ***3,25%*** аспауы қажет. Көмірдің үш сорты бар олардын (1тн.) бағысы келесі кестеде және көмірлердің құрамы:

Көмір сорты	***Құрамындағы фосфор***	***Құрамындағы күл аралас қосындылар %***	***1 тн. бағасы доллар***
A	***0,06***	***2,0***	***30***
B	***0,04***	***4,0***	***30***
C	***0,02***	***3,0***	***45***

Енді осы көмірлер сорттарын қандай қатынаста араластырғанда құрамындағы шектелу шарттарды бұзбай және ең кіші (минималды) бағада болатынын табайық? Осы есепті екі өлшемдегі кеңістікте график арқылы көрсетуге болатындығын көрсетіп және сөйтеп оның шешімін табыңыз?

9. Полды тазалайтын заттар (порошок) үш қасиетімен бағаланады: а) тазалау қасиеті, б) дезинфекция жасау қасиеті, в) адам терісіне әсер ету қасиеті. Осы қасиеттердің әр қайсысы сызықтық шкала арқылы ***0***-ден ***100***-ге дейін өлшеніп есептелетін болсын.

Осы пол жуатын затты дайындағанда (пайдалануға дайындағанда). Олардың кем дегенде ***60***-тық тазалау қасиеті және кем дегенде ***60***-тық қасиеті сызықтық шкала бойынша болуы керек. Және олардың адам терісіне әсер ету қасиеттері өте кіші минималды болуы керек.

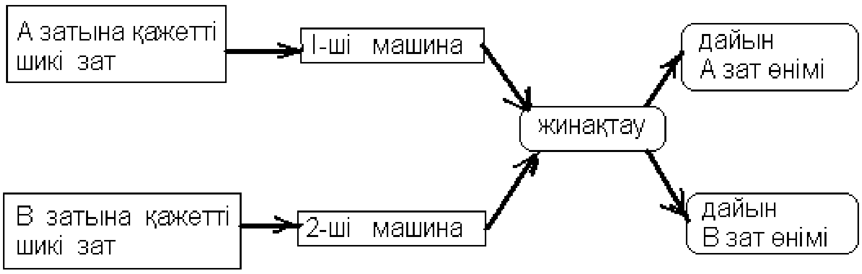
Керекті жуатын зат төменгі кестеде көрсетілген үш түрлі жуып тазартатын қосындылардан құралып жасалуы қажет, олардың қасиеттері кестеде көрсетілген.

Жуып тазартатын зат түрі	**Жуып тазарту қасиеті**	**Дезинфекциялау қасиеті**	**Адамның терісіне әсер ету қасиеті**
A	**90**	**30**	**70**
B	**65**	**85**	**50**
C	**45**	**70**	**10**

Осындай оптималды араластырып, құрып жасалатын қосындысын табатын есепті сызықтық программалау есебіне келтіріп өрнектеп жазыңыз. Осы есепті графикалық түрінде, екі өлшемді кеңістікте көрсетіп, және оның шешімін табыңыз.

10. Екі ***A*** және ***B*** түрлі заттарын өндіретін фирма бар делік. Олардың бір бумасының бағасы ***A*** -8 цент және ***B*** -15 цент болсын. Ол заттарды сатып таратуға еш шектелу болмасын делік. ***A*** заты - 1 машинада өңделсін, ***B***

заты - 2-ші машинада өңделсін. Сосын бұл заттар фабрикада буылып, дайындалып дайын заттар ретінде шығарылсын.



1 кг шикі зат бағасы 6 цент; 1-ші машина 1 сағатта 5000 кг шикі зат өңдейді, оның 10% отходқа (бырақққа) кетеді; 2-ші машина 1 сағатына 4000 кг зат өңдейді, оның 20% жойылып пайдаға аспайды. 1-ші машина күніне 6 сағат жұмыс істей алады, оны 1 сағат пайдаланудың бағасы 288 доллар. 2-ші машина 1 күніне 5 сағат жұмыс істей алады, оны 1 сағат пайдаланудың бағасы 336 доллар. ***A*** затының бір бумасының салмағы - 1/4 кг, ал ***B*** затының бумасының салмағы - 1/3 кг. Фабрика күніне 10 сағат жұмыс істей алады, сағатына 360 долларға бағаланатын заттарды өңдіріп. 1 сағат уақытта ***A*** затының 12000 бумасын дайындап жасауымызға болады және ***B*** затының - 8000 бумасын дайындап жасауымызға болады. Компания мақсаты ***A*** және В заттарына қажетті x_1 және x_2 шикі зат мөлшерін табу (мың килограмм мөлщерінде), осы мөлшердеде күндік пайдалық максимумы болуы қажет.

Осы есепті сызықтық программалау есебіне келтіріп өрнектеп және оның оптималдық шешімін графикалық түрде табыңыз?

11. 1.2 тақырыбындағы екі өлшемді есептерді стандарттық қалыпына келтіріп, оның барлық базистық шешімдерін тауып және анықталған керекті базистық шешімдер анықталған облыстың шыңдарына сәйкес екендігін көрсетіңіз.

12. Бір аймақтағы екі ***A*** және ***B*** пунктіне қосымша көлік қажет болсын деп есептелік. ***A*** пунктіне қосымша 5 автобус, ал ***B*** пунктіне - 7 автобус керек делік. G_1, G_2 және G_3 гараждарында 3, 4 және 5 автобус бар екендігі белгілі болсын.

Гараждардан ***A*** және ***B*** пункітеріне дейінгі аралықтарындағы қашықтық кестеде көрсетілген:

Гараж	Пунктерге дейінгі қашықтық	
	A	***B***
G_1	3	4
G_2	1	3
G_3	4	2

Автобустардың жүру қашықтықтарының қосындысының минимумы болатындайғып автобустарды ***A*** және ***B*** пункіттеріне таратып тағайындау есебін шығарыңыз.

13. Компания жуынатын комнаталарға арналған ілетін ***A*** және ***B*** полкаларын өндіретін болсын. Аптасына сатушылардың айтуы бойынша ***550*** полка сатылып өтеді делік.

A түрлі полка үшін - 2м^2 материал, ал ***B*** түрлі полка үшін - 3м^2 материал қажет екендігі белгілі болсын. Аптасына компанияға 1200м^2 материал бөлінеді делік. ***A*** типты полкасының бір данасын дайындау үшін 12мин, ал ***B*** типты полкасына - 30мин өңдейтін машина уақыты қажет екені белгілі. Аптасына өңдейтін машина 160 сағат жұмыс істей алады делік. Егерде ***A*** типты полкасының бір данасын сатқанда түсетін пайда ***3***доллар, а В типты полкасының - ***4***доллар деп есептесек. Апталық түстіп пайданың максимумы болатындай қылып, аптасына полкалардың әр түрінен нешеден компанияғы өндіру тиімді екенін шешіңіз?

14. Автомобиль көлігін шығаратын завод екі түрлі "Каприз" және (*арзанырақ*) "Фиаско" көліктерін шығарады. Заводта жоғары мамандығы бар 800 адам және жоғарғы мамандығы жоқ 1000 адам қызмет істейді, олардың әрқайсысына аптасына 40 сағат жұмысы жолақыландырылады. "Каприз" түрлі көліктің бір данасын шығару үшін 50 сағат мамандырылған жұмысшының жұмысы және 30 сағат мамандырылмаған жұмысшының жұмысы қажет; "Фиаско" үшін 20 сағат мамандырылған жұмысшының жұмысы және 40 сағас мамандырылмаған жұмысшының жұмысы қажет. "Фиаско" моделінің әр данасы шикі зат және жинақтау заттары үшін 500 долларды, ал "Каприз" моделінің әр данасы 1500 долларды қажет етеді. Қосымша шығын аптасына 900000 доллардан аспауы қажет. Көлікті жеткізуші жұмысшылар аптасына бес күн жұмысістеп және күн сайын заводтан 210 дана машинадан артық жеткізе алалмайды.

"Каприз" моделінің әр данасы фирмаға 1000 доллар пайда келтірсе, ал "Фиаско" моделінің данасы 500 доллар пайда келтірсе. Сіз әр модельден қанша данасын игеріп шығаруға ұсынасыз? Фирманың пайдасын ұлғайту үшін не ұсынасыз?

15. Фирманың заводтары Лидс және Кардифф қалаларында орналасқан деп есептесек. Олардан товарлар Манчестер, Бирмингем және Лондон қалаларындағы складқа жеткізілетін болса. Қалалар арасындағы қашықтық кестеде келтірілген (*қашықтық он мильге дейін дөңгеленіп жобамен алынған*).

	Манчестер	**Бирмингем**	**Лондон**
Лидс	**40**	**110**	**190**
Кардифф	**170**	**100**	**150**

а) Лидс қаласындағы завод жылына 800тонн товар өндіретін болса, ал Кардифф қаласындағы -500тонн. Манчестер қаласындағы складтың сиымы 400тонна, Бирмингем қаласындағы -600тонна, ал Лондондағы -300тонна болса. Товарды тасымалдауды қалай жасаған тиімді, тасымалдау бағасы минималды болуы үшін?

б) Егерде Лондон - Кардифф аралығындағы жолды жөндеу жұмыстары жүргізіліп жатса, ол тасымалдау бағаны екі есе көбейтетін болса. Сіз тасымалдау тізбесін қалай өзгертіп қарастырасыз?

2 - тарау.
Симплекс - әдісі.
§ І.2.1. Бастапқы базистық анықталған керекті шешім белгілі жағдайдағы симплекс - әдісі.

І.1.2 тақырыбындағы графикалық әдіс екі өлшемді есептерге ыңғайлы. Ол әдісті үштен үлкен өлшемі бар есептерге қолдануға болмайды. Аңғарып ескеретініміз барлық есептер үшін, оптималды шешім базистық анықталған керекті шешімдердің арасынан іздеуіміз қажет. Г. Данциг ұсынған тәсілі арқылы құрастырылған симплекс - әдісі негізінде алгебралық формада көрсетілген есептеу процедурасы болып табылады. Ол жалпы сызықтық программалау есебінің стандарттық қалпына түсіндіріліп, пайдаланау бағытталған:

Сызықтық функцияның (форманың) минимумын табу

$c_1x_1+c_2x_2+ \dots +c_nx_n=c^Tx=z.$ (І.2.1)

шектелу шарттарында

$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, *яғни* $x \geq 0$ (І.2.2)

және $a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \dots +a_{1n}x_n=b_1,$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \dots +a_{2n}x_n=b_2,$ (І.2.3)

…………………………………..

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+ \dots +a_{mn}x_n=b_m$

яғни, $Ax=b; b>(0,$

шектелу шарттарын қанағаттандыратын базистық анықталған керекті шешімдері бар деп есептеп қарастырамыз.

Шектелу шарттарын қанағаттандыратын базистық шешімді табуымызға болады, егерде A матрицасының m бағанасын іздеп анықтап табқанда, ол B $(m*n)$ сингулярлы емес матрицасын құраса. Егерде, осы бағаналарға m $-x_1, x_2, \dots, x_m$ айнымалылар сәйкес болса, онда шектелу шартын келесі түрде жазуымызға болады (b және қалған x арқылы).

$x_1+ \dots +a'_{1m+1}x_{m+1}+ a'_{1m+2}x_{m+2}+ \dots + a'_{1n}x_n=b'_1.$

$x_2+ \dots +a'_{2m+1}x_{m+1}+ a'_{2m+2}x_{m+2}+ \dots + a'_{2n}x_n=b'_2.$ (І.2.4)

……………………………………………………...

$x_m+ \dots +a'_{mm+1}x_{m+1}+ a'_{mm+2}x_{m+2}+\dots + a'_{mn}x_n=b'_m.$

Егерде шектелу (І.2.4) системасын $c_1,c_2, \dots, c_m$ көбейтіп және Z мәнінен алып тастасақ, онда $x_1,x_2, \dots, x_m$ айнымалылары Z өрнегінен жойылып, біз келесі өрнекті табамыз:

$c'_{m+1}x_{m+1}+c'_{m+2}x_{m+2}+\dots +c_nx_n=z-z_0$ (І.2.5)

мұндағы, $z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b'_i$.

Әр түрлі алгебралық формада болсада, (I.2.4) және (I.2.3) теңдеулері бірдей шектелу шарттарын білдіреді, ал (I.2.5) және (I.2.1) бір ғана бағытталған функцияны көрсетеді. (I.2.4) және (I.2.5) теңдеулері $x_1, x_2, \ldots, x_m$ базисы үшін ыңғайланған қалпы болып табылады. Егерде $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ нөлге тең деп қарастырсақ, онда келесі қатынастар

$x_1=b_1', x_2=b_2', \ldots, x_m=b_m', x_{m+1}=0, \ldots, x_n=0$

базистық шешімді анықтағаны. Егерде барлық $b_i' \geq 0$, бұл шешім анықталған керекті шешім болғаны. Осындай шешімдер арасынан оптималды шешімді табу қажет. Симплекс әдісі осындай ыңғайланған қалыптан басқа ыңғайланған қалыпқа көшудің жүйеленген процедурасын қамтамасыз етеді. Бір ыңғайланған қалыптан басқасына көшкенде бағатталған функция мәні кішірейіп отырады.

Егерде A матрицасын келесі түрде бөлүге мүмкіншілік болса:

$A = (BR),$

мұндағы, B- диагоналындағы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ коэффициенті бар матрица, ал R- $m*(n-m)$ өлшеміндегі матрица (A матрицасының қалғаны).

(I.2.3) теңдеуін B^{-1} матрицасына көбейткеніміз (I.2.4) теңдеуіне әкеп соғады. Базистық анықталған керекті шешім үшін B^{-1} матрицасы болуы қажет.

(I.2.3) теңдеулер системасы үшін келесі қатынастан

$(BR)X = b$ (I.2.6)

қатынасты болуымызға болады

$B^{-1}(BR)X = B^{-1}b$

яғни, $I_m(B^{-1}R)X=b'$ (бұл - (I.2.4) теңдеуі) (I.2.7)

сондықтан, $b = B^{-1}b$ және (I.2.8)

$a'_j=B^{-1}a_j$ кез келген j бағанасы үшін (I.2.9)

және тағыда орынды

$$c'_j=c_j-\sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij},$$

$$c'_j=c_j-c_B^T a'_j=c_j-c_B^T B^{-1} a_j, \qquad \text{(I.2.10)}$$

мұндағы, $c_B^T=(c_1, c_2, \ldots, c_m)$- жол-векторы z функциясының анықталған түріндегі базистық айнымалыларының коэффициенті (I.2.1 теңдеуін қараңыз).

Базистық анықталған керектік шешімдерді табу үшін бұл әдіс өте қолайсыз. Кейді базистық анықталған керекті шешім түсінікті, мысалы I.1.1 тақырыбындағы 1-ші мысалды симплекс - әдісін көрсету үшін қарастырайық. Ол есеп графикалық түрде шығарылған.

<u>1 мысал.</u> $z= -2x_1-4x_2$ функция минимумын шектелу $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,

$3x_1+4x_2<=1700$

$2x_1+5x_2<=1600$

шарттарында табайық?

Стандарттық қалыпта, қосымша оң мәнді (теріс емес) x_3 және x_4 айнымалыларын белгілеп шектелу шарттарын және бағытталған функцияны келесі түрде жазайық:

$$3x_1+4x_2+x_3=1700$$
$$2x_1+5x_2+x_4=1600 \qquad (I.2.11)$$
$$-2x_1-4x_2=z$$

Бұл жағдайда b коэффициенттері оң мәнді болғандығынан, ал жаңа айнымалылар коэффициенттері $+1$ тең болғандығынан, ұғатынымыз $x_1=x_2=0$, $x_3=1700$, $x_4=1600$ алғашқы (фундаменталды) базистық шешімді құратындығы.

(I.2.11) теңдеуіміз келесі көріністі білдіреді. z функциясының мәні нөл санына тең болып, базистық емес айнымалылар x_1 және x_2 арқылы өрнектелген, олардың мәні нөлге тең. Бұл жағдайда z функциясының мәнін қалай кішірейтуге болады екен?

x_1 және x_2 айнымалылары оң мәнді (теріс мәнді емес) болғандығынан, олардың өзгеруі тек қана көбейу жағына қарай өседі. z функциясының ыңғайланған қалпында осы x_1 және x_2 айнымалыларының коэффициенттері теріс мәнді болғандықтан, олардың өзгеруі z функциясының мәнін кішірейуге әкеп соғады.

Екі айнымалының мәнін бірден көбейтудің орнына, біреуін ғана таңалап алып ұлғайтайық. z функциясындағы x_2 айнымалысындағы коэффициентің модулі үлкен сан болғандықтан, сол x_2 айнымалысын таңалап алайық.

x_2 айнымалысының мәнін ұлғайтуымыз x_3 және x_4 мәндерін өзгертеді, неге десеңіз (I.2.11) теңдеулердегі шарттар бұзылмауы қажет, және барлық айнымалылар оң мәнді болып қалуы қажет. Сөйтіп x_2 мәнін ұлғайтудың шектелген шарты болғаны.

Неге десеңіз $x_2=1700/4=425$ деп алған жағдайда $3x_2+4x_2+x_3=1700$ теңдеуіміз 0-ге тең болады. Ал $x_2=1600/5=320$ тең деп алғанда $2x_1+5x_2+x_4=1600$ теңдеуіміз 0-ге тең болады.

Сөйтіп біз x_2-нің мәнін 320 артырмай ғана ұлғайта аламыз (осы алғашқы мәндердің кішісі). x_4 айнымалысының оң мәнділік (теріс еместік) шартын бұзбай.

Шектелудің екінші шартын келесі түрде жазуымызға болады.

$$2/5x_1 + x_2 + 1/5x_4 = 320$$

Егерде, осы теңдеуді 4-ке көбейтіп (I.2.11) теңдеулерінің біріншісінен алып (минус қылып) тастасақ (4-теңдеудегі x_2 айнымалысының коэффициенті), ал сосын осы теңдеуді тағыда (-4)-ке көбейтіп (I.2.11) теңдеулерінің үшіншісінен, яғни бағытталған z функция өрнегінен алып тастасақ. x_2 айнымалысынан екінші шарттан бастап (екінші теңдеуден басқа) теңдеулердегі өрнектерден құтыламыз. Екінші теңдеудегі x_2 айнымалысының коэффициенты +1 тең болады.

Шектелу шарттары және бағытталған функция теңдеуі келесі түрде жазылады

$$7/5\,x_1 \qquad + x_3-4/5x_4=420,$$
$$2/5x_2+x_2 \qquad +1/5x_4=320, \qquad (I.2.12)$$
$$-2/3x_1 \qquad +4/5x_4=z+1280$$

Базистық анықталған керекті шешімнің x_2,x_3 базисы үшін жазылған ыңғайланған қалып болып табылады.

x_1 және x_4 айнымалыларымыз базистық емес айнымалылар болды. Енді z функциясының мәнін кішірейту үшін тек қана x_1 айнымалысының мәнін ұлғайтуымызға болады.

x_2 және x_3 айнымалылары оң мәнді (теріс мәнді емес) болып қалуы үшін x_1 айнымалысының мәнін нешеге ұлғайтуымызға болады?

$x_2=\frac{420}{7/5}=300$ тең болғанда $7/5x_1+x_3 \; -4/5x_4=420$ теңдеуіміз нөлге тең болады.

Ал $x_1=\frac{320}{2/5}=800$ тең болғанда екінші $2/5x_1+x_2+1/5x_4=320$ теңдеуміз нөлге тең болады.

Сөйтіп аңғаратынымыз x_1 айнымалысының мәнін ***300***-ден артық ұлғайтуымызға болмайтындығы (осы мәндердің ең кіші (минималды) мәні).

Шектелу шартының бірінші теңдеуін ***7/5*** бөлгеннен кейін (x_1 айнымалысының коэффициенті) келесі түрде жазылады

$x_1+5/7x_3-4/7x_4=300.$

Басқа шектелу шарттарынан x_1 айнымалысындағы коэффициентін нөлге теңеп және бағытталған функция өрнегінен x_1 айнымалысын жояйық. Ол үшін соңғы теңдеуді ***2/5*** көбейтіп шектелу шартының екінші теңдеуінен алып тастаймыз және ***(-2/5)*** көбейтіп соңғы теңдеуден функция өрнегінен алып тастаймыз. Сөйтіп x_1,x_2 базисындағы есептің ыңғайланған қалпын тауып жазамыз. Ол келесі түрде жазылады:

$$\begin{aligned} x_1 \quad +5/7x_3-4/7x_4&=300 \\ x_2-2/7x_3+3/7x_4&=200 \\ 2/7x_3+4/7x_4&=Z+1400 \end{aligned} \qquad (I.2.13)$$

Енді аңғаратынымыз, базистық емес x_3, x_4 айнымалыларының кез келгенін ұлғайтсақ, ол әрекет z функциясын кішірейтпейді, керісінше көбейтеді (неге десеңіз бағытталған z функциясының өрнегінде олардың коэффициенттері оң мәнді болғандықтан).

Сөйтіп, z функциясының арығарай кемуі (кішіреуі) болмайды, сондықтан функцияның минималдық мәніне жеттік деп есептейміз. Оның мәні базистық анықталған $x_1=300$, $x_2=200$, $x_3=x_4=0$; керекті шешімде $z=-1440$ тең болады.

Егерде, I.1.1 суретіндегі геометриялық интерпретацияға қайтып оралып қарасақ, байқап анықтайтынымыз, ыңғайланған қалыптар рет-ретімен ***0*** нүктесінен ***A*** нүктесіне келтірілді, сосын А нүктесінен ***B*** нүктесіне келіп - минимумның орналасқан нүктесіне әкеп тірелді. Оқырмандарға келесі тексеруді - жолдаймыз, егерде (I.2.11) теңдеулеріндегі алғашында x_1 айнымалысын тағайындағанда, осы қарастырылған процедура ***0*** нүктесінен ***B*** нүктесіне ***C*** нүктесі арқылы әкеп тірелетіндігін.

Бұл итерациалық процесті симплекс-кестесі арқылы түсіндіріп көрсеткен ыңғайлы. Ол кестелер (I.2.11) - (I.2.13) теңдеулерден тұрады, келесі түрде шектелу шарттар және бағытталған функция үшін жазылып көрсетіледі.

$-z-2x_1-4x_2=0$; $-Z-2/5x_1+4/5x_4=1280$;

$-z+2/7x_3+4/7x_4=1400$.

Төменде үш кесте көрсетілген.

Алғашқы ***0***-ші итерацияда жұлдызша (*) арқылы белгіленген сан 5- $\boldsymbol{x_2}$ айнымалы коэффициенты. Осы $\boldsymbol{x_2}$ айнымалысын шектелу шарттарында базистық айнымалысына аударуымыз қажет, ондай әрекетті жоғарыда жазып түсіндірдік. Бірінші (1-ші) итерацияда белгіленген сан ***7/5.*** Кестеден байқайтынымыз, егерде, айнымалылар коэффициенттері міндетті түрде нөлге тең болатын жағдайда, олардың орнын (-) нүкте арқылы белгілейміз, неге десеңіз оларды есептеу процесінде кездейсоқ нөлге айналып кететін айнымалылар коэффициенттерінен айырып ерекше көрсету үшін.

Итерация	**Базис**	**Мәндері**	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3 x_4	1700 1600	3 2	4 5	1	 1
	- Z	0	-2	-4		
1	x_3 x_2	420 320	7/5 2/5	 1	1	
	- Z	1280	-2/5			4/5
2	x_1 x_2	300 200	1	 1	5/7 -2/7	-4/7 3/7
	- Z	1400			2/7	4/7

Осы қарастырылған мысалдың нәтижелерін симплекс-кестесінің жалпы түріне көрсетейік.

Есептің алғашқы ыңғайлы қалпы және k итерациясындағы табылған ыңғайлы қалпы белгілі деп ұйғарайық. Олар (I.2.4) және (I.2.5) теңдеулері арқылы өрнектеліп келесі кестеде келтіріліп жазылған болсын.

Итера-ция	**Базис**	**Мән-дері**	x_1	x_2		x_r		x_m	x_{m+1}		x_S		x_n
k	x_1	b'_1	1	.	.	.		.	a'_{1m+1}		a'_{1s}		a'_{1n}
	x_2	b'_2	.	1	.	.		.	a'_{2m+1}		a'_{2s}		a'_{2n}
	.	.	.	.	.	.		.	.		.		.
	x_r	b'_r	.	.	.	1		.	a'_{rm+1}		a'_{rs}*		a'_{rn}
	.	.	.	.	.	.		.	.		.		.
	x_m	b'_m	.	.	.	.		1	a'_{mm+1}		a'_{ms}		a'_{mn}
	- Z	- Z_0	.	.	.	.		.	c'_{m+1}		c'_s		c'_n

Итерациялық процес үш қадамнан құралады.

1. Базистық шешімге кіргізетін айнымалыны табу.

$x_{m+1}, \ldots, x_n$ айнымалылары базистық емес болғандықтан, $c'_{m+1}, \ldots, c'_S, \ldots, c'_n$ коэффициенттерінің арасынан ең кіші мәнін іздеп табамыз. Мысалы, ол коэффициент c'_S болсын. Егерде c'_S коэффициенті теріс мәнді болған жағдайда, x_S айнымалысының ұлғайуы z функциясының мәнін кішірейтеді (кемітеді). Осы жағдайға байланысты, келесі келісімді қабылдайық, егерде c'_j коэффициеттерінің кей біреуі теріс мәнді болса, осы коэффициенттердің ішінен модулі ең үлкенін таңалап анықтайық. Бұл әрекетке ойлансақ, функцияны тезірек кішірейтіп минимумын азырақ қадам жасауға ұмтылғандаймыз, бірақ кез келген теріс мәні бар c'_j таңалап тағайындауымызғада болады. Егерде $c'_s \geq 0$ барлығы оң мәнді болса, функцияның мәнін кішірейте алмайтын жағдайды байқаймыз, яғни соңғы базистық шешімде минимумның табылғаны деп есептейміз.

2. Базистық шешімнен шығаратын айнымалыны табу.

Осындай базистық айнымалылардың оң мәнді болып (теріс мәнді болалмайтын) шарттарын бұзбайтын қылып x_S айнымалысының мәнін нешеге ұлғайталатынымызды анықтайық. Егерде, i шартындағы $a'_{is}>0$ (оң мәнді болса), онда x_S айнымалысының ең үлкен мән ретіндегі сан b'_i/a'_{is} болады, айтпесе x_i айнымалысының мәні теріс мәнді болып кетеді. (Егерде $a'_{is}<=0$, онда x_S мәні ұлғайғансайын базистық x_i айнымалысының мәні де көбейе береді). Сөйтіп x_S айнымалысының мәні келесі максималды санға дейін көбейе алады.

$\max x_s = \min (b'_i/a'_{is})$, ($i=1,2,..,m$ және $a'_{is}>0$ үшін) (I.2.14)

Егерде осы минимум r жатық жолында орналасса, онда x_r мәні нөлге тең болу үшін x_S мәні b'_r/a'_{rs} тең болуы қажет. Басқа базистық айнымалыларда теріс мәнді болмай қала береді. a'_{rs} элементін - *жетекші* (шешуші) элемент деп, r жатық жолын - *жетекші* (шешуші) жол деп, ал s бағанасын - шешуші (*жетекші*) бағана деп атаймыз.

3. Жаңа ыңғайланған қалыпын құру.

Енді жаңа базиске x_r айнымалысының орнына x_S айнымалысын еңгізуіміз қажет. Жаңа ыңғайлы қалыпын құру үшін жетекші жолдағы x_S айнымалысының коэффициентін бірге тең қылыуымыз қажет, ол үшін осы жатық жолды a'_{rs} мәніне (санына) бөліп жаңа жетекші жолдың мәндерін есептейміз.

Сосын бағытталған функция өрнегінен және басқа шектелу шарттарындағы жолдан x_S айнымалысын жоямыз. Бұл әрекетті іске асыру үшін, (жаңа жетектеуші жолын) x a'_{is} көбейтіп, i-ші жатық жолынан алып тастаймыз, мұнда a'_{is} осы i-ші жолдағы x_S айнымалысының коэффициенты. Бағытталған функция өрнегін өзгерту үшін, (жаңа жетектеуші жолын) x c'_s көбейтіп, осы функция өрнегінің жолынан алып тастаймыз, мұндағы $c'_s(<0)$ өрнектегі x_S айнымалысына сәйкес коэффициент.

Чередтегі итерацияда ыңғайлы қалыпы келесі түрде кестеде көрсетілген:

Итерация	Базис	Мәндері	x_1	x_2		x_r		x_m	x_{m+1}		x_S		x_n
k+1	x_1	b_1^+	1	.	.	a_{1r}^+		.	a_{1m+1}^+		.		a_{1n}^+
	x_2	b_2^+	.	1	.	a_{2r}^+		.	a_{2m+1}^+		.		a_{2n}^+
		.	.	.	.	.		.	.		.		.
	x_s	b_r^+	.	.	.	a_{rr}^+		.	a_{rm+1}^+		1		a_{rn}^+
		.	.	.	.	.		.	.		.		.
	x_m	b_m^+	.	.	.	a_{mr}^+		1	a_{mm+1}^+		.		a_{mn}^+
	- Z	$-Z_0^+$				c_r^+			c_{m+1}^+				c_n^+

мұндағы

$b_r^+ = b'_r / a'_{rs};$ (I.2.15)

$a_{rj}^+ = a'_{rj} / a'_{rs};$ (I.2.16)

$b_i^+ = b'_i - a'_{is} b_r^*, \ i \# r;$ (I.2.17)

$a_{ij}^+ = a'_{ij} - a'_{is} a_{rj}^+;$ (I.2.18)

$c_j^+ = c'_j - c'_s a_{rj}^+;$ (I.2.19)

$z_0^+ = z'_0 - c'_s b_r$ (I.2,20)

(I.2.15) - (I.2.20) формулаларын еске сақтаудың қажеттілігі жоқ; олар бұл жерде тақырыптарды жолдап көрсету үшін ғана қажет. Есептеуді үшінші қадамдағы әрекеттерге сәйкес қылып есептеген ыңғайлы.

Енді жаңа ыңғайлы қалыпын құрғаннан кейін бірінші қадамға оралып және c_j^+ сандарының ішінен, ең кіші мәні барын таңалап анықтаймыз. Түбінде біздер олардың барлығы оң мәнді болатынын анықтаймыз; осы жағдайда z функциясының минимумын іздеп таптық деп есептеп симплекс-кестелер әдістінің процессін тоқтатамыз.

2 мысал.

$z = -6x_1 - 2x_2$ функциясының келесі шектелу шарттарында

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 \quad = 9,$

$3x_1 + x_2 \quad + x_4 = 6.$

минимумын табыңыз.

Бұл мысал I.1.2 тақырыбының 2-ші мысалы, стандарттық қалпына келтірілген.

Симплекс-кестелер тізімі төменде келтірілген. Осы кетселерді тексеруді оқырманның өзіне ұсынамыз. Алғашқы базис және ыңғайланған қалыпы айқын.

1-ші итерацияда базистық емес айнымалылардағы коэффициенттер теріс мәнді емес (оң мәнді).

I.1.3 суретімен салыстырғанда біздің аңғаратынымыз **0** нүктесінен **C** нүктесіне ығысқанымызды. Оптимум **C** нүктесінде орналасады, онда $x_1 = x_2, x_3 = 5, x_2 = x_4 = 0, Z$ функциясының минималды мәні *12* тең болады.

z функциясының өрнегіндегі x_2 айнымалысындағы нөлге тең коэффициентен байқайтынымыз - x_2-нің мәнін ұлғайтуымызға болатындығы.

Мұндай әрекет z функциясының мәнін көбейтпейді де және де кішірейтпейді. Бұл жағдай оптималдық шешімнің жалғыз болмағандығын білдіреді.

Итерация	**Базис**	**Мәндері**	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3 x_4	9 6	2 3*	4 1	1 .	. 1
	- Z	0	-6	-2	.	.
1	x_3 x_1	5 2	. 1	10/3 * 1/3	1 .	-2/3 1/3
	- Z	12	.	0	.	2

Соңғы әрекет бойынша табылған ыңғайлы қалыпының кестесі (жетекші элемент жұлдызша мен белгіленген) төменде көрсетіледі.

2	x_2 x_1	3/2 3/2	. 1	1 .	3/10 -1/10	-2/10 4/10
	- Z	12	.	.	0	2

Бұл кестедегі оптималдық шешім І.1.3 суретіндегі ***B*** нүктесіне сәйкес. Процедура процесінің оптималдық нүктелердің көп болғандығы, z функциясының оптималдық шешіміндегі ыңғайланған қалыпында нөлге тең коэффициенттердің болатындығына көзіміз жетті.

3 мысал.

Шектелу шарттарындағы $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, x_4 = 0,}$

$$\boldsymbol{x_1 - x_2 - x_3 = 1,}$$
$$\boldsymbol{x_2 + x_4 = 2}$$

$\boldsymbol{z = -x_1 - x_2}$ функциясының минимумын табайық. Аңғаратынымыз, $x_1=1$, $x_4=2$, $x_2=x_3= 0$ нүктесі базистық шешім екендігі және шектелу шарттарыда керекті түрде келтірілгендігі, сондықтан әдісті қолданайық.

Бұл есеп І.1.2 тақырыбындағы 3-ші мысал. І.1.4 суретіндегі ***A*** нүктесіне сәйкес бірінші кестені келтірейік.

Итерация	**Базис**	**Мәндері**	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_1 x_4	1 2	1 .	-1 1*	-1 0	. 1
	- Z	1	.	-2	-1	.
1	x_1 x_2	3 2	1 .	. 1	-1 0	1 1
	- Z	5	.	.	-1	2

Мұндағы есептелген нүктелер екінші кестеде келтірілген. Ол I.1.4 суретіндегі ***B*** нүктесіне сәйкес шешім.

Байқайтынымыз, z функциясын тағыда әрі қарай кішірейтуімізге болатындығы x_3 айнымалысындағы коэффициентін көбейтіп. Бірақ осы жағдайда белгілі қиыншылықтар туады. x_3 айнымалысына сәйкес, кестенің бағанасындағы шектелу шарттарындағы коэффициентері нақты оң мәнді емес. Сондықтан, x_3 мәнін қаншама көбейтсекте (ұлғайтсақта), базистық айнымалы еш қашанда нөлге тең болмайды. Шынында да, x_1 ұлғайа береді де, ал x_2 - өзгермейді. Бұл жағдай (I.1.4 суретті қараңыз) шексіздік шешімге жатады. Симплекс әдісінде шексіздік шешімнің көрінісі - барлық коэффициенттердің $a'_{is}<=0$ нақты оң мәнді болмағандығы.

§ I.2.2. Симплекс әдісін компьютерде атқару

Симплекс - әдісінің есептеу процедурасы итерациялық процессс болады. Егерде есепте бір неше шектелу шарттары және айнымалылары болса бұл есептеу процедурасы өте үлкен процессс болып табылады. Тәжірибелік есептердің көбіне оншақты шектелу шарттары және айнымалылары болады (кейде тіпті одан көп), сондықтан ондай есептерді қолмен есептеу өте қиын және қолайсыз. Симплекс - әдісі компьютерге арналған әдіс. Сондықтан сызықтық программалау теориясының дамуы электрондық есептеу машиналарының (ЭЕМ) даму мезгілдері де бір уақытта болды. Компьютерсіз бұл теорияның қолдану облысы өте азғантай болатын еді.

Осы соңғы тақырыптағы процедураның есептеу процесссін компьютерде қолдану үшін арналған программасын, төменде келтірейік.

Итерациялық процедура негізінде үш қадамнан құрылады. Алғашында, базиске еңгізетін айнымалыны табу үшін, min $C_J'=C_S'(<0)$, іздеп табамыз. Сосын базистен алып тастайтын базистық айнымалының орналасқан, жатық жолын формула бойынша табамыз.

$$\max x_s = \min_{\substack{i=1\ldots m \\ a'_{is}>0}} \left(\frac{b'_i}{a'_{is}} \right) = \frac{b'_r}{a'_{rs}} \qquad (I.2.21)$$

Бұл нәтижедегі өрнек (I.2.14) формуласына сәйкес. Түбінде осындай процедура арқылы (I.2.15) – (I.2.20) теңдеулеріне сәйкес ыңғайланған қалыпқа келіп тірелеміз.

Программада осы тақырыпта айтылған белгіленген белгілерге сәйкес қылып айнымалыларда жазылған. Бағытталған функция және айнымалылар мәндері (Z_0^I және b_i^I) ***A*** матрицасының 0-ші номері бар бағанасында еске сақталады. Бұл матрицасының ең соңғы жатық жолы бағытталған функция коэффициенттері үшін пайдаланылады. 4000-4030 жолындағы мәліметтер 21 тақырыбының 1 мысалы үшін қолданылған.

```
10 REM В ПРОГРАММЕ РЕАЛИЗОВАН СИМПЛЕКС-МЕТОД С ЗАДАННЫМ
15 REM БАЗИСНЫМ ДОПУСТИМЫМ РЕШЕНИЕМ ДЛЯ ОГРАНИЧЕНИЙ
```

```
20 REM ВВЕСТИ КОЛИЧЕСТВО ОГРАНИЧЕНИЙ И КОЛИЧЕСТВО
ПЕРЕМЕННЫХ
30 READ M,N
40 M1=M+1
50 DIM A(M1,N), BS(M), NB(N), V(M1)
60 PRINT «ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ»
100 REM ВВЕСТИ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕНИЙ И ЦЕЛЕВОЙ
105 REM ФУНКЦИИ ПОСТРОЧНО
110 FOR I=1 TO M1:FOR J=1 TO N
120 READ A(I,J)
130 NEXT J:NEXT I
150 REM ВВЕСТИ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ БАЗИСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И
155 REM ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В МАССИВ A(I,0)
160 FOR I=1 TO M1:READ A(I,0):NEXT I
200 REM ВВЕСТИ БАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ; BS – МЕТКА БАЗИСНОЙ
205 REM ПЕРЕМЕННОЙ В ОГРАНИЧЕНИИ I
210 FOR I=1 TO M:READ BS(I):NEXT I
250 REM ПОМЕТИТЬ НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ; ЕСЛИ J –
255 REM НЕБАЗИСНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ, ТО NB(J)=0
260 FOR I=1 TO M:NB(BS(I))=1:NEXT I
290 НАПЕЧАТАТЬ ТАБЛИЦУ
300 PRINT « ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА» : PRINT «ИТЕРАЦИЯ»K
310 GOSUB 3000:STOP
400 ZERO=1E-08
490 REM НАЙТИ НАИМЕНЬШИЙ КОЭФФИЦИЕНТ В СТРОКЕ Z (Т.Е.
495 REM СТРОКУ M1)
500 MIN=-ZERO:S=0:PV=0
510 FOR J=1 TO N
520 IF NB(J)=1 THEN GOTO 550
530 IF A(M1,J)>=MIN THEN GOTO 550
540 MIN=A(M1,J):S=J
550 NEXT J
560 REM ЕСЛИ S=0, ТО ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ И
565 REM МИНИМУМ НАЙДЕН
570 IF S=0 THEN GOTO 2000
740 REM НАЙТИ СТРОКУ ПЕРЕМЕННЫХ, КОТОРУЮ СЛЕДУЕТ
745 REM ИСКЛЮЧИТЬ ИЗ БАЗИСА ПО УСЛОВИЮ МИНИМУМА BI/A(IS)
750 MIN = 1E20:R=0
760 FOR I=1 TO M
770 IF A(I,S)<= ZERO THEN GOTO 810
780 RT=A(I,0)/A(I,S)
790 IF RT>=MIN THEN GOTO 810
800 R=I:MIN=A(I,0)/A(I,S)
810 NEXT I
890 REM ЕСЛИ R=0, ТО ИМЕЕТ МЕСТО РЕШЕНИЕ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ
900 IF R=0 THEN GOTO 1800
910 PRINT «ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ»;R;«СТОЛБЦА»;S
920 PRINT « «
990 REM РАЗДЕЛИТЬ ВЕДУЩУЮ СТРОКУ НА ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ
1000 PV=A(R,S)
1010 FOR J=0 TO N:A(R,J)/PV:NEXT J
1040 REM ВЫЧИСЛИТЬ НОВУЮ КАНОНИЧЕСКУЮ ФОРМУ, ЗАПОМНИВ
1045 REM ВЕДУЩИЙ СТОЛБЕЦ ДО ЕГО ИЗМЕНЕНИЯ
```

```
1050 FOR I=1 TO M1:V(I)=A(I,S):NEXT I
1070 FOR I=1 TO M1
1080 IF I=R THEN GOTO 1120
1090 FOR J=0 TO N
1100 A(I,J)=A(I,J)-V(I)*A(R,J)
1110 NEXT J
1120 NEXT I
1150 REM ПЕРЕНАЗНАЧИТЬ И ПОВТОРНО ПОМЕСТИТЬ БАЗИСНЫЕ
1155 REM И НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
1160 NB(BS(R))=0:NB(S)=1:BS(R)=S
1170 REM СЧЕТЧИК ИТЕРАЦИЙ
1180 K=K+1
1190 REM НАПЕЧАТАТЬ НОВУЮ ТАБЛИЦУ
1200 PRINT «ИТЕРАЦИЯ»K
1210 GOSUB 3000:STOP
1240 REM ПОВТОРИТЬ ИТЕРАЦИОННУЮ ПРОЦЕДУРУ
1250 GOTO 500
1800 PRINT «ПЕРЕМЕННАЯ «S» НЕ ИМЕЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ»
1810 GOSUB 3000
1820 GOTO 2500
2000 PRINT «ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ»
2010 PRINT «ОГРАНИЧЕНИЕ  БАЗИС    ЗНАЧЕНИЕ»
2020 PB=144
2030 FOR I=1 TO M
2040 PRINT « ;I;»       «;BS(I);
2050 PA=A(I,0):GOSUB 9000:PRINT « «
2060 NEXT I
2090 PRINT «МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН «;-A(M1,0)
2100 GOSUB 3000
2500 END
3000 PRINT «БАЗИС  ЗНАЧЕНИЕ»;
3010 FOR J=1 TO N:PRINT «  X«J»  «;:NEXT J
3020 PRINT « «
3030 PB=122
3040 FOR I=1 TO M1
3050 IF I=M1 THEN PRINT «-Z»;:GOTO 3080
3060 PRINT BS(I);
3080 FOR J=0 TO N
3090 PA=A(I,J):GOSUB 9000
3100 NEXT J
3110 PRINT « «
3120 NEXT I:PRINT « «
3200 RETURN
4000 DATA 2,4
4010 DATA 3,4,1,0,2,5,0,1,-2,-4,0,0
4020 DATA 1700,1600,0
4030 DATA 3,4
9000 PC=INT(PB/100)
9010 P$=«
9020 IF PC=0 THEN PRINT « «:GOTO 9040
9030 PRINT LEFT$(P$,PC);
9040 PC=PB-100*PC
9050 PD=INT(PC/10):PC=PC-10*PD
```

```
9060 IF PD=0 THEN PD=1
9070 IF PA<0 THEN P$=P$+«-»
9080 PE=ABS(PA)
9090 PE=PE+5*10^(-1-PC)
9100 IF PE>=10^PD THEN PRINT PA;:RETURN
9110 P$=P$+MID$(STR$(INT(PE)),2,PD)
9120 PRINT RIGHT$(P$,PD+1)
9130 IF PC=0 THEN RETURN
9140 PRINT «.»;
9150 PE=INT((PE-INT(PE))*10^PC)
9160 P$=«000000000»
9170 P$=P$+MID$(STR$(PE),2,PC)
9180 PRINT RIGHT$(P$,PC);:RETURN
```

Бұл программа бойынша келесі ескертулерді ескергеніміз жөн және пайдалы. 500 жолдан 550 жолға дейін $\boldsymbol{C_J'}$ минимумы бар деп есептелгенде, соның минимумын іздеп табылады. Алғашында $\boldsymbol{MIN=-10^{-8}}$ тең деп алып жалған теріс мәндерді іздеуден сақталамыз, ол компьютердің шектелген дәлдікпен істеуіне байланысты. Симплекс әдіс кейде өте ұзын және күрделі есептеуді қажет етеді, осындай есептеу процессінде қателер жиналуы мүмкін. Мысалы нөлге тең болатын санның мәні компьютерде - $\boldsymbol{1,23947*10^{-29}}$ тең болуы мүмкін. Біз осындай теріс мәнді қателі сандардан сақтануымыз қажет.

Осындай ұқсас сақтаныш шараларды базистен алып тастайтын айнымалы орналасқан жатық жолын табатын процессінде де қолданамыз (750-880 жолдары).

$\boldsymbol{a'_{is}}$ коэффициенттерінің оң мәнді екенін тексереміз. Ескеріп аңғаратынымыз, қарастырылып жатқан процедурада (мұндағы $\boldsymbol{b'_i/a'_{is}}$ сандарының минималды мәні ізделеді) сондықтан 0 (нөл) санына бөліп есептеу процессі программаның орындалунда қате тудыруы мүмкін, соны ескеру қажет.

Есеп арасындағы кестелердің көрінісін печаттап көрсететін келесі жолдарда 300, 310, 1200, 1210, 1810, 2100 атқарылады. Оның кейбіреулері (1210 жолда) қарастырылудан алынып тасталуы мүмкін. Программаның жұмыс істеуіндегі алғашқы көріністер мліметтердің дұрыс екенін тексеруге арналған. Программаның 910 жолы жетекші элементтің орналасқан орнын көрсетеді, яғни жетекші жатық жолды және жетекші кестедегі бағананы.

Процедураның 3000 жолынан кестенің көрсетілуі (печатталуы) басталады. Шығарылатын мәліметтер, форматалған болса да, ***n***-нің үлкен сандарына экранға немесе тетігіне шығару олардың сиымына байланысты, толып кетуі мүмкін. Сондықтан, осындай жағдай ескеріліп, программаның осы жолдары өнделіп қосылып жазылуы мүмкін. Бірақта, егерде тексерілетін есептерде айнымалылар саны (10-ға дейін болған жағдайда) өте үлкен болмаса, осы қалпында қалдырып қарастыруымызға болады.

Программаның 9000 жолынан басталатын әрекет форматтау әрекеті болады. Оның түсінігі қосымшада келтірілген. Форматтау сандары 2020 жолдағы ***PB***=144 және 3030 жолдағы ***PB***=122, карасты айнымалылардың мәндеріне және керекті дәлдікке байланысты өзгертілуі мүмкін.

Төменде келтірілген программаның жұмыс істеу көрінісі I.2.1 тақырыбындағы 1-ші мысалға арналған. Көріністегі мәліметтің барлығы дұрыс деп есептеліп, осы есептің есептелуі симплекс - кестелер арқылы көрсетілген.

Оқырмандарға, басқада мысалдар үшін программаның жұмыс істеуін тексеруін, өздеріне жолдаймыз. Ескертетініміз - алғашқы керекті базистық шешім белгілі болуы қажет.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА
ИТЕРАЦИЯ 0

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4
3	1700	3.00	4.00	1.00	0.00
4	1600	2.00	5.00	0.00	1.00
-Z	0.00	-2.00	-4.00	0.00	0.00

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 2 СТОЛБЦА 2

ИТЕРАЦИЯ 1

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4
3	420	1.40	0.00	1.00	-0.80
2	320	0.40	1.00	0.00	0.20
-Z	1280	-0.40	0.00	0.00	0.80

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 1

ИТЕРАЦИЯ 2

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4
1	300	1.00	0.00	0.71	-0.57
2	200	0.00	1.00	-0.29	0.43
-Z	1400	0.00	0.00	0.29	0.57

ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

ОГРАНИЧЕНИЕ	БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ
1	1	300.0000
2	2	200.0000

МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН –1400

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4
1	300	1.00	0.00	0.71	-0.57
2	200	0.00	1.00	-0.29	0.43
-Z	1400	0.00	0.00	0.29	0.57

§ I.2.3 Алғашқы базистық керекті шешімді тудырып келтіру

Симплекс әдісінің жұмыс істеуін көрсетіп түсіндіру үшін қарастырылған мысалдар -1.2 тақырыбынан алынған. Бұл мысалдарда бастапқы базистық керекті шешім және оған сәйкес ыңғайланған формасын жазып келтіру түсінікті болды немесе 3-ші мысалдағыдай оңай келтіріп көрсетуімізге мүмкіндік болды.

Келесі есепті шығару қажет болсын.

1 мысал

$z=-3x_1-4x_2$ функциясының минимумын шектелу шарттарында $x_1,\ x_2\geq 0$,

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad & >=10,\\
x_2 & >=5,\\
x_1+x_2 & <=20,\\
-x_1+4x_2 & <=20
\end{aligned}
$$

есепті шығарайық.

Бұл I.1.2 тақырыбының 1-ші мысалы. Ол графикалық түрде еш қиыншылықсыз шығарылады.

Стандарттық қалыпында қосымша теріс мәнді емес айнымалылары мен шектелу шарттары келесі түрде жазылады.

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad -x_3 \quad & =10,\\
x_2 \quad -x_4 \quad & =5,\\
x_1+x_2 \quad +x_5 \quad & =20,\\
-x_1+4x_2 \quad +x_6 & =20.
\end{aligned}
\qquad (I.2.22)
$$

Бірақта симплекс әдісін қолдану кезінде кейбір қиыншылықтар туады. Ол қиыншылықтар базистық керекті шешімнің болмағандығы, неге десеңіз базистық шешімді қосымша айнымалылардың мәнін теңдеулердің оң жағындағы тұрақты санға теңесек, ондай шешім шектелу шартын бұзғаны. Ол шешім ретінде $x_1=x_2=0,\ x_3=-10,\ x_4=-5,\ x_5=20,\ x_6=20$ нүктенің болғандығы, мұдағы x_3 және x_4 айнымалыларының мәні теріс сан екендігін байқаймыз, ал шарт бойынша айнымалынық мәні теріс болмауы керек. Мұндай қиыншылықтар шектелу шарттарынық теқсіздік ретінде берілгендігінен туындайды. Олар тіпті теңдік түрінде берілген жағдайда кездеседі.

Осындай қиындықтардан өтудің бір жолы ретінде симплекс әдісін базистық керекті шешімін қолдан туындырып келтіріп қолдану болып табылады.

Алдыңғы екі шектелу шарттарын өзгертіп жазайық (басқа екі шартта қиындық жоқ), ол үшін теңдеулердің сол жағына жасанды x_7 және x_8 айнымалыларын (теріс мәнді емес) еңгізейік.

Өзгертілген шектелу шарттарын келесі түрде жазамыз:

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad -x_3 \quad +x_7 \quad & =10,\\
x_2 \quad -x_4 \quad +x_8 & =5,\\
x_1+x_2 \quad +x_5 \quad & =20,\\
-x_1+4x_2 \quad +x_6 \quad & =20,\\
-3x_1-4x_2 \quad & =Z.
\end{aligned}
\qquad (I.2.23)
$$

және бұлар үшін базистық шешімнің айқын екенін көреміз.

Бұл шешімде $x_1=x_2=x_3=x_4=0$ (базистік емес айнымалылар),

$x_7=10,\ x_8=5,\ x_5=20,\ x_6=20$

Симпликс әдісін келесі

$$w=x_7+x_8 \qquad (I.2.24)$$

функциясына қолданатынымызды аңғарайық.

w функциясын *жасанды бағытталған функция* деп атаймыз.

Есепті шығарудың I-кезегі ***w*** функциясының минимумын табуға арналады.

Егер де (I.2.24) шектеу шарттарының керекті шешімі, яғни базистік шешімін анықтасақ. (бірақ ондай жағдай болмауы мүмкіндігі жоғарыда көрсетілгендей). Онда есепті шығарудың I кезегі аяқталуы ***W*** функциясының мәнін 0-ге тең ғылып аяқталады, бұл жағдайда x_7 және x_8 айнымалыларының мәнін нөлге тең деп есептейміз. Егерде x_7 және x_8 нөлге тең болған жағдайда өзгертілген (I.2.23) шектелу шарттары алғашында берілген (I.2.22) шектелу шарттарымен бірдей болады. ***w*** функциясының минимумын тапқандағы базистік керекті шешімді (I-кезегіндегі) ***z*** функциясының минимумын іздеудегі алғашқы базистік керекті шешім ретінде II-кезегінде қолдануымызға болады. Осы уақыттан бастап x_7 және x_8 айнымалыларының нөлдік мәндері қарастырылмай жойылады.

Шынында да ***w*** функциясының минимумын табу үшін осы өрнектеп қажетті түрге келтіруіміз қажет, яғни базистік емес айнымалылар арқылы жасанды x_7 және x_8 айнымалылар (I.2.23) теңдеулерінің шешуінің алғашында базистік болады. ***w*** функциясының x_7 және x_8 айнымалыларын алып тастау онша қиын емес.

Есептің I-кезеңінің кестесінің көрінісі келесі түрде болады:

Итерация	**Базис**	**Мәндері**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	x_7	10	1*	0	-1	0	.	.	1	.
	x_8	5	0	1	0	-1	.	.	.	1
	x_5	20	1	1	0	0	1	.	.	.
	x_6	20	-1	4	0	0	.	1	.	.
	-z	0	-3	-4	0	0	.	.	.	.
	-w	-15	-1	-1	1	1	.	.	.	.
1	x_1	10	1	0	-1	0	.	.	1	.
	x_8	5	.	1*	0	-1	.	.	0	1
	x_5	10	.	1	1	0	1	.	-1	.
	x_6	30	.	4	-1	0	.	1	1	.
	-z	30	.	-4	-3	0	.	.	3	.
	-w	-5	.	-1	0	1	.	.	1	.
2	x_1	10	1	.	-1	0	.	.	1	0
	x_2	5	.	1	0	-1	.	.	0	1
	x_5	5	.	.	1	1	1	.	-1	-1
	x_6	10	.	.	-1	4	.	1	1	-4
	-z	50	.	.	-3	-4	.	.	3	4
	-w	0	.	.	0	0	.	.	1	1

w функциясының өрнегі орналасқан жатық жолды басқа жолдардан алып тастау керек. Басқа есептерде де осы идея қолданылады. Сөйтіп, келесі өрнек табылды:

$$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = w - 15 \qquad (I.2.25)$$

Есепті шығарудың I-кезеңінде шектеу шарттарына істелген әрекеттер z функциясының өрнегіне де істеледі. Сөйтіп, I-кезеңнің соңында табылған базистік шешімге сәйкес z функциясын келтіріп табамыз. w функциясы нөлге теңелгеннен кейін жасанды x_7 және x_8 айнымалыларын және w функциясын қарастырудан алып тастап есепті шығарудың II-кезеңіне көшеміз. Бұл кездегі жағдайда w функциясының минимумы табылды, x_7 және x_8 айнымалалары базистік емес, сондықтан олар нөлге тең болады.

Аңғарып зер салатынымыз, x_7 айнымалысын 1-ші итерациясындаақ қараудан алыптастауымызға болатын еді. Ал қазіргі жағдайда x_7 және x_8 айнымалаларын қарастырудан алып тастаймыз. x_7 айнымалысы жайғана сақталып, w функциясының оптималды шешіміне x_7 және x_8 айнымалаларының коэффициенті 1-ге тең болып кіретінін көрсету үшін, бұл кезде w функциясының мәні нөлге тең болады ($-w=x_7+x_8=0$).

z функциясының өрнегі келтірілген базистік шешім үшін сақталғандықтан, енді осы z функциясының минимумын іздеп табуымызға болады.

Қазіргі жағдайда біз ***P*** нүктесінде (I.1.2 сурет) орналасып тұрмыз. Есептің I-кезеңі аяқталды және симплекс кестесінің екі соңғы бағанасыз және соңғы және жатық жолсыз көрінісі есептің II-кезеғіне алғашқы кірісті кесте болып табылады.

II-кезеғінің кестелерінің көрінісі келесі түрде көрсетілген:

Итерация	Базис	Мәндері	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	10	1	.	-1	0	.	.
	x_2	5	.	1	0	-1	.	.
	x_5	5	.	.	-1	1	1	.
	x_6	10	.	.	-1	4*	.	1
	-z	50	.	.	-3	-4	.	.
3	x_1	10	1	.	-1	.	.	0
	x_2	15/2	.	1	-1/4	.	.	1/4
	x_5	5/2	.	.	5/4*	.	1	-1/4
	x_4	5/2	.	.	-1/4	1	.	1/4
	-z	60	.	.	-4	.	.	1
4	x_1	12	1	.	.	.	4/5	-1/5
	x_2	8	.	1	.	.	1/5	1/5
	x_3	2	.	.	1	.	4/5	-1/5
	x_4	3	.	.	.	1	1/5	1/5
	-z	68	.	.	.	.	16/5	1/5

Кесте тізбегіндегі 2,3,4 итерациялар5а ***P, Q, R*** н8ктелері сәйкес болады.

(I.1.2-сурет)

Соңғы кестедегі шешім оптималды болғаны, мұнда функция минимумымының мәні 68 тең, ол минимум $x_1=12, x_2=8, x_3=2, x_4=3$ нүктесінде орналасқан. Қосымша x_3 және x_4 айнымалыларының мәндері, оптималдық шешімде оң сан болғандықтан, осы айнымалылар кіретін шектелу шарттары нақты теңсіздікке айналады, яғни $x_1>10$ және $x_2>5$.

2 мысал. (I.1.2 тақырыбының 4-ші мысалы)

$z=2x_1+3x_2$ функциясының минимумын шектелу шарттарын $x_1,x_2\geq 0$; $x_1+x_2\geq 10$; $3x_1+5x_2\leq 15$ қанағаттандыратындай қылып табайық.

Есепті стандартты формаға келтірейік.

$$
\begin{aligned}
&x_1+x_2-x_3 &&=10\\
&3x_1+5x_2 \quad +x_4 &&=15 \qquad\qquad (I.2.26)\\
&2x_1+3x_2 &&=z
\end{aligned}
$$

Бірінші шектелу шартын өзгертеміз. Ол үшін жасанды x_5 айнымалысын енгіземіз және $w=x_5$ функциясының минимумын іздейміз. Ыңғайлы қалыпында жазсақ, $-x_1-x_2+x_3=w-10$ болады.

Симпликс-кестелер келесі түрде болады:

Итерация	Базис	Мәндері	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_5	10	1	1	-1	.	1
	x_4	15	3*	5	0	1	.
	-z	0	2	3	0	.	.
	-w	-10	-1	-1	1	.	.
1	x_5	5	.	-2/3	-1	-1/3	1
	x_1	5	1	5/3	0	1/3	.
	-z	-10	.	-1/3	0	-2/3	.
	-w	-5	.	2/3	1	1/3	.

Қазіргі жағдайда w функциясының минимумын таптық. Кестедегі w жатық жолындағы коэффициенттерінің барлығы оң мәнді. Бірақ та w функциясы 0-ге тең болмады, жасанды айнымалысы x_5 5-ке тең болды. Біз өзгертілмеген (I.2.26) шектелу шарттарының керекті шешімін табуымызға мүмкіншілік жоқ, бұл I.1.5-суретіндегіні көрсетеді. Есептің I-кезегі аяқталса да, біз II-кезекке көше алмаймыз, неге десеңіз, берілген шектелу шарттарының базистік керекті шешімінің болмағандығынан.

3 мысал.

Фирмаға қажетті көмірдің құрамында фосфор 0,03 % аспауы керек және күлдің араласы 3,25 % артық болмауы керек. Көмірдің үш сорты ***A,B,C*** бар, оның 1 тоннасының бағалары және құрамы келесі кестеде көрсетілген.

Енді осы көмірлер сорттарын қалай араластырып, шектелу шартын бұзбай және минималды бағада болатындай етіп жасау есебін шығаруымыз керекқ (бұл I.1.6 тақырыбының 8-жаттығуы, онда есепті екі өлшемге келтіріп шығаруымызды талап еткенбіз). Симпликс әдісін қолдана отырып, осы есепті қойылған түрінде шығаруымыз қажет.

Көмірдің сорты	**Құрамындағы фосфор қосындысы, %**	**Құрамындағы күл қосындысы, %**	**Бағасы, $**
A	0,06	2,0	30
B	0,04	4,0	30
C	0,02	3,0	45

Енді осы көмірлер сорттарын қалай араластырып, шектелу шартын бұзбай және минималды бағада болатындай етіп жасау есебін шығаруымыз керекқ (бұл I.1.6 тақырыбының 8-жаттығуы, онда есепті екі өлшемге келтіріп шығаруымызды талап еткенбіз). Симпликс әдісін қолдана отырып, осы есепті қойылған түрінде шығаруымыз қажет.

Егерде 1 тонна көмірдің құрамына x_1, x_2, x_3 көмір сорттары ***A,B*** және ***C*** сәйкес келетін болса, онда $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ және келесі шарттар бұзылмауы қажет:

$$x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 = 1,$$
$$0{,}06x_1+0{,}04x_2+0{,}02x_3 \leq 0{,}03,$$
$$2x_1 \quad +4x_2 \quad +3x_3 \leq 3{,}25$$

Осы шектелу шарттарда $z = 30x_1+30x_2+45x_3$ функциясының мәні минималды болуы керек.

Егерде екінші және үшінші шарттарға қосымша айнымалыларды x_4 және x_5 қосып (екінші шартты 100-ге көбейтіп жазып) есіпті стандартты түрінде келтірейік.

Теріс мұнді емес, x_i $(i=1,2,\ldots\ldots, 5)$ үшін $z=30x_1+30x_2+45x_3$ функциясының минимумының келесі шектелу шарттарын да табайық.

$$x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad + x_6 = 1,$$
$$6x_1+4x_2+2x_3+x_4 \qquad = 3,$$
$$2x_1+4x_2+3x_3 \qquad + x_5 \quad = 3(1/4),$$
$$30x_1+30x_2+45x_3 \qquad\qquad = z.$$

Мұндағы базистық керекті шешім $x_1+x_2+x_3=0$; $x_6=1$, $x_4=3$, $x_5=3*(1/4)$ болды. Енді **w** функциясының өрнегін базистық емес айнымалылар арқылы x_6 айнымалысын алып тастап өрнектеп табамыз. Ол үшін бірінші теңдеуді (x_6 айнымалысы бар жалғыз теңдеуін; 1-ге тең коэффициенті бар) w өрнегінен алып тастап жазайық.

$$-x_1-x_2-x_3 = w-1.$$

Есептелген кестелер тізбегі төменде келтірілген:

Есептің I-кезеңі бірінші итерациядан кейін аяқталады, сосын w және x_1 мәндері қарастырудан алынып тасталады. z функциясының минимумы ***38*(3/4)*** долларға тең, ол минимум бағасы келесі қатынастарда болады: $x_1=1/12$, $x_2=1/3$, $x_3=7/12$

Итера-ция	Базис	Мәндері	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_6	1	1	1	1*	.	.	**1**
	x_4	3	6	4	2	**1**	.	.
	x_5	3*(1/4)	2	4	3	.	**1**	.
	-z	0	30	30	45	.	.	.
	-w	-1	-1	-1	-1	.	.	.
1	x_3	1	1	1	**1**	.	.	1
	x_4	2	4	2	.	**1**	.	-2
	x_5	1/4	-1	1*	.	.	**1**	-3
	-z	-45	-15	-15	.	.	.	-45
	-w	0	0	0	.	.	.	1
2	x_3	3/4	2	.	**1**	.	-1	
	x_4	1/2	6*	.	.	**1**	-2	
	x_2	1/4	-1	**1**	.	.	0	
	-z	-41*(1/4)	-30	.	.	.	15	
3	x_3	7/12	.	.	**1**	-1/3	-1/3	
	x_1	1/12	**1**	.	.	1/6	-1/3	
	x_2	1/3	.	**1**	.	1/6	2/3	
	-z	-38*(3/4)	.	.	.	5	5	

§ I.2.4. Симплекс әдісінің толық түсініктемесі

Жоғарыда көрсетілгендей, сызықтық программалау есептерінің шектелу шарттары теңсіздіктермен немесе теңдіктермен берілуі мүмкін. Сондықтан, компьютерге жазылған программаларда автоматты түрде қосымша және жасанды айнымалыларды енгізуіміз қажет және бірінші базистық керекті шешімді тауып келтіруыміз қажет.

Егерде, есепте ***M*** шектелу шарты және ***N*** (берілген) айнымалы саны болсын деп есептелік. Олардың арасындағы ***GC*** шартымыз теңсіздік ***(*** таңбаларымен, ***EC*** – теңдік = таңбаларымен және ***LC*** теңсіздік <= таңбаларымен берілген болсын және олардың жазылып орналасуын осындай ретпен келтірейік. Шектелу шарттарының оң жағындағы тұрақтылардың бәрін оң мәнді деп қарастырайық. Бұл жағдайлар есептің жалпы түрін қарастыруына кедергі келтірмейді.

Осы есеп келесі түрде жазылады:

шектелу шарттары үшін $x_i \geq 0$, ($i=1,2,..., N$)

Бірінші ***GC*** шарттарына қосымша $x_{n+1},..., x_{n+GC}$ айнымалылар ***(-1)*** коэффициентімен енгізіледі. Соңғы ***LC*** шартттарына қосымша $x_{n+GC+1},..., x_{n+GC+LC}$ айнымалылар ***(+1)*** коэффициентімен енгізіледі.

Жасанды $x_{n+MK+1},..., x_{n+MK+GC+EC}$ айнымалылар (*MK=GC+LC– жасанды айнымалылар саны*) (*+1* коэффициентімен алдыңғы (*GC+LC*) шарттарына енгізіледі.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}a_{11}x_1+.....+a_{1N}x_N\ \geq b_1\\ \geq b_{GC}\end{array}\right\}\ GC\ жатық\quad жолдары\\ \left.\begin{array}{r}=b_{GC+1}\\ =b_{GC+EC}\end{array}\right\}\ EC\ жатық\quad жолдары\\ \left.\begin{array}{r}\leq b_{GC+EC}\\ a_{M1}x_1+.....+a_{MN}x_N\ \leq b_M\end{array}\right\}\ LC\ жатық\quad жолдары\end{array}\right\}\ Барлығы\, M\ жатық\ жол$$

Осы жасанды айнымалылар соңғы қосымша ***LC*** айнымалыларымен бірге алғашқы базистық керекті шешімді құрайды. Олардың мәні ретінде шектелу шарттарының оң жағындағы сандар болады.

Жасанды бағытталған функция $\boldsymbol{w}$ жасанды айнымалыларының қосындысы болып табылады. Оның өрнегі базистық емес айнымалылар арқылы келесі түрде жазылады:

$\boldsymbol{d_1x_1+...+d_nx_n+...+d_{n+MK}x_{n+MK} = w+w_0}$, мұндағы, $\boldsymbol{d_j}$ коэффициенттері қосындының теріс мәнінен құралады, ол ұлғайтылған шектелу шарттарының матрицасының, алғашқы (*GC+LC*) жатық жолдарындағы $\boldsymbol{x_j}$ – сәйкес коэффициенттерінің қосындысы болып табылады. $\boldsymbol{w_0}$ саны шарттардың оң жағындағы сандардың қосындысы, керісінше таңбамен есептелген, $\boldsymbol{w_0}$ және $\boldsymbol{d}$ мәндері кестенің (*M+2*) жатық жолында жазылып көрсетіледі.

Келесі есепті қарастырайық:

шектелу шарттары үшін $\boldsymbol{x_i \geq 0}$ ($i = 1,2,3$),

$$\boldsymbol{2x_1+3x_2+x_3 \geq 6,}$$
$$\boldsymbol{x_1+5x_2+6x_3 \geq 9,}$$
$$\boldsymbol{x_1+x_2+x_3 = 4}$$
$$\boldsymbol{-x_1+...+x_3 \leq 2}$$

$\boldsymbol{z=-x_1-2x_2+3x_3}$ функциясының минимумын іздеп табайық.

Бұл есеп үшін ***GC=2, EC=1, LC=1*** (яғни *M=4, MK=3*) және ***N=3*** тең болады.

Бірінші кестені толтырайық.

Итерация	**Базис**	**Мәндері**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0	x_7	6	2	3	1	-1	0	.	1	.	.
	x_8	9	1	5	6	0	-1	.	.	1	.
	x_9	4	1	1	1	0	0	.	.	.	1
	x_6	2	-1	0	1	0	0	1	.	.	.
	-z	0	-1	-2	-3	0	0	.	.	.	.
	-w	-19	-4	-9	-8	1	1	.	.	.	.

Есептеу үшін алғашқы программаның бөлігін (*500-ші жолынан 1180-жолына дейін*) қолдануымызға болады. Қазіргі мерзімде есептеу процессінің есепті шығару (І немесе ІІ) кезегінің қайсысы атқарылып жатқанын білуіміз қажет.

Программада I-кезегі ***L=1***-ге тең; бағытталған ***z*** функциясыны? коэффициенттері (***M+2***) жолында сақталып, оның өрнектері мен шектелу шарттарында жүргізілетін әрекеттер сияқты әрекеттер жүргізіледі. II-кезегі ***L=0***-ге тең деп алып; бағытталған ***z*** функциясының коэффициенттері (***M+1***) жолында сақталады, ал жасанды айнымалыларының кестедегі бағанасы қарастырудан алынып тасталады. I-кезегінің соңында жасанды ***w*** функциясының минимумы анықталады, оның мәнін компьютердің дөңгелету дәлдігіне сәйкес келіп, ***0*** (*нөл*) санына тең болғанын және болмағандығын тексереміз. ***0***-ге тең болған жағдайда, ***L=0*** деп теңеп, есепті есептеудің II-кезегіне көшеміз.

Төменде программа тексі келтірілген.

```
10 PRINT «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ»
15 READ ZZ
18 REM ПРИ ZZ=+1 ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ТАБЛИЦА ВЫВОДИТСЯ НА
19 REM ПЕЧАТЬ; ПРИ ZZ=-1 НЕ ВЫВОДИТСЯ
20 REM ВВЕСТИ КОЛИЧЕСТВО ВИДОВ ОГРАНИЧЕНИЙ И КОЛИЧЕСТВО
22 REM ПЕРЕМЕННЫХ
25 READ GC,EC,LC,N
30 MM=GC+EC:M=MM+LC:MK=GC+LC:N1=MK+N
40 P=N1+MM:M1=M+1:M2=M+2:N0=N1
50 DIM A(M2,P),BS(M),V(M2),NB(P),SL(P)
55 REM ВВЕСТИ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕНИЙ И ЦЕЛЕВОЙ
ФУНКЦИИ
60 FOR I=1 TO M1:FOR J=1 TO N:READ A(I,J):NEXT J:NEXT I
90 REM ЗАДАТЬ ОСЛАБЛЕННЫЕ, ИСКУССТВЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ,
95 REM ПОМЕСТИТЬ БАЗИС И ПРОЧИТАТЬ ПЕРЕМЕННЫЕ В НУЛЕВОЙ
98 REM СТОЛБЕЦ
100 IF GC=0 THEN GOTO 150
110 FOR I=1 TO GC
120 A(I,N+I)=-1:A(I,N1+I)=1
130 BS(I)=N1+I:READ A(I,0)
140 NEXT I
150 IF EC=0 THEN GOTO 200
160 FOR I=GC+1 TO MM
170 A(I,N1+I)=1:BS(I)=N1+I:READ A(I,0)
180 NEXT I
200 IF LC=0 THEN GOTO 240
210 FOR I=MM+1 TO M
220 A(I,N+I-EC)=1:BS(I)=N+I-EC:READ A(I,0)
230 NEXT I
240 IF MM=0 THEN PRINT «ОТСУТСТВУЕТ ЭТАП 1 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ»
250 REM ЗАДАТЬ ИСКУССТВЕННУЮ ФУНКЦИЮ ДЛЯ ЭТАПА 1
260 L=1:N0=P:REM N0 ЯВЛЯЕТСЯ НОМЕРОМ НУЖНОГО СТОЛБЦА
270 FOR I=1 TO MM:FOR J=0 TO N1
280 A(M2,J)=A(M2,J)-A(I,J)
290 NEXT J:NEXT I
300 ML=M1+L:REM ML=M+2 ДЛЯ ЭТАПА 1; ML=M+1 ДЛЯ ЭТАПА 2
320 IF ZZ>=0 THEN PRINT «ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА»
325 GOSUB 3000:STOP
```

```
330 REM ПОМЕТИТЬ НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ; NB(J)=0, ЕСЛИ
335 REM J-НЕБАЗИСНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ
350 FOR I=1 TO M:NB(BS(I))=1:NEXT I
400 ZERO=1E-08
490 REM НАЙТИ НАИМЕНЬШИЙ КОЭФФИЦИЕНТ В СТРОКЕ ЦЕЛЕВОЙ
495 REM ФУНКЦИИ, Т.Е. СТРОКУ ML
500 MIN=-ZERO:S=0:PV=0:ML=M1+L
510 FOR J=1 TO N0
520 IF NB(J)=1 THEN GOTO 550
530 IF A(ML,J)>=MIN THEN GOTO 550
540 MIN=A(ML,J):S=J
550 NEXT J
560 REM ЕСЛИ S=0, ТО ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ И
565 REM МИНИМУМ НАЙДЕН
570 IF S=0 THEN GOTO 1900
740 REM НАЙТИ СТРОКУ ПЕРЕМЕННЫХ, КОТОРУЮ СЛЕДУЕТ
745 REM ИСКЛЮЧИТЬ ИЗ БАЗИСА ПО УСЛОВИЮ МИНИМУМА BI/A(IS)
750 MIN=1E20:R=0
760 FOR I=1 TO M
770 IF A(I,S)<=ZERO THEN GOTO 810
780 RT=A(I,0)/A(I,S)
790 IF RT>=MIN THEN GOTO 810
800 R=I:MIN=A(I,0)/A(I,S)
810 NEXT I
890 REM ЕСЛИ R=0, ТО ИМЕЕТ МЕСТО РЕШЕНИЕ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ
900 IF R=0 THEN GOTO 1800
910 PRINT «ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В
СТРОКЕ»;R;«СТОЛБЦА»;S:PRINT»
990 REM РАЗДЕЛИТЬ ВЕДУЩУЮ СТРОКУ НА ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ
1000 PV=A(R,S)
1010 FOR J=0 TO N0:A(R,J)=A(R,J)/PV:NEXT J
1040 REM ВЫЧИСЛИТЬ НОВУЮ КАНОНИЧЕСКУЮ ФОРМУ, ЗАПОМНИВ
1045 REM ВЕДУЩИЙ СТОЛБЕЦ ДО ЕГО ИЗМЕНЕНИЯ
1050 FOR I=1 TO ML:V(I)=A(I,S):NEXT I
1070 FOR I=1 TO ML
1080 IF I=R THEN GOTO 1120
1090 FOR J=0 TO N0
1100 A(I,J)=A(I,J)-V(I)*A(R,J)
1110 NEXT J
1120 NEXT I
1150 REM ПЕРЕНАЗНАЧИТЬ В ПОВТОРНО ПОМЕТИТЬ БАЗИСНЫЕ
1155 REM И НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
1160 NB(BS(R))=0:NB(S)=1:BS(R)=S
1170 REM СЧЕТЧИК ИТЕРАЦИЙ
1180 K=K+1
1190 REM НАПЕЧАТАТЬ НОВУЮ ТАБЛИЦУ
1200 IF ZZ>=0 THEN PRINT «ИТЕРАЦИЯ»K:GOSUB 3000:STOP
1240 REM ПОВТОРИТЬ ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕССС
1250 GOTO 500
1800 PRINT «ПЕРЕМЕННАЯ «S» НЕ ИМЕЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ»
1810 GOSUB 3000:STOP
1820 GOTO 2500
1900 IF L=0 THEN GOTO 2000
```

```
1905 REM ДЛЯ ЭТАПА 2 ЭТА ТОЧКА ЯВЛЯЕТСЯ МИНИМУМОМ, ЕСЛИ
1908 REM МЫ НАХОДИМСЯ НА ЭТАПЕ 1, ТО ПЕРЕЙТИ К ЭТАПУ 2
1910 REM ПРОВЕРИТЬ, ЧТО W СТАЛО РАВНО 0
1920 IF ABS(A(ML,0))>=1E-08 THEN GOTO 1960
1930 PRINT «ЭТАП 1 УСПЕШНО ЗАВЕРШЕН»
1940 L=0:N0=N1:REM ЗАДАТЬ L И НОМЕР СТОЛБЦА ДЛЯ ЭТАПА 2
1950 GOTO 500
1960 PRINT «ОГРАНИЧЕНИЯ НЕ ИМЕЮТ ДОПУСТИМОГО РЕШЕНИЯ»
1970 PRINT «СУММА ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ РАВНА»;:PRINT –
A(ML,0)
1980 GOSUB 3000:STOP
2000 PRINT «ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ»
2010 PRINT «ОГРАНИЧЕНИЕ  БАЗИС     ЗНАЧЕНИЕ»
2020 PB=144
2030 FOR I=1 TO M:SL(BS(I))=A(I,0)
2040 PRINT « «;I;»         «;BS(I);
2050 PA=A(I,0):GOSUB 9000:PRINT « «
2060 NEXT I
2090 PRINT «МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН «;-A(M1,0)
2100 PRINT «ОГРАНИЧЕНИЕ  СОСТОЯНИЕ    ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ
ПЕРЕМЕННЫЕ»
2120 FOR I=1 TO M
2130 PRINT « «;I;»   «;
2140 IF I<=GC OR I>MM THEN GOTO 2160
2150 PRINT «УРАВНЕНИЕ НЕ РЕШЕНО»:GOTO 2180
2160 IF NB(N+I)=1 THEN PRINT «ДОПОЛ. ПЕРЕМ.»;
2165 PA=SL(N+I):GOSUB 9000:PRINT « «:GOTO 2180
2170 PRINT «ОГРАНИЧЕНИЕ      0»
2180 NEXT I
2300 GOSUB 3000
2500 END
3000 PRINT «БАЗИС  ЗНАЧЕНИЕ»
3010 FOR J=1 TO N:PRINT «  X«J»  «;:NEXT J
3020 PRINT « «
3030 PB=122
3040 FOR I=1 TO M1
3050 IF I=M1 THEN PRINT «-Z»;:GOTO 3080
3060 PRINT BS(I);
3080 FOR J=0 TO N
3090 PA=A(I,J):GOSUB 9000
3100 NEXT J
3110 PRINT « «
3120 NEXT I:PRINT « «
3200 RETURN
4000 DATA 1
4010 DATA 2,0,2,2
4020 DATA 1,0,0,1,1,1,-1,4,-3,-4
4030 DATA 10,5,20,20
9000 PC=INT(PB/100)
9010 P$=«
9020 IF PC=0 THEN PRINT « «:GOTO 9040
9030 PRINT LEFT$(P$,PC);
9040 PC=PB-100*PC
```

```
9050 PD=INT(PC/10):PC=PC-10*PD
9060 IF PD=0 THEN PD=1
9070 IF PA<0 THEN P$=P$+«-»
9080 PE=ABS(PA)
9090 PE=PE+5*10^(-1-PC)
9100 IF PE>=10^PD THEN PRINT PA;:RETURN
9110 P$=P$+MID$(STR$(INT(PE)),2,PD)
9120 PRINT RIGHT$(P$,PD+1)
9130 IF PC=0 THEN RETURN
9140 PRINT «.»;
9150 PE=INT((PE-INT(PE))*10^PC)
9160 P$=«000000000»
9170 P$=P$+MID$(STR$(PE),2,PC)
9180 PRINT RIGHT$(P$,PC);:RETURN
```

Егерде программадағы хабарландыруды (*комментарий*) және айтылған ескертулерді ескерсек, қандай тәсілмен программаға қосымша айнымалылар және жасанды айнымалылар (*100-230 жолдар*); және қажетті жағдайда жасанды бағытталған функциясы (*250-290 жолдар*) енгізілгенін түсінеміз.

Симпликс-әдісімен есепті І және ІІ кезегінде есептеу негізінде келтірілген программа бойынша атқарылады, бірақ оны басқа да өнделген программалар арқылы атқаруымызға болады. Бағытталған функция коэффициенттері оң мәнді болған жағдайда; егер де есептеу процедурасы І кезегінде жүргізіліп жатса, есептеу процедурасы аяқталып қалмайтындай етіп тексеріп отыруымыз қажет. Мұндай жағдайда есептеудің ІІ-кезегіне ***L*** айнымалысының мәні ***1***-ден ***0***-ге алмастырылып көшуіміз қажет. Бұл әрекетте 500-ші жолдағы ***ML*** мәнін (*M+2*) деп, (*M+1*) және ***N0*** мәнін (*берілген, қосымша және жасанды айнымалылардың кестедегі баған саны*) ***P***-дан ***N1***-ге (*берілген және қосымша айнымалылар бағанасы саны)* алмастырып есептеу процедурасын әрі қарай жалғастырамыз. Барлық жасанды айнымалылар ***0***-ге теңелгенін тексеріп, сосын жалғастырамыз.

Соңғы нәтижелердің көрінісінде (*2000-2030 жолдар*) базистық айнымалылар мәні және олардың шектелу шарттарын қатаң теңсіздік ретінде немесе теңдік ретінде қанағаттандыратындығы көрсетіледі. Бұл көрініс, есептің тәжірибелік көзқараспен қарағанда, қай ресурстарды толығымен қолданатынымызды, қайбір ресурс артылып қолданатындығын аңғартады. Тағы да мәліметтерді форматтау процедурасы *9000-жол* (*қосымшаларды қараңыз*) қолданылған. Форматталатын айнымалылар өзгертілуі (*2020-3030 жол*) мүмкін.

Айнымалылар саны үлкен болған жағдайда, печаттайтын тетікке немесе экранға, шығару операторларын (*3000 жол*) өзгертуге тура келеді. оны тіпті сөндіріп тастауымызға да болады – мәліметтер облысындағы ***ZZ*** айнымалысына 1 (*бір*) санын меншіктеп.

1 мысал. (І.2.3 тақырыбының 1-ші мысалы)

Шектелу шарттарын қанағаттандыратын

$$\begin{aligned} x_1 \quad & \geq 10, \\ x_2 \quad & \geq 5, \\ x_1+x_2 \quad & \leq 20, \end{aligned}$$

$-x_1+4x_2 \quad \leq 20.$

және $z = -3x_1-4x_2$ функциясының минимумы орналасатын теріс мәнді емес x_1; x_2 санын табыңыз.

Бұл мысалда ***GC=2***-ге, ***EC=0***, ***LC=2***, ***N=2*** болады. Осыған сәйкес мәліметтер *4000-4030* жолдарда.

Программаның жұмыс істеу көрінісі, яғни кестелері төменде берілген.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7	X 8
7	10.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
8	5.00	0.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
5	20.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
6	20.00	-1.00	4.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
-Z	0.00	-3.00	-4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-W	-15.00	-1.00	-1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 1

ИТЕРАЦИЯ 1

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7	X 8
1	10.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
8	5.00	0.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
5	10.00	0.00	1.00	1.00	0.00	1.00	0.00	-1.00	0.00
6	30.00	0.00	4.00	-1.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00
-Z	30.00	0.00	-4.00	-3.00	0.00	0.00	0.00	3.00	0.00
-W	-5.00	0.00	-1.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0.00

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 2 СТОЛБЦА 2

ИТЕРАЦИЯ 2

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7	X 8
1	10.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
2	5.00	0.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
5	5.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	0.00	-1.00	-1.00
6	10.00	0.00	0.00	-1.00	4.00	0.00	1.00	1.00	-4.00
-Z	50.00	0.00	0.00	-3.00	-4.00	0.00	0.00	3.00	4.00
-W	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00

ЭТАП 1 УСПЕШНО ЗАВЕРШЕН

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 4 СТОЛБЦА 4

ИТЕРАЦИЯ 3

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6
1	10.00	1.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00
2	7.50	0.00	1.00	-0.25	0.00	0.00	0.25
5	2.50	0.00	0.00	1.25	0.00	1.00	-0.25
4	2.50	0.00	0.00	-0.25	1.00	0.00	0.25
-Z	60.00	0.00	0.00	-4.00	0.00	0.00	1.00

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 3 СТОЛБЦА 3

ИТЕРАЦИЯ 4

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6
1	12.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.80	-0.20
2	8.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.20	0.20
3	2.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.80	-0.20
4	3.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.20	0.20
-Z	68.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.20	0.20

ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

ОГРАНИЧЕНИЕ	БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ
1	1	12.0000
2	2	8.0000
3	3	2.0000
4	4	3.0000

МИНИМУМ ФУНКЦИИ РАВЕН –68

ОГРАНИЧЕНИЕ	СОСТОЯНИЕ	ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
1	ДОПОЛ.ПЕРЕМ.	2.0000
2	ДОПОЛ.ПЕРЕМ.	3.0000
3	ОГРАНИЧЕНИЕ	0
4	ОГРАНИЧЕНИЕ	0

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6
1	12.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.80	-0.20
2	8.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.20	0.20
3	2.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.80	-0.20
4	3.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.20	0.20
-Z	68.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.20	0.20

§ I.2.5. Кездесетін проблемалар

Жоғарыда қарастырылған мысалдарға базистық айнымалылардың барлығы нөлге тең болмағандағы жағдай қарастырылды. Базистық емес айнымалылар нөлге тең болатындығы, оның анықтамалары арқылы айғын. Базистық айнымалылардың да біреуі немесе бірнешеуі нөлге тең болып кетуіне ешқандай кедергі жоқ. Мұндай жағдайда базис *туындаған* (*вырожденным*) деп аталады және қиындықтар есептеу процедурасында кездесуі мүмкін.

Базисітық айнымалының біреуі нөлге тең болды ($b_r'=0$) деп болжайық. Егерде, базиске енгізілетін x_s айнымалысы тағайындалған болса, онда a_{rs}' коэффициенті оң болған жағдайда, ол *жетекші элемент* болуы қажет; онда ($b_r' / a_{rs}' = 0$) және сондықтан,

$$\min_{\substack{i \\ a_{is}>0}} \frac{b_i'}{a_{is}'} = 0.$$

Сондықтан енді, x_s базиске нөл мәнімен кіреді және жаңа базистық керекті шешім *туылған базис* болады. z функциясының мәні өзгермейді. Сөйтіп, келесі итерация қадамында x_s айнымалысын базистен шығарып, x_r

айнымалысын базиске енгізетін жағдай туатын болса, яғни жұмылған қайта-қайта қайталанатын цикл процессі туса және әрі қарай жүргізілетін итерация қадамдары z функциясының мәнін өзгертпейтін болса (*кішірейтпеуі мүмкін*).

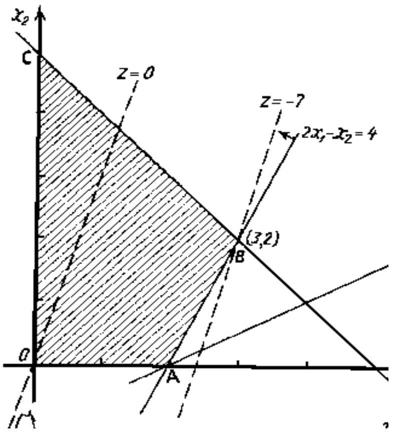
<u>*Мысал 1.*</u> Келесі шарттарда $x_1, x_2 \geq 0$.

$2x_1 - x_2 <= 4,$

$x_1 - 2x_2 <= 2,$

$x_1 + x_2 <= 5.$

$z = -3x_1 + x_2$ функциясының минимумын табайық.



I.2.2-сурет.

Графикалық әдіспен есепті шешкенімізде, (I.2.2-сурет) минимумның орналасатын нүктесі (***3,2***); мұнда функцияның мәні $z = -7$.

Базистық керекті шешімдердің туылған жағдайының болатындығын шектелу шарттарындағы түзу сызықтардың бір нүктеде қиылысатынымен (***2,0***) түсіндіруімізге болады. Жоғарыда қарастырылған мысалдарға керекті облыстық шыңдарына екі түзу сызық қана қиылысатын (*екі өлшемдегі жағдай*).

қарасты мысалда (***2,0***) нүктесінде (шығында) үш түзу сызық қиылысады.

Симпликс әдісін қолданғанымыздағы бірінші кесте келесі түрде жазылады.

Итерация	Базис	Мәндері	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	2*	-1	1	.	.
	x_4	2	1*	-2	.	1	.
	x_5	5	1	1	.	.	1
	-z	0	-3	1	.	.	.

x_1 айнымалысын базиске кіргізуіміз керек. Біра0 та 0ай айнымалыны базистен шы5аруымыз 0ажет: x_3 -ме немесе x_4-ме? Минимум нүктесінде олардың қатынастары $4/2=2/1$ тең. (*сондықтан кестеде екі коэффициент жұлдызшамен белгіленген*). Айнымалының қайсысын тағайындасақта, келесі итерацияда басғасы нөлге тең болады.

Бірінші x_3 айнымалысын тағайындап қарастырайық. Онда келесі кестелерді есептеп табамыз.

Итерация	Базис	Мәндері	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	2	1	-1/2	1/2	.	.
	x_4	0	.	-3/2	-1/2.	1	.
	x_5	3	.	3/2*	-1/2.	.	1
	-z	6	.	-1/2	3/2.	.	.
2	x_1	3	1	.	-1/3	.	1/3.
	x_4	3	.	.	-1	1	1
	x_2	2	.	1	-1/3	.	1/3
	-z	7	.	.	4/3	.	1/3.

Сөйтіп, z функциясының минимумы $z=-7$ тең және ол $x_1=3$, $x_2=2$ тең болған жағдайда, яғни (***3,2***) нүктесінде.

Итерация	Базис	Мәндері	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_3	0	.	3*	1	-2	.
	x_1	2	1	-2	.	1	.
	x_5	3	.	3	.	-1	1
	-z	6	.	-5	.	3	.
2	x_2	0	.	1	1/3	-2/3	.
	x_1	2	1	.	2/3	-1/3	.
	x_5	3	.	.	-1	1*	1
	-z	6	.	.	5/3	-1/3	.
3	x_2	2	.	1	-1/3	.	2/3
	x_1	3	1	.	1/3	.	1/3
	x_4	3	.	.	-1	1	1
	-z	7	.	.	4/3	.	1/3

Енді екінші x_4 айнымалысын базистен шығаруға тағайындап қарастырайық. Онда келесі кестелерді есептеп табамыз. Соңғы шешім жоғарыда көрсеткендей болады.

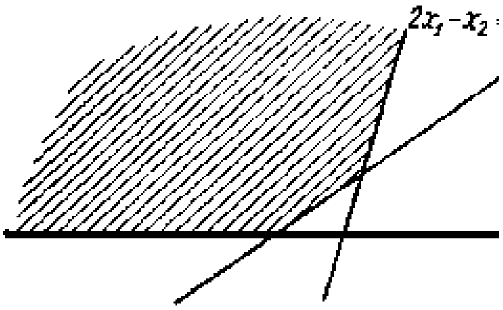
Бұл жағдайда бірінші итерациядағы туылған базис екінші итерациядағы туылған базиске ауысады. z функциясының мәні өзгермейді. Сосын минимум орналасқан ***B*** нүктесіне ығысу жүріп, z функциясының минимумы $z=7$-ге тең болады.

Туылған жағдайды (*кездесетін қиыншылықты*) кідіртпей өту үшін, тәсілдің біреуі ретінде сол шектелу шарттарын аздап өзгерту болып табылады, ол ***A*** нүктесінің орналасуын өзгертеді. Мысалы, Данциг ғалымының ұсынысы бойынша оларды келесі түрде өзгертіп жазуымызға болатындығы:

$$2x_1-x_2 <= 4+\varepsilon,$$

$$x_1-2x_2 <= 2+\varepsilon^2$$

Мұндағы ε – кішкентай сан. Сөйтіп, біз туылған жағдайдан құтыламыз, неге десеңіз, шектелу шарттары ***A*** нүктесінде (*қиылыспайды*) және өшеуі бірдей орындалмайды. ***A*** нүктесінің маңайы І.2.3-суретіндегі көріністей болады.



I.2.3 - сурет

Енді туылған жағдай болмағандағы есепті шығарамыз. Соңғы оптималдық шешімге ε кіреді. Сосын ε мәнін нөлге теңеп, шешімді табамыз. Сөйтіп, туылған жағдайдағы пайда болатын қиыншылықтан өтіп, есептің шешімін анықтаймыз. Бұның барлығы өте қиын көрінуі мүмкін, бірақ оқырмандар абыржымасын: төменде осы күрделі жағдай талданып қарастырылады.

Егерде туылған жағдай кездеспесе, сызықтық программалау есебінің симпликстік әдіспен шектелген қадам (*итерация*) санынан кейін шешімін табамыз (*әрине, егерде есептің шешімі болған жағдайда*).

Оны өте оңай көрсетуімізге болады. Кез келген итерацияда, (I.2.20) теңдеуінен байқайтынымыз, бағытталған функция мәні өзгеріп отырады, мысалы, z_0'-ден $z_0+c_s'\ b_r^+$ – дейін, мұндағы c_s' – базиске енгізілетін айнымалының коэффициенті, осының алдындағы бағытталған функциясына сәйкес; b_r^+ –осы енгізілетін айнымалының тең болатын мәні (*саны*). әрі қарай алгоритм бойынша c_s'–нақты теріс мәнді коэффициент, ал b_r^+–оң мәнді болады. Сөйтіп, алгоритмның әр қадамында z функциясының мәні кішірейе түседі. Сондықтан, алғашқы қарастырылған базистық айнымалыларына қайта айналып келетіндей мүмкіншілік тумайды (*ондай жағдайда функция мәні өзгермейтін еді*). Яғни, $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ керекті (*қарасты*) шешімнен артық болмайтындықтан, минимумды $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ итерациясынан аспайтын қадам жасап табамыз.

Егерде, b_n^+ мәні нөлге тең болса, онда алдыңғы базиске оралуымыз мүмкін, онда жоғарыда айтылған талқылауды қолданбағандық. Бұл жағдайды қайтып оралу (*зацикливание*) дейміз. Қайтып оралу жағдайы өте сирек кездесетін жағдай, яғни ондай жағдайды тудырмас үшін алғашқы базистық шешімді дұрыс таңайындау. Программада осындай жағдайды тудырмайтындай етіп ескеріп жазуымыз қажет.

Біз бұл жағдайды кейін де қайтып оралып қарастырамыз.

<u>*2 мысал.*</u>

Бұл мысал қайтып оралатын жағдайды талқылайды.

Теріс мәнді емес x_1, x_2, x_3, x_4 айнымалыларын келесі шектелу шартында

$$1/4x_1 - 8x_2 \quad - x_3 + 9x_4 \le 0,$$
$$1/2x_1 - 12x_2 - 1/2x_3 + 3x_4 \le 0,$$
$$x_3 \quad \le 1$$

$z = 3/4x_2 - 20x_3 + 1/2x_3 + 6x_4$ функциясының минимумы болатындай қылып іздеп табамыз.

Бұл есепті компьютерде есептеп шығарғанда, аяқ астынан қайта-қайта қайталанатын (*зацикливание*) жағдай пайда болады. Бұл жағдай жеткілікті қуатты жақсы программаны келтіру үшін, оны жақсылап өңдеп, осындай жағдайды ескертетіндей етіп жазу керек екендігін білдіреді. Итерция әрекетінде базистен шығарып тастайтын айнымалыны тағайындау әрекеті болады (бұл, мысалы, x_5 немесе x_6 болуы мүмкін) x_5 айнымалысы тағайындалса, Ал екінші итерацияда x_2 айнымалысы емес x_1 тағайындалса. Төртінші итерацияда x_4 айнымалысы емес x_3 тағайындалса. Алтыншы итерациядағы кесте бастапқы кестесіне сәйкес болады. Енді компьютер есепті әрі қарай z функциясының мәнін өзгертпей жалғастыра береді.

Қандай есептеген жағдайда басқа керекті айнымалыны тағайындауымызға болады. Оқырмандарға осыны істеуді өздеріне қалдырамыз.

Енді қызықты аңғаратын жағдай, егерде бірінші шектелу шартын екінші шартпен алмастырсақ, ондай қиыншылық тіпті компьютерде есептегенде де болмайды. Төменде программаның жұмыс істеу процессі келтірілген, шектелу шарттары келесі ретпен жазылған жағдайда:

$$1/2x_1 - 12x_2 - 1/2x_3 + 3x_4 \le 0,$$
$$1/4x_1 - 8x_2 \quad - x_3 + 9x_4 \le 0,$$
$$x_3 \le 1$$

Функцияның минимумы $z = -1{,}25$ тең болып, $x_1 = 1,\ x_3 = 1,\ x_6 = 0{,}7$ және $x_2 = x_1 = x_5 = 0$ нүктесінде орналасады.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

ОТСУТСТВУЕТ ЭТАП 1 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
5	0.000	0.250	-8.000	-1.000	9.000	1.000	0.000	0.000
6	0.000	0.500	-12.000	-0.500	3.000	0.000	1.000	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	0.000	-0.750	20.000	-0.500	6.000	0.000	0.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 1

ИТЕРАЦИЯ 1

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
1	0.000	1.000	-32.000	-4.000	36.000	4.000	0.000	0.000
6	0.000	0.000	4.000	1.500	-15.000	-2.000	1.000	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	0.000	0.000	-4.000	-3.500	33.000	3.000	0.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 2 СТОЛБЦА 2

ИТЕРАЦИЯ 2

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
1	0.000	1.000	0.000	8.000	-84.000	-12.000	8.000	0.000
2	0.000	0.000	1.000	0.375	-3.375	-0.500	0.250	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	0.000	0.000	0.000	-2.000	18.000	1.000	1.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 3

ИТЕРАЦИЯ 3

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
3	0.000	0.125	0.000	1.000	-10.500	-1.500	1.000	0.000
2	0.000	-0.047	1.000	0.000	0.188	0.063	-0.125	0.000
7	1.000	-0.125	0.000	0.000	10.500	1.500	-1.000	1.000
-Z	0.000	0.250	0.000	0.000	-3.000	-2.000	3.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 2 СТОЛБЦА 4

ИТЕРАЦИЯ 4

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
3	0.000	-2.500	56.000	1.000	0.000	2.000	-6.000	0.000
4	0.000	-0.250	5.333	0.000	1.000	0.333	-0.667	0.000
7	1.000	2.500	-56.000	0.000	0.000	-2.000	6.000	1.000
-Z	0.000	-0.500	16.000	0.000	0.000	-1.000	1.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 5

ИТЕРАЦИЯ 5

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
5	0.000	-1.250	28.000	0.500	0.000	1.000	-3.000	0.000
4	0.000	0.167	-4.000	-0.167	1.000	0.000	0.333	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	0.000	-1.750	44.000	0.500	0.000	0.000	-2.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 2 СТОЛБЦА 6

ИТЕРАЦИЯ 6

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
5	0.000	0.250	-8.000	-1.000	9.000	1.000	0.000	0.000
6	0.000	0.500	-12.000	-0.500	3.000	0.000	1.000	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	0.000	-0.750	20.000	-0.500	6.000	0.000	0.000	0.000

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

ОТСУТСТВУЕТ ЭТАП 1 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
5	0.000	0.500	-12.000	-0.500	3.000	1.000	0.000	0.000
6	0.000	0.250	-8.000	-1.000	9.000	0.000	1.000	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	0.000	-0.750	20.000	-0.500	6.000	0.000	0.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 1

ИТЕРАЦИЯ 1

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
1	0.000	1.000	-24.000	-1.000	6.000	2.000	0.000	0.000
6	0.000	0.000	-2.000	-0.750	7.500	-0.500	1.000	0.000
7	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	0.000	0.000	2.000	-1.250	10.500	1.500	0.000	0.000

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 3 СТОЛБЦА 2

ИТЕРАЦИЯ 2

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
1	1.000	1.000	-24.000	0.000	6.000	2.000	0.000	1.000
6	0.750	0.000	-2.000	0.000	7.500	-0.500	1.000	0.750
3	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	1.250	0.000	2.000	0.000	10.500	1.500	0.000	1.250

ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

ОГРАНИЧЕНИЕ	БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ
1	1	1.0000
2	6	0.7500
3	3	1.0000

МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН –1.25

ОГРАНИЧЕНИЕ	СОСТОЯНИЕ	ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
1	ОГРАНИЧЕНИЕ	0
2	ДОПОЛ.ПЕРЕМ.	0.7500
3	ОГРАНИЧЕНИЕ	0

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7
1	1.000	1.000	-24.000	0.000	6.000	2.000	0.000	1.000
6	0.750	0.000	-2.000	0.000	7.500	-0.500	1.000	0.750
3	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
-Z	1.250	0.000	2.000	0.000	10.500	1.500	0.000	1.250

§ I.2.6. Жаттығулар

1) Симплекс әдісін қолданып, $3x_1-6x_2-2x_3$ функциясының максимумын келесі шеутеу шарттарында $x_1, x_2, x_3 \leq 0;$

$3x_1+4x_2-x_3 \leq 2$

$x_1-3x_2+2x_3 \leq 1$

есептеп табамыз.

2) Теріс мәнді емес $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ функция

$z=2x_1-2x_2+4x_3$ минимумы орналасатындай қылып және теңсіздіктерді қанағаттандыратын

$-x_2 +4x_3 \geq 1,$

$-x_1+5x_2 \quad \leq 1,$

$-x_1+2x_2+3x_3 \leq 9.$

қылып айнымалылардың мәнін табыңыз.

3) Фирма үш түрлі (***A,B,C***) зат өндіреді, заттың әрғайсысын өндіру үшін, олар төрт тетікпен I,II,III,IV белгілі уақыт өңделіп шығарылуын қажет етеді.

Зат түрі	Өңдеу уақыты, сағат				Затты сатқаннан түсетін пайда, доллар
	I	II	III	IV	
A	1	3	1	2	3
B	6	1	3	3	6
C	3	3	2	4	4

әр тетіктің өңдеуге жұмсалатын уақыттарға - 84, 42, 21 және 42 сағат сәйкес болсын. (Енді заттарды өткізу (*сату*) саны шектелмеген болсын, тетіктерді бір заттан екінші затты өңдеуге ауыстырғандағы уақыты өте аз деп есептеп ескермей-ақ қояйық; Заттарды өткізгенде (*сатқандағы*) пайданың түсу максимумын табатын есепті қарастырайық).

4) Алкогольсіз сусын өндіретін фирмада екі түрлі ***A*** және ***B*** сол сусынды толтырып құятын, тығындайтын машинасы бар деп есептелік. ***A*** машинасы жарты литрлік ыдысқа, ал ***B*** машинасы бір литрлік ыдысқа арналып құрастырылған болсын, бірақ олардың әрқайсысын екі түрлі ыдысқа қолдануымызға болады. Сөйтіп, қолданғандағы машиналардың жұмыс істеу жылдамдығы немесе өндіретін өнімі келесі жғмыс істеу кестесінде келтірілген.

Машина	1 минут уақытта өндіретін ыдыс саны	
	жарты литрлік ыдыс	бір литрлік ыдыс
A	50	20
B	40	30

Бес күндік жұмыс аптасында машинаның әрқайсысы кнніне 6 сағат жұмыс істейтін болсын. Жарты литрлік ыдыстағы судан түсетін пайда ***4*** цент, ал бір литрліктен түсетіні ***10*** цент болсын. Апталық шығарылған өнімнің мөлшері 50000 литрден аспайтын болсын. Сауда жерлерінің қабылдай алатын мөлшері 44000 жарты литрлік ыдыс және 30000 литрлік ыдыстағы сусын.

Өндіретін фирма осындай мүмкіншілігі бар жағдайда сусынды өндіргенде максималды пайда табуға тырыссын. Осы есепті сызықтық программалау есебіне келтіріп өрнектеп және соның оптималды шешімін табыңыз.

5) $z=50x_1+25x_2$ функциясы минимумын келесі шектелу шарттарында табыңыз.

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$

$x_1 - 3x_2 \geq 8,$

$3x_1 + 4x_2 \geq 19,$

$3x_1 + x_2 \geq 7.$

6) $w=8y_1+19y_2+7y_3$ функциясының максимумын келесі шектелу шарттарында табыңыз. $y_1, y_2, y_3 \geq 0,$

$y_1+3y_2+3y_3 \leq 50,$

$3y_1+4y_2+3y_3 \leq 25.$

7) Жылу элементтерін өндіретін фирма төрт түрлі радиатор өндіреді. Өндіріске шектелу шарттары ретінде жұмысшы қолының саны және болат қаңылтырының санымен шектеледі, яғни осы қаңылтырдан радиатор жасалады.

Бағытталған функция ретінде түсетін пайданың максимумы болатындай етіп осы есепті симпликс әдісін қолданып шығарыңыз.

Радиатор моделі	**A**	**B**	**C**	**D**
Қажетті жұмысшы қолының саны, адам-сағат	0,5	1,5	2	1,5
Қажетті болат қаңылтыр саны, $м_2$	4	2	6	8
Радиатордың бір данасын сатқандағы түсетін пайда, доллар	5	5	12,5	10

8) Шағын фирма екі түрлі ***A*** және ***B*** подшипнигін өндіретін болсын. Оның әрғайсын үш түрлі станокта өңделетін болсын, яғни токарлық, жалтыратып (*шлифовальный*) тегістейтін және бұрғылап тесетін станоктарда. Олардың өндіру процессінде керекті уақыттары кестеде келтірілген.

Фирма мақсаты - қанша подшипниктерін өндіру, яғни оны сатқаннан түсетін пайда максималды болғаны. Осы есепті сызықтық программалау есебіне келтіріп өрнектеп жазып және симплекс әдісін пайдаланып шығарыңыз. Графикалық тәсілмен шешімді тексеріңіз.

Подшипник түрі	**Қажетті өңдеу уақыты, сағат**			
	токарлық станок	**жалтыратып тегістейтін станок**	**бұрғылап тесетін станок**	**бір дана подшипникті сатқанда түсетін пайда, цент**
A	0,01	0,02	0,04	80
B	0,02	0,01	0,01	125
Аптасына жұмыс істеу (*мүмкіндік*) уақыты, сағат	160	120	150	

9) $z=-4x_1-5x_2-9x_3-11x_4$ функциясы минимумын келесі шектелу шарттарында табыңыз. $x_1, x_2, x_3 \geq 0,$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15,$$

$7x_1+5x_2+3x_3+2x_4 \leq 120,$

$3x_1+5x_2+10x_3+15x_4 \leq 100.$

10) Фирма өндіретін заттарына жарнама жасау үшін төрт түрлі құжат пайдаланады: теледидар, радио, газет және афиша. Бұрын өткізілген жарнама жасау тәжірибесінен белгілі болғаны: жарнамаға жұмсалған 1 доллардан затты сатқаннан кейін түсетін пайданың көбеюі жоғарғы құжаттарға қарай сәйкес 10, 3, 7 және 4 долларға

Жарнамаға бөлінген бюджетті жұмсауымыз келесі шектелу шарттарын бұзбауы қажет:

а) жұмсалатын бюджеттің жалпы көлемі 500 000 доллардан аспауы қажет;

бюджеттің 40% дейін теледидарға және 20% дейін афишаға жұмсалуы қажет;

б) радио жасөспірімдер мен қарттарға қызықты болғандықтан, теледидарға жұмсалатын қаржының жартысы радиоға жұмсалуы қажет.

Бюджетті әр түрлі құжаттарға бөліп беру есебін сызықтық программалау есебіне келтіріңіз және оны шығару үшін симплекс-әдісін қолданыңыз.

11) Келесі $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ мәндерін шектелу шарттарын бұзбайтындай етіп

$2x_1-x_2 <= 4$

$x_1-2x_2 <= 2$

$x_1+x_2 <= 5$

және $z= -x_1+x_2$ функциясының минимумы орналасатындай етіп табыңыз.

12) Фирма адамға қажетті диета құрайтын болсын, оның кем дегенде 20 бөлшегін белок, 30 бөлшегін углевод, 10 бөлшегін майлар және 40 бөлшегін витаминдер құрайтын болсын. Енді осы диетаның бағасын құрайтындай етіп заттардың құрамы көрсетілген. заттың 1 кг (немесе 1 литр) құрамы және бағасы берілген.

Заттар	**Нан**	**Соя**	**Кептірілген балық**	**Жемістер**	**Сүт**
Белоктар	2	12	10	1	2
Углеводтар	12	0	0	4	3
Майлар	1	8	3	0	4
Витаминдер	2	2	4	6	2
Бағасы	12	36	32	18	10

13) Мұнай компаниясы өңделген мұнайды (шикізатты) бірнеше ***W, X, Y*** және ***Z*** жерден сатып алып, өңдеп, әр түрлі ***A, B*** және ***C*** майды сатуға дайындайтын болсын. әр түрлі сатуға дайындалған майлардың (заттардың) көлемі (саны) шектелген болсын:

Майлар	Құрамы, %	Сатуға болатын көлемі, саны, галлон
A	10 (W) кем емес 25 (Z) артық емес	90 000
B	15 (W) кем емес	100 000
C	20 (X) кем емес 50 (Y) артық емес	120 000

1 галлон шикізат бағасы (шартты бірлікпен) және майлардың бағасы төменде көрсетілгендей:

Шикізаттар				Майлар		
X	Y	Z	W	A	B	C
72	60	67	75	90	87	84

Өңделмеген мұнайдың көлемін шектелмеген деп есептеп, осы есептегі шығарылатын заттарды сатқандағы пайдасын максималды етіп, сызықтық программалау есебіне келтіріп және оптималды шешімін табыңыз.

14) Тоқыма фабрикасы келесі кестеге сәйкес күніне 24 сағат жұмыс істейтін болсын.

Күн уақыты, сағат	2 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 18	18 - 22	22 - 02
Кем дегенде қажетті тоқымашылар саны	4	8	10	7	12	4

Әр тоқымашы күніне қатарынан 8 сағат жұмыс істеуі қажет. Айтылған шарттарды қанағаттандыратындай етіп, қажетті минималды тоқымашылар санын табыңыз. Жұмыс істеу тәртібі келесі шектелу шарттарында болатындығын, яғни келесі түрде жазылатындығын көрсетіңіз:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x_1} + \mathbf{x_6} - \mathbf{x_7} = \mathbf{4}\\
&\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} - \mathbf{x_8} = \mathbf{8}\\
&\mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} - \mathbf{x_9} = \mathbf{10}\\
&\mathbf{x_3} + \mathbf{x_4} - \mathbf{x_{10}} = \mathbf{7}\\
&\mathbf{x_4} + \mathbf{x_5} - \mathbf{x_{11}} = \mathbf{12}\\
&\mathbf{x_5} + \mathbf{x_6} - \mathbf{x_{12}} = \mathbf{4}
\end{aligned}
$$

Әр айнымалының физикалық түсінігін келтіріңіз және $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$ және x_{12} айнымалылары керекті базисті құрайтынын көрсетіңіз.

Осы сызықтық программалау есебін ыңғайланған қалыпына келтіріп және ұтымды шешімін симплекс-әдісін қолданып жазыңыз.

15) $z = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3$ минимумын келесі шектелу шарттары үшін табыңыз.

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4,$
$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 6.$

16) Кезекті итерацияда базиске енгізілетін айнымалы ретінде кездескен теріс мәнді коэффициенттері бар айнымалының біріншісі тағайындалатындай етіп, келтірілген программаны өзгертіңіз. Жаңа программаны келтірілген жаттығуларға қолданыңыз. Есептеу уақытты байқалатындай көбейте ме, жоқ па қандай өзгерістерге әкеп соғатынын аңғарып келтіріңіз.

3 -тарау
Шешімнің тұрақтылығын талдау

§ І.3.1. Базисты терістендіру және симплекс - көбейтінділері

Жоғарыда көрсетілгендей, (І.2.17) теңдеуге қатысты айтатынымыз, базистік ыңғайланған түрін табу үшін, берілген шектелу шарттарындағы векторды матрицаға көбейтуіміз қажеттігі. Бұл матрица базисті терістендіріп табылған матрица екенін анықтайық.

$\boldsymbol{n}$ теріс мәнді емес айнымалысы бар $\boldsymbol{m}$ шектелу шарты бар сызықтық? программалау есебінің жалпы түрін келесі түрде жазсақ:

$$\boldsymbol{A\,x = b}, \qquad (\text{I.3.1})$$

$\boldsymbol{A}$ матрицасын, оның ішіне кірісті матрицалар арқылы құрастырып, керекті түрде жазсақ,

$$\boldsymbol{A = (BR)} \qquad (\text{I.3.2})$$

мұндағы $\boldsymbol{B}$–квадраттық ($m*m$) өлшеміндегі матрица, ол базистық айнымалыларға сәйкес $\boldsymbol{m}$ бағаналардан құралған матрица, ал $\boldsymbol{R}$–матрицасы бизистық емес айнымалыларға сәйкес (n-m) бағаналардан құралған $m*(n\text{-}m)$ өлшемді матрица десек.

Онда базистік ыңғайланған түрін

$$\boldsymbol{(BR)\,x = b} \qquad (\text{I.3.3})$$

теңдеуін $\boldsymbol{B^{-1}}$ матрицасына көбейту арқылы табамыз. Сөйтіп, келесі қатынасты жазамыз:

$$\boldsymbol{(I_m\, B^{-1}\, R)\, x = B^{-1}\, b = b^1} \qquad (\text{I.3.4})$$

Бұл шектелу шарттарының ыңғайланған түріне сәйкес болады.

Симплекс әдісінде біз теріс матрицасын негізінде есептемейміз. Бірақ бұл әдіс итерациялық процессс. Сол процессс арқылы бірден көзге көрінбейтіндей етіп негізінде базисті терістендіреміз және осы терістендіруді осы симплекс әдісінің кестелерінен байқап тауып көрсетуімізге болады.

Егерде, $\boldsymbol{A_j'}$ бағанасы бірінші теңсіздік түрінде жазылған шектелу шарттарындағы $\boldsymbol{x_j}$ айнымалысының коэффициенттерінен құралған болса, онда

$$\boldsymbol{A_j' = B^{-1}\, aj} \qquad (\text{I.3.5})$$

бағанасы ыңғайланған түрінде жазылған шектелу шарттарындағы $\boldsymbol{x_j}$ айнымалысының коэффициенттерінен құралған бағана болып табылады.

Егерде, x_j – шектелу шарттарындағы <= таңбасы бар теңіздіктегі қосымша айнымалы болса, онда

$$a_j' = \begin{array}{c} 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{array}$$

мұнда 1 (бір саны) p – жатық жолында орналасатын болады, ал a_j' - B^{-1} матрицасының p-сыншы бағанасы болады.

Егерде, x_j – шектелу шарттарындағы (таңбасы бар теңсіздіктегі қосымша айнымалы болса, онда

$$a_L' = \begin{array}{c} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{array}$$

мұнда 1 (бір саны) q – жатық жолында орналасатын болады, ал a_j' - B^{-1} матрицасының q -ші бағанасы болады.

Осы түсініктерді анықтап көрсету үшін, I.2.1 тақырыбындағы 1 мысалдың бірінші және соңғы кестелерін қарастырайық:

Бірінші кесте мынадай:

Итера-ция	**Базис**	**Мәндері**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**
0	**x_3**	1700	3	4	1	0
	x_4	1600	2	5	0	1
	-z	0	-2	-4	.	.

Ал мынау соңғы кесте:

Итера-ция	**Базис**	**Мәндері**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**
2	**x_1**	300	1	.	5/7	-4/7
	x_2	200	.	1	-2/7	3/7
	-z	1400	.	.	2/7	4/7

Оптималды базис – (x_1, x_2).

0-ші итерациядағы шектелу шарттарынан құралатын базистік коэффициенттерінің матрицасы келесі түрде жазылады:

$$B = \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{array}$$

Бірінші ыңғайланған қалыпындағы x_3, x_4 айнымалылары үшін коэффициенттер матрицасы:

$$I_2 = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Соңғы кестеде ол келесі түрді құрайды:

$$B^{-1} I_2 = B^{-1} = \begin{matrix} 5/7 & -4/7 \\ 2/7 & 3/7 \end{matrix}$$

және B^{-1} матрицасы шынында да теріс матрица екенін тексеру оңай. Оны оқырманға қалдырамыз.

Тағы да І.2.3 тақырыбындағы 1 мысалдың бірінші және соңғы кестелерін құрастырайық. Бірінші кестеде x_3, x_4, x_5, x_6 қосымша айнымалыларына сәйкес коэффициенттер матрицасын жазсақ, яғни

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Соңғы (x_1, x_2, x_3, x_4) базисіне келесі бірінші кестедегі коэффициенттер матрицасы сәйкес болады, яғни

$$B = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Соңғы кестеде x_3, x_4, x_5, x_6 айнымалыларына келесі матрица сәйкес болады:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 1 & 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \end{matrix}$$

Сондықтан (алдыңғы екі бағанадағы өзгеріске зер салыңыз, аңғарыңыз) B^{-1} матрицасы ретінде келесі матрица болады:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ -1 & 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & -1 & 1/5 & 1/5 \end{matrix}$$

Мұны оңай тексеруімізге болады.

Оқырмандарға басқа мысалдарға да қайта оралып, базисті терістендіруін табу ұсынылады.

Базистік айнымалылар мәні келесі $b' = B^{-1} b$ формуласы арқылы есептеледі, оны да тексеріп анықтауға болады.

Әр ыңғайланған қалыпына қатысты базистік айнымалылар бағытталған функция өрнегінен алынып тасталып қарастырылмайды. Симплекс әдісінде бұл итерациялар арқылы жүреді, мысалы, әр қадам өзіне қатысты бастапқы шектелу шарттар түрін қолданады. Есептің жалпы түрі келесі ретпен қойылып жазылады:

$z=c_1x_1+c_2x_2+ ... + c_nx_n$ функциясы минимумын келесі шектеу шарттарын бұзбай табамыз:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ ... + a_{1n}\, x_n= b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+ ... + a_{2n}\, x_n= b_2, \qquad (I.3.6)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+ ... + a_{mn}\, x_n= b_m$$

Шектелу шарттарын $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m$ көбейтіп, z функциясының өрнегіне қосып, келесі қатынасты жазып табайық:

$$x_1\left(c_1+\sum_{i=1}^{m}a_{i1}\pi_i\right)+x_2\left(c_2+\sum_{i=1}^{m}a_{i2}\pi_i\right)+\cdots+x_n\left(c_n+\sum_{i-1}^{m}a_{in}\pi_i\right)=z+\sum b_i\pi_i \quad (I.3.7)$$

(I.3.7) теңдеуіндегі базистік айнымалылар коэффициенттері нөлге тең болатындай ғып π_i сандарын таңалап тағайындауымызға болады.

π_i сандарының мәндері *симплекс-көбейтінділері* деп аталады. Егерде $x_1, x_2, ..., x_m$ базистық айнымалылары болған жағдайда (*жалпы түріне қарасты жағдай одан бұзылмайды*), онда π_i мәндері келесі теңдеулер жүйесінен (*системадан*) табылады:

$$a_{11}\pi_1+a_{21}\pi_2+ ... + a_{m1}\, \pi_m= -c_1,$$
$$a_{21}\pi_1+a_{22}\pi_2+ ... + a_{m2}\, \pi_m= -c_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}\pi_1+a_{m2}\pi_2+ ... + a_{mn}\, \pi_n= -c_m,$$

яғни

$$B^T\pi = -c_B \qquad (I.3.8)$$

Мұнда B – базистік айнымалылар коэффициентінен құрылған матрица, ал $-c_B^T=(c_1,\ c_2,\ ...,\ c_m)$, z функциясыны? бастапқы түріндегі базистық айнымалылардың коэффициенттері.

Енді

$$\pi = \begin{matrix}\pi_1\\ \pi_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \pi_m\end{matrix}$$

тең болғандықтан, келесіні жазайық:

$$\pi = -(B^{-4})^T\ c_B \qquad (I.3.9)$$

π_i сандарының мәндерін симплекс кестелерін аңғарып қарастырып отырып тапқанымыз оңай болуы мүмкін.

Алғашқы бағытталған функция өрнегіне енбеген қосымша айнымалыны – x_j деп белгілейік. Егерде x_j айнымалысы <= таңбасы бар теңсіздікпен белгіленген p-орнында орналасқан шектелу шартынан пайда болса, онда оның коэффициенті (+1) тең болады (егерде есеп стандартты формада берілсе). x_j айнымалысы басқа еш кестедегі жолдарға кірмейді. Сондықтан, анықтап ұғатынымыз оптималды түрдегі z функциясының өрнегіне x_j айнымалысының коэффициенті π_p -ге тең болып кіреді. Осындай ретпен, егерде x_k – жаңа айнымалы <= таңбасы бар теңсіздікпен белгіленген q шектелу шартында болса, z функциясын оптималды түрдегі өрнегіне π_q коэффициентімен кіреді.

Енді қайтадан І.2.1 тақырыбындағы 1 мысалдағы кестелерді қарастырайық. Соңғы кестеде z функциясының оптималды түрінде x_3 және x_4 айнымалыларының коэффициенттері сәйкесінше *2/7* және *4/7* тең болады; бұл оптималды базис үшін симплекс-көбейтінділер болып табылады.

Шектелу шарттары және бағытталған функция келесі түрде жазылады:

$$3x_1+ 4x_2 +x_3 = 1700 \times \pi_1 (= 2/7),$$
$$2x_1+ 5x_2 +x_4 = 1600 \times \pi_2 (= 4/7),$$
$$-2x_1- 4x_2 = z.$$

Шарттарды (*жоғарыда көрсетілгендей*) π_1 және π_2 көбейтіп және оларды z функциясына кесіп, келесі өрнекті табамыз:

$$x_1(-2+3*(2/7)+2*(4/7)) + x_2(-4+4*(2/7)+5*(4/7)) +(2/7)*x_3 +(4/7)x_4= z + 1700(2/7) +1600(4/7),$$

яғни

$$(2/7)*x_3 +(4/7)x_4= z+1400 \qquad \text{(I.3.10)}$$

бұл z функциясының соңғы өрнегі болып табылады.

Енді (І.3.7) теңдеуінен байқайтынымыз, z функциясының соңғы түрінде базистық айнымалылар коэффициенттері таңаланып тағайындаған π_i сандарының арқасында нөлге тең болады, ал базистық емес айнымалылардың коэффициенттері оң мәнді болады. Бұл жағдайда (*базистық емес элементтер нөлге тең болғандықтан*) (І.3.7) теңдеуіндегі сол жағындағы әрбір қосынды да нөлге тең болады; немесе оның коэффициенті нөлге тең болады. Сондықтан, z функциясының оптималды мәні келесі формула арқылы табылады:

$$z^{opt} +\sum b_i\pi_i = 0,$$

яғни

$$z^{opt} = - \sum b_i\pi_i \qquad \text{(I.3.11)}$$

қазіргі қарастырылған мысалда бұл түсінікті ((І.3.10) теңдеуді қараңыз)

І.2.3-тақырыбының 2 мысалы үшін, соңғы кестесінде x_3,x_4,x_5,x_6 айнымалыларының коэффициенттері (*0, 0, 16/5, 1/5*) тең, ал симплекс-көбейтінділері (*-0, -0, 16/5, 1/5*) тең болады (*алдыңғы екі коэффициентің таңбасы ауысқанын байқайық; қарасты мысалда бұл ешқандай әсер етпейді*).

Теңдік арқылы (І.2.22) жазылған шектелу шарттарын (*0, 0, 16/5, 1/5*) көбейтіп, сосын z функциясының өрнегіне қоссақ, (І.2.22) теңдеуде көрсетілгендей, шынында z функциясының ыңғайланған қалыпына әкеп келтіретінін тексеріңіз.

$$((-0) * 10 + (-0) * 5 + (16/5) * 20 + (1/5) * 20) = -68$$

Оқырманға басқа мысалдар үшін осындай тексеруді жүргізу ұсынылады. Бұл есептегі процессте қай әрекеттер жүретінін ұғып түсінуін жақсартады.

Келесі тақырыптарда көрсететініміз көп есептерде π_i көбейтінділері есептің экономикалық мағынасын түсінуге жол салады. Симплекс-көбейтінділерді және базистерді терістендіру әрекеттері, есеп шарттарын аздап өзгерткен жағдайда, шешімдердің қалай өзгеретінін түсіну үшін өте қажетті рөль атқарады.

§ I.3.2. Есепті өзгерткенде қандай жағдай болады

Көптеген тәжірибелік жағдайлардағы есептерді сызықтық программалау есебіне келтіріп қарастыруымызға болатындығына көзіміз жетті. Алдыңғы тараулардағы, тақырыптардағы жаттығулар және мысалдар симплекс әдісін қолдануға болатын салалар туралы мәліметтер мен тұсініктерді байқатты.

Тәжірибедегі есептерде есептің математикалы? формулаларындағы, өрнектеріндегі коэффициенттері өздеріне сәйкес физикалық түсініктемелерде болатындығын байқадық. Коммерциялық операцияларда бағытталған функциядағы коэффициенттер түсетін пайданы білдіріп байқатуы мүмкін.

Шектелу шарттарының оң жағында көрсетілетін сандар керекті шикізаттардың шектелуін білдіріп байқатуы мүмкіндігі. Осы сандардың мәндері өзгеріп тұру мүмкіндігін ескерсек, әр өзгеріс есептің математикалық өрнектерін өзгертугеәкеп соғатындығы айқын.

Мысалы, керекті станоктардың түрі өзгеріп, сол станоктың қажетті өңдеу ауқаттары өзгеруі мүмкін; қоймада әртүрлді жағдайлар болып, қажетті шикізат саны өзгеруі мүмкін; немесе заттарды сатқанда түсетін пайданың мәні кейбір жағдайларға байланысты өзгеруі мүмкін, т.с.с. Осындай жағдайларда не істеу керектігін қарастырайық.

Бірден ойға келетін әрекет – егерде, физикалық өзгерістер бола қалған жағдайда есептің математикалық қойылымын (өрнектерін) өзгертіп, оны басынан бастап қайтадан есептеп шығару. Бірақ бұл әрекет нәтиже бермеуі мүмкін; ол неге десеңіз, есепке қарасты өзгеріс болмаған жағдайда есептеуге жұмсалған пайдалы жұмыстың ескерілмейтіндігі.

Енді рет-ретімен осындай өзгерістерді қарастырайық:

1) b_i мәндерін өзгерту (оң жағындағы сандар мәні);

2) c_i мәндерін өзгерту (бағытталған функция коэффициенттері);

3) қосымша айнымалылар енгізу;

4) қосымша шектелу шерттарын енгізу.

1. b_i мәндеріндегі өзгерістер

Бастапқы шектелу шарттары келесі түрде берілсін: $\mathbf{Ax=b}$ және $z=c^Tx$ функциясының мәнін табу керек болсын.

Жаңа есептегі бағытталған функция өзгермей, $z=c^Tx$ шектелу шарттары өзгеретін болсын.

$\mathbf{Ax=b+\Delta b}$, мұндағы

$$\Delta b = \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \vdots \\ \Delta b_m \end{pmatrix}$$

Сол бағытталған функция $z=c^T x$ үшін

Алғашқы есеп есептелді деп санайық. Оптималды базиске сәйкес B матрицасының ішіндегі квадраттық матрицаның теріс матрицасы B^{-1} анықталған деп есептелік.

Егерде, $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m$ – симплекс-көбейтінділер болса, ал алғашқы есептің базистік айналымдары келесі формула арқылы анықталса,

$x_B = B^{-1} b = b' \geq 0$ (I.3.12)

(I.3.7) теңдеуінен бағытталған функция мәні келесі өрнек арқылы анықталады.

$z^{opt} = - \sum b_i \pi_i$ (I.3.13)

және барлық қосындылар

$c_j + \sum a_{ij} \pi_i \geq 0$ (I.3.14)

(базистық айнымалыларының коэффициенті 0 тең, ал базистік емес айнымалылары ≥ 0).

Енді, тек қана b_i коэффициенттері өзгерген жағдайда (I.3.14) теңдеулері жаңа есеп үшін өзгеріссіз қалады.

Сондықтан егерде базистық шешім жаңа есеп үшін де керекті болып қалса, онда осы жаңа есеп үшін де оптималды керекті шешім болып қалады. Базистық айнымалылардың жаңа мәндері келесі формула арқылы анықталып есептеледі:

$x_B^* = B^{-1}(b + \Delta b) = b' + B^{-1} \Delta b$ (I.3.15)

Егерде $x^* > 0$, онда ол жаңа есептің де базистық керекті мәндері болады, және де (I.3.14) теңдеулерінің оптималды шешімі болады.

z функциясының жаңа мәні ретінде келесі өрнек болады:

$z^* = - \sum (b_i + \Delta b_i)\pi_i,$ (I.3.16)

Сөйтіп, (3.13) теңдеуінен келесі өрнекті анықтаймыз:

$$\frac{\partial z^{opt}}{\partial b_i} = -\pi_i, \qquad \text{(I.3.17)}$$

мұндағы z^{opt} b_1, b_2, ..., b_m коэффициенттерімен байланысты функция ретінде қарастырылған. Егерде b_i мәні өте үлкен санға өзгертілсе, онда (I.3.15) теңдеуі арқылы есептелген x_B^* нүктесі оптималды болмайды, яғни есепті қайтадан басынан бастап есептеп шығару керек болады.

1 мысал.

I.1.1-тақырыбындағы 1 мысалды қарастырайық (*түсінікті болу үшін, есепті қайталайық*):

Фирма екі түрлі ***A*** және ***B*** жиналатын кітәп қоятын ілетін полка өндіреді. Өндіру саны өндірілген қажетті тақтайдың мөлшерімен және өндіруге қолданылатын машина уақытымен шектелген. Өндірілетін ***A*** түрлі ілетін полка үшін ***3м³***, ал ***B*** түрі үшін ***4м³*** тақтай қажет делік. Ол тақтаймен қамтамасыз ететін фирма апта сайын ***1700м³*** әкеліп бере алады делік. ***A*** түрлі ілетін полканы өндіру үшін, ***12*** минут, ал ***B*** түрлі ілетін полканы өндіру үшін, ***30*** минут машина уақыты керек делік. Аптасына машинаны ***160*** сағат пайдалануға болатын болсын. ***A*** түрлі ілетін полка ***2*** доллар, ал ***B*** түрлі ілетін полка ***4*** доллар пайда келтіретін болсын.

Аптасына неше ***A*** түрлі және неше ***B*** түрлі ілетін полка шығару фирмаға тиімді екенін есептейік.

Егерде фирманың өндіру жоспарын төмендегідей белгілесек: ***A*** түрін x_1, ал ***B*** түрін x_2 арқылы. Онда сызықтық программалау есебі ретінде, келесі теріс мәді емес $x_1, x_2 \geq 0$ табуымыз қажет, және ол сандар келесі шектелу шарттарын бұзбауы керек.

$3x_1 + 4x_2 <= 1700$

$1/5x_1 + 1/2x_2 <= 160$

яғни

$3x_1 + 4x_2 <= 1700$

$2x_1 + 5x_2 <= 1600$

$z = -2x_1 - 4x_2$ функциясына минимум жеткізуі қажет. (*Түсетін пайда керісінше таңбамен қарастырылған*).

Бірінші және соңғы (оптималды) симплекс кестелерін келтіріп қарастырайық:

Итерация	**Базис**	**Мәндері**	x_1	x_2	x_3	x_4
	x_3	1700	3	4	1	.
	x_4	1600	2	5	.	1
	-z	0	-2	-4	.	.

Итерация	**Базис**	**Мәндері**	x_1	x_2	x_3	x_4
	x_1	300	1	.	5/7	-4/7
	x_2	200	.	1	-2/7	3/7
	-z	1400	.	.	2/7	4/7

Терістелген базис келесі түрде болады:

5/7 -4/7

-2/7 3/7

ал симплекс-көбейтінділер 2/7, 4/7 тең болады.

а) қамтамасыз ететін фирмадан қосымша шикізат, яғни тағы да ***1м³*** тақтай алуымызға болатындай мүмкіндік тусын. Енді осы ***1м³*** тақтайға неше төлеуіміз қажет екен?

Бірінші шектелу шарттарындағы 1700-ді 1701 алмастырдық делік.

b векторы жаңа 1701 векторға алмастырылады.

1600

Базистық айнымалыларының жаңа мәндері (3.15) теңдеуіне сәйкес келесі түрде болады:

x_1^* 5/7 -4/7 1701 300 5/7 -4/7 1 300 + 5/7
x_2^* -2/7 3/7 1600 200 -2/7 3/7 0 200 - 2/7

z функциясының оптималды мәні (- $\sum b_i\pi_i$) өзгереді, осы жағдайда -((2/7)* 1701 + (4/7)*1600) = -1400 - 2/7.

Сөйтіп, түсетін пайда 2/7 долларға артады, және бұл ***1м³*** қомысша тақтайға төленетін максималды баға. Сондықтан қосымша тақтайды алудың пайдасы да жоқ. Максималды ***1м³*** төленетін баға π_i тең болады.

б) Қосымша ***1*** сағат машина уақытын пайдалануға болатындай мүмкіндік тусын. Егерде, ***1*** сағат машина уақытын пайдалану *7* долларға бағаланса, бұл жағдай тиімді бола ма?

Бұл жағдайда математикалық есептегі ***b*** векторын 1701 1600 векторына алмастырамыз. Базистік айнымалылардың жаңа мәндері келесі болады:

x_1^* 5/7 -4/7 1701 300 - 40/7
x_2^* -2/7 3/7 1610 200 + 30/7

z функциясының оптималды мәні келесі болып:

-((2/7)*1700 + (4/7)*1610) = -1400 - 40/7 өзгереді.

Сөйтіп, түсетін пайда *40/7* доллар болды. Егерде қосымша ***1*** сағат машина уақытының бағасы *7* доллар болса, бұл пайдасыз болғаны.

Бұл есепті басынан бастап есептегенде де осы бұрынғы нәтижеге келіп тірелеміз, оған көзімізді жеткізу оңай. Сондықтан есепті басынан бастап шығарудың қажеті жоқ. Көлемі үлкен есептер үшін бұл тиімсіз.

Аңғаратынымыз, ***A*** пунктінде z функциясының жаңа мәні
-2*(300+5/7)- 4*(200-3/7) тең болады, ал ***B*** пунктінде
-2*(300-40/7) - 4*(200-30/7) тең болады.

2. C_j мәндеріндегі өзгерістер

<u>*2 мысал.*</u>

Егерде 1-ші мысалдағы ***A*** түрлі бір ілетін полкадан түсетін пайда P_1 доллар болса, ал ***B*** түрінен түсетін пайда P_2 долларды құраса, P_1 және P_2 сандарының қандай мәндері үшін шешім оптималды болады?

Бағытталған функция бірінші кестеде келесі өрнекпен беріледі:

$- P_1x_1 - P_2x_2 = z+0$

Кестедегі соңғы жатық жол өзгереді, сондықтан базистегі шектелу шарттарының ыңғайланған қалыпы өзгермейді, сол қалпында қалады, яғни

$x_1 + 5/7x_2 - 4/7x_3 = 300,$

$x_2 - 2/7x_3 + 3/7x_4 = 200$

z функциясының ыңғайланған формасын жазу үшін, z функциясының өрнегінен x_1 және x_2 айнымалысын шығарып тастауымыз қажет.

Ол үшін (*соңғы кестедегі*) бірінші шектелу шартын P_1 көбейтіп, екіншісін P_2 көбейтіп, сосын z функциясының өрнегіне қосамыз; нәтижесінде келесі өрнек пайда болады:

$$((5/7)*P_1 - (2/7)*P_2)x_3 + ((-4/7)*P_1 + (3/7)*P_2)x_4 = Z+300*P_1 + 200*P_2$$

Базистік емес айнымалыларындағы коэффициентер оң мәнді болған жағдайда шешім оптималды болуы мүмкіндігін анықтаймыз. Сондықтан базистік шешім оптималды болуы үшін, келесі теңсіздіктер орынды болуы керек:

$(5/7)*P_1 - (2/7)*P_2 \geq 0$ және $(-4/7)*P_1 + (3/7)*P_2 \geq 0$, яғни

$P_1/P_2 \geq 2/5$ және $P_1/P_2 \leq 3/4$

Бұл І.1.1 суретінде анық көрінеді, мұнда ***B*** нүктесі оптималды, егерде бір мәнді деңгейдегі z функциясының ***B*** нүктесінен өтетін сызығы ***B*** нүктесінде қиылысатын екі шектелу шартының түзу сызығтарының ортасында орналасса.

Бұл көзқарас C_j мәнінің өзгеруі есептің шешіміне келтіретін өсерін талқылағанда өте керекті болады. Базистік айнымалыларының мәндері және шектелу шарттарының ыңғайланған түрі өзгермейді, сол қалпында қалады. Егерде z функциясының жаңа өрнегінде базистық емес айнымалыларының коэффициенті оң мәнді болса, онда шешім оптималды болғаны. Егерде оның біреуі (немесе бірнешесі) теріс мәнді болса, онда сол айнымалыны базиске кіргізіп енгізуіміз керек.

Есепке қабылданғандай ыңғайланған форма болып табылады және симплекс әдісімен есептің шығару процессін жалғастыруымызға болады.

3. Қосымша айнымалылар енгізгенімізде

3 мысал.

C түрлі ілетін полканы жасауға мүмкіндік туды делік. ***C*** түрлі ілетін полканы жасау $4м^3$ тақтай және ***20*** минут машина уақытын қажет етсін. Егерде ***C*** түрлі ілетін полкасының біреуінен түсетін пайда ***P*** доллар болса, онда осы ілетін полканы жасауды қолға алған қажет пе, қажет емес пе?

Егерде ***C*** типті ілетін полкардың саны x_5 деп белгілесек, есептің стандартты формасы келесі болады:

Келесі шарттарды және функцияның минимумын жеткізетіндей етіп, теріс мәнді емес x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 табайық.

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_5 = 1700,$$
$$1/5x_1 + 1/2x_2 + \quad + x_4 + 1/3\,x_5 = 160,$$
$$-2x_1 - 4x_2 \qquad - Px_5 = z,$$

яғни

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_5 = 1700,$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_4 + 10/3\,x_5 = 1600,$$
$$-2x_1 - 4x_2 \qquad - Px_5 = z \text{ - минимум.}$$

Соңғы кестедегі x_5 айнымалысына сәйкес бағанасындағы алдыңғы екі элементті (3.5) теңдеуіне сәйенсек, келесі түрде болады:

$$B^{-1} \begin{matrix} 4 \\ 10/3 \end{matrix} = \begin{matrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ 10/3 \end{matrix} = \begin{matrix} 20/21 \\ 6/21 \end{matrix}$$

Симплекс-көбейтінділер $\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$ тең болғандықтан, (I.3.7) теңдеуіне сүйенсек, x_5 айнымалысының z функциясының ыңғайланған қалыпындағы коэффициенті

-P + (2/7)*x4 + (4/7)*(10/3) = -p + (64/21)

Соңғы кесте келесі түрде жазылады (өзгеріс тек қана x_5 бағанасында болады):

Итерация	Базис	Мәндері	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x_1	**300**	1	.	5/7	-4/7	20/21
	x_2	**200**	.	1	-2/7	3/7	6/21
	-z	**1400**	.	.	2/7	4/7	-P+64/21

Егерде $(-P+64/21) \geq 0$ болса, онда кестеде келтірілген шешім оптималды; x_5 базистік емес айнымалысы болып қала береді және де есепті жаңадан құрып жазудың қажеттілігі жоқ.

Егерде $(-P+64/21) \leq 0$, яғни $P>64/21$, онда x_5 айнымалысын базиске кіргізіп енгізу қажет. Осы кестеден әрі қарай симплекс әдісін қолданып есептеуді жалғастыруға болады.

4. Қосымша шарттарды енгізгенде

4 мысал.

Кейбір экономикалық дағдарыс болған мерзімдерде, сатушы агенттердің айтуы бойынша, аптасына тек қана 550 ілетін полка өткізе аламыз делік. Бұл жағдай өндіріске қалай әсер етеді екен?

Айтылған сату көлемінің шектеуін, шектелу шарттарына $x_1+x_2 \leq 550$ шартын қосқанымызбен бірдей болады.

Бұл қосымша шарт есептің математикалық қойылуына шектелу шарттарға қосылып, бірге қарастырылуы қажет. Бірақ бұл жағдайда ол оптималды шешімге ешқандай әсер етпейді. Неге десеңіз, бұл шешімде $x_1=300$ және $x_2=200$ тең болады, яғни $x_1+x_2=500<550$ қосымша шектелу шартын бұзбайды (қанағаттандырады).

Егерде экономикалық дағдарыстың әсері өзгеше болса, яғни аптасына ***450*** ілетін полка сатылатын болса, онда жағдай өзгеше болар еді. Мұндай жағдайды келесі тақырыпта қарастырамыз.

§ I.3.3. Қосақталған симплекс әдісі.

1 мысал.

Полкалардың апталық (өткізу) сату саны 450 мәнімен шектелген деп есептелік. Онда қосымша шектелу шартын енгізу қажет.

$x_1+x_2<=450.$

Теңдік түрінде оны келесідей қалып жазамыз.

$\boldsymbol{x_1+x_2+x_5=450,}$

мұнда, $\boldsymbol{x_5 \geq 0}$ -қосымша айнымалы болады.

Алғашқы бұл қосымша шартсыз есептелген есептің оптималдық шешімі ($\boldsymbol{x_1=300, x_2=200}$), осы шартқа симайды, ол қанағаттандырылмайды.

Енді осы есепті басынан бастап қосымша шартты енгізіп қайтадан шығару қажетпе екен? Егерде өстіп істеу және есептеу үрдісін қайталасақ, қосымша шарт базистық емес айнымалылар арқылы өрнектеледі, оны қарасты ыңғайланған форма арқылы табуымызға болады:

$\boldsymbol{x_1+5/7\,x_3-4/7\,x_4=300,}$

$\boldsymbol{x_2-2/7\,x_3+3/7\,x_4=200.}$

Сондықтан теңдеуден

$\boldsymbol{x_1+x_2+x_5=450}$

$\boldsymbol{x_1}$ және $\boldsymbol{x_2}$ айнымалыларын алып тастағаннан кейін ол теңдеу келесі өрнек болады.

$\boldsymbol{-3/7\,x_3+1/7\,x_4+x_5=-50.}$

Соңғы кесте келесі түрде жазылады (тек қана қосымша шарт қосылып өзгереді):

Итерация	**Базис**	**Мәндері**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	300	1	.	5/7	-4/7	.
	x_2	200	.	1	-2/7	3/7	.
	x_5	-50	.	.	-3/7	1/7	1
	-Z	1400	.	.	2/7	4/7	.

Мұнда кейбір қиыншылықтар туады. Бұл $\boldsymbol{x_1, x_2, x_5}$ базисы үшін ыңғайланған формада, бағытталған функция өрнегі алдынғы есептің оптималды мәнінің өрнегі мен бірдей, бірақ базис шектелу шартын қанағаттандырмайды, яғни $\boldsymbol{x_5}$ теріс мәнді. Осыған қарамастан, істелген жұмыстардың нәтижелерін сақтап ары қарай жалғастыратын әдіс бармекен деген сұрақ қойсақ? Ия, осындай әдіс бар деп жауап беруге болады және ол процедураның атын *қосақталған симплекс әдісі* деп атаймыз.

Симплекс әдісін оң мәнді базистық айнымалылардан басталатын процедура ретінде қарастыруымызға болады және есепті (осы қасиетін сақтай отыра) ыңғайланған формасына келтіріп (бірнеше қадамдар болуы мүмкін) жалғастыратын процедура, яғни мұнда бағытталған функция коэффициенті теріс мәнді болуы (оң мәнді болуы қажет).

Қосақталған симплекс әдісінде бәріде керісінше; Оны қолданған кезде басында базистық айнымалылардың мәндері теріс мәнде болуы да мүмкін, бірақ минимумды іздеу есебінде бағытталған функция коэффициенттері теріс мәнді болмауы қажет, яғни оң мәні болуы керек.

Соңғы қасиеттерді сақтай отыра, қосақталған симплекс әдісінің көмегімен оң мәнді базисты тапқанша шектелу шарттарын өзгертіп отырамыз. Оң мәнді базисты тапқан кезде минимум орналасқан базисты анықтаймыз (мұнда бағытталған функцияның коэффициенттері оң мәнді болып сақталады).

Біздің қарасты есепте базистық x_5 айнымалысы теріс мәнді және базистен шығарып тастайтын айнымалыға мүше ретінде қарастырылады. Қандай айнымалы мен оны алмастыруымыз қажет екенін қарастырайық. Кестенің x_5 жатық жолындағы теріс мәнді элементтерінің ішінен жетекші элементін табамыз, ол элемент келесі өзгертілген кестелерде ((I.2.15)-(I.2.20) теңдеулер түрлерінде болады) бағытталған функция коэффициенттері оң мәнді болып қалуы қажет. Осы ережелерді аңғару үшін, біз есепте қайлай орындалатынын байқап көріп ұғайық.

x_5 жатық жолында тек қана бірақ теріс мәнді коэффициент бар болғанын көреміз ол x_3 айнымалысының коэффициенті (*-3/7*) тең болады. Енді осы теңдеуді біз (-3/7) бөлеміз, базиске кіргізу үшін x_3 айнымалысының коэффийиенті 1-ге тең болуы қажет, сөйтіп келесі теңдеуді жазамыз,

$$x_3 - 1/3\, x_4 - 7/3\, x_5 = 350/3$$

яғни x_3 айнымалысындағы коэффициент оң мәнді болады. Келесі қадамда біз x_3 айнымалысын басқа шектелу шарттардан және бағытталған функция өрнегінен (шығарып, алып тастауымыз қажет).

Ол қарапайым симплекс есептеу процедурасының арқасында жүзеге асырылады; нәтижесі төменде келесі кестеде келтіріліп көрсетілген. Жетекші элемент (*-3/7* ол теріс мәнді) * - жұлдызшамен белгіленген.

Итерация	**Базис**	**Мәндері**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	300	1	.	5/7	-4/7	.
	x_2	200	.	1	-2/7	3/7	.
	x_5	-50	.	.	-3/7*	1/7	1
	-Z	1400	.	.	2/7	4/7	.
3	x_1	650/3	1	.	.	-1/3	5/3
	x_2	700/3	.	1	.	1/3	-2/3
	x_3	350/3	.	.	1	-1/3	-7/3
	-Z	4100/3	.	.	.	2/3	2/3

Соңғы кестеде жаңа есептің оптималды шешімі келтірілген:

$x_1=650/3,\ x_2=700/3,\ x_3=350/3$ және мұнда $Z=-4100/3$.

Бұл шешімде x_3-базистық айнымалы болғандығынан, шикі заттың артықшылығы біліпіп тұр, сондықтан керекті тақтай санын азайтуымызға болатындығын аңғарамыз.

Жазылған процедура жалпы түрде қарастырылуы мүмкін. Егерде бағытталған функциясының коэффициенттерінің барлығы оң мәнді болса, онда процедура келесі қадамдар арқылы іске асырылады:

1) Базистық айнымалылардың ішінен теріс мәні барын табу қажет. Егерде ондай айнымалы жоқ болған жағдайда оптималдық шешімнің табылғаны; ал егерде олардың саны бірден артық болған жағдайда, ең кішісін тауып тағайындап анықтауымыз қажет.

Мысалы бұл айнымалы базистық болып r шектеу шартында орналасты делік.

2) Осы r жатық жолындағы теріс мәнді a_{rj}' коэффициентін табалық. Егер ондай коэффициенті табалмасақ, онда есептің керекті шешімінің

болмағандығы. Осы жолдағы теріс мәнді коэффициенттерінің ішінен ең кішісін табалық

$$\min_{j} |c_j'/a_{rj}'|.$$

Егерде осы минимумды табсақ, мысалы кестенің s бағанасынан, онда x_5 айнымалысы базиске кіргізілетін (енгізілетін) болып анықталғаны.

3) Жетекші элемент ретінде a_{rj}' тағайындап, кәдімгі симплекс өзгерту қадамын (әрекетін) жасаймыз. (I.2.19) теңдеуінен аңғаратынымыз, келесі итерация үшін болады

$$c_j^{+} = c_j' - c_s'\, a_{rj}'/a_{rs}',$$

жәнеде қарасты барлық a_{rs}' теріс мәнді болғандықтан, ол c_j' оң мәнді болғандықтан, бұл сан міндетті түрде оң мәнді болады, неге десеңіз s келесі қатынастан табылады

$$\min_{j} |c_j'/a_{rj}'| = |c_s'/a_{rs}'|$$

Сөйтіп қосақталған симплекс-әдісінің жәй симплекс әдісінен тек қана базиске енгізілетін және базистен шығарылатын айнымалыларды тағайындаумен айырмашылығы болады.

Бұл тұжырымды анықтау үшін, яғни симплекс-әдісінде минимумды іздеуді керекті облыстың сыртынанда бастауымызға болатындығын, оқырманның өзіне жолдаймыз-осы тақырыптағы 1-ші мысалды геометриялық түрде талқылаңыз.

Бұл әдіспен әйтеуір соңында керекті облыстың нүктесін табатынымызға, және ол оптималды болатындығы айқын.

Қосақталған симплекс әдіс процедурасы төмендегі программаға енгізілген. Бұл программа, егерде керекті базис болғанда симплекс әдісін қолдануымызға мүмкіншілік береді, немесе бағытталған функция коэффициенттері оң мәнді болған жағдайда қосақталған симплекс-әдісін пайдалануға мүмкіншілік тудырады. Программа жоғарыдағы көрсетілген 1 және 2 программалардан басқа программаларға ұқсас.

Ол ыңғайланған форманы қажет етеді, яғни оның базистық айнымалысының біреуі теріс мәнді болуы да мүмкін. Егерде оны пайдаланғанда қосымша шектелу шартты есептелген есепке енгізу қажет болса, онда қосымша шартты ыңғайланған формаға келтіру керек (жоғарыда көрсетілгендей).

```
10 REM ПРОГРАММА ДЛЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДА И ДВОЙСТВЕННОГО
15 REM СИМПЛЕКС-МЕТОДА, ИМЕЮЩЕГО В ОСНОВЕ БАЗИСНОЕ РЕШЕНИЕ
20 REM ВВЕСТИ КОЛИЧЕСТВО ОГРАНИЧЕНИЙ И КОЛИЧЕСТВО
ПЕРЕМЕННЫХ
30 READ M,N
40 M1=M+1
50 DIM A(M1,N), BS(M), NB(N), V(M1)
60 PRINT «ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ»
100 REM ВВЕСТИ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕНИЙ И ЦЕЛЕВОЙ
105 REM ФУНКЦИИ ПОСТРОЧНО
```

```
110 FOR I=1 TO M1:FOR J=1 TO N
120 READ A(I,J)
130 NEXT J:NEXT I
150 REM ВВЕСТИ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ БАЗИСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И
155 REM ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В МАССИВ A(I,0)
160 FOR I=1 TO M1:READ A(I,0):NEXT I
200 REM ВВЕСТИ БАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ; BS  МЕТКА БАЗИСНОЙ
205 REM ПЕРЕМЕННОЙ В ОГРАНИЧЕНИИ I
210 FOR I=1 TO M:READ BS(I):NEXT I
250 REM ПОМЕТИТЬ НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ; ЕСЛИ J 
255 REM НЕБАЗИСНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ, ТО NB(J)=0
260 FOR I=1 TO M:NB(BS(I))=1:NEXT I
290 НАПЕЧАТАТЬ ТАБЛИЦУ
300 PRINT «ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА»: PRINT «ИТЕРАЦИЯ»K
310 GOSUB 3000:STOP
400 ZERO=1E-08
490 REM НАЙТИ НАИМЕНЬШИЙ КОЭФФИЦИЕНТ В СТРОКЕ Z (Т.Е.
495 REM СТРОКУ M1)
500 MIN=-ZERO:S=0:PV=0
510 FOR J=1 TO N
520 IF NB(J)=1 THEN GOTO 550
530 IF A(M1,J)>=MIN THEN GOTO 550
540 MIN=A(M1,J):S=J
550 NEXT J
560 REM ЕСЛИ S=0, ТО ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ И
565 REM МИНИМУМ НАЙДЕН
570 IF S=0 THEN GOTO 2000
740 REM НАЙТИ СТРОКУ ПЕРЕМЕННЫХ, КОТОРУЮ СЛЕДУЕТ
745 REM ИСКЛЮЧИТЬ ИЗ БАЗИСА ПО УСЛОВИЮ МИНИМУМА BI/A(IS)
750 MIN = 1E20:R=0
760 FOR I=1 TO M
770 IF A(I,S)<= ZERO THEN GOTO 810
780 RT=A(I,0)/A(I,S)
790 IF RT>=MIN THEN GOTO 810
800 R=I:MIN=A(I,0)/A(I,S)
810 NEXT I
890 REM ЕСЛИ R=0, ТО ИМЕЕТ МЕСТО РЕШЕНИЕ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ
900 IF R=0 THEN GOTO 1900
910 PRINT «ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ»;R;«СТОЛБЦА»;S
920 PRINT ««
990 REM РАЗДЕЛИТЬ ВЕДУЩУЮ СТРОКУ НА ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ
1000 PV=A(R,S)
1010 FOR J=0 TO N:A(R,J)/PV:NEXT J
1040 REM ВЫЧИСЛИТЬ НОВУЮ КАНОНИЧЕСКУЮ ФОРМУ, ЗАПОМНИВ
1045 REM ВЕДУЩИЙ СТОЛБЕЦ ДО ЕГО ИЗМЕНЕНИЯ
1050 FOR I=1 TO M1:V(I)=A(I,S):NEXT I
1070 FOR I=1 TO M1
1080 IF I=R THEN GOTO 1120
1090 FOR J=0 TO N
1100 A(I,J)=A(I,J)-V(I)*A(R,J)
1110 NEXT J
1120 NEXT I
1150 REM ПЕРЕНАЗНАЧИТЬ И ПОВТОРНО ПОМЕСТИТЬ БАЗИСНЫЕ
```

```
1155 REM И НЕБАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
1160 NB(BS(R))=0:NB(S)=1:BS(R)=S
1170 REM СЧЕТЧИК ИТЕРАЦИЙ
1180 K=K+1
1190 REM НАПЕЧАТАТЬ НОВУЮ ТАБЛИЦУ
1200 PRINT «ИТЕРАЦИЯ»K
1210 GOSUB 3000:STOP
1240 REM ПОВТОРИТЬ ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС
1250 GOTO 500
1490 REM ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД; СНАЧАЛА НАЙТИ
1495 REM ПЕРЕМЕННЫЕ ДЛЯ ИСКЛЮЧЕНИЯ ИЗ БАЗИСА
1500 MIN=-ZERO:R=0
1510 FOR I=1 TO M
1530 IF A(I,0)>MIN THEN GOTO 1550
1540 MIN=A(I,0):R=I
1550 NEXT I
1560 REM ЕСЛИ R=0, ТО ВСЕ БАЗИСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ
1570 IF R=0 THEN GOTO 2000
1600 REM НАЙТИ ПЕРЕМЕННЫЕ, КОТОРЫЕ СЛЕДУЕТ ВВЕСТИ В БАЗИС
1610 MIN=1E20:S=0
1620 FOR J=1 TO N
1630 IF NB(J)=1 THEN GOTO 1680
1640 IF A(R,J)>-ZERO THEN GOTO 1680
1650 RT=ABS(A(M1,J)/A(R,J))
1660 IF RT>=MIN THEN GOTO 1680
1670 S=J:MIN=ABS(A(M1,J)/A(R,J))
1680 NEXT J
1760 REM ЕСЛИ S=0, ТО НЕТ ДОПУСТИМОГО РЕШЕНИЯ
1770 IF S=0 THEN GOTO 1800
1780 GOTO 910
1790 REM В СТРОКЕ 1780 ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ ПЕРЕХОД К
1795 REM ПРЕОБРАЗОВАНИЮ В НОВУЮ КАНОНИЧЕСКУЮ ФОРМУ
1800 PRINT «НЕТ ДОПУСТИМОГО РЕШЕНИЯ»
1810 GOSUB 3000
1820 GOTO 2500
1900 PRINT «ПЕРЕМЕННАЯ «S» НЕ ИМЕЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ»
1910 GOSUB 3000
1920 GOTO 2500
2000 PRINT «ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ»
2010 PRINT «ОГРАНИЧЕНИЕ  БАЗИС    ЗНАЧЕНИЕ»
2020 PB=144
2030 FOR I=1 TO M
2040 PRINT « «;I;»        «;BS(I);
2050 PA=A(I,0):GOSUB 9000:PRINT ««
2060 NEXT I
2090 PRINT «МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН «;-A(M1,0)
2100 GOSUB 3000
2500 END
3000 PRINT «БАЗИС  ЗНАЧЕНИЕ»;
3010 FOR J=1 TO N:PRINT «  X«J»  «;:NEXT J
3020 PRINT ««
3030 PB=122
3040 FOR I=1 TO M1
```

```
3050 IF I=M1 THEN PRINT «-Z»;:GOTO 3080
3060 PRINT BS(I);
3080 FOR J=0 TO N
3090 PA=A(I,J):GOSUB 9000
3100 NEXT J
3110 PRINT ««
3120 NEXT I:PRINT ««
3200 RETURN
4000 DATA 3,5
4010 DATA □1,-2,1,0,0
4020 DATA □2,-1,0,1,0
4030 DATA 7,8,0,0,1
4040 DATA 1,1,6,0,0
4050 DATA □6,-6,56,0
4060 DATA 3,4,5
9000 PC=INT(PB/100)
9010 P$=«
9020 IF PC=0 THEN PRINT ««:GOTO 9040
9030 PRINT LEFT$(P$,PC);
9040 PC=PB-100*PC
9050 PD=INT(PC/10):PC=PC-10*PD
9060 IF PD=0 THEN PD=1
9070 IF PA<0 THEN P$=P$+«-»
9080 PE=ABS(PA)
9090 PE=PE+5*10^(-1-PC)
9100 IF PE>=10^PD THEN PRINT PA;:RETURN
9110 P$=P$+MID$(STR$(INT(PE)),2,PD)
9120 PRINT RIGHT$(P$,PD+1)
9130 IF PC=0 THEN RETURN
9140 PRINT «.»;
9150 PE=INT((PE-INT(PE))*10^PC)
9160 P$=«000000000»
9170 P$=P$+MID$(STR$(PE),2,PC)
9180 PRINT RIGHT$(P$,PC);:RETURN
```

Қосақталған симплекс-әдісі есептелген есепке қосымша шектелу шарттарын енгізгенде пайдалы болады. Ол кейде жасанды айнымалыларды енгізуден құтқарады, яғни есепті бірден есептеуге мүмкіншілік береді.

2-ші мысал.

Теріс мәнді емес x_1, x_2 табу қажет және олар келесі шектелу шарттарын қанағаттандыру қажет:

$x_1+2x_2\geq 6,$

$2x_1+x_2\geq 6,$

$7x_1+8x_2\leq 56.$

және $Z=x_1+x_2$ функциясына минимумын жеткізу қажет.

Стандартты формада есептің қойылымы келесі түрде болады:

Келесі шектелу шартында $x_i\geq 0$, табу қажет

$x_1+2x_2-x_3 \qquad =6,$

$2x_1+x_2 \quad -x_4 \quad =6,$

$7x_1+8x_2 \quad +x_5=56.$

және ол нүктеде функцияның $Z=x_1+x_2$ минимумы орналасуы керек.

Егерде базистық айнымалылар ретінде x_3, x_4 және x_5 қарастырсақ (яғни базистық емес айнымалылар x_1 және x_2 болады), он бағытталған функция оптималды болғаны. Бұл базис қабылданбайды неге десеңіз $x_3=-6$ және $x_4=-6$ теріс мәнді болады. Егерде осы шектелу шарттарын (-1) көбейтсек (базистың ыңғайлы көрінісін жазу үшін) есепті келесі түрде қарастырамыз:

$$-x_1-2x_2+x_3 \quad =-6,$$
$$-2x_1-x_2 \quad +x_4 \quad =-6,$$
$$7x_1+8x_2 \quad +x_5=56.$$
$$x_1+x_2 \quad =Z.$$

Алдыңғы екі шектелу шарттарында біз жасанды айнымалыларды қолдану әрекетінен құтылатынымызды байқаймыз. Есептеуді бірден қосақталған симплекс әдісін пайдаланып есептеген жағдайда келесі нәтижелер болады, олар төменде кесте ретінде көрсетілген

Итерация	**Базис**	**Мәндері**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	-6	-1	-2	1	.	.
	x_4	-6	-2*	-1	.	1	.
	x_5	56	7	8	.	.	1
	-Z	0	1	1	.	.	.
1	x_3	-3	.	-3/2*	1	-1/2	.
	x_1	3	1	1/2	.	-1/2	.
	x_5	35	.	9/2	.	7/2	1
	-Z	-3	.	1/2	.	1/2	.
2	x_2	2	.	1	-2/3	1/3	.
	x_1	2	1	.	1/3	-2/3	.
	x_5	26	.	.	3	2	1
	-Z	-4	.	.	1/3	1/3	.

Бұл оптималды шешім. Z функциясының оптималды түрі сақталынады және табылған базис керекті яғни шарттарды бұзбайды. Сөйтіп Z функциясының минималды мәні 4 тең және ол $x_1=2$ және $x_2=2$ нүктесінде орналасады. Оны графикалық түрде тексеруге болады.

Бұл жолдар программада қарасты есепке 4000-4060 сәйкес болады. Төменде программаның жұмыс істеуі көрсетілген.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА
ИТЕРАЦИЯ 0

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5
3	-6.00	-1.00	-2.00	1.00	0.00	0.00
4	-6.00	-2.00	-1.00	0.00	1.00	0.00
5	56.00	7.00	8.00	0.00	0.00	1.00
-Z	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 2 СТОЛБЦА 1

ИТЕРАЦИЯ 1

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5
3	-3.00	0.00	-1.50	1.00	-0.50	0.00
1	3.00	1.00	0.50	0.00	-0.50	0.00
5	35.00	0.00	4.50	0.00	3.50	1.00
-Z	-3.00	0.00	0.50	0.00	0.50	0.00

ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ НАХОДИТСЯ В СТРОКЕ 1 СТОЛБЦА 2

ИТЕРАЦИЯ 2

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5
2	2.00	0.00	1.00	-0.67	0.33	0.00
1	2.00	1.00	0.00	0.33	-0.67	0.00
5	26.00	0.00	0.00	3.00	2.00	1.00
-Z	-4.00	0.00	0.00	0.33	0.33	0.00

ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

ОГРАНИЧЕНИЕ	БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ
1	1	2.0000
2	1	2.0000
3	5	26.0000

МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН 4

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5
2	2.00	0.00	1.00	-0.67	0.33	0.00
1	2.00	1.00	0.00	0.33	-0.67	0.00
5	26.00	0.00	0.00	3.00	2.00	1.00
-Z	-4.00	0.00	0.00	0.33	0.33	0.00

§ I.4.4 Жаттығулар.

1. Өндіріс екі түрлі зат шығарады делік: ***P*** затының 1 тоннасын 2000 доллардан, және ***Q*** затының 1 тоннасын 1000 доллардан сататын болсын. Заттарды екі түрлі шикі заттан өндіруге мүмкіншілік бар делік: ***A*** шикі затының 1 тоннасының құны 600 доллар және ***B*** шикі затының 1 тоннасының құны 900 доллар болсын. ***A*** шикі затының 100 тоннасынан 30 тонна ***P*** және 50 тонна ***Q*** заттары өнделетін болсын, ал ***B*** шикі затының 100 тоннасынан 60 тонна ***P*** және 10 тонна ***Q*** заттары өндірілетін болсын. Егерде өндіріс ***x*** тонна ***A*** және ***y*** тонна ***B*** затын пайдаланатын болса, онда өндірген заттарын сатқаннан түсетін пайда келесі өрнек болатынын дәлелдеңіз.

(500x+400y)

Жылына өндіріс фабрикасы 10000 тоннаға дейін шикі заттарды өңдейалатын болсын.

Шикі заттар мен қамтамасыз ететін компаниялар жылына 6000 тонна ***A*** затын және 8000 тонна ***B*** заттарын жеткізеалатын болсын.

Өндіретін фабрика жылына 5000 тонна ***P*** затын және 3200 тонна ***Q*** затын сатаалатын мүмкіншілігі бар делік.

а) Сатқаннан түсетін пайда максималды болу үшін қанша ***A*** және ***B*** шикі заттарына заказ беруіміз керек екенін табыңыз және осы пайда 4500000 долларға тең болатындығын дәлелдеңіз.

Шикі затпен қамтамасыз ететін компаниялар оның бағасын көтерумен қорқытады делік.

б) Оның бағаларын нешеге дейін көтеруге болатындығын (өндіріс заказын өзгертпейтіндей жағдайға дейін) анықтаңыз?

2. Келесі шектелу шарттарын қанағаттандыратын

$$-x_1+10x_2+x_3 \quad =40,$$
$$x_1+x_2+ \quad\quad x_4=20,$$

және $f=10x_1-111x_2$ функциясының минимумын жеткізетін x_i мәндерін табыңыз?

Қосымша шектелу шарты $x_3+x_4\geq 5$ қажет болған жағдайда, ұлғайған есепті шешу үшін, қосақталған симплекс әдісін қолданыңыз, алғашқы есептің оптималды шешімін пайдаланып.

3. $x_j\geq 0$ үшін келесі шектелу шарттарында

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq в_j, \quad i=1,2,...,m$$

$$\min Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{табамыз?}$$

Және де (шектелу шарттарына қосымша айнымалыларды енгізгеннен кейін) оптималды шешіммен байланысты π_i - симплек көбейтінділердің, келес шартты қанағаттандыратынын көрсетіңіз:

а) $c_j+\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\pi_i \geq 0, \quad j=1,2,...,n;$

б) $-\pi_i \geq 0, \quad i=1,2,...,m.$

Ескерту π_i $-Z$ функциясының оптималды шешіміндегі x_{n+i} айнымалысының коэффициенті шартын қанағаттандыру жағдай, тек қана, егерде келесі қатынас $\partial(Z_{opt})/\partial в=-\pi_i$ болғанда болатынын тексеріңіз.

4. Фабрика негізінде үш түрлі товар өндіретін болсын. I-ші түрлі товардың бір данасын өндіру үшін 3(үш) дана ***A*** шикі заты және 1(бір) дана ***B*** шикі заты қажет болсын, ол товарды сатқаннан түсетін пайда 3(үш) бірлік бағасы түсетін болсын. II-ші түрлі товарға 4(төрт) дана ***A*** шикі заты және 3(үш) дана ***B*** шикі заты қажет болсын, ол товарды сатқаннан түсетін пайда 6(алты) бірлік бағасы болсын. III-ші түрлі товардың бір данасын өндіру үшін 1(бір) дана ***A*** шикі заты және 2(екі) дана ***B*** шикі заты қажет болсын, ол товардан түсетін пайда 2(екі) бірлік бағасы болсын. Егерде 20(жиырма) бірлік ***A*** шикі заты және 10(он) бірлік ***B*** шикі заты берілген болса өндіріске тиімді оптималды планды табыңыз?

Егерде тағыда 1(бір) бірлік ***A*** шикі затына (немесе ***B*** щикі затына қолымыз жетіп алатындай мүмкіншілік болса, онда оған ең үлкен қандай баға беруімізге болатындығын анықтаңыз.

5. ***A, B, C*** жасанды заттарынан түсетін пайда 3, 4, 5 бірлік бағаларына сәйкес болсын. Әр жасанды затты шығару үшін I және II станоктарын пайдаланатын уақыт қажет болсын және де оларды күніне I-шіні 12 сағат және II-шіні 15 сағат пайдалануымызға мүмкіншілік бар делік:

	A	**B**	**C**
I	3	2	3
II	4	1	2

Заттарды өндіріп шығару оптималдық планын табыңыз?

I-ші (немесе II-ші) станоктарын пайдалану сағаттарын қосып тағыда қарастырыңыз.

5. Фирма асхана қойылатын буфет шығарумен шұғылдансын. Үш түрлі буфет ***A, B, C*** өндіретін болсын. Оның әр қайсысына өндірістің әр стадиясында, әр түрлі адам жұмысын қажет ететіндігі белгілі болсын:

Өндіріс участоктері	**Қажетті жұмыс, адам-сағаты**		
	A	**B**	**C**
Тақтайды дайындау цехы	1	2	4
Жинау цехы	2	4	2
Өңдеу цехы	1	1	2

Тақтайды дайындау цехындағы жұмысты аптасына 360 адам-сағ. деп пландауға болады, жинау цехындағы жұмысты 520 адам-сағ. және өңдеу цехындағы жұмысты 220 адам-сағатына. Буфеттердің ***A, B, C*** әр қайсысының бір данасын сатқаннан түсетін пайда 9, 11 және 15 доллар делік. Өндіріске оптималды план құру есебін келесі өрнектермен жазып көрсетуімізге болатындығын көрсетіңіз.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3+x_4 \quad\quad &=360, \\ 2x_1+4x_2+2x_3 \quad +x_5 \quad &=520, \\ x_1+x_2+2x_3 \quad\quad +x_6 &=220, \end{aligned}$$

шектелу шарттарын қанағаттандыратын және де $w=9x_1+11x_2+15x_3$ функциясына максимумды жеткізеді $x_1 \geq 0$ мәндерін табу қажет екендігін. Әр айнымалының физикалық мазмұнын түсіндіріп және симплекс-әдісін қолданып оптималдық шешім

$$x_1=180,\ x_2=40,\ x_3=0$$

тең екендігін көрсетіңіз?

Тақтай дайындау цехындегі және жинау, өңдеу цехтеріндегі жұмыстың адам-сағатының артықшылығын тауып осы шешімді пайдаланып түсіндіріңіз.

Белгілі бір мейрамхана үйінің келісімі бойынша-аптасына кем дегенде 10 дана ***C*** типті буфет жасалуы қажет екенін қарастырып есепті қосымша шартпен толтырып қарап. Осы қосымша шарт есептің шешіміне қаншалықты әсер ететінін байқаңыз?

7. Университет аудиториясы және лабораториясы 500 студентті сидыруға бағытталған болсын. Университет өз мемлекетінен 4000 студентке дейін қабылдай алатын болсын, ал шет елден қабылданатын студенттердің саны шектелмеген болсын.

Университетте жұмыс істейтін ұстаздардың саны 440 адам делік. Осы мемлекеттің 12 студенті және шет елдің 10 студентін оқыту үшін 1(бір) ұстаз қажет делік.

Осы мемлекеттің 40% студенттерін және шет мемлекеттің 80% студенттерін университеттің 2800 орын бар аудиториясына сиатындай қылып орналастыруымыз қажет. Университет жылына өзінің мемлекетінің студенті үшін өкіметтен 2000 фунт стурлинг, ал шет мемлекет студентінен жылына 3000 фунт стерлинг ақы алатын болсын.

Университеттің мақсаты ең көп (максимум) ақы алу десек, онда өзінің мемлекетінен және шет мемлекетінен жылына неше студент қабылдауды пландау керек екендігін табыңыз? Максималды жылдық түсетін пайда 11850000 фунт стерлинг болатынын көрсетіңіз.

Университет қосымша ұстазды жалдайтын мүмкіншілігі бар делік, яғни оған бөлінген қаражат 10000 фунт стерлинг делік. Бұл пайдалы болама болмайма соны анықтаңыз?

8. Фирма өндірісінде төрт сортты заттарды өндіретін болсын.Өндіріс қолданылатын станоктардың пайдалану уақыты мен және жинақтауға қажетті заттардың санымен шектелген болсын.Тәулігіне станоктарды пайдалану уақыты □ 90 сағатпен шектелген, ал күніне жинақтау заттарының саны 80 аспауы қажет делік.

Өндіріс мінездемесі	**Заттардың сорты**			
	1	**2**	**3**	**4**
Станокты қолдану уақыты, сағ.	1	3	8	4
Жинақтау затының саны	2	2	1	3
Заттың бағасы, доллар	20	25	40	55
Сатқанда түсетін пайда, доллар	30	45	80	85

j заттың тәулігіне өндіретін саны x_j келесі есептің шешімі болады:

$z=-x_1-2x_2-4x_3-3x_4$ функциясының минимумын шектелу шарттарында табыңыз?

$$x_1+3x_2+8x_3+4x_4 \le 0,$$

$$2x_1+2x_2+x_3+3x_4 \le 80,$$

$$x_j \ge 0,\ j=1,2,3,4.$$

Осы есептің мазмұнын түсіндіріңіз?

Компьютерде есептеліп шығаратын оптималды шешімінің кестесін келтірелік.

Базис	Мәндері	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	10	1	-1/5	-4	.	-3/5	4/5
x_4	20	.	4/5	3	1	2/5	-1/5
-Z	70	.	1/5	1	.	3/5	1/5

1) Симплекс көбейтінділерін табыңыз.

2) Терістелген базисты табыңыз.

3) Фирма станоктардың жұмыс жасау уақытын тәулігіне 10 сағатқа дейін көбейтеалады, бұл әрекетті қосымша құралдарды жалдап іске асыруға болады, оның тәулігіне жалдайтын құны 40 доллар делік. Осы іс пайдалы ма? Егерде пайдалы болса, онда өндіріске жаңа план қажет пе? Соны анықтаңыз.

4) Өндірісте қажетті жинақтау шикі заттың бірінің бағасы жиі өзгеріп тұратын болсын. Мысалы: 1-ші және 3-ші заттарға қажетті шикі заттың қазіргі жағдайда 10 кг шикі заттың бағасы 80 доллар делік. 1-ші сорты заттың бір данасына $1\frac{1}{4}\textit{кг}$ шикі зат қажет делік, ал 3-ші сорты заттың бір данасына $2\frac{1}{2}\textit{кг}$ шикі зат қажет делік. Бұл шикі заттың бағасы жоғарыда келтірілген заттың бағасында ескерілген делік.

Бастапқы шешім өзгермейтіндей болуы үшін осы шикі заттың бағасы қандай аралықты өзгеруі мүмкін? Соны анықтаңыз?

5) Мысалы осы заттарды түсініп пайдаланушылардың жағдайынша байланысты 4-ші сорты заттың өндіруін 15 бірлігіне дейін қысқарту қажет болсын делік. Жаңа өндіріс планын құру үшін қосақталған симплекс-әдісін пайдаланыңыз?

9. $x_1\geq 0, x_2\geq 0$ табыңыз, келесі шектелу шартын бұзбай:

$x_1 + 3x_2 \geq 8,$

$3x_1 + 4x_2 \geq 19,$

$3x_1 + x_2 \geq 7.$

және $50x_1+25x_2$ функциясының минимумы болатындай қылып, жасанды айнымалыларды қолданбай табыңыз.

10. $x_1\geq 0, x_2\geq 0$ табыңыз, келесі шектелу шартын қанағаттандыратындай

$7x_1 + 8x_2 \geq 56,$

$x_1 + 2x_2 \leq 6.$

және $z=x_1+x_2$ функциясының минимумы орналасатындай қылып.

11. Сызықтық программалардың жалпы есебінде, егерде Δx_j ***және*** Δb_i байланысты қатынаста болса, онда келесі қатынас орынды болатынын көрсетіңіз. $\Delta Z = -\sum_{i=1}^{m}\pi_i \Delta в_i = \sum_{j=1}^{n} c_j \Delta x_j$

(өзгерістен кейінгі базисте - шектелу шартын бұзбайды, яғни керекті болады деп есептейміз)

12.Технология үрдісінің оптималды жағдайын іздеуде нәтиже беретін параметрлер ретінде x_1 қызуын (температурасын) және x_2 материалды беріп қамтамасыз ететін жылдамдығын қарастырсақ. Технологпен ақылдасып сұбхаттасуынан кейін. Сіз теоритик-консультант ретінде келесі сызықтық программалау есебін анықтап математикалық түрде жаздыңыз делік.

Шектелу шарттарын қанағаттандыратындай

$$x_1 + x_2 \le 6,$$
$$4x_1 + 11x_2 \le 44.$$

және $z= -2x_1 -5x_2$ функциясына минимумын жеткізетіндей қылып, теріс мәнді емес x_1, x_2 айнымалыларын іздеп табатын есеп делік.

Осы есепті симплекс әдісін қолданып шешімін табыңыз.

Табылған шешімді технологқа көрсетіп ақылдасқаннан кейін ол өзінің үлкен сенімсіздігін білдірді. Біраз сұбхаттасқаннан соң қосымша шектелу шартын енгізуге

$$x_1+2x_2 \le 8$$

анықтадыңыз делік.

Керекті есептеу әрекетін келтіріп көрсетіңіз. Қайткенде қосақталған симплекс-әдісінде алғашқы есептеу әрекетінің соңғы кестесін пайдаланып жаңа есептің шешімін табатынымызды анықтап келтіріңіз.

Ескерту:

Бұл оқулықта тасмалдау, тағаындау есептерін және де басқа симплекс әдістерін қарастырмаймыз.

4-тарау.

Сызықтық программалаудағы егізделген жағдай.

§ I.4.1 Тікелей және егізделген есептер.

Алынған нәтижелердің көбісін, егізделген деген ұғымды енгізіп, түсінгеніміз оңай болуы мүмкін. Біз кезкелген сызықтық программалау есебінің өзіне сәйкес басқа (егіз) есептің болатындығын көріп анықтаймыз. Егерде осы есептердің бір біріне байланысты қатынастарын ұқсас, осы есептердің біреуінің шешімін білген жағдайда, есептің екеуінінде шешімін тауып алуымызға болады.

Жаңа түсініктерді енгізейік.

Егерде есеп келесідей жазылған болса:

Оң мәнді $x_j \ge 0, (j=1,2, ...,n)$ келесі шектелу шартында табу қажет болса

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq в_i \quad (i = 1,2,...,m) \qquad (I.4.1)$$

және ол нүктеде $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = Z$ функциясының максимумы орналасатындай қылып.

Осы есепке келесі егіз есеп сәйкес болады. Оң мәнді ***y_j* (0, (i=1,2, ...,n)** келесі шектелу шарттарында табу қажет.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \quad (j = 1,2,...,n) \qquad (I.4.2)$$

және ол нүктеде $\sum_{i=1}^{m} в_i y_i = w$ функциясының минимумы орналасуы қажет.

Негізінде біздер қойылған және оған сәйкес егізделген есептерді кездестірдік. Олар 2 тараудың 5, 6 жаттығулары және 6 тараудың 3, 4 жаттығулары.

Егерде қойылған есеп:

Оң мәнді $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ келесі шектелу шарттарды табу болса

$$x_1 + 3x_2 \geq 8,$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 19,$$
$$x_1 + x_2 \geq 7.$$

және ол нүктеде $Z = 50x_1 + 25x_2$ функциясының минимумы орналасса.

Оған сәйкес егізделген есеп:

Оң мәнді $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ келесі шектелу шарттарында табу болады

$$y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 50,$$

$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 25.$$

және $18y_1 + 19y_2 + 7y_3 = w$ функциясының максимумы орналасуы қажет.

Қойылған есептің шектелу шарттарындағы теңсіздік ***(*** таңбада болса, ал егізделген есепте - ($\leq$) таңбада болады. Қойылған есептегі шектелу шарттардың саны егізделген есептегі айнымалылар санына сәйкес (тең) болады.

Егізделген есептегі бағытталған функция коэффициенттері қойылған есептің шектелу шарттарын оң жағындағы тұрақты сандарға тең болып табылады, жәнеде керісінше.

Қойылған есеп матрица түрінде келесідей болып жазылады:

шектелу шарттарында

$$AX \geq b \qquad (I.4.3)$$

және $C^TX = Z$ функциясының минимумы орналасатындай қылып $X \geq 0$ векторын табу қажет.

Егізделген есептің матрица түрі:

Шектелу шарттарында

$$A^Ty \leq c \qquad (I.4.4)$$

және $b^Ty = w$ функциясының максимумы орналасатындай қылып $y \geq 0$ векторын табу қажет.

Қойылған есепте айнымалылардың оң мәндері үшін, бағытталған функцияның минимумы үшін, шектелу шарттардың таңбасы *(* үшін (яғни сызықтық программалау есебінің стандартты формасы емес) қарастырсақта. Ол есептің жалпы түрінеде қолданылады. Кез келген сызықтық программалау есебін осындай түрге келтіруімізге болатынын көрсетейік.

1-Мысал.

Қойылған есепті стандарттық формаға келтірелік. Есеп: шектелу шарттарында

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$
$$x_3 \leq 4.$$

және $Z' = x_1 - 4x_2 - 3x_3$ функциясының максималды мәні орналасатындай қылып $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$ айнымалыларын табыңыз.

Осы есепті стандарттық формаға келтіріп соған сәйкес егізделген есепті жазып келтірейік. Z' функциясының максимумын іздеу мысалы $-Z' = Z$ функциясының минимумын іздеу мен бірдей болады.

Соңғы $x_3 \leq 4$ шектелу шартын (-1) көбейтіп $-x_3 \geq -4$ шектелу шартын өзгертіп жазып келтіріңіз.

Ал $x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ шектелу шарты екі шектелу шартын енгізгенмен бірдей болады

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

яғни

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6,$$
$$-x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -6,$$

Сөйтіп есепті келесі түрде қойып жазуымызға болады:

Келесі шектелу шарттарын қанағаттандыратындай қылып

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6,$$
$$-x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -6,$$
$$-x_3 \geq -4.$$

және $z=-x_1+4x_2+3x_3$ функциясының минималды мәні орналасатындай қылып $x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0$ мәндерін табу қажет? Бұл қойылған есептің стандартты формасы.

Осы есептің егізделген есебі келесі түрде жазылады:

Келесі шектелу шартын қанағаттандыратын қалып

$3y_1+y_2^{'}-y_2^{''}+0y_3\leq -1,$

$4y_1+2y_2^{'}-2y_2^{''}+0y_3\leq 4,$

$y_1+y_2^{'}-y_2^{''}-y_3\leq 3.$

және $w=7y_1+6y_2^{'}-6y_2^{''}-4y_3$ функциясының максимумы орналасатындай қылып $y_1\geq 0,\ y_2^{'}\geq 0,\ y_2^{''}\geq 0,\ y_3\geq 0$ оң мәндерін табыңыз? (осы айнымалылар мазмұнын түсінелік)

Бұл егізделген есептің стандартты түрі: шектелу шарттағы коэффициенттердің түрін аңғарсақ $y_2=y_2^{'}-y_2^{''}$ деп қабылдап, оны бір ғана айнымалы ретінде санап (айнымалыларды белгілеудің мазмұны да түсінігіде осы) есепті келесі түрде жазуымызға қайтадан болады:

Шектелу шарттарын қанағаттандыратындай

$3y_1+y_2\leq -1,$

$4y_1+2y_2\leq 4,$

$y_1+y_2-y_3\leq 3.$

және $w=7y_1+6y_2-4y_3$ функциясының максимумы орналасатындай қылып $y_1\geq 0$, y_2 (y_2 таңбасы белгісіз), $y_3\geq 0$ айнымалыларын табу болады.

2-Мысал.

Есептің егізделген есебін табыңыз?

Шектелу шарттарын қанағаттандыратын

$5x_1+3x_2\geq 10,$

$x_1-x_2\leq 4.$

және $Z=6x_1+10x_2$ функциясының минимумы орналасатындай қылып $x_1\geq 0$ және x_2 таңбасы анықталмаған айнымалыларды табу қажет делік.

Егерде біз $x_2=x_2^{'}-x_2^{''}$ деп белгілесек, мұнда $x_2^{'}$ және $x_2^{''}\geq 0$ оң мәнді десек, есепті стандартты формасына келтіріп жазуымызға болады, яғни: $x_1\geq 0,\quad x_2^{'}\geq 0\quad x_2^{''}\geq 0$ айнымалыларын келесі шектелу шарттарын бұзбайтындай қылып

$5x_1+3x_2^{'}-3x_2^{''}\geq 10,$

$-x_1+x_2^{'}-x_2^{''}\geq 4.$

және $Z=6x_1+10x_2^{'}-10x_2^{''}$ функциясының минимумы орналасатындай қылып табыңыз.

Енді егізделген есеп келесі түрде жазылады: $y_1\geq 0,\ y_2\geq 0$ оң мәнді айнымалыларын шектелу шарттарын қанағаттандыратындай қылып

$5y_1-y_2\leq 6,$

$3y_1+y_2\leq 10,$

$-3y_1-y_2\leq -10.$

және $w=10y_1-4y_2$ функциясының максималды мәні орналасатындай қылып табу қажет.

Егізделген есеп стандартты түрге келтіріледі. Біракта соңғы екі шектелу шарттарын

$\boldsymbol{3y_1 + y_2 \leq 10}$

$\boldsymbol{3y_1 + y_2 \geq 10}$

бір шарт ретінде көрсетіп, яғни егізделген есепті келесі қойылымда жазуымызға болады:

Оң мәнді $\boldsymbol{y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0}$ айнымалыларын шектелу шарттарын бұзбайтындай қылып

$\boldsymbol{5y_1 - y_2 \leq 6,}$

$\boldsymbol{3y_1 + y_2 = 10,}$

және $\boldsymbol{w=10y_1-4y_2}$ функциясының максимумы орналасатындай қылып табыңыз?

Сөйтіп, қарасты тақырыптың мысалдарынан байқайтынымыз есептің шектелу шарттарына егізделген есептің айнымалылары сәйкес болуын, ал есептің әр айнымалысына егізделген есептің шектелу шарттарының сәйкес болатындығын.

Егерде, шектелу шарттарындағы қатынас теңдік түрінде қойылған есепте жазылса, онда осы шартқа сәйкес айнымалы қосақталған есепте оның таңбасы (оң мәнде немесе сол мәнді екені) белгісіз болады. (1-мысал); егерде қойылған есептегі айнымалының таңбасы белгісіз болса, онда соған сәйкес шектелу шарт егізделген есепте теңдікпен көрсетіледі. (2-мысал).

§ I.4.2. Егізделгендіктің теоремасы.

1-теорема. Егізделген есепке егізделген есеб - қойылған есептің өзі болып анықталады. (7.4) теңдеуі арқылы егізделген есепті (қойылған есептің стандартты формасына) жазсақ келесі түрде болады:

мәні $\boldsymbol{y=0}$ тең шартты бұзбай

$\boldsymbol{-A^T y \geq -c}$

жәнеде $\boldsymbol{w'=-b^T y}$ функциясының минимумы орналасатындай қылып табыңыз. Осы есепке егізделген есеп келесі түрде болады:

Оң мәнді $\boldsymbol{x \geq 0}$ айнымалысын шартты қанағаттандыратындай

$\boldsymbol{-Ax \leq -b}$

және $\boldsymbol{Z'=-c^T x}$ функция максимумын жеткізетіндей қылып табыңыз.

Бұл есеп келесі есеппен бірдей:

Оң мәнді $\boldsymbol{x \geq 0}$ айнымалыларын шектелу шарттарын бұзбай

$\boldsymbol{Ax \geq b}$

және $\boldsymbol{Z=c^T x}$ функциясының минимумы орналасатындай қылып табу қажет, ал соңғы есеп қойылған есеп болып анықталады.

2-ші теорема.

Қойылған есептегі $\boldsymbol{Z}$ функциясының кезкелген керекті шешімінің мәні егізделген есептің $\boldsymbol{w}$ функциясының кезкелген керекті шешімінің мәнінен кем болмайды.

Егерде $\boldsymbol{X}$ және $\boldsymbol{Y}$ қойылған есептің және егізделген керекті шектелу шарттарын бұзбайтын шешімдері десек. Бағытталған функцилардың мәндеріде сәйкес жазылса:

$\boldsymbol{Z=c^TX}$ және $\boldsymbol{W=b^TY}$.

(I.4.3) теңдеуінен байқайтынымыз $\boldsymbol{AX\geq b}$.

$\boldsymbol{Y \geq 0}$ болғандықтан, жазуға болады.

$\boldsymbol{Y^TAx \geq Y^Tb = b^TY = W}$.

Арығарай (I.4.4) теңдеуінен $\boldsymbol{A^TY \leq c}$ және $\boldsymbol{X \geq 0}$ болғандықтан, жазамыз

$\boldsymbol{X^TA^TY \leq X^Tc= c^TX = Z}$

Келесі көбейтіндінің $\boldsymbol{X^TA^TY}$ **-** мәні сан болғандықтан, оны келесі көбейтінді қылып жазуымызға болады $\boldsymbol{Y^TAX,}$ сондықтан

$\boldsymbol{Z = c^TX \geq Y^TA^TX \geq b^TY = W}$.

яғни

$\boldsymbol{Z \geq W}$ (I.4.5)

Бұл нәтижеден ұғатынымыз, егерде $\boldsymbol{Z}$ функциясының мәні болған жағдайда, яғни оның мәні $\boldsymbol{W}$ функциясының керекті мәніне тең болса, осы сан $\boldsymbol{Z}$ функциясының минимумы жәнеде $\boldsymbol{W}$ функциясының максимумы болады. Ондай санның болу болмауын анықтап айталмаймыз.

3-ші теорема

Егерде қойылған есептің нақты шешімі болса $\boldsymbol{z=z_{min},}$ онда егізделген есептіңде шешімінің болғаны $\boldsymbol{w=w_{max}= z_{min}}$. Яғни есептің оптималды шешімі егізделген есептің оптималды шешімінің теріс таңбасымен алынған айнымалылар мәніне тең болады.

Егерде қойылған есептің шектелу шарттарына жаңа айнымалылар енгізілсе, есепті келесі түрде жазуға болады:

Оң мәнді $\boldsymbol{x_j \geq 0 \ (j=1,2,3, \ ..,n,n+1, \ ..,n+m)}$ айнымалыларды шектелу шарттарын қанағаттандыратындай етіп

$\boldsymbol{a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n -x_{n+1} \qquad =b_1,}$

$\boldsymbol{a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \quad -x_{n+2} \qquad =b_2,}$

--,

$\boldsymbol{a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \qquad -x_{n+m} \ =b_m.}$

және $\boldsymbol{z=c_1x_1+c_2x_2+ \ .. \ +c_nx_n}$ функциясының минимумы орналасатындай қылып табыңыз.

Егерде оптималды шешімнің симплекс көбейтінділері **-** $\boldsymbol{\pi_1,\pi_2,..., \pi_m}$ болса, онда оларды шектеу шарттарына көбейтіп және бағытталған $\boldsymbol{z}$ функциясының өрнегіне қоссақ келесі теңдеуді жазуымызға болады: (I.4.6)

$$x_1\left(C_1+\sum_{i=1}^{m}a_{i1}\pi_i\right)+x_2\left(C_2+\sum_{i=1}^{m}a_{i2}\pi_i\right)+...+x_n\left(C_n+\sum_{i=1}^{m}a_{in}\pi_i\right)$$
$$-x_{n+1}\pi_1-x_{n+2}\pi_2-x_{n+m}\pi_m=z+\sum_{i=1}^{m}\pi_i в_i \qquad \text{(I.4.6)}$$

Егерде (7.6) теңдеуін жалғастырсақ $\boldsymbol{z}$ функциясының оптималды ыңғайланған формасында сол жағындағы барлық коэффициенттері оң мәнді болады, сондықтан,

$$-\pi_i \geq 0 \ \ (i = 1,...,m),$$

$$C_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_i \geq 0 \ \ (\ j = 1,...,n \ ) \qquad (I.4.7)$$

Бұл шектелу шарттар келесі шектелу шарттарымен бірдей

$$-\pi_1 \geq 0 \ \ (i = 1,2,...,m),$$

$$\sum a_{ij}(-\pi_i \ ) \leq C_j \ \ (\ j = 1,...,n \ ), \qquad (I.4. 8)$$

Сондықтан теоремада айтылған $\pi_ш$ симплекс көбейтінділері шектелу шарттардың қатынастарын қанағаттандырады.

(I.4.6) теңдеудегі базистық айнымалылар коэффициенттерінің нөлге тең болатыны, және базистық айнымалыларда нөлге тең екені айғын, сондықтан теңдеудің сол жағындағы өрнек нөлге тең, яғни

$$Z_{\min} = -\sum_{i=1}^{m} в_i \pi_i = \sum_{i=1}^{m} в_i \left(-\pi_i\right) \qquad (I.4.9)$$

Сөйтіп анықтағанымыз, $Z_{\min} = \sum_{i=1}^{m} в_i \left(-\pi_i\right).$ Бұл мән егізделген есептің шектелу шарттарын бұзбай қанағаттандыратын керекті шешімге сәйкес ***w*** функциясының мәні болып табылады, келесі теңдіктер арқылы $y_i = -\pi_i$ анықталады.

(I.4.5) теңдеуіндегі ескертуді ескере отыра қарастырсақ бұл сан ***w*** функциясының максималды мән екеніне көзіміз жетеді, Сондықтан

$w_{max}' = z_{min}$ (I.4.10)

<u>4 теорема.</u>

Егерде егізделген есептің нақты шешімі $w = w_{max}$ болса, онда қойылған есептінде нақты шешімінің болғаны $z_{min} = w_{max}$.

Бұл қорытындыны 1-ші және 2-ші теоремалар арқылы анықтауымызға болады, бірақта есептің матрица арқылы қойлымын пайдаланып дәлелдеуіміз өте пайдалы болады деп есептейміз. Дәлелдеуді 3-ші теорема сиақтығып өткізуімізге болады.

Егізделген есепте шектелу шарттарын теңдік ретінде көрсетіп жазғанда келесі есептің қойылымын байқаймыз:

$w = b^T y$ функция мәнінің максимумы келесі шектелу шарттарын бұзбайтындай қылып

$A^T y + y_s = c,$

мұнда

$$y_S = \begin{pmatrix} y_{m+1} \\ y_{m+n} \end{pmatrix} \geq 0$$

бұл жаңа айнымалылардан құрылған вектор.

Егерде, егізделген есептің оптималды шешіміндегі симплекс көбейтінділерін $\rho^T = (\rho_1, \rho_2, .., \rho_n)$ белгілесек,

онда

$\boldsymbol{\rho^T A^T y + \rho^T y_s = \rho^T c = c^T \rho},$

сондықтан

$\boldsymbol{(b^T + \rho^T A^T) y + \rho^T y_s = w + c^T \rho}$ (I.4.11)

$\boldsymbol{w}$ функциясының максимумын іздегендіктен (I.4.11) (стандартты түрдегі сиақты емес) теңдеуінің сол жағындағы $\boldsymbol{y}$ және $\boldsymbol{y_s}$ айнымалыларының коэффициенттері оң мәнді болмауы қажет, сондықтан

$$\left.\begin{aligned} \rho^{\mathrm{T}} &\le (0,0,\dots,0), \\ в^{\mathrm{T}} + \rho^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} &\le (0,0,\dots,0) \end{aligned}\right\} \qquad (I.4.12)$$

яғни

$\boldsymbol{-\rho \ge 0},$

$\boldsymbol{b + A\rho \le 0}.$

мұны келесі түрде жазуымызға болатыны түсінікті

$$\begin{aligned} -\rho &\ge 0, \\ A(-\rho) &\ge b. \end{aligned} \qquad (I.4.13)$$

Сондықтан $\boldsymbol{(-\rho)}$ мәндері қойылған есептің шектелу шарттарын қанағаттандырады.

Осы тұжырым арқылы байқайтынымыз,

$\boldsymbol{w_{max} = c^T(-\rho) = z_{min}}.$ (I.4.14)

3 және 4-ші теоремаларының қортындысы ретінде ұғатынымыз - кездесетін сызықтық программалау есептерін шығару мерзімінде, біздер өз еркімізге ыңғайлап, қойылған есеп ретінде немесе егізделген есеп ретінде шығаруымызға болады.

3 және 4-ші теоремалардың айғын екенін келесі есепті қарастырып көрсетейік.

Шектелу шарттарында

$\boldsymbol{2x_1 + 3x_2 \ge 10},$

$\boldsymbol{3x_1 + 4x_2 \ge 19},$

$\boldsymbol{x_1 + 2x_2 \ge 9}.$

және $\boldsymbol{z = 7x_1 + 10x_2}$ функциясының минимумы орналасатындай қылып оң мәнді $\boldsymbol{x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0}$ айнымалыларын табалық.

Бұл есепке егізделген есеп келесі түрде жазылады:

Шектелу шарттарында

$\boldsymbol{2y_1 + 3y_2 + y_3 \le 7},$

$\boldsymbol{3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 10}.$

$\boldsymbol{w = 10y_1 + 19y_2 + 9y_3}$ функциясының максимумы орналасатындай қылып табу қажет.

Компьютерді қолданып бірінші есепті есептесек оптималдық шешімін $\boldsymbol{x_1=1,\ x_2=4,\ \pi_1=0,\ \pi_2=-2,\ \pi_3=-1},$ және $\boldsymbol{z_{min}=47}$ анықтаймыз. Сөйтіп есепке егізделген есептің шешімін анықтасақ $\boldsymbol{y_1=0,\ y_2=2,\ y_3=1},$ мұнда $\boldsymbol{\rho_1=-1,\ \rho_2=-4}$ және $\boldsymbol{w_{max}=47}.$

Бұл қортындыны - егізделген есепті компьютерде есептесек дәлелдейміз. Мұнда аңғаратынымыз - есепті компьютерде сызықтық программалау алгоритмдерін пайдаланып есептесек, жоғарыдағы келісім бойынша функцияның минимумын іздеу алгоритмдерін қарастырамыз.

Бұл жағдайда назар аударып сақ болу қажет. Есептің шығару алгоритімін компьютерде қолданып шығаратын болсақ, бізде бағытталған функцияның минимумын іздеуіміз қажет, яғни.

$w' = -10y_1 - 19y_2 - 9y_3$

(мұнда бағытталған функцияның және симплекс-көбейтінділері терістендіріліп жазылған).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
МОДИФИЦИРОВАННЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ
ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7	X 8
1	10.00	2.00	3.00	-1.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
2	19.00	3.00	4.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	1.00	0.00
3	9.00	1.00	2.00	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	1.00
ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ		7.00	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
ИСКУССТ.ФУНКЦИЯ		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	

ПЕРВЫЙ ЭТАП ВСЕ ЕЩЕ ПРОДОЛЖАЕТСЯ

C 1	C 2	C 3	C 4	C 5	C 6	C 7	C 8
-6.00	-9.00	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00

X 2 ВХОДИТ В, X 6 В УСЛОВИИ 1 ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА			A'IS
6	10.00	1.00	0.00	0.00	3.00
7	19.00	0.00	1.00	0.00	4.00
8	9.00	0.00	0.00	1.00	2.00

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ 0.00 0.00 0.00 0.00 10.00
РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИСКУССТ.ФУНКЦИИ -38.00 -1.00 -1.00 -1.00 -9.00

ПЕРВЫЙ ЭТАП ВСЕ ЕЩЕ ПРОДОЛЖАЕТСЯ

C 1	C 2	C 3	C 4	C 5	C 6	C 7	C 8
0.00	0.00	-2.00	1.00	1.00	3.00	0.00	0.00

X 3 ВХОДИТ В, X 8 В УСЛОВИИ 3 ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА			A'IS
2	3.33	0.33	0.00	0.00	-0.33
7	5.67	-1.33	1.00	0.00	1.33
8	2.33	-0.67	0.00	1.00	0.67

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ -33.33 -3.33 0.00 0.00 3.33
РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИСКУССТ.ФУНКЦИИ -8.00 2.00 -1.00 -1.00 -2.00

ПЕРВЫЙ ЭТАП ВСЕ ЕЩЕ ПРОДОЛЖАЕТСЯ

C 1	C 2	C 3	C 4	C 5	C 6	C 7	C 8
-1.00	0.00	0.00	1.00	-2.00	1.00	0.00	3.00

X 5 ВХОДИТ В, X 7 В УСЛОВИИ 2 ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА			A'IS
2	4.50	0.00	0.00	0.50	-0.50
7	1.00	0.00	1.00	-2.00	2.00
3	3.50	-1.00	0.00	1.50	-1.50

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ -45.00 0.00 0.00 -5.00 5.00
РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИСКУССТ.ФУНКЦИИ -1.00 0.00 -1.00 2.00 -2.00

ЭТАП 1 УСПЕШНО ЗАВЕРШЕН
 C 1 C 2 C 3 C 4 C 5
 -0.50 0.00 0.00 2.50 0.00
БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА A’IS
 2 4.75 0.00 0.25 0.00 0.75
 5 0.50 0.00 0.50 -1.00 0.50
 3 4.25 -1.00 0.75 0.00 0.25
РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ -47.50 0.00 -2.50 0.00 -0.50

ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ
ОГРАНИЧЕНИЕ БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ
 1 2 4.0000
 2 1 1.0000
 3 3 4.0000
МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН 47
ОГРАНИЧЕНИЕ СОСТОЯНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
 1 ДОПОЛ.ПЕРЕМ. 4.0000
 2 ОГРАНИЧЕНИЕ 0
 3 ОГРАНИЧЕНИЕ 0
 C 1 C 2 C 3 C 4 C 5
 0.00 0.00 0.00 2.00 1.00
БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА
 2 4.00 0.00 -0.50 1.50
 1 1.00 0.00 1.00 -2.00
 4 10.00 -1.00 0.50 0.50
РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ -47.00 0.00 -2.00 -1.00

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
МОДИФИЦИРОВАННЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ
ОТСУТСТВУЕТ ЭТАП 1 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

БАЗИС	ЗНАЧЕНИЕ	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5
1	7.00	2.00	3.00	1.00	1.00	0.00
2	10.00	3.00	4.00	2.00	0.00	1.00
ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ		-10.00	-19.00	-9.00	0.00	0.00

 C 1 C 2 C 3 C 4 C 5
 -10.00 -19.00 -9.00 0.00 0.00
X 2 ВХОДИТ В, X 4 В УСЛОВИИ 1 ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА
БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА
 4 7.00 1.00 0.00 3.00
 5 10.00 0.00 1.00 4.00
РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ 0.00 0.00 0.00 -19.00

 C 1 C 2 C 3 C 4 C 5
 2.67 0.00 -2.67 6.33 0.00
X 3 ВХОДИТ В, X 5 В УСЛОВИИ 2 ВЫВЕДЕН ИЗ БАЗИСА
БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА
 2 2.33 0.33 0.00 0.33
 5 0.67 -1.33 1.00 0.67

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ 44.33 6.33 0.00 -2.67

ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ
ОГРАНИЧЕНИЕ БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ
1 2 2.0000
2 3 1.0000
МИНИМУМ ФУНКЦИИ Z РАВЕН -47
ОГРАНИЧЕНИЕ СОСТОЯНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
2 ОГРАНИЧЕНИЕ 0
3 ОГРАНИЧЕНИЕ 0
C 1 C 2 C 3 C 4 C 5
4.00 0.00 0.00 1.00 4.00
БАЗИС ЗНАЧЕНИЕ ОБРАЩЕНИЕ БАЗИСА
2 2.00 1.00 -0.50
3 1.00 -2.00 1.50
РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ 47.00 1.00 4.00

Келесі ескертулерде орынды болады. (I.4.6) теңдеуінен көретініміз, қойлған есептің оптималды шешімінде

$\boldsymbol{\pi_i x_{n+i} = 0 \quad (i=1,2, ..., m)}$ (I.4.15)

(I.4.11) теңдеуінен байқайтынымыз, егізделген есептің оптималды шешімінде

$\boldsymbol{\rho_j y_{m+j} = 0 \quad (j=1,2, ..., n)}$ (I.4.16)

Сөйтіп тұжырымдасақ кем дегенде $\boldsymbol{\pi_i}$ және $\boldsymbol{x_{n+i}}$ біреуі нөлге тең болады. Жәнеде $\boldsymbol{\rho_j}$ және $\boldsymbol{y_{m+j}}$ біреуі кем дегенде нөлге тең болады. Осы айтылған нәтижелерді қортындап отыра, келесі ережеге тұрақтаймыз.

Егерде, қойлған есептің оптималдық шешіміндегі $\boldsymbol{k}$ орнындағы шектелу шартында $\boldsymbol{(x_{n+k} > 0)}$ айнымалысынан байланысты болмаса, онда егзделген есебіндегі $\boldsymbol{y_k}$ айнымалысының мәні $\boldsymbol{(-\pi_k)}$ тең болғандықтан нөлге тең болғанын анықтаймыз.

Егерде, егізделген есептегі $\boldsymbol{k}$ орнында орналасқан егізделген айнымалы оң мәнді болса, онда қойлған есептегі $\boldsymbol{k}$ орнындағы шектелу шартта осы айнымалымен байланысты болады. Осы айтылған тұжырымды қосымша айнымалылардың <u>*комплементарность*</u> <u>*принципы*</u> деп атаумызға болады (аталады).

§ I.4.3. Егізделгендік түсінігіне қарасты айтылған нәтижелерді талдау.

Егізделген деген түсінік жоғарыда қарастырылған сызықтық программалау нәтижелерінің біразын жақсы тұжырымдап түсінуге көмектеседі.

Егізделген симплекс-әдісінің алгоритмі (I.3.3 тақырыбында) егізделген түсінікті енгізбеген жағдай да қарастырылды. Біракта егізделген түсінік есептеу алгоритмі өзге көзқараспен тұжырымдауға мүмкіншілік береді.

Келесі есепті қарастырайық:

Оң мәнді айнымалыларды $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ шектелу шарттарын қанағаттандыратындай

$$x_1 \quad +3x_3 \geq 3,$$
$$x_2 + 2x_3 \geq 5,$$

және $Z = 4x_1 + 6x_2 + 18x_3$ функциясының минимумы орналасатындай қылып табыңдар.

Бұл есепте Z функциясының өрнегіндегі коэффициенттері оң мәнді болғандықтан, жасанды айнымалыларды енгізбей, бірден егізделген симплекс-әдісін қолданып есептеуімізге болады.

Есептегендегі кестелерді көрсетелік:

Итерация	Базис	Мәндері	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	0	-3	1	.
	x_5	-5	0	-1*	-2	.	1
	-Z	0	4	6	18	.	.
1	x_4	-3	-1	.	-3*	1	0
	x_2	5	0	1	2	.	-1
	-Z	-30	4	.	6	.	6
2	x_3	1	1/3	.	1	-1/3	0
	x_2	3	-2/3	1	.	2/3	-1
	-Z	-36		.	.	2	6

Сөйтіп оптималды шешім келесі нүктеде болады $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=1$ және $z_{min}=36$.

Симплекс көбейтінділері (z функцияның соңғы өрнегіндегі x_4 және x_5 жаңа айнымалылардың коэффициенттерінде) тең $\pi_1=2$ және $\pi_2=6$.

Егізделген есепті қарастырайық:

Оң мәнді айнымалыларды $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ шектелу шарттарын бұзбайтындай қылып

$$y_1 \quad \leq 4,$$
$$y_2 \leq 6,$$
$$3y_1 + 2y_2 \leq 8.$$

жәнеде $w = 3y_1 + 5y_2$ функциясының максимумы орналасатындай қылып табалық.

Алғашында қарастырған есептерде біз функцияның минимумын іздедік, сондықтан мына функцияны қарастырамыз

$$w' = -3y_1 - 5y_2$$

Есепті шығарғандағы есептеу алгоритімін кестелер арқылы көрсетелік.

Итерация	Базис	Мәндері	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	y_3	4	1	0	1	.	.
	y_4	6	0	1*	.	1	.
	y_5	18	3	2	.	.	1
	$-w'$	0	-3	-5	.	.	.
1	y_3	4	1	.	1	0	.
	y_2	6	0	1	.	1	.
	y_5	6	3*	.	.	-2	1
	$-w'$	30	-3	.	.	5	.
2	y_3	2	.	.	1	2/3	-1/3
	y_2	6	.	1	.	1	0
	y_1	2	1	.	.	-2/3	1/3
	$-w'$	36	.	.	.	3	1

Симплекс-көбейтінділер (w' бағытталған функция үшін) тең $\rho_1=0,\ \rho_2=3,\ \rho_3=1$ (жаңа айнымалылар y_3, y_4 және y_5 коэффициенті). Олар қойылған есептегі айнымалылар мәніне тең болады. $y_1=2$ және $y_2=6$ егізделген айнымалылар қойылған есептің симплекс-көбейтінділеріне сәйкес болады.

Қарастырылған егізделген симплекс-әдісінің есепке қолданған алгоритмі және егізделген есепке қолданылған алгоритм негізінде бірдей болады.

§ I.4.4. Жаттығулар.

1) Қойылған есептің егізделген есебін жазыңыз?

Оң мәнді $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$ айнымалыларды шектелу шарттарын қанағаттандыратындай қылып

$3x_1+5x_2\geq 18,$

$x_1+9x_2\geq 30,$

$2x_1+4x_2\geq 27.$

және $z=11x_1+4x_2$ функциясының минимумы орналасатындай қылып табыңыз?

2) Қойылған есептің егізделген есебің жазыңыз?

Оң мәнді $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$ және x_3 таңбасы шектелмеген айнымалыларын шектелу шартын бұзбай

$2x_1+x_2+4x_3\geq 22,$

$x_1+x_2+x_3=9,$

$x_1+2x_2+3x_3\leq 18.$

және $z=5x_1+7x_2+13x_3$ функциясының минимумы орналасатындай қылып табу қажет делік.

3) Егерде ***k*** айнымалысы қойылған есепте таңбасымен шектелмеген болса, онда ***k*** -шектелу шарты егізделген есепте теңдеу түрінде болатынын көрсетіңіз?

4) Егерде ***k*** -шектелу шарты қойылған есепте теңдеу түрінде жазылған болса, онда ***k*** айнымалысына егізделген есепте таңбасына шектелу қойылмайтынын көрсетіңіз?

5) Оң мәнді $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$ айнымалыларын шектелу шарттарын бұзбайтындай қылып

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 7,$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 9,$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 14.$$

және $z = 11x_1 + 14x_2 + 15x_3$ функциясының минимумы орналасатындай қылып табыңыз?

Осы есепке егізделген есепті жазып шығарыңыз және осы бөлімдегі 3 және 4-ші теоремалардың дұрыс екенін дәлелдеңіз.

6) Қойлған есеп үшін $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ айнымалыларын шектелу шартты бұзбайтындай қылып

$$x_1 - x_2 \geq 1,$$
$$-x_2 \geq -2.$$

және $z = -x_1 - x_2$ функциясының минимумы орналасатындай қылып табыңыз (I.1, 2 тақырыбының 3 мысалы), Осы есептің егізделген түрін жазып, шығарып керекті шешімнің жоқ екендігін (яғни болмайтындығын) көрсетіңіз?

7) Егерде қойылған (егізделген) есептің $z(w)$ шектелмеген мәні бар шексіз шешімдері болған жағдайда, онда егізделген (қойылған) есептің керекті шешімінің болмайтынын көрсетіңіз?

8) 7-ші жаттығудағы келтірілген тұжырымды керісінше қарастыруымыз дұрыс еместігін көрсетіңіз? Осыны көрсетіп дәлелдейтін мысалды ойлап келтіріңіз?

9) 3-ші және 4-ші теоремаларын келесі есеп үшін тексеріңіз? Оң мәнді $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$ айнымалыларын шектелу шарттарын

$$x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 7,$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 9,$$
$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 14.$$

қанағаттандыратындай және $z = 7x_1 + 4x_2 + 11x_3$ функциясының минимумы орналасатындай қылып табыңыз.

10) Нан пісіретін мекеме тез бұзылатын пирогтар сатады делік, олар пісірілген күні сатылып өткізілуі керек.

Керекті ықтимал мүмкіншілігі белгілі делік, яғни $p_0 = 1/8,\ p_1 = 1/8,\ p_2 = 1/4,\ p_3 = 1/2$ тең болсын, мұнда p_j-ықтимал мүмкіншілік, ***j*** пирогтың күнделікті қажеттілігі. Күнделікті ***j*** пирогты пісіру бағасы C_j -десек, мұнда ***C*** -тұрақты сан. Орта шамамен қажеттілікті қанағаттандыру үшін кім денеде төрт күннің біреуін, және пісіру бағасының минимумын табу есебі сызықтық программалау есебіне жататынын көрсетіңіз.

§ I.4.5. Жаттығуларға жауаптары

1.6 жаттығулардың жауаптары

1) $x_1=A; x_2=B; x_1\geq 0, x_2\geq 0$

$z=5x_1+3x_2$ функциясының минимумын келесі шектелу шарттарында

$0,5x_1 +0,25x_2\leq 40,$

$0,4x_1 +0,3x_2\leq 36,$

$0,2x_1+0,4x_2\leq 36.$

Оптималды шешім $x_1 =60, x_2 =40$ тең болғанда табылуы аптасына $z=420$ доллар.

2) Функция максимумы **10**-ға тең, $x_1 =2, x_2 =4$ тең болғанда.

4) $x_1 =4, x_2 =2$ тең болғанда функция минимумы-**10** тең.

5) а) $x_1 =3(1/2), x_2 =2(1/2)$ тең болғанда функция минимумы **-13** тең болады.

б) $x_1 = \dfrac{25-13\theta}{10}, x_2 = \dfrac{15+39\theta}{10}; 0\leq\theta\leq 1.$ тең болғанда, функция минимумы **-9** тең болады.

в) Шешімі шектелмеген

6) Шектелу шарттары қайшылас болмағандықтан есептің шешімі жоқ болады.

7) $x_1 =2/5, x_2 =1/5, x_3 =0$ тең болғанда функция минимумы **12/5** тең болады.

8) $x_1 =1/12, x_2 =4/12, x_3 =7/12, C=38(3/4)$ доллар 1 тоннасына

9) Қосындыдағы ***A, B, C*** сорттарының пайызы- $x_1, x_2, x_3,$ $z=70x_1+50x_2+10x_3$ минимумын шектелу шарттарында

$90x_1 +65x_2 +45x_3 \geq 60,$

$30x_1 +85x_2 +70x_3 \geq 60,$

$x_1 +x_2 +x_3 = 1.$

табыңыз.

Оптималды шешімі $x_1 =17/59, x_2 =6/59, x_3 =36/59$ нүктесінде орналасқан.

10) $z=12(26x_1+40x_2)/5$ функциясының максимумын келесі шектелу шарттарында.

$0\leq x_1\leq 30; 0\leq x_2\leq 20; 3x_1 +3x_2\leq 100$

табыңыз?

Оптималды шешім $x_1 =40/3, x_2 =20$ нүктесінде орналасады.

12) G_1,G_2,G_3 -гараждарынан сәйкес ***A*** пункіті ***1, 4, 0*** автобустар санын алады; ***B*** пункіті G_1,G_2,G_3 гараждарынан ***2, 0, 5*** автобустар санын қабылдайды. Жалпы қашықтығы 25 миль болады.

13) $x_A =450, x_B =100.$

14) ***367*** дана «Каприз« моделі, ***683*** дана «Фаско« моделі.

15) Егерде ***x*** тонна Лидсадан Манчестерге тасымалданса ***y*** тонна Лидсадан Бирменгемге тасымалданса

а) Оптималды шешім ***x=400, y=400*** тең болғанда.

б) ***x=400, y=100.***

2.6 жаттығуларының жауабы

1) ***2,4:*** $x_1=0{,}4;\ x_2=0{,}2;\ x_3=0.$

2) ***0,8:*** $x_1=0;\ x_2=0{,}2;\ x_3=0{,}3.$

3) $x_A=13{,}125;\ x_B=2{,}625$ пайда (табыс) ***55,125*** долларға тең.

4) ***40000*** жарты-литрлық және ***20000*** бір литрлық бутылкасын ***A*** машинасынан шығарып, ***B*** машинасынан ***10000*** бір литрлық бутылка шығару қажет.

5) $я=150;\ x_1=1;\ x_2=4.$

6) $w=150;\ y_1=0;\ y_2=25/9,\ y_3=125/9.$

7) x_j -радиаторлардың әр түрінің саны, $x_A=400;\ x_B=0;\ x_C=150;\ x_D=0$ пайда ***3875*** долларға тең.

8) $x_A=2000;\ x_B=7000;$ Пайда ***10350*** долларға тең.

9) $x_1=50/7;\ x_2=0;\ x_3=55/7;\ Z=-695/17.$

10) ***200000$***-телевизорлерге, ***100000$***-радиоға, ***100000$***-газетке, ***100000$***-афишаға.

11) $z=-2;\ x_1=2;\ x_2=0.$

12) Минималды баға ***150*** (ақшаның бірлік бағасы); ***5/6*** кг-кептірілген балық, ***5*** кг-жеміс, $3\frac{1}{3}$ литр-сүт.

13) ***W***-дан ***A***-ға ***9000*** галлон; ***У***-тен ***A***-ға ***81000*** галлон;

W-дан ***B***-ға ***15000*** галлон; ***У***-тен ***B***-ға ***85000*** галлон;

X-тен ***C***-ға ***24000*** галлон; ***У***-тен ***C***-ға ***60000*** галлон;

Z-тен ***C***-ға ***36000*** галлон.

14) Тоқушылардың минималды саны - ***26***: ***4***-төрт тоқушы 1-ші сменнен бастайды; ***10***-тоқушы екінші сменнен; ***8*** тоқушы төртінші сменнен; ***4***-тоқушы бесінші сменнен бастайды, немесе ***4***-тоқушы бірінші сменнен бастайды; ***4*** тоқушы екінші сменнен; ***6*** тоқушы үшінші сменнен; ***1*** тоқушы төртінші сменнен; ***11*** тоқушы бесінші сменен бастайды.

15) Қажетті шарттарды бұзбайтын шешім жоқ.

3.4 жаттығуларының жауабы.

1) а) ***5500***тонна -***A*** түрлі шикі зат; ***4500***тонна -***B*** типті зат.

б) ***100*** доллар.

2) $x_1=160/11;\ x_2=60/11;\ x_3=x_4=0;\ Z=-460.$

3) $x_1=10;\ x_2=5;\ x_3=x_4=0;\ z=-455.$

4) $x_1=4; x_2=2; x_3=0; P=24$ ***A*** типті шикі заты үшін, ***0,6*** (ақшаның бірлігін) төлеу қажет, ***B*** типтіге - 1,2 (ақшаның бірлігін)

5) $x_A=18/5; x_B=3/5; x_C=0;$ Оптималды план ***P=19(4/5)*** тең. Машиналар үшін, қосымша жұмыс істеу сағаттары келесі ***1:7/5; 11:1/5.***

6) Ағаш аралау цехы-***0$;*** жинау цехы-***1$;*** өңдеу цехы-***7$;*** $x_1=150; x_2=50; x_3=10.$

7) Өз мемлекетінен ***2700*** студент, шет елден-***2500*** студент. Осы сандар тиімді.

8) *а)* ***3/5, 1/5;*** *б)* $\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$; *с)* иә, $x_1=4; x_4=24;$

д) $66\frac{2}{3} \le P \le 100,$ мұнда ***P***-шикі зат бағасы;

е) $x_1=11(1/4); x_2=6(1/4); x_3=15;$

9) $x_1=1; x_2=4; Z=150.$

10) Керекті шешімі жоқ.

12) $x_1=22/7; x_2=20/7; Z=-144/7.$ $x_1=0; x_2=4; Z=-20.$

14) $x_1=x_2=0; Z=4.$

15) ***E***, егерде ***F***-тен соңғы жатық жолын және соңғы бағанасын алыптастағанда пайда болады.

4.4 Жаттығулар жауабы.

1) $18y_1+30y_2+27y_3$ функциясының максимумы орналасатындай және шектелу шарттарды

$3y_1+y_2+2y_3 \le 11,$

$5y_1+9y_2+7y_3 \le 44.$

қанағаттандыратындай қылып $y_1 \ge 0,$ $y_2 \ge 0,$ $y_3 \ge 0$ айнымалыларын табыңыз.

2) $22y_1+9y_2-18y_3$ функциясының максимумы орналасатындай және шектелу шарттарды

$2y_1+y_2+y_3 \le 5,$

$y_1+y_2+2y_3 \le 7,$

$4y_1+y_2+3y_3=13.$

бұзбайтындай қылып y_1, y_2, y_3 айнымалыларын табыңыз? Мұнда $y_1 \ge 0,$ $y_2 \ge 0,$ ал y_3 таңбасының шектелуі жоқ.

5) $x_1=1, x_2=2, x_3=3$ және $z_{min}=84; \pi_1=-3, \pi_2=-2, \pi_3=-1.$

Егізделген есеп үшін: $y_1 \ge 0,$ $y_2 \ge 0,$ $y_3 \ge 0$ айнымалыларын шектелу шарттарды

$2y_1+y_2+3y_3 \le 11,$

$3y_1+2y_2+y_3 \le 14,$

$y_1+5y_2+2y_3 \le 15.$

қанағаттандыратындай және $w=11y_1+20y_2+11y_3$ функциясының максимумы орналасатындай қылып табыңыз? $y_1=3,\ y_2=2,\ y_3=1$ және $w_{max}=84;\ \rho_1=-1,\ \ \rho_2=-2,\ \rho_3=-3.$

6) Егізделген есеп: $y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0$ айнымалыларын шектелу шартын бұзбай

$y_1 \le -1,$

$-y_1-y_2 \le -1.$

және y_1-2y_2 функциясының максимумы орналасатындай қылып табыңыз?

Керекті (қажетті) шешімі жоқ.

8) Қойылған есеп мынадай: теріс мәнді $x_1 \le 0,\ x_2 \le 0$ айнымалыларды шектелу шарттарын бұзбай

$-5x_1+5x_2 \ge -4,$

$x_1-x_2 \ge 2.$

және $z=-7x_1+3x_2$ функциясының минимумы орналасатындай қылып табу қажет.

Керекті шешім жоқ.

Егізделген есеп келесі: Оң мәнді $y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0$ айнымалыларын шектелу шартын қанағаттандырып

$-5y_1+y_2 \le -7,$

$5y_1-y_2 \le 3.$

және $w=-4y_1+2y_2$ функциясының максимумы орналасатындай қылып табу қажет.

Керекті шешім жоқ.

9) $x_1=4,\ x_2=1,\ x_3=0$ және $z_{min}=32;\ \pi_1=0,\ \pi_2=-2,\ \pi_3=-1.$

II - БӨЛІМ

АЙНЫМАЛЫЛАРЫ ШЕКТЕЛМЕГЕН ОПТИМИЗАЦИЯ

Кіріспе

Оқырмандар назарына ұсынылып отырған оптимизация және сызықтық программалау курсы теоретиқалық және қолданбалы математика, сандық есептеу әдістерін оқып жүрген студентерге, мамандарға ұсынылады.

Нарық заманына сәйкес зерттеу операция негіздерін қолданып, пайдаланып өзінің тәжірибесін көтеріп жүрген мамандарда бағалауы мүмкін.

Оқулық құрал $\boldsymbol{n}$-айнымалылы функциялардан хабары бар және компьтердің алгоритмдық тілімен таныс оқырманға арналған.

Теориялық болжауларды тажірибелік есептеу процедурасына келтіріп, алгоритм ретінде аударып, оны түсінуге ыңғайлы қылып қарастыруға негізделген.

Оқулық құралда негізінде оптимизация әдістерінің тажірибеде қолдану мүмкіншілігі қарастырылып, матиматиқалық дәлелдеу тәртібіне көп назар аудармай, негізгі мақсат ретінде әдістердің алгоритімін құрастырып, оларды компьютерде пайдалануға келтіріп, жұмыс істеп есептеуге бағытталған.

Оқулық құралда $\boldsymbol{n}$-айнымалылығы $\boldsymbol{f(x_1,x_2,...,x_n)}$ функциясының минимумының немесе максимумының оптималды мәнінің іздеу әдістері қарастырылған.

Егерде $\boldsymbol{x_i}$ товарын $\boldsymbol{P_i}$ көлемінде игергендегі пайданы $\boldsymbol{f}$ функциясы ретінде қарастырсақ, функцияның максимумың іздеуге мәжбүрміз. Егерде қарастырылған товардың бағасын функция арқылы белгілесек, функцияның минимумын іздеу қажет. Максимумды немесе минимумды іздеп қарастыру, математиқалық көзқараста көп айырмашылығы жоқ, неге десеңіз $\boldsymbol{f}$ функциясының максимумы $\boldsymbol{(-f)}$ функциясының минимумы болып табылады.

Біз минимумды қарастырумен шектелеміз.

Айнымалылар мәні шексіз немесе белгілі бір шектікке бағынып өзгеруі мүмкін. Мысалы, егерде олар өндірілген заттың санын көрсетсе (қарастырса), өңдірістің қуаты мен шектеледі, және заттың (товардың) халыққа (аймаққа) керекті санымен шектеледі, т.с.с. шектелу шарттармен. Оптимизациялық есептің кезкелген шешімі осы шектелу шарттарды бұзбауы қажет. Сондықтан ыңғайлы болу үшін оқулық құралдың алғашқы бөлімінде айнымалылырына шектелу шарт қойылмаған есептерді қарастырып, келесі бөлімінде шектелу қойылған есептерді қарастырамыз.

Бұл оқулық құралда минимумды (функцияның кіші мәнін) іздеу әрікеттері және сол әрекеттерді компьютерде есептеу процедурасына (алгоритіміне) аударып қолдану үрдісіне зер салу негізделген.

Электронды есептеуіш машиналар (ЭЕМ) пайда болғаннан кейін, керекті оптимизациялық әдістердің дамуы мен игерілуін байқаймыз, сол әдістердің жұмыс істеуі компьютерді қолдануға мумкіншілік беретіні анықталады. Егерде пайдаланып жүрген есептеуіш машиналардың мүмкіншілігі мен жылдамдылығын ескермесек, әдістердің тажірибеде қолданылуының болмауыда мүмкін еді.

Оқулық құралда әдістердің көбіне арналған программалар Бейсик тілінде жазылған. Программалар пайдалуына дейінгі алгоритм үрдісінің түсініктемесі талданып қарастырылған, ол оптимизациялық әдістерге өзге көзғараспен қарауға мүмкіншілік туғызады. Алгоритмдық тіл білген кісіге қарастырылған программаларды Бейсик тілінен басқа тілге аудару қиынға соқпайды.

Келтірілген программалар тәжірибе жүзінде пайдалануға, қарапайым түрде, түсінікті болу үшін жазылған, яғни бұл программаларды өңдеп жақсартуды оқырманның өзіне жүктейміз. Оқулық құралдың келесі бөліміндегі сызықтық программалау әдістері, зерттеу операция облысындағы біраз есептерді шығаруға тиімді және компьютерді қолдануға ықшамдалған. Айнымалылардың ресурсі ретінде қарастырылып шектелгенін ескере отыра, келтірілген әдістермен (барлығын болмаса да) біраз экономикалық есептерді есептеуімізге болады.

Оқулық құралдың негізгі мақсаты ретінде - теориялық болжауларды компьютірде есептейтін процедураларға келтіріп, тәжірибеде қолданып-пайдалануды көрсету.

1 - тарау Классикалық әдістер
§ II.1.1 Бір айнымалылы функция

f(x) функциясының x_0 нүктесінде аумақталған минимумы болуы үшін, оң мәнді δ саны анықталып, яғни x_0 нүктесіне сәйкес аумағында кез келген x нүктесінде ***f(x)*** мәні $f(x_0)$ мәнінен үлкен (жоғары) болуы қажет, егерде $|x-x_0|<\delta$ онда $f(x) \geq f(x_0)$. Кез келген x нүктесінде келесі теңсіздік $f(x) \geq f(x^*)$ болған жағдайда, ***f(x)*** функциясының x^* нүктесінде (ең кіші мәні) глобалды минимумы болады.

x^* нүктесінде глобалды минимумы және x_0 нүктесінде аумақталған (локалды) минимумы болатын ***f(x)*** функциясының графикалық көрінісі I-1 суретте көрсетілген.

Жалпы есепте x_0 және x^* нүктелерінің мәнін табу немесе классикалық көзқарас бойынша ***f(x)*** функциясының бірінші туындысы арқылы өрнектеліп жазылатын теңдеуді шешуге әкеп тіреледі. II-1 суретінде көрсетілген ***f(x)*** функциясы және оның туындысы үзіліссіз, яғни x_0 және x^* нүктелерінде $f'(x)$ бірінші туындысы (функция градиенті) нөлге тең. Сондықтан, x_0 және x^* мәндері келесі теңдеудің түбірі болып табылады.

$$f'(x)=0 \qquad \text{(II.1.1)}$$

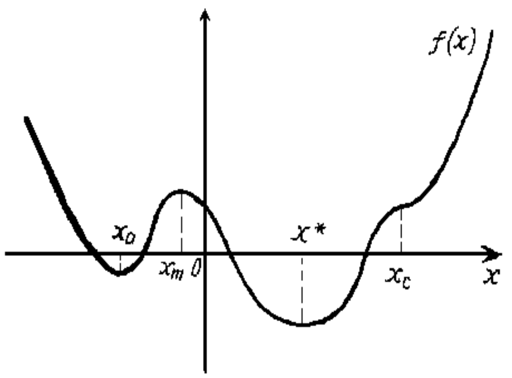
Суреттегі x_m нүктесінде функцияның аумақталған максимумы және x_c нүктесінде горизонталды иілу нүктелерінде де осы $f'(x)=0$ теңдеу нөлге тең болады. Сондықтан (II.1.1) теңдеуі тек қана минимумның керекті шарты болады да, бірақ минимумның жеткілікті шарты бола алмайды.

Аңғаратынымыз, x_0 және x^* нүктелерінен өткенде функцияның бірінші туындысы $f'(x)$ таңбасын терістен оңға өзгертеді. x_m нүктесінде таңбасын оңнан теріске өзгертеді, ал x_c нүктесінде туынды таңбасын өзгертпейді.

Сондықтан, минимум нүктесінде туынды функциясы - ұлғайатын функция, ал $f'(x)$ ұлғайу дәрежесі екінші туынды $f''(x)$ арқылы өлшенеді, келесі қатынастарды жазуымызға болады $f''(x_0)>0$ және $f''(x^*)>0$, ал x_m нүктесінде

$f''(x_m)<0.$

Егерде екінші туынды нөлге тең болса, онда белгісіз жағдай туады.



II -1 сурет

Жоғарыдағы алынған шешімнің негізгі тұжырымы болады, егерде $f(x)$ функциясын Тейлор қатарына x_0 (немесе x^*, немесе x_m) нүктелердің аймағында жіктеп қарастырсақ, онда $f(x)$ функциясының үздіксіздігін және оның туындысын талап етеді.

$$f(x_o+h)-f(x_o)=hf'(x_o)+\frac{h^2}{2!}f''(x_o)+\ldots \qquad \text{(II.1.2)}$$

Егерде x_0 нүктесінде минимумға жетсе, онда (II.1.2) формуласының сол жағы h-тың $(|h|<\delta)$ кез-келген аз мәнінде теріс болмайды.

Сондықтан, $f'(x_0)$ функциясының бірінші туындысы нөлге тең болу керек, және оның нақты шарты болады ((II.1.1) теңдеуді қара).

Егерде ол оң болса, онда h-тың ең кіші теріс мәні (II.1.2) формуласының оң жағын теріс, ал егерде ол теріс болса, онда h-тың ең кіші оң мәні оң жағын теріс қылар еді.

(1.2) формуласының келесі мүшесінде әрдайым $h^2>0$, болғанда, онда

$$f''(x_o)>0 \qquad \text{(II.1.3)}$$

x_0 нүктесінде минимумға жетеді. Егерде $f''(x_m) = 0$ және $f''(x_m) < 0,$ онда x_m нүктесінде де минимумға жетеді.

Локалды және глобалды минимумның айырмашылығын анықтау үшін $f(x_0)$ функциясы мен $f(x^*)$ функциясының мәндерін салыстыру қажет.

1Мысал

$f(x)=x^3-2x^2+x+1$ -функциясының иілу нүктелеріндегі жағдайды зерттеңіз:

$f'(x)=3x^2-4x+1=0$, -өрнекті келесі түрде жазып $(3x-1)(x-1)=0$, яғни ***x=1/3*** немесе ***x=1.***

x=1/3 нүктесінде туынды ***f'(x)*** таңбасын оңнан теріске өзгертеді, ал ***x=1*** нүктесінде таңбасын терістен оңға өзгертеді. Сондықтан, ***x=1/3*** нүктесінде функцияның максимумы, ал ***x=1*** минимумы болады.

Бұл есептің екінші туындысын қарастырып ***f''(x) = 6x-4,*** қарапайым түрде шығаруымызға болады.

f''(1/3)= -2 теріс мәнді, яғни ***x=1/3*** нүктесінде максимум;

f''(1)=2 оң мәнді, яғни ***x=1*** нүктесінде минимум болғаны.

Егерде белгісіз жағдайлар туындаған кезде, мысалы ***f''(x) = 0*** функциясының

формуласындағы мүшелердің санын көбейтіп, Тейлор қатарына жіктеу арқылы:

$$f(x_o+h)-f(x)=hf'(x_o)+\frac{h^2}{2!}f''(x_o)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_o)+\frac{h^4}{4!}f''''(x_o)+...$$

Осыдан келесі ережені жазуымызға болады:

Ереже: Егерде ***f(x)*** функциясы және оның туындылары үзіліссіз болса, x_0 нүктесінде (экстремум) минимум немесе максимум болуы тек қана ***n***-ің мәні жұп болған кезде болады. Мұнда ***n*** ретінде осы формуладағы x_0 нүктесінде нольге тең болмайтын туындысын қарастырамыз. Егерде $f^n(x_0)<0$, онда x_0 нүктесінде максимумның болғаны, егерде $f^n(x_0)<0$, x_0 нүктесінде минимумның болғаны.

2Мысал

$f(x) = (x-1)^6$ функциясының иілу нүктелерін табыңыз:

x=1 нүктесінде, $f'(x) = 6(x-1)^5 = 0$.

x=1 нүктесінде нөлге тең, ал бірінші айналмайтынның туындысы $f^6(1)=6!$ болады.

Сондықтан ***x = 1*** нүктесінде, ***f(x)*** функцияның минимумы болады.

§ II.1.2 n-айнымалы функциялар

n-ді нақты айнымалы функциясын қарастырайық:

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)=f(X).$$

n-өлшімді Евклид кеңістігіндегі координаттары $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ -ға тең нүктені ***X*** -бағана-векторы ретінде белгіленеді. Функция градиенті, яғни $\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, ..., \partial f/\partial x_n$, компонентті векторін $\nabla f(X)$ немесе, кейде ***g(X)*** арқылы белгіленеді. ***f(X)*** функциясының Гессе (гессиан) матрицасы ***G(X)***

арқылы белгілінеді және келесі ***n x n*** элементінен тұратын симметриялық матрица болып табылады:

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Бір айнымалы функцияларға ұқсас ***n*** айнымалы ***f(X)*** функциясының X_0 нүктесінде аумақталған минимумы болу үшін, оң мәнді **δ** саны анықталып $|X-X_0|<\delta$, яғни X_0 аумағындағы кез келген ***X*** нүктесінде ***f(X)*** мәні $f(X_0)$ мәнінен үлкен болуы қажет $f(X)\geq f(X_0)$**.** Кез келген ***X*** нүктесінде $f(X)\geq f(X^*)$ болған жағдайда ***f(X)*** функциясының ең кіші мәні (глобалды минимумы) болып табылады.

Осындай түсініктер арқылы және дербестік туындыларды есептеуіміз арқылы көз жететіндей қатынастар (болжаулар) бойынша (II.1.2) теңдеуін жалпы түрде қарастырып, келесі теңдеуді жазуымызға болады.

$$f(X_0+h)-f(X_0)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,...,x_n)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_1,...,x_n)+...=$$

$$=h^T\nabla f(X_0)+\frac{1}{2}h^TG(X_0)h+... \qquad \text{(II.1.4)}$$

Егерде ***f(X)*** функциясының X_0 минимумы табылатын нүктесі салған жағдайда, бірінші дербестік туындының $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (i=1,...,n) әрқайсысы X_0 нүктесінде нөлге тең болуы қажет. Егерде олай болмаған жағдайда h_i-дың ***(i=1,...,n)*** мәнін сәйкес қылып алып $f(X_0+h) - f(X_0) \leq 0$ теңсіздігің айырмашылығын теріс мән болады.

Сондықтан, X_0 нүктесінде минимум болуы үшін, қажетті шарт ретінде келесі теңдеу болады

$$\nabla f(X_0)=0 \qquad \text{(II.1.5)}$$

яғни

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}=0, \quad \text{(i=1,…,n)} \qquad \text{(II.1.6)}$$

Онда айырмашылық $f(X_0+h) - f(X_0)$ таңбасы келесі мүші арқылы табылады

$$\frac{1}{2}h^TG(X_0)h \qquad \text{(II.1.7)}$$

Егерде $G(X_0)$ матрицасы оң болып табылса, бұл мүше кез келген h мәніне оң болады.

Сондықтан, минимумның қажеттіде және жеткіліктіде шарты болып табылатын жағдай, егерде:

$\nabla f(X_0)=0$***;*** *G(X₀)* - матрицасы оң болып табылса. (II.1.8)

Максимумның қажеттіде және жеткілікті шарты:

$\nabla f(X_0)=0$; *G(X₀)* - матрицасы теріс табылса. (II.1.9)

1 Мысал

$f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 - 8x_2 - 12x_3 + 100$ функциясының экстремалды нүктелерін зерттеңіз:

$$\nabla f(X)=\begin{pmatrix}2x_1-4\\2x_2-8\\2x_3-12\end{pmatrix}=0 \qquad \text{егерде } x_1=2, x_2=4, x_3=6.$$

$$G(X)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

оң болып табылды. Барлық мәндері оң және 2-ге тең.

Сондықтан ***(2;4;6)*** нүктесінде ***f(X)*** функциясының минимумы болады.

§ II.1.3 Ньютон әдісі

Классикалық түрғыдан қарасақ, x бір айнымалы f(x) функциясының иілу нүктелерін зерттеу, яғни экстремумдерін табу, келесі теңдеуді шешуге тіреледі:

$$f'(x) = 0$$

Мұндай теңдеулерді шешу оңайға соқпайды. Сондықтан, сандық әдістердің ішінен, қысқаша қарапайым Ньютон әдісін қарастырайық. ***$У = f'(x)$*** қисық сызығының жорамал эскизы (графигі) жобалаған шешімді табуға мүмкіндік береді. Егерде, ***$f'(x)$*** функциясы таңбасын өзгертетін ***a*** және ***b*** аралығын белгілесек ***($f'(a)$ және $f'(b)<0$),*** онда ***$f'(x)$*** функцияциясының үзіліссіз екенін ескере отыра, η - нүктесінесінде қарасты теңдеудің түбірі болуы қажет, және ***$a<\eta<b$*** (II.1.2- сурет).

Ньютон (жанама) әдісін негізінде $\varphi(x)\equiv 0$ теңдеуінің түбірін табу пайдалынады. Осы әдістің геометриялық және аналитиқалық түсінігін (II.1.3 сурет) дәлелдеп келтірейік.

Егерде белгілі ***$P_0(x_0,f(x_0))$*** нүктесінен ***f(x)*** қисығына жанама жүргізсек, оның теңдеуі, аналитиқалық геометрия курсынан, келесі түрде жазылады.

$y - y_0 = tg((x-x_0)$

немесе туынды арқылы:

$y - y_0 = f'(x_0)(x-x_0), \; y_0 = f(x_0)$

Осы жанаманың абцисс x өсімен қиылысқан x_1 нүктесінесін табайық. Ол $y=0$ және $x= x_1$ тең болған жағдайдайда.

Теңдеуді келесі түрде жазсақ:

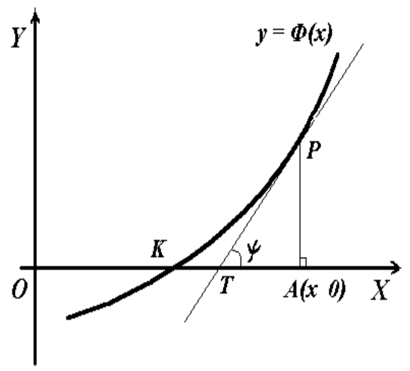
$$0-f(x_0)= f'(x_0)(x_1-x_0) \qquad \text{немесе}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)};$$

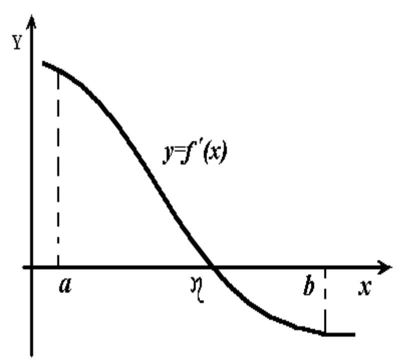
Келесі итерация қадамында жанаманы $P_1(x_1,f(x_1))$ нүктесінен жүргіземіз.

x_2 нүктесін табамыз.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)};$$



II.1.2- сурет



II.1.3- сурет

Сөйтіп итерацияны жалғастырып отыра, келесі рекуррентық формуланы жазайық:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)};$$

Итерация үрдісін белгілі дәлдікке дейін жүргіземіз, яғни

$$\left| x_{i+1} - x_i \right| \le \varepsilon = 0.00001$$

мысалы дәлдікті 10^{-5} деп қарастырайық

x_{i+1} нүктесін $f'(x_0) = 0$ теңдеуінің түбірі деп есептейміз.

Қарастырылған алгоритімді жүзеге асыратын программаны жазайық.

Программаны пайдаланып кез келген f***(x)=0*** теңдеуінің кем дегенде бір түбірін табуға болатындығын, яғни жалпы түрде жазылғанын байқауымызға болады. Неге десеңіз ***F = f(x)*** функциясы ***1000*** жолдан бастап ішкі программада есептеледі***, D = f'(x)*** функциясыда ***2000*** жолдан басап ішкі программада есептеледі. Есептеу дәлдігі ***50*** жолда қажеті мәнге тең қылып еңгізіледі.

FF = f(x)[f'(x) = f(x)] функциясы ***3000*** жолдан бастап ішкі программамада есептеледі.

```
10 PRINT «ПРОГРАММА ПОИСКА ТОЧЕК ПЕРЕГИБА ФУНКЦИИ F(x)”
20 REM ФУНКЦИЯ F(x) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В СТРОКЕ 3000
```

```
30  REM ПЕРВАЯ ПРОИЗВОДНАЯ  F'(x) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В СТРОКЕ 1000
40  REM  ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ F''(x) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В СТРОКЕ 2000
50  PRINT "ТРЕБУЕМАЯ ТОЧНОСТЬ ":INPUT  E
60  PRINT "НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ":INPUT  Z
70  PRINT "": PRINT"ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ "
80  X=Z
90  GOSUB 1000:GOSUB 2000
100  Z=X-F/D
110  PRINT X, Z
120  IF ABS(Z-X)>E  THEN GOTO 80
130  PRINT " "
140  X=Z : GOSUB 1000:GOSUB 2000 : GOSUB 3000
150  IF D>0 THEN PRINT  "МИНИМУМ РАВЕН"FF"В  ТОЧКЕ"X:GOTO 200
160  IF D<0 THEN PRINT "МАКСИМУМ РАВЕН"FF"В  ТОЧКЕ"X:GOTO 200
200  END
1000  F=X-COS(X)
1010  RETURN
2000  D=1+SIN(X)
2010  RETURN
3000  FF=X*X/2-SIN(X)
3010  RETURN
```

1Мысал

$y = \frac{1}{2}x^2 - \sin x$ функцияциясының минимумын табыңыз.

Келтірілген проограманы қолданып осы есепті шығаруымызға болады.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x$$

Төменде көрсетілген программаның жұмысы бойынша:

ψ(x)=f'(x) = x – cosx = 0, егерде ***x = 0,7391.***

ψ'(x)=1 + sinx функциясы ***x = 0,7391.***

Сонддықтан, функция ***y = - 0,4005*** минимумы ***x = 0,7391*** тең болғанда, дәлдігі үтірден кейінгі төртінші мәнге дейін есептегенде болады.

```
ПРОГРАММА ПОИСКА ТОЧЕК ПЕРЕГИБА ФУНКЦИИ F(x)
ТРЕБУЕМАЯ ТОЧНОСТЬ
.00001
НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ
.5
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ
.5                 .7552225
.7552225           .7391416
.73911416          .7390851
.7390851           .7390851
МИНИМУМ РАВЕН -.4004886  В  ТОЧКЕ   .7390851
```

§ II.1.4 Жаттығулар

1) $f(x) = x(x-1)^2$ функциясың максимумын және минимумын табыңыз?
2) $f(x) = x/(x^2-1)$ функциясың максимсимумын және минимумын табыңыз?
3) $a\cos\theta + b\sin\theta$ функцияциясының минимумы ретінде $-\sqrt{a^2-b^2}$, болатынын көрсетіңіз. Осындай мәнді, туындыларды пайдаланбай, табаласызба?
4) Бүйірлері тең үшбұрышқа, жоғарғы бұрышы 2θ-ға тең болған жағдайда, радиусы r шеңбер ішіне еңгізілген. Үшбұрыштың ауданын есептейтін өрнекті θ қатысты функция ретінде көрсетіп, оның максимумы үшбұрыш, тең бұрышты болғанда болатынын көрсетіңіз?
5) $f(x) = x^{2/3}-1$ функциясын зерттеңіз. Графигін сызыңыз. $x=0$ нүктесінде функцияның минимумы болатынын көрсетіңіз. $f'(x)$ мәні $x=0$ нүктесінде нешеге тең. Егерде x көбейіп, 0 нүктесін өткен жағдайда $f'(x)$ таңбасын өзгертеме?
6) $f(x)=|x|$ функциясын зерттеңіз. Минимумың табыңыз. $f'(x)$ функциясының минимумы бар нүктеде қайтып өзгеретіні туралы не айтасыз?
7) $e^{-x}sh(x/2) = f(x)$ функциясының минимумын табыңыз?
8) Товардың белгілі **K** санын өндіру үрдісінде оның бағасы – zK -ға тең болады. Товар қолданғанша складта сақталады. Бір дана товарды складта бір уақыт сақтау құны - zS –ке тең болсын.

   Бір уақыт (X/R) мерзімінде товардың қажеттік мөлшерін – R деп белгілейік, осындай өндіріс жүйесінің бір өлшем уақыт жұмыс істеу құны келесі байланыста болатынын

$$C = \frac{KR}{x} + \frac{Sx}{2}.$$

   және осы құнның минимумы $x = \sqrt{\dfrac{2KR}{S}}$ нүктесінде болатынын көрсетіңіз?
9) $f(x) = x^4-14x^3+60x^2-70x$ функциясың иілу нүктелерін зерттеңіз?

   {Бұл бір көрініске қарапайым сиақты мысал, классиқалық есептің біреуін марапаттайды. $f'(x)=0$ теңдеуін шешу қажет болады. Бұл жағдайда ол үшінші дәрежелі теңдеу, ол оңайшылықпен мүшелерге жіктелмейді. Шешудің ерекше тәсіл ретінде, келесі тарауда қарастырылатың, сандық әдістің бірін қолдануғада болады. Ол $\psi(x)=[f'(x)]^2$ функциясының минимумын іздеуге тіреледі. $\psi(x)$ функциясының минимумы нөлге тең, бұл $f'(x)=0$ теңдеуінің түбірін тапқанмен бірдей}.
10) $f(x) = x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$ функциясының иілу нүктелереін зерттеңіз?
11) $f(x) = -x_1^2-6x_2^2-23x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3+20x_2x_3$ функциясының иілу нүктелерін зерттеңіз?
12) $f(x)$ квадратты келесі түрдегі функция болсын: $f(x)=a + b^Tx + 1/2x^TGx$,

    мұнда a – тұрақты сан; b^T –вектор, х-тен байланыссыз; ал G - оң табылған симметриялық матрица x -ке байланысы жоқ;

    $x^* = -G^{-1}b$ тең екенін көрсетіңіз?

13) $f(x)=(x_1-a)^2+(x_2-b)^2+(x_3-c)^2$ функциясының минимумы $(a;b;c)$ нүктесіде екенін көрсетсетіңіз.

14) $f(x) = f(x_1,x_2)$ функциясының минимумы (x_1^*, x_2^*) нүктесінде болсын.

Жоғарыдағы ***(1.8)*** шарты келесі түрде де жазылатынын көрсетіңіз:

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_1}\left(x_1^*, x_2^*\right)=0; \quad \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_2}\left(x_1^*, x_2^*\right)=0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(x_1^*, x_2^*\right)>0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_1^2}\left(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*\right)\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_2^2}\left(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*\right)-\left[\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_2}\left(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*\right)\right]^2>0.$$

15) Фирма бір біріне ұқсас екі ***1*** және ***2*** товар өндіретін болсын. Товарларды өткізгеннен түсетін пайда $c_i q_i$ ***(i=1,2),*** мұнда c_i -тұрақты сан, ал q_i - өткізілген (сатылған) товардың көлімі. Соңғысы (P_1 және P_2) екі товардың бағасына байланысты. Сонғы өткізген (сатылған) қортындысын таңдасақ, келесі эмпириалық қатынасты жазуға болсын:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{q}_1 &= \mathrm{a}_1\mathrm{P}_2-\mathrm{b}_1\mathrm{P}_1, \\ \mathrm{q}_2 &= \mathrm{a}_2\mathrm{P}_1-\mathrm{b}_2\mathrm{P}_2. \end{aligned}\right\}$$

мұнда: a_1, a_2, b_1, b_2 -оң мәнді тұрақтылар, P_1 және P_2 бағаларын, жалпы пайданың максимумы болатындай қылып тағайындау қажет болсын.

Жалпы пайданың максимумын іздейтін P_1 және P_2 сәйкес теңдеулердің өрнегін жазып соны шешіңіз.

Егерде, осы теңдеулердің шешімі оң мәнді және $4b_1b_2 >(a_1+a_2)^2$ болған жағдайда, осы теңдеулер оптималды бағада болатынын көрсетіңіз.

16) $e^{-x} - \cos x$ -функциясының минимумын табыңыз.

2 - тарау
Бір айнымалылы функциялардын оптимумын іздеу әдістері

§ II. 2.1 Кіріспе

1-ші тараудың ***1.4*** тақырыбындағы ***9***-ші жаттығу. Классикалық көзғараспен қарағандағы жалпы есепті көрсетеді.

$f(x)=x^4-14 x^3+ 60x^2-70x$ -функциясың иілу нүктесін зерттеу үшін,

$f'(x)= 4 x^3+42x^2+120x-70=0$ теңдеуінің түбірін табу қажет етеді. Қарапайым тәсілмен бұл теңдеуді шығару мүмкін емес, сондықтан біздер сандық әдістерді қолдануымыз қажет. $f(x)$ функциясының минимумын іздейтін бір неше сандық процедурасын осы тарауда қарастырамыз.

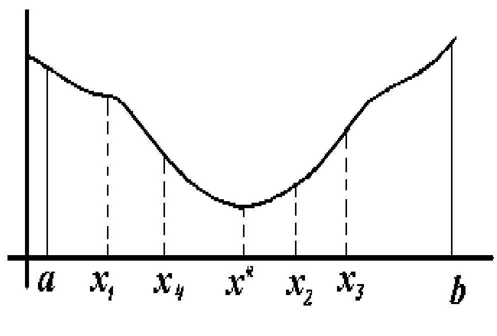
Сандық әдістер арқылы $f(x)$ функциясының минимумын біздер белгілі $a<x<b$ аралығында қарастырамыз. Яғни осы аралықта минимумның болатына сеніп, функцияның мәндерін осы аралықтағы нүктелерде есептеп аумақталған минимумын табамыз. Кейде осындай іздеу стратегиясы

қажеттіде және мүмкімшілік беретін болып табылады. Мысалы химиялық үрдісті жүргізудің бағасы ***T***-қызуынан байланысты болады және осы байланыс қатынасының өрнегін білмеуіміз мүмкін. Бірақ инженер (технолог) үрдісті әр түрлі қызуда жүргізіп, тәжірибе ретінде эксперимент жасап, әр түрлі қызуға үрдістің бағасын есептейді. Минималды үрдіс бағасы қай ***T*** қызуында болатынын табуға үміттенеді. Үрдіске жұмсалатын қаржының минимумын белгілі дәлдікпен немесе өзгеретін ең кіші аралығын табу есептерін қарастырайық. Функцияны есептеуді (эксперимент жасауды) неғұрлым азайтып, қойылған есепті шығарудың тиымді тәсілдерін көрсетейік.

Жоғарыда келтірілген мысалда, химиялық үрдістің қызуын өзгерту дәлдігі

1^oC немесе тіпті 10^oC болуы ықтимал. Эксперимент жүргізудің өзі қаражатты қажет етеді, сондықтан, инженер керекті дәлдікті негұрлым эксперименттің санын азырақ жүргізіп табуға тырысады. a және b нүктелерін бір шамамен таптық деп есептейік, яғни осы аралықта функцияның аумақталған минимумы x^* нүктесінде бар екеніне көзіміз жетсе ғана, қарастырылған функция (2.1 суретіндегі) жағдайға ұқсас деуімізге болады.

Егерде қарастырған функцияның мәні үш нүктеде белгілі яғни $a<x_1<x_2<x_3<b$, ал $f(x_2)<f(x_1)$ және $f(x_2)<f(x_3)$ қатынаста болып табылса $x_1<x^*<x_3$ аралығын айтуымызға болады. Онда x^* нүктесі $(x_1;x_3)$ аралығында өлшемі (a,b) аралығынан кіші аралықта болғаны.



II.2.1-сурет

§ II. 2.2 Фабоначчи әдісі мен іздеу

Минимумның мәнін дәлірек табу қажет болсын, яғни белгісіз аралықты неғұрлым кішірек қып табу керек. Бірақ функцияның мәнін, n-рет есептеп. Осы функция есептелетін n нүктесіне қарай тағайымдаймыз Бір қарағанда аңғаратынымыз, барлық нүктеде минимумды іздеудің қажеті жоқ. Керісінше алғашқы эксперименттің мәндерін қолданып, әдістің үрдісінде келесі нүктелерді табуымызға, қолдануымызға болады. Шынында да экспериментен функция мәндерін және минимумның орналасу мәліметтерін біле отыра, осы мәндерді келесі іздеу үрдесінде пайдаланғанымыз жөн.

Белгісіз (x_1,x_3) аралық ішінде $f(x_2)$ функция мәні есептелген болсын

(II.2.1 суретті қара). Белгісіз (x_1,x_3) аралығын кішірейту үшін және функция мәнін бір рет қана x_4 нүктесінде есептеу үшін, x_4 нүктесін қай жерге орналастырып есептеуіміз қажет?

x_2-x_1=L және x_3-x_2=R тең деп қарастырсақ, 2.1 суретінде көрсетілгендей $L > R$ және осы мәндердің бәрі айнықталған болса, x_1, x_2 және x_3 мәні белгілі болса. Егерде x_4 нүктесі (x_1,x_3) аралығында орналасса, онда келесі жағдайлар болады:

1) Егерде $f(x_4)<f(x_2)$, жаңа белгісіз аралық ретінде (x_1,x_2) аралығын қарастырамыз оның ұзындығы x_2-x_1=L тең болады.

2) Егерде $f(x_4)>f(x_2)$, жаңа белгісіз аралық ретінде (x_4,x_3) аралығын қарастырамыз оның ұзындығы x_3-x_4 тең болады.

Қандай жағдайдың болатындығын білмегендіктен, x_4 нүктесіне қарасты x_3-x_4 және x_2-x_1 аралық ұзындықтарының үлкенін кішірейтуге тырысайық. Осы аралықтарды бірдей қылып қарастырсақ айтқан мүмкіншілік орындалады, яғни x_4 -нүктесін аралық ішінде x_2-нүктесіне симметриялы орналастырсақ қана болады. x_4 нүктесін басқаша орналыстырғанымыз табылған аралықтың ұзындығын L -ден үлкен болуына ұрындырады. x_4 нүктесін x_2 нүктесіне қарасты симметриялық орналастырсақ біз ұтылмайтын жағдай да болатынымыз түсінікті.

Егерде, келесі нүктеде функцияны есептеу қажет болса, жоғарыда айталған әрекетерді x_4 нүктесінде есептелген (x_1, x_2) аралығына немесе x_2 нүктесінде есептелге (x_4,x_3) аралығына жасап аралық ұзындығын тағы кішірейтіміз.

Сөйтіп келесі нүктені аралық арасындағы нүктеге симметриялы орналастырып, әрқарай есептеуді жалғастырамыз. Осы есептеу үрдісін қандай шартта тоқтамыз, соны ұғайық.

n -рет функцияны есептеу кезінде n-ші нүктені ($n-1$)-ші нүктеге симметриялы орналастырсақ. Нүктені орналастыру өзімізге байланысты. Қарасты қадамда аралықты қысқартудың ең тиімдісы, аралықты қақ ортасынан бөлу.

Онда x_n нүктесі x_{n-1} нүктесімен сәйкес болады. Бұл жағдайда функция туралы жаңа мәліммет табылмайды.

Сондықтан x_{n-1} және x_n нүктелерін қажетті қашықтықта орналастырып, x_n нүктесінің оң немесе сол жағындағы аралықты қарастырамыз. Олар L_{n-1} аралығының ортасының екі жағында ε/2 қашықтығында орналасады; екі нүктенің арасындағы қашықтықты немесе ε-мәнін өзіміз тағайндаймыз. (Біздің мысалда, инженер (технолог) 1^oC аралығында қызуды өзгерте алалса, $\varepsilon=1$ тең деп қарастырамыз).

Белгісіз аралықтың ұзындығы - L_n , сондықта

$$L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon$$

(2.2 суретінің астыңғы бөлігі).

Алғашқы қадамда x_{n-1} және x_{n-2} нүктелері L_{n-2} аралығының екі жағында L_{n-1} қашықтықта симметриялық орналасуы қажет, сондықтан

$L_{n-2} = L_{n-1} + L_n$

(2.2 суретінің ортаңғы бөлігі).

<u>*Ескерту*</u>. Суреттен белгілі болғаны, соңғы қадамның алдындағы қадамда

x_{n-2} нүктесі аралықтың ішіндегі нүкте болып табылады.

Оған сәйке

$\boldsymbol{L_{n-3} = L_{n-2}+L_{n-1}}$ (2.2 суретінің жоғарғы бөлігі)

Жалпы түрінде,

$\boldsymbol{L_{j-1} = L_j + L_{j+1},} \quad \boldsymbol{1<j<n}$ жағдайда (2.1)

Осыны ескере отырып,

$L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon,$

$L_{n-2} = L_{n-1} + L_n = 3L_n - \varepsilon,$

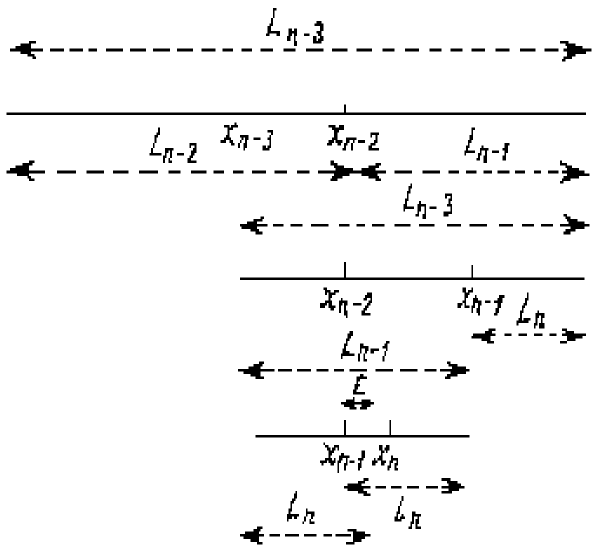
$L_{n-3} = L_{n-2} + L_{n-1} = 5L_n - 2\varepsilon$

$L_{n-4} = L_{n-3} + L_{n-2} = 8L_n - 3\varepsilon$ және т.с.с.

Егерде Фибоначчи санының қатарын келесі түрде жазып қарастырсақ:

$F_0 = 1, F_1 = 1; F_k = F_{k-1} + F_{k-2}; k = 2,3,...,$ өзгерген кезде

$$L_{n-j} = F_{j+1}L_n - F_{j-1}\varepsilon;\ j = 1,2,..., n-1. \qquad (II.2.2)$$



II.2.2-сурет

Егерде алғашқы ***(a,b)*** аралығының ұзындығы $\boldsymbol{L_1 = (b-a)}$ тең болса, онда

$$L_1 = F_n L_n - \varepsilon F_{n-2} \qquad \text{яғни} \qquad \mathrm{L_n} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{F_n}} + \varepsilon\frac{\mathrm{F_{n-2}}}{\mathrm{F_n}}. \qquad (II.2.3)$$

n-рет функцияны есептеп, біз алғашқы аралық ұзындығын $\boldsymbol{1/F_n}$-есе қысқартамыз (ε қарамастан) және бұл ең жақсы жетістік болып саналады.

Егерде іздеуді бастасақ, оны жоғарыда келтірілген симметриялық тәртібін қолданып жалғастыруымыз қиын емес.

Сондықтан, осы бірінші нүктелердің алғашқы аралығының шетін ен $\boldsymbol{L_2}$ - қашықтығында орналасуын табсақ:

$$L_2 = F_{n-1}L_n - \varepsilon F_{n-3} = F_{n-1}\frac{L_1}{F_n} + \varepsilon\frac{\left(F_{n-1}F_{n-2} - F_n F_{n-3}\right)}{F_n} = \frac{F_{n-1}}{F_n}L_1 + \frac{(-1)^n\varepsilon}{F_n}. \quad (II.2.4)$$

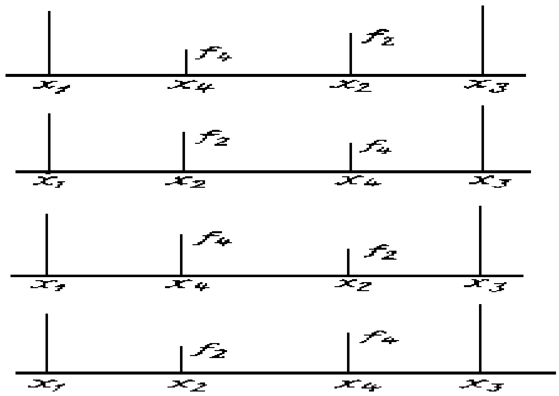
а) $x_4<x_2$
$f_4< f_2$
x_4-нүктесі ішінде жататын
жаңа аралық (x_1,x_2)
Програманың *330* жолы

б) $x_4>x_2$
$f_4< f_2$
x_4-нүктесі ішінде жататын
жаңа аралық (x_2,x_3)
Програманың 360 жолы

в) $x_4<x_2$
$f_4> f_2$
x_2-нүктесі ішінде жататын
жаңа аралық (x_4,x_3)
Програманың *420* жолы

г) $x_4>x_2$
$f_4> f_2$
x_2-нүктесі ішінде жататын
жаңа аралық (x_1,x_4)
Програманың *460* жолы

Егерде $\boldsymbol{f(x_2) = f_2}$ және $\boldsymbol{f(x_4) = f_4}$ белгілесек, төрт жағдайды қарастырумыз керек (2.3 сурет).



II.2.3-сурет

Бірінші нүктенің орналасуы анықталғаннан кейін Фибоначчи сандарының да қажеті жоқ болады. Қолданатын *(*мәнін тажірибе түсінігінен де табуымызға болады. Ол $\boldsymbol{L_1/ F_{n+1}}$ мәнінен кіші болуы қажет, кері жағдайда функцияны есептеуге уақытты босқа жұмсаймыз. (II.2.8 тақырыптың 3 жаттығуын қараңыз).

Іздеудің Фибоначчи әдісі деп аталуы, үрдісте Фибоначчи сандарын пайдаланғандықтан, бұл іздеу үрдісі итерациялық процедура. Қарасты аралықтың ішінде орналасқан $\boldsymbol{x_2}$ нүктесін пайдаланып іздеу үрдісін жүргізгенде келесі $\boldsymbol{x_4}$ нүктесі, әрқашанда екі қатынастан табылады:

$$x_3-x_4 = x_2-x_1 \quad \text{немесе} \quad x_4-x_1 = x_3-x_2 , \qquad \text{яғни} \quad x_4 = x_1-x_2+x_3 \qquad \text{(II.2.5)}$$

Төменде келтірілген программада, іздеу үрдісінің төрт жағдайында ескеріп, жазылған.

Программаның келтірілген түрінде 40-функцияны есептеуімізге мүмкіншілік берілген.

Программада $\boldsymbol{f(x) = x^4-14x^3+60x^2-70x}$

функциясының шешімі қарастырылған (программаның ***1000*** жолы).

```
20 PRINT "поиск методом Фибоначчи " H:PRINT ""
```

```
30 REM В программе производиться поиск отрезка (А,В),
40 REM содержащего точку минимума унимадальной
50 REM Функции F(x),за N вычислений функции. Функция F(x)
60 REM вычисляется в строке 1000 в виде Z=F(x).
70 REM Необходимые числа Фибоначчи
80 REM вычисляются здесь же
90 REM
100 DIM F(40)
110 PRINT "ЗАДАЙТЕ N ":INPUT N
120 F(0)=1:F(1)=1
130 FOR I=2 TO N
140 F(I)=F(I-1)+F(I-2)
150 NEXT I
160 PRINT "Задайте EPSILON":INPUT E
200 PRINT "Задайте интервал (A,B) "
210 INPUT A,B
250 X1=A:X2=A+(B-A)*F(N-1)+E*(-1)^N)/F(N):X3=B
260 X=X2:GOSUB 1000:F2=Z
270 PRINT "                    Текущий интервал"
280 K=1:PRINT X1,X3
290 X4=X1-X2+X3
300 X=X4:GOSUB 1000:F4=Z
310 IF F4>F2 THEN GOTO 400
320 IF X2<X4 THEN GOTO 360
330 X3=X2:X2=X4:F2=F4:PRINT X1,X3
340 GOTO 500
360 X1=X2:X2=X4:F2=F4:PRINT X1,X3
370 GOTO 500
400 IF X2<X4 THEN GOTO 460
420 X1=X4:PRINT X1,X3
430 GOTO 500
460 X3=X4:PRINT X1,X3
500 K=K+1
510 IF K<=N THEN GOTO 290
600 PRINT  "Конечный интервал":PRINT X1,X3
610 PRINT "Значение функции равно ",F2
650 END
1000 Z=X*X*X*X-14*X*X*X+60*X*X-70*X
1010 RETURN
```

1Мысал

Функцияны 10-рет есептеп (0,1) аралығында **$f(x)=2x^3-e^x$** функциясының минимумын табу үшін Фибоначчи әдісін қолданыңыз. Бірақ ***1000*** жолда функция өрнегін жазу қажет.

Төменде келтірілген программаның жұмыс істеу нәтижесінде **ε=*0*** нөлге тең деп еңгізілген.

Соңғы белгісіз аралықтың ұзындығы

$$\mathbf{0{,}359550563 - 0{,}348314606=0{,}01123957} \approx \frac{1}{89}=\frac{1}{F_{10}}.$$

Минимум $x^* = 0{,}357403$ нүктесінде үтірден кейін алты таңбасыбар дәлдікпен есептеліп және оның мәні осы нүктеде $f(x^*) = -1{,}174138$ тең болады.

```
    поиск методом Фибоначчи
    ЗАДАЙТЕ N
    10
    Задайте EPSILON
    0
    Задайте интервал (A,B)
  0              1
             Текущий интервал
  0              1
  0              .6179775
     .235955        .6179775
     .235955        .47191
     .3258425       .47191
     .3258425       .41573
     .3258425       .3820225
     .348315        .3820225
     .348315        .3707875
     .35955         .3707875
     .35955         .370785
    Конечный интервал
     .35955         .370785
    Значение функции равно       - 1.174132
```

2Мысал

$f(x)=x^4-14x^3+60x^2-70x$ функциясының минимумын ***(0,2)*** аралығында табыңыз. Функцияны ***20-*** рет есептеуін қолданып.

(*1.4 тақырып 9 жаттығуды қараңыз*).

$Z = f(x)$ функция мәні ***1000*** жолда есептеледі, $N=20$ және $\varepsilon=0$ тең жағдайда. Программаның жұмыс істеу натижесі төменде көрсетілген.

```
    поиск методом Фибоначчи
    ЗАДАЙТЕ N
    20
    Задайте EPSILON
    0
    Задайте интервал (A,B)
       0          2
             Текущий интервал
  0              2
  0              1.236068
       .472136      1.236068
       .472136      .9442721
       .6524761     .9442721
       .6524761     .8328161
       .7213602     .8328131
       .763932      .8328161
       .763932      .8065038
```

.763932	.7902443
.773985	.7902443
.773985	.7840378
.7778313	.7840378
.7778313	.7816778
.7793176	.7816778
.7801915	.7816778
.7801915	.7810653
.7804528	.7810653
.7807141	.7810653
.780804	.7810653
.780804	.7810653

Конечный интервал
.780804 .7810653
Значение функции равно - 24.3696

§ II. 2.3 ‘‘Алтын қиылыс’’ әдісі мен іздеу

Функцияны неше рет есептейтініміз белгісіз болуы мүмкін. Фибоначчи әдісінде ол сан $\mathbf{L_2}$ мәнін табу үшін қажет, яғни алғашқы нүктенің орналасуын. *(II.2.4 теңдеуін қараңыз).*

Фибоначчи әдісі сиақты ‘‘Алтын қиылыс’’ әдісіде компьютерде қолдануға ыңғайлы, бірақ итерациялық үрдіс басында функцияны неше рет есептеу $\boldsymbol{n}$ санын білудың қажеті жоқ.

Алғашқы әдістегідей $\boldsymbol{J}$ рет функцияның мәнін есептеген соң, сәйкес түсініктер бойынша (II.*2.1 теңдеуді қараңыз*) жазамыз.

$$\boldsymbol{L_{j-1}= L_j+L_{j+1}}. \qquad (II.2.6)$$

Бірақ $\boldsymbol{n}$ саны белгісіз болған жағдайда біз $\boldsymbol{L_{n-1} = 2L\text{-}\varepsilon}$ шартын қолданалмаймыз. Егерде келесі аралықтар қатынасы бірдей тең деп есептесек, яғни

$$\frac{L_{j-1}}{L_j}=\frac{L_j}{L_{j+1}}=\frac{L_{j+1}}{L_{j+2}}=...=\tau, \qquad (II.2.7)$$

онда (II.2.6) теңдеуін ескерсек:

$$\frac{L_{j-1}}{L_j}=1+\frac{L_{j+1}}{L_j},$$

яғни

$$\tau=1+\frac{1}{\tau}.$$

Сөйтіп $\boldsymbol{\tau^2-\tau-1 = 0,}$ теңдеуінен

$$\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}518033989,$$

онда

$$\frac{L_{j-1}}{L_{j+1}}=\tau^2,\quad \frac{L_{j-1}}{L_{j+1}}=\tau^3 \quad \text{және т.с.с}$$

Сондықтан,

$$\frac{L_1}{L_n} = \tau^{n-1}, \qquad \text{яғни}$$

$$L_n = \frac{L_1}{\tau^{n-1}}. \qquad (II.2.8)$$

Қарстырылған функция мәндерінің екеуін талдасақ, келесі зерттелетін аралықты табуымызға мүмкіншілік бар екеніне көз жетеді. Ол аралық алғашқы табылған нүктелерден және соған симметриялық орналасқан нүктеден тұрады. Бірінші нүкте аралықтын бір шетінен L_1/τ қашықтығында орналасса, екінші нүкте басқа шетінен сондай қашықтықта орналасады.

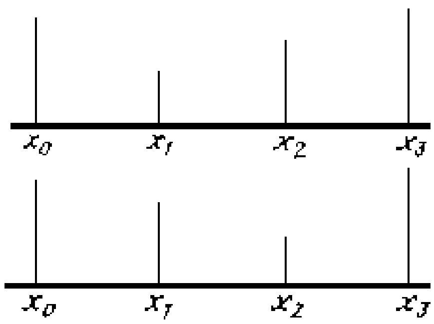
II.2.8 тақырыбының 2-ші жатығуына сеніп $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{n}$ сүйенсек,

(II.2.4) теңдеуінен байкайтынымыз "Алтын қиылысты" әдіспен іздеу Фибоначчи әдісінің шектелген түрі екеніне көзіміз жетеді. "Алтын қиылыс" деген әдістің аты *(*II.***2.7)*** теңдеуіндегі қатынаспен байланысты. Аңғарсақ, L_{j-1} аралығы екіге бөлінеді. Аралықтың жалпы ұзындығының бөлінген үлкен бөлшектің ұзындығына қатынасы үлкен бөлшектің кіші бөлшек ұзындық қатынасына тең болады, яғни матиматика саласында осындай катынастары "Алтын қатынас" деп атайды.

Егерде осындай (x_0, x_3) аралығы ізделсе, қосымша x_1 және x_2 нүктелерінде функцияның мәндері f_1 және f_2 есептелген болса, екі жағдайды қарастыруға тіреледі (II.2.4 сурет).

а) $f_1<f_2$
жаңа аралық ретінде
(x_0,x_2) тағайндаймыз.
Программаның ***190*** жолы.

б) $f_1>f_2$
жаңа аралық ретінде
(x_1,x_3) тағайндаймыз.
Программаның ***250*** жолы.



II.2.4-сурет

Келесі программада ‘Алтын қиылыс’ әдісі мен іздеу іске асырылған. Берілген дәлдікті өзіміз программаның ***300*** жолында жазып тағайындаймыз.

Төменде $f(x) = -e^{-x}\ln(x)$ функциясына программаны қолданғандағы көрініс жазылған. Іздеу ***(0,2)*** аралығында жүргізілген.

Минимум ***1,76322211*** нүктесінде орналасқан, функцияның мәні ***-0,0972601313*** тең.

```
5 DEFDBL A-Z
10 PRINT "          Метод золотого сечения ":PRINT  "":PRINT    ""
20 REM Программа производит поиск интервала
30 REM (A, B), в котором лежит точка минимума
40 REM унимадальной функции F(x).
50 REM Окончательное значение x получено с точностью 4D
60 REM F(x) определяется в строке 1000 в виде Z=..
90 PRINT  "Задайте интервал (A, B) ":INPUT A, B
100 T1=.3819660113#:T2=1-T1
110 X0=A:X1=A+T1*(B-A):X2=A+T2*(B-A):X3=B
120 X=X1:GOSUB 1000:F1=Z
140 X=X2:GOSUB 1000:F2=Z
150 PRINT "Текущий интервал "
170 PRINT X0, X3
180 IF F2<F1 THEN GOTO 250
190 I=X2\X0:X3=X2:X2=X1:X1=X0+T1*I
200 F2=F1:X=X1:GOSUB 1000
210 F1=Z:GOTO 300
250 I=X3-X1:X0=X1:X1=X2:X2=X0+T2*I
260 F1=F2:X=X2:GOSUB 1000:F2=Z
300 IF I>.00005 THEN GOTO 170
450 PRINT
470 PRINT "X="X1, "F(x)= "F1
500 END
1000 Z=-EXP(-x)*LOG(x)
1010 RETURN
```

```
          Метод золотого сечения

           Задайте интервал (A, B)
 0                                  2

          Текущий интервал
0                                   2
     .7639320226                            2
     1.2360679774                               2
     1.527864044976863                          2
     1.708203932423137                          2
     1.7082039324233137                         1.88854381995464
     1.708203932423137                          1.819660112468496
     1.708203932423137                          1.777087639941836
     1.73451516742761                   1.777087639941836
     1.750776404949797                          1.777087639941836
     1.750776404949797                          1.76703764245955
     1.756987644980199                          1.76703764245955
     1.760826402424398                          1.76703764245955
     1.760826402424398                          1.764665159878096
```

1.762292677297335	1.764665159878096
1.762292677297335	1.763758952169844
1.762292677297335	1.763198885008787
1.762638817842288	1.763198885008787
1.762638817842288	1.762984958387139
1.762771031765554	1.762984958387139
1.762771031765554	1.762903245688782
1.762821532990448	1.762903245688782
1.762821532990448	1.762872034215326

x=1.762852744461857 F(x)= -9.726013243198395D-02

§ II. 2.4 Қисықтармен аппроксимациялау

Алғашқы екі тақырыпта функцияның минимумы орналасқан ең кіші аралықты іздейтін әрекеттер қарастырылды. Келесі екі тақырыпта өзгеше көзғараспен іздейтін әреккеттерді пайдаланамыз.

Кішірек аумақтың ішіндегі белгілі нүктелердегі функцияның мәндерін пайдаланамыз. Осы аумақтың ішінде функция анықталған заңдылыққа (аналитиқалық формулаға, теңдеуге) бағынады деп есептеп функцияны аппроксимациялаймыз.

Мысалы, триганометриялық функцияларына, квадраттық теңдеуге (екінші дәрежелі полиномға); кубттік теңдеуге (үшінші дәрежелі полиномға), т.с.с. формулалар арқылы функцияны интерполяциялап, осы тағайындалған формулалардың (полиномдардың) минимумын табу оңайға түседі. Табылған минимумды қарастырылған функцияның минимумына сәйкес деп есептеп, іздеуді тоқтатамыз.

§ II. 2.5 Квадраттық интерполяциялау

Егерде ***f(x)*** функциясының мәні f_α, f_β, f_γ әртүрлі $\alpha, \beta, \gamma,$ үш нүктеде белгілі болса, ***f(x)*** функциясын квадраттық функциясы арқылы аппроксимациялаумызға болады

$$\varphi(x) = Ax^2 + Bx + C, \qquad (II.2.9)$$

мұнда ***A, B*** және ***C*** тұракты сандары, теңдеу системасынан табылады

$$\begin{cases} A\alpha^2 + B\alpha + C = f_\alpha \\ A\beta^2 + B\beta + C = f_\beta \\ A\gamma^2 + B\gamma + C = f_\gamma \end{cases} \qquad (II.2.10)$$

Системаны есептеп шығарғанан кейін, аздап өзгертіп жазғанан кейін

$$\begin{aligned} A &= [(\gamma-\beta)f_a + (\alpha-\gamma)f_\beta + (\beta-\alpha)f_\gamma]/\Delta, \\ B &= [(\beta^2-\gamma^2)f_a + (\gamma^2-\alpha^2)f_\beta + (\alpha^2-\beta^2)f_\gamma]/\Delta, \qquad (II.2.11) \\ C &= [\beta\gamma(\gamma-\beta)f_a + \gamma\alpha(\alpha-\gamma)f_\beta + \alpha\beta(\beta-\alpha)f_\gamma]/\Delta, \end{aligned}$$

мұндағы, $\Delta = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$. *ψ(x)* функциясы квадраттық теңдеу болғандықтан, егерде ***A>0*** болған жағдайда, минимумы ***x = - B/2A*** нүктесінде орналасатыны айқын. Сондықтан, ***f(x)*** функциясының минимумын аппроксимациялап келесі нүктеде деп есептейміз.

$$\delta = -\frac{1}{2}\left[\frac{(\beta^2-\gamma^2)f_\alpha + (\gamma^2-\alpha^2)f_\beta + (\alpha^2-\beta^2)f_\gamma}{(\beta-\gamma)f_\alpha + (\gamma-\alpha)f_\beta + (\alpha-\beta)f_\gamma}\right]. \qquad (II.2.12)$$

Бұл әдіс бір айнымалылы функцияларға қана қолданылады. 4-ші тараудағы сызықтық іздей процедурасын орындаған мерзімде осы әдіс пайдалы болуы мүмкін. Ол процедураларда ***f(x)*** функциясының минимумын түзу сызық

$x_0 + \lambda d$ бойындағы нүктелерден іздейді, мұнда x_0 - берілген нүкте; ал ***d*** қабылданған бағытты көрсетеді. $f(x_0 + \lambda d)$ функциясының осы түзу сызық бойындағы мәндері ***λ*** **-** бір анымалы функциясына байланысты болып табылады.

$$\varphi(\lambda) = f(x_0 + \lambda d). \qquad (II.2.13)$$

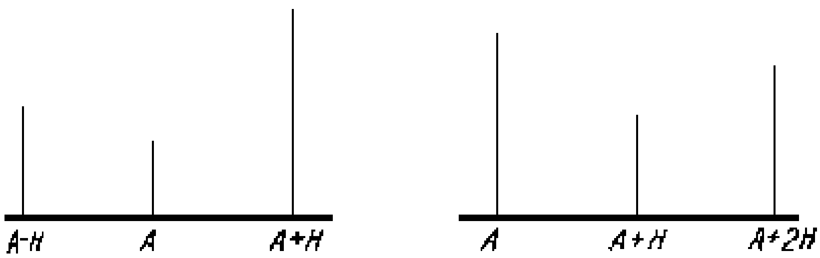
Жоғарыда айтылған жоба мен нәтежелер, есептеу процедурасы ретінде оқулық құралдың келесі тарауларында жазылған.

Унимодальдық (үзіліссіз) бір айнымалылы функцияның, алғашқы аппроксимациялау минимумы және ***H*** қадымының ұзындығы берілген деп есептейік. ***H***-қадымының ұзындығы (мәнін) белгілегенде x^* нүктесінен асып кетпеуге тырусу керек.

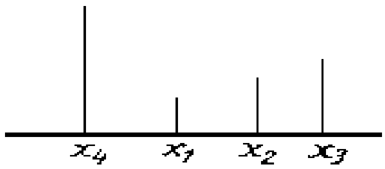
Есептеу процедурасы келесі қадымдардан тұрады:

1. ***f(A)*** және ***f(A+H)*** есептеу.
2. Егерде ***f(A) < f(A+H)*** болған жағдайда, үшінші нүкте ретінде ***(A-H)*** нүктесін алып, ***f(A-H)*** есептеу. Кері жағдайда үшінші нүкте ретінде ***(A+2H)*** нүктесін қарастырып, ***f(A+2H)*** есептеу (II.2.5 сурет).
3. Табылған үш нүктені пайдаланып, (II.2.12) теңдеуі арқылы δ есептеп және ***f(δ)*** есептеу.
4. Егерде функцияның кіші мәнінен келесі кіші мәнінің айырмашылығы тағайындалған дәлдіктен кіші немесе тең болса есептеу процедурасын тоқтау. Сөйтіп функция төрт нүктеде есептеледі.
5. Есептеу прооцедурасы 4-ші қадымда тоқталмаған жағдайда, функцияның ең үлкен мәні болған нүктені қарастырудан алып тастаймыз.

Қалған үш нүктені ескере отырып, қайтадан 3-ші қадымға оралу (II.2.6 сурет).



II.2.5 сурет



II.2.6 сурет

Ескерту: Егерде, Е дәлдігін өте кіші мәнғып тағайындасақ α, β, γ сондай-ақ f_α, f_β, f_γ мәндеріде бір біріне өте жақын орналасып, *((*II.*2.12) теңдеуді қараңыз)* есептелетін **δ** мәнде өте кіші болып компьютер санына симауыда мүмкін.

Сондықтан, бұл қиындықтан өту үшін, (II.2.12) теңдеуін, екінші және келесі интерполяциялар үшін өзгертіп жазып іздейміз.

$$\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{\frac{1}{2}\left(f_\alpha - f_\beta\right)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)}{(\beta - \gamma)f_\alpha + (\gamma - \alpha)f_\beta + (\alpha - \beta)f_\gamma}. \qquad \text{(II.2.14)}$$

Осы процедураның жұмыс істеуін программа түрінде келтірейік.

```
10  PRINT  "Квадратичная интерполяция"
20  REM  Программа реализует процедуру
25  REM  квадратичной интерполяции Пауэлла для
30  REM  поиска минимума функции  F(x)
40  REM  вычисляемой в виде  Z=F(x)  в строке  1000
100  PRINT "Задайте начальное значение ":INPUT A
110  PRINT "Задайте шаг  H":INPUT H
150  PRINT "Задайте точность  E":INPUT E
190  REM Начать процесс с первых трех точек
200  DIM X(4),F(4)
210  X(1)=A:X(1):GOSUB  1000:F(1)=Z
220  X(2)=A+H:X=X(2):GOSUB  1000:F(2)=Z
230  IF F(1)<F(2)  THEN X(3)=A-H:X=X(3):GOSUB 1000:F(3)=Z:GOTO 250
240  X(3)=A+2*H:X(3):GOSUB  1000:F(3)=Z
250  PRINT"                    Текущие значения"
260  PRINT"               X(I)                    F(I)"
270  REM Вычисления аппроксимирующего минимума
275  REM в строках 300-350
300  DN=(X(2)-X(3))*F(1)
310  DN=DN+(X(3)-X(1))*F(2)+(X(1)-X(2))*F(3)
320  NM=(X(2)*X(2)-X(3)*X(3))*F(1)
330  NM=NM+(X(3)*X(3)-X(1)*X(1))*F(2)
340  NM=NM+(X(1)*X(1)-X(2)*X(2))*F(3)
350  X(4)=NM/(2*DN):X=X(4):GOSUB 1000:F(4)=Z
380  REM Упорядочить значения функции  в строках 400-600
400  FOR J=1 TO 3
410  FOR K=J+1 TO 4
420  IF F(J)<=F(K) THEN GOTO 460
430  X=X(J):X(J)=X(K):X(K)=X
440  F=F(J):F(J)=F(K):F(K)=F
450  REM Поменять местами F(J) и F(K), а также X(J) и X(K),
455  REM если они не упорядочены
460  NEXT K:NEXT J
```

```
470  FOR I=1 TO 4:PRINT X(I),F(I):NEXT I
480  PRINT  "":PRINT   ""
490  REM Закончить , если получена заданная точность
500  IF ABS(X(1)-X(2))<E THEN GOTO 800
510  REM Запомнить три лучших точки
520  S1=SGN(X(2)-X(1)):S2=SGN (X(3)-X(1))
530  S3=SGN(X(4)-X(1))
540  IF S1=S2 AND S1=-S3 THEN X(3)=X(4):F(3)=F(4)
550  REM Вторая интерполяция
560  DN=(X(2)-X(3))*F(1)=(X(3)-X(1))*F(2)=(X(1)-X(2))*F(3)
570  F=(F(1)-F(2))/(2*DN)
580  F=F*(X(2)-X(3))*(X(3)-X(1))
590  X(4)=(X(1)+X(2))/2+F
600  X=X(4):GOSUB 1000:F(4)=Z
610  REM Повторить вторую интерполяцию
620  GOTO 400
800  PRINT "   "
810  PRINT "X="X(1) ,"F="F(1)
850  END
1000  Z=2*X*X-EXP(X)
1010  RETURN
```

1Мысал

$Z = 2x^2 - e^x$ функциясының минимумын ***0,001*** дәлдікпен, квадраттық интерперполяцияны қолданып табыңыз. Алғашқы нүкте ретінде А = ***1*** және қадымын ***H = 0,5*** тең деп алып.

Програманың жұмыс істеу көрінісі.

```
Квадратичная интерполяция
Задайте начальное значение 1
Задайте шаг Н  .5
Задайте точность  Е   .0005
          Текущие значения
    X(1)                    F(1)

    .5                  -1.148721
      .0470197                 -1.043721
      1                        -.7182818
1.5                     1.831102E-02

    .3745917                  -1.17376
    .5                        -1.148721
    .0470197                  -1.043721
    1                     -.7182818

   .3615043            -1.174117
   .3745917           -1.17376
   .5                  -1.148721
   .0470197           -1.043721
```

.357937	-1.174138
.3615043	-1.174117
.3745917	-1.17376
.0470197	-1.043721

.3575219	-1.174138
.357937	-1.174138
.3615043	-1.174117
.0470197	-1.043721

X= .3575219 F=-1.174138

§ II. 2.6 Кубтық интерполяциялау

Тақырыптағы әдіс функцияны үшінші дәрежелі полином (кубтық теңдеу) арқылы аппроксимациялап, дәлдігін ұлғайтып іздестіруге мүмкіншілік тудырады. Бұл әдісте кубтық интерполяциялауды жүргізу үшін функцияның және оның туындысының мәндері екі нүктеде есептелгені қажет болады. Оқулық құралдың 4-ші тарауында келтірілген сызықтық іздеу процедурасында осы әдіс кеңінен қолданылады, сол көзғараспен біз осы әдісті талқылаймыз.

$f(x)$ функциясының $x_0 + hd$ түзу сызық бойындағы минимумын іздеу есебін қарастырайық

$$\varphi(h) = f(x_0 + hd) = f(x_{01} + hd_1, x_{02} + hd_2, \ldots, x_{0n} + hd_n); \qquad (II.2.15)$$

$$\frac{d\varphi}{dh} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + hd)d_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + hd)d_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0 + hd)d_n.$$

Сондықтан

$$\frac{d\varphi}{dh} = \Delta f(x_0 + hd)^T d = g(x_0 + hd)d. \qquad (II.2.16)$$

келесі мәндер белгілі деп үйғарамыз.

$$\psi(p) = \psi_p, \quad \psi(q) = \psi_q,$$

$$\frac{d\varphi}{dh}(p) = G_p, \qquad \frac{d\varphi}{dh}(q) = G_q. \qquad (II.2.17)$$

Осы мәліметтерді үшінші дәрежелі полиномды жазу үшін қолданып,

$$a + bh + ch^2 + dh^3, \qquad (II.2.18)$$

ол функцияны аппроксимациялайды деп үйғарамыз.

Егерде $p = 0$ тең болған жағдайда a, b, c, d тұрақтыларын есептеп табатын, теңдеулер түрде жазылады:

$$\begin{cases} a = \varphi_p, \\ a + bq + cq^2 + dq^3 = \varphi_q, \\ b = G_p, \\ b + 2cq + 3dq^2 = G_q. \end{cases} \qquad \text{(II.2.19)}$$

Бұл теңдеулердің шешімі келесі:

$$a = \varphi_p, \quad b = G_p, \quad c = -\frac{G_p + z}{q}, \quad d = \frac{G_p + G_q + 2z}{3q^2}, \qquad \text{(II.2.20)}$$

мұнда

$$z = \frac{3(\varphi_p - \varphi_q)}{q} + G_p + G_q.$$

Үш дәрежелі полиномның (кубтық теңдеудің) иілу нүктелері, теңдеудің шешімі болып табылады

$$G_p - 2(G_p + z)\frac{h}{q} + (G_p + G_q + 2z)\left(\frac{h}{q}\right)^2 = 0.$$

Сондықтан, егерде ***r*** нүктесі кубтық полиномның минимумы орналасқан нүкте болса, яғни

$$\frac{r}{q} = \frac{(G_p + z) \pm \left[(G_p + z)^2 - G_p(G_p + G_q + 2z)\right]^{1/2}}{G_p + G_q + 2z} = \frac{G_p + z \pm w}{G_p + G_q + 2z}, \qquad \text{(II.2.21)}$$

мұнда

$$w = \left(z^2 - G_p G_q\right)^{1/2}. \qquad \text{(II.2.22)}$$

(2.21) теңдеуінің бір жағының мәні минимумге сәйкес болады. Екінші туындысы тең болады

$$2c+6dh \qquad \text{(II.2.23)}$$

Егерде, өрнектің оң мәнін таңалап алсақ және h/q келесі өрнекке тең деп ұйғарсақ.

$$\frac{h}{q} = \frac{G_p + z + w}{G_p + G_q + 2z}.$$

Екінші туынды келесі түрде жазылады

$$-\frac{2(G_p + z)}{q} + \frac{2(G_p + G_q + 2z)}{q^2} \cdot \frac{q(G_p + z + w)}{G_p + G_q + 2z} =$$

$$= \frac{1}{q}\left(-2G_p - 2z + 2G_p + 2z + 2w\right) = \frac{2w}{q} > 0.$$

$$\frac{r}{q} = \frac{G_p + z + w}{G_p + G_q + 2z}. \qquad \text{(II.2.24)}$$

Келесі эквиваленттық (ұқсас) формуланы қолданғанда ең жақсы санды нәтежилердың болатыны айғын:

$$\frac{r}{q} = 1 - \frac{G_q + w - z}{G_q - G_p + 2w} = \frac{z + w - G_p}{G_q - G_p + 2w} \quad \text{(II.2.25)}$$

(II.2.24) теңдеуіне, (II.2.25) эквиваленттік (ұқсас) тендеу екенін дәлелдеу, оқырманға жаттығу ретінде қарастыруға қалдырдық.

q нүктесін тағайындау өзімізге қалдырылған жағдайда, егерде $G_p<0$,

q-дің мәнін оң мәнғып тағайындаймыз, яғни функцияның кішірею бағытына қарай қадым жасаймыз, керісінше жағдайда ***q***-дің мәнін керісінше қылып тағайындаймыз.

q мәнінің санын, ***(p, q)*** аралығында минимум орналасатындай қылып тағайындау қажет.

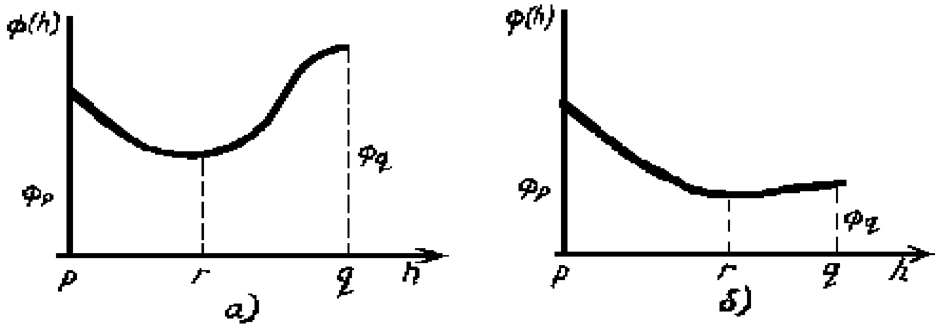
Бұл жағдай, егерде $\varphi_q > \varphi_p$ (II.2.7а сурет) немесе егерде $G_q > 0$ болса ғана (II.2.7б сурет) болу мүмкін.

Егерде, осы жағдайдың біреуіде орындалмаса, біз ***q*** мәнін екі есе ұлғайтып қарастыру үрдісін жалғастырамыз, осы аралықта минимумды орналастырғанша.

Мұнда φ_m ең кіші нақты $\varphi(h)$ минимум мәнін бағалап қабылданған сан, ал **η** - тұрақтының мәнін тәжірибе түрінде ***2*** немесе ***1***-ге тең деп алады.

Бұл итерациялық процедура келесі қадымдардан құрылады деуімізге болады:

1. $\varphi_p = f(x_0)$ ***және*** $G_p = [g(x_0)]^T d$. табу.
2. $G_p<0$ шарттың орындалуын тексеру. Ол орындалмаса ***(-d)*** -бағытында іздеу үрдісін жүргізу φ_m-мәнін "тауып". (II.2.26) өрнегінен ***q*** таңдап алу.
3. $\varphi_q = f(x_0 + qd)$ және $G_q = [g(x_0 + qd)]^T d$ есептеу.



II.2.7 сурет

4. Егерде $G_q>0$ немесе $\varphi_q>\varphi_p$ болса минимум орналасқан аралық табылды деп есептейміз. Кері жағдайда ***q*** мәнін екі есе ***2q*** деп тағайындап үшінші ***(3)*** қадымға ораламыз.
5. (2.25) теңдеуін ***(0,q)*** аралығында ***r***-мәнін пайдаланып минимум орналасқан нүктесін аппроксимациялауға пайдаланамыз.
6. Егерде $|d\psi/dh| = |[g(x_0 + rd)]^T d| = |G_r| < \varepsilon$, мұнда **ε**-берілген дәлдік орындалса итерацияны тоқтатамыз.

7. Егерде $G_r > 0$ оң мәнді болса жаңа аралық ретінде ***(p, r)*** қабылдап немесе $G_r \leq 0$ болса, жаңа аралық ретінде ***(0, q)*** қабылдап 5-ші қадамға ораламыз.

6-шы қадымда туынды мәні тексеріледі. Оның алдындағы тексерулер итерация үрдісін тоқтатуға, тек қана минимумның орналасуы өзгермесе ғана келтіреді. Жалпы түрде минимумның орналасу нүктесін іздегенен функция минимумын табуымыз оңайырақ болуы мүмкін. Бұл минимум дәлдігі кішірек болып табылады.

Жоғарыда айтылған алгоритм программа ретінде жүзеге асыралған:

```
20 PRINT "Кубическая интерполяция "
30 REM в программе имется минимум функции F(X+LAM*D)
40 REM вдоль прямой X=LAM*D. Значения функции F(X1,X2,…XN)
50 REM вычисляются в строке 5000, где Z=F(X1,X2,..XN)
60 REM вектор-градиент функции F(X) вычисляется в строке
65 REM 6000 в виде G(1),G(2),…G(N)
100 PRINT "Задайте число переменных ":INPUT N
120 DIM X(N),P(N),Q(N),D(N),G(N)
130 CC=O:TT=O
150 PRINT "Начальная точка "
160 FOR I=1 TO N:INPUT X(I):NEXT I
200 PRINT "Направление D"
220 FOR I=1 TO N:INPUT D(I):NEXT I
300 PRINT "Задайте точность E"
310 INPUT E
350 PRINT "Предполагаемое значение минимума ":INPUT FM
400 PRINT "                    Текущие значения "
410 FOR I=1 TO N:P(I)=X(I):PRINT "X";I,X(I):NEXT I
500 REM Первая точка P
510 GOSUB 5000
520 PRINT "Итерация    ";CC;"    Значение      ";Z
530 FP=Z:GOSUB 6000:G1=GO
600 GP=0
610 FOR I=1 TO N:GP=GP+G(I)*D(I):NEXT I
620 IF GP<=0 THEN GOTO 680
625 REM Определить начальный шаг и, если необходимо
626 REM Изменить напрвление спуска на противоположное
630 QX=ABS(2*(FP-FM)/GP):IF QX>1 THEN QX=1
640 FOR I=1 TO N
650 X(I)=P(IO-QX*D(I):P(I)=X(I):NEXT I
660 GOSUB 5000:FP=Z:PRINT "Возможна не стабильность? "
670 GOSUB 6000:G1-G0:GOTO 600
680 QX=ABS(2*(FP-FM)/GP):IF QX>1 THEN QX=1
690 HH=QX
700 REM Найти следующую точку Q
710 BB=HH
720 FOR I-1 TO N
730 Q(I)=P(I)+BB*D(I):X(I)=Q(I)
740 NEXT I
750 GOSUB 5000:FQ=Z
760 GOSUB 6000:G2=G0
```

```
770 GQ=0
780 FOR I=1 TO N
790 GQ=GQ+G(I)*D(I)
800 NEXT I
810 IF  GQ > 0 OR  FQ>FP  THEN GOTO 830
815 REM Выполнить кубическую интерполяцию или удвоить
816 REM шаг для того, тобы минимума
817 REM входила в интервал неопределенности
820 HH=2*HH:GOTO 700
830 ZZ=3*(FP-FQ)/HH:ZZ=ZZ+GP+GQ
840 WW=ZZ*ZZ-GP*GQ:IF WW<0 THEN WW=0
850 W=SQR(WW)
860 DD=HH*(1-(GQ+W-ZZ)/(GQ-GP+2*W))
870 FOR I=1 TO N:X(I)=P(I)+DD*D(I):NEXT I
880 GOSUB 5000:FR=Z
890 GOSUB 6000:G3=G0
895 REM Вычислить градиент в новой точке
900 GR=0
910 FOR I=1 TO N:GR=GR+G(I)*D(I):NEXT I
920 IF GR>0 THEN GOTO 1000
925 REM Найти новый интервал и произвести проверку
927 REM условия окончания поиска минимума
930 IF ABS(GR)<E THEN GOTO 1300
940 HH=BB-DD
950 FOR I=1 TO N:P(I)=X(I):PRINT "X";I,X(I):NEXT I
960 CC=CC+1:PRINT "Итерация  ";CC; "      Значение    ";Z
970 FP=Z:GP=GR:G1=G0:GOTO 830
1000 IF ABS(GR)<E THEN GOTO 1300
1005 REM Повторить кубическую интерполяцию.Новый
1006 REM интервал будет BB-DD (строка 940) или
1007 REM DD (строка 1010)
1010 HH=DD
1020 FOR I=1 TO N:Q(I)=X(I):PRINT "X";I,X(I):NEXT I
1030 CC=CC+1:PRINT " итерация  ";CC; "     значение";Z
1040 FQ=Z:GQ=GR:G2=G0:GOTO 830
1300 PRINT " минимизация закончена"
1310 PRINT "количество итераций ="CC"значение минимума="Z
1320 FOR I=1 TO N
1330 PRINT "X";I,X(I)
1340 NEXT I
1350 END
5000 Z=0
5010 Z=100*(X(2)-X(1)*X(1))^2
5020 Z=Z+(1-X(1))^2
5100 TT=TT+1
5200 RETURN
6000 G0=0
6100 G(1)=-400*X(1)*X(2)-X(1)*X(1))
6200 G(2)=200*(X(2)-X(1)*X(1))
7000 FOR I=1 TO N:G0=G0+G(I)*G(I):NEXT I
7010 G0=SQR(G0)
7500 RETURN
```

1Мысал

$f(x_1,x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ функциясының ***(-1, 0)*** нүктесінен ***(5, 1)*** нүктесіне қарай, жүргізілген бағыттағы түзу сызық бойындағы минимумын табыңыз?

Ішкі программалар ***5000*** және ***6000*** жолдардан басталады. **E =** ***0,0001*** және $\varphi_m = 0$ тең деп алынған. Төменде программаның жұмыс істеу нәтижесі келтірілген:

```
Кубическая интерполяция
Задайте число переменных        2
Начальная точка
-1
0
направление D
5
1
Задайте точность E
.0001
предполагаемое значение минимума    0
           текущие значения
X 1                            -1
X 2                            0
Итерация       0               Значение       104
X 1                            -.3994247
X 2                            .1201151
Итерация       1               Значение       2.113823
X 1                            -.3365114
X 2                            .1326977
Итерация       2               Значение       1.824123
X 1                            -.3413863
X 2                            .1317227
Итерация       3               Значение       1.822355
X 1                            .2422956
X 2                            .2484591
Итерация       4               Значение       4.174696
X 1                            .5813206
X 2                            .3162641
Итерация       5               Значение       .2222494
X 1                            .5611688
X 2                            .3122338
Итерация       6               Значение       .1932893
X 1                            .9545786
X 2                            .3909157
Итерация       7               Значение       27.07376
X 1                            .5638282
X 2                            .3127656
Итерация       8               Значение       .1928843
Минимизация закончена
Количество итераций равно 8 значение минимума равно .1928658
X 1                            .5633697
X 2                            .3126739
```

§ II. 2.7 Жаттығулар

1) Егерде $F_0 = 1$ және $F_1 = 1$, ал $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$ жағдайда,

$$F_n = \frac{\tau^{n+1} - (-\tau)^{-(n+1)}}{\sqrt{5}},$$

мұнда $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$ тең болатындығын көрсетіңіз.

Осы рекуренттық қатынасты пайдалана отыра $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$, $F_6 = 13$, …, $F_{10} = 89$,…, $F_{19} = 6765$, $F_{20} = 10946$ болатынын көрсетіңіз.

2) Келесі қатынастардың орны болатындығын көрсетіңіз.

а) $F_{n-1} F_{n-2} - F_n F_{n-3} = (-1)^n$ ((II.2.4) теңдеуді қараңыз);

б) $F_n \approx \tau^{n+1}/\sqrt{5}$ үлкен мәнді n-дер үшін.

в) $F_{n-1} / F_n \approx 1/\tau$ үлкен мәнді n-дер үшін.

3) Егерде нүктелер арасындағы қашықтық кем дегендд **ε** - ге тең болған жағдайда, белгісіз аралық қашықтығыда кемдегенде 2ε тең болуы қажет. Сондықтан, $L_n \geq 2\varepsilon$ теңсіздік нәтежелі n эксперимент үшін шекарасын көрсетеді. Осы теңсіздік келесі қатынасқа $\varepsilon < L_1 / F_{n+1}$ әкеп соқтыратынын көрсетіңіз.

4) Фибоначчи әдісін қолданғанда белгісіз аралықты ***1%*** қысқарту үшін функция мәнін ***11***-рет есептеу қажеттігін көрсетіңіз. Бірден нүктелердің орналасуын белгілесек, керекті функцияны есептеу санының кіші мәні неге тең болады екен? *(жақсы нәтиже болады деп үміттенбеңіз).*

5) Функцияны ***10*** рет есептеген кездегі ***(0;1)*** аралығында $2x^2 + 3e^{-x}$ функциясының минимумын табу үшін Фибоначчи әдісін қолданыңыз.

6) ***0,01*** дәлдікпен ***(5;7)*** аралығында $x^4-14x^3+60x^2-70x$ функциясының минимумын табу үшін Фибоначчи әдісін пайдаланыңыз. Функцияны неше рет есептеу қажет болады?

7) Алғашқы белгісіз аралық ретінде ***(0;1),*** үтір ден кейін екі таңба дәлдігімен қарастырып. $2x^2+3e^{-x}$ функциясының минимумын табу үшін «*алтын қиылыс»* әдісін қолданыңыз. Функцияны неше рет есептеу қажет болады? ***5***-ші жаттығумен салыстырыңыз.

8) $\alpha=0$, $\beta=t$, $\gamma=2t$ тең болған жағдайда, (II.2.12) теңдеудегі **δ** өрнегі келесі түрде жазылады:

$$\delta = \frac{4f_\beta - 3f_\alpha - f_\gamma}{4f_\beta - 2f_\alpha - 2f_\gamma} t$$

және егерде $f\alpha + f\gamma > 2f\beta$ болған жағдайда минимумның болатындығын көрсетіңіз.

9) $e^{-x}\ln(x)$ функциясының минимумы орналасқан нүктесін ***0,001*** дәлдікпен ***(1,3)*** арлығында табу үшін, квадраттық интерполяциялауды қолданыңыз. (***x***-тың теріс мәнін пайдаланудың мекенін тексеріңіз, неге десеңіз программа жұмыс істеу мерзімінде қатені көрсетеді).

10) $f\ (x_1,\ x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$ функциясының $\alpha+\lambda d$ түзу сызық бойындағы минимумын іздеу үшін квадратты интерполяцияны қолданыңыз. Мұнда $\alpha=(1/1)$ және $d=(2/3)$, (үтірден кейінгі ондық санның екінші таңбасына дейін.)

11) (II.2.11), (II.2.12) және (II.2.14) теңдеулерінің дұрыстығын тексеріңіз.

12) (II.2.20) теңдеуінің дұрыстығын тексеріңіз.

13) (II.2.24) және (II.2.25) тендеулерінің дұрыстығын тексеріңіз.

14) $y = ax^2$ қисығы үшін $(x',\ y')$ нүктесінен жүргізген жанама x өсін $x'/2$ нүктесінен қиып өтетінін көрсетіңіз.

(II.2.26) теңдеундегі q мәнін дұрыс тағайындағанымызды осы дәлелдей ме?

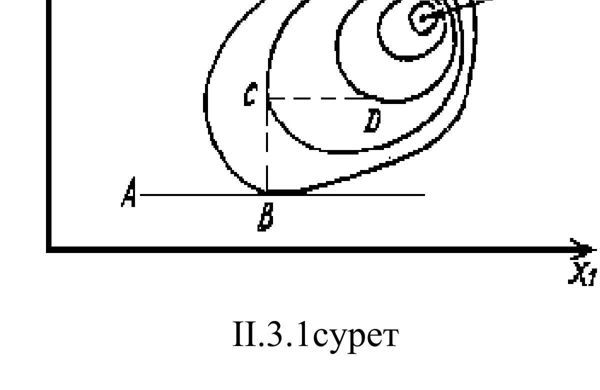
15) $e^x sinx = 1$ теңдеуін шығарыңыз. $f(x) = (1 - e^x sinx)^2$ функциясының минимумын табуға тырысыңыз.

3 - тарау
n – айнымалы функция үшін тікелей іздеу әдістері

§ II 3.1 Алғашқы көзғарас пікірлер

n -айнымалылы функцияның минимумын табу үшін тікелей іздеу әдістерді игеруге көп шаралар қолданылады. Тікелей іздеу әдістерге тек қана функция мәнін есептеп пайдаланатын әдістер жатады. Біз осы әдістердің теккана екеуін қарастырамыз. Тәжірибе көрсеткендей осы екі әдісті біраз есептерге пайдалануымызға болады.

Екі айнымалылы функциясын қарастырайық. Оның бір деңгейдегі сызықтары[1] II.3.1-суретінде көрсетілген, ал минимумы (x_1^*, x_2^*) нүктесінде орналасқан қарапайым іздеу әдісі ретінде координаттар арқылы түсу әдісі болып табылады. ***A*** нүктесінен x_1 өсінің бағыты бойынша іздеу салып ***B*** нүктесін табамыз. Бұл ***B*** нүктесіндегі бір деңгейдегі сызыққа өткізілген жанама x_1 өсіне параллель болады. Сосын табылған ***B*** нүктесі арқылы x_2 өсінің бағыты бойынша іздеу салып ***C*** нүктесін табамыз, сөйтіп ұқсас ***Д*** нүктесін т.с.с. нүктелерді іздеп таба береміз.



II.3.1сурет

Сөйтіп біз оптималды нүктеге (x_1^*, x_2^*) жетеміз. Алдынғы тарауда қарастырылған кез-келген бір өлшемді әдістерді де, осы өстер бағытында іздеуге қолдануға болады. Осындай болжауды ***n*** айнымалылы функциялар үшін пайдалануымызға болатындағына көз жетеді.

Теориялық көзқарастан, бұл әдісті бірғана минимумы бар функцияларына қолайлы екені айғын. Тәжірибе жүзінде қарастырылған әдісте итерация үрдісінің жүрісі тым баян екеніне көз жетті. Сондықтан, есептелген функция мәндерін, көбірек мәліметті пайдаланатын, қиынырақ әдістер игеріліп қарастырылуда. Осындай әдістердің жұмыс істеуін (іздеу үрдісін) тексеру үшін, өздерінің қасиеттеріне байланысты бірнеше функциялар ұсынылады. Төменде біраз функция мысалдарын келтірейік:

Бір деңгейдегі қисық сызықтар бойында функция мәні тұрақты сан болады. Екі өлшемді параметр кеңістігіндегі қиылыстар арқылы табылады.

$f(x_1,x_2)$ *кеңістігінде жүргізілген параллельді жазықтықтар.*

Розенброк функциясы:

$$f(x_1,x_2) = 100(x_2-x_1^2)^2 + (1-x_1)^2; \quad x^*=(1,1) \qquad \text{(II.3.1)}$$

Пауэлл функциясы:

$$f(x) = (x_1+10x_2)^2 + 5(x_3-x_4)^2 + (x_2-2x_3)^4 + 10(x_1-x_4)^2; \quad x^*=(0;0;0;0) \qquad \text{(II.3.2)}$$

Екі өлшемді экспоненциалды функция:

$$f(x_1,x_2) = \sum_a \left[\left(e^{-ax_1} - e^{-ax_2}\right) - \left(e^{-a} - e^{-10a}\right)\right]^2,$$

(II.3.3)

мұнда $a=0,1(0,1)1^*; \quad x^*=(1,10).$

Басқада тестік есептерді және (II.3.1), (II.3.2), (II.3.3) есептерін маңызды кезкелген оптимумды іздеу процедурасын күрделі нәтижемен есептеуі қажет.

§ II. 3.2 Хук-Дживс әдісі

Бұл әдіс 1961 жылы игеріліп пайда болды, содан бері тиімді және ерекше әдістің бірі болып келе жатыр. *Базистық нүкте* аймағында іздеу салып, функцияны зерттеу үрдісі белгілі ретпен істелетін қадымдардан тұрады.

Іздеу күрделі нәтижені көрсетсе, іздеуді іздеуі үлгісі арқылы жүргіземіз. Төменде осы процедураның қадамдары жазылып көрсетілген:

а) Алғашқы базистық b_1 нүктесі тағайындалады және x_j айнымалысына сәйкес ұзындығы h_j қадамы қабылданады. Төменде келтірілген программада айнымалыларға бірдей h қадамы пайдалынады, бірақ жоғарыда айтылған x_j-ға қадамын пайдалану түрінде пайдаланған дұрыс болуы мүмкін.

в) $f(x)$ функциясының аймақта өзгеру мәліметтерін білу үшін, $f(x)$ функциясының базистық b_1 нүктесіндегі мәні есептеледі.

Бұл мәліметтер үлгі бойынша іздеу бағытын табу үшін қолданылады, яғни оны пайдалана отырып функцияның тезірек кішірейетін бағытын анықтауға үміттенеміз.

Фукнцияны базистық b_1 нүктесінде есептеу келесі түрде жүргізіледі:

1) Базистық b_1 нүктесінде функцияның $f(b_1)$ мәні есептеледі.

2) Айнымалылардың әрқайссына қадам ұзындығы қосылып ретпен өзгертіледі. Сөйтіп біз $f(b_1+h_1e_1)$ функция мәнін есептейміз, e_1 мұнда x_1 өсінің бағытындағы ұзындығы бірге тең вектор. Егерде осы әрекет функция мәнін кішірейтсе, b_1 нүктесін $b_1+h_1e_1$ -ге өзгертеміз. Кері жағдайда $f(b_1 - h_1e_1)$ функция мәнін есептейміз, егерде функция мәні кішірейсе b_1 нүктесін $b_1-h_1e_1$ -ге өзгертеміз. Егерде осы қадамның (әрекеттері) еш қайсысы функция мәнін кішірейтпесе b_1 нүктесі өзгертілмейді. Енді x_2 осының бағытында өзгертуді қарастырымыз, яғни $f(b_1-h_2e_2)$ функция мәні есептеледі және тағыда сол сынақты x_j $(j=1,2,...,n)$ жалғастырамыз. n-айнымалының барлығы қарастырылғаннан кейін, біз жаңа базистық b_2 нүктесін табамыз.

3) Егерде $b_2=b_1$, яғни функцияны кішірейту іске асырылмаса, зерттеуді сол алғашқы базистық b_1 нүктесінің төнерегінде қайталаймыз, бірақ қадамның үзіндігын кішірейтіп қарастырамыз. Тажірибе жүзінде қадам (қадамдардың) ұзындығын алғашқысынан он есе кішірейтіп қарастырғанымыз қолайлы.

4) Егерде b_1 # b_2, яғни базистық нүкте өзгерсе іздеуді үлгі бойынша жүргіземіз.

с) Зерттеу үрдісінде есептелген мәндер үлгі бойынша іздеу жүргізген кезде қолданылады және үлгі бойынша табылған бағытта функция минимумын іздеу аяқталады.

Бұл іздеу процедурасы келесі түрде атқарылады:

1) Жаңа базистық b_2 нүктесінен $b_2 - b_1$ бағытында қозғалғанымыз тиімді, неге десеңіз осы бағытта жүргізілген зерттеу функция мәнін кішірейеді.

Сондықтан, келесі үлгі нүктесінде функцияны есептейміз:

$$P_1 = b_1 + 2(b_2 - b_1) \quad \text{(II.3.4)}$$

Жалпы түрінде:

$$P_i = b_i + 2(b_{i+1} - b_i). \quad \text{(II.3.5)}$$

2) Сосын зерттеуді $P_1(P_i)$ нүкте төңерегінде жалғастырамыз.

3) Егерде **B, 2** қадамында есептелген функцияның ең кіші мәні базистық b_2 *(жалпы түрі* b_{i+1}*)* нүктесіндегі саннан кіші болса, онда жаңа базистық b_3 (b_{i+2}) нүктесін тапқанымыз. Содан, соң **B, 1** қадамын қайталаймыз. Керісінше жағдайда үлгі бойынша іздеуді b_2 (b_{i+1}) нүктесінен доғарамыз, ал зерттеуді b_2 (b_{i+1}) нүктесінен жалғастырамыз.

д) Берілген кіші санға дейін қадамның ұзындығы өзгергенде ғана бұл іздеу үрдісін тоқтатамыз.

Осы әдістің программасы:

```
10 PRINT "Метод Хука-Дживса"
20 REM Функция вычисляется в виде Z=F(X1,X2,…,XN) в строке 2000
30 PRINT "Введите число переменных ":INPUT N
40 DIM X(N),B(N),Y(N),P(N)
50 PRINT"Введите начальную точку X1,X2,…,XN"
60 FOR I=1 TO N:INPUT X(I):NEXT I
70 PRINT "Введите длину шага":INPUT H
80 K=H:FE=0
90 FOR I=1 TO N
100 Y(I)=X(I):P(I)=X(I):B(I)=X(I):NEXT I
110 GOSUB 2000:FI=Z
120 PRINT "Начальноу значение функции " Z
130 FOR I=1 TO N:PRINT X(I); "          ";:NEXT I:PRINT    ""
140 PS=0:BS=1
150 REM Исследование вокруг базисной точки
180 J=1:FB=FI
200 X(J)=Y(J)+K
210 GOSUB 2000
220 IF Z<FI THEN GOTO 280
230 X(J)=Y(J)-K
240 GOSUB 2000
250 IF Z<F1 THEN GOTO 280
260 X(J)=Y(J)
270 GOTO 290
280 Y(J)=X(J)
290 GOSUB 2000
300 FI=Z
310 PRINT "Исследующий поиск"Z
320 FOR I=1 TO N:PRINT X(I); "      ";:NEXT I:PRINT   ""
330 IF J=N THEN GOTO 360
340 J=J+1
350 GOTO 200
360 IF FI<FB-1E-08 THEN GOTO 540
370 REM После оператора 360,если функция уменьшилась,
           произвести поиск по образцу
380 IF PS=1 AND BS=0 THEN GOTO 420
390 REM но если исследование производилось вокруг точки шаблона PT,
395 REM  и уменьшение функции не было достигнуто, то изменить базисную
           точку в операторе 420
400 REM в противном случае уменьшить длину шага в операторе 490
410 GOTO 490
420 FOR I=1 TO N:P(I)=B(I):Y(I)=B(I):X(I)=B(I):NEXT I
430 GOSUB 2000:BS=1:PS=0
440 FI=Z:FB=Z
450 PRINT "Замена базисной точки"Z
460 FOR I=1 TO N:PRINT X(I); "          ";:NEXT I:PRINT     ""
470 REM (следует за комментарием в строке 395)
          и провести исследование вокруг базисной точки
480 J=1:GOTO 200
490 K=K/10
500 PRINT "уменьшить длину шага"
510 IF K< 1E-08 THEN GOTO 700
520 REM если поиск не закончен, то произвести новое
```

```
525 REM исследование вокруг базисной точки
530 J=1:GOTO 200
535 REM поиск по образцу
540 FOR I=1 TO N:P(I)=2*Y(I)-B(I)
550 B(I)=Y(I):X(I)=P(I):Y(I)=X(I)
560 NEXT I
570 GOSUB 2000:FB=FI:BS=0:FI=Z
580 PRINT "поиск по образцу"Z
590 FOR I=1 TO N:PRINT X(I); "      ";:NEXT I:PRINT  ""
600 REM после этого произвести исследование вокруг
последней точки образца
60 J=1:GOTO 200
700 PRINT"          минимум найден"
710 FOR I=1 TO N:PRINT "X"I"="P(I):NEXT I:PRINT  ""
750 PRINT "минимум функции равен "FB
760 PRINT "количество вычислений функции равно "FE
790 END
2000 Z=(X(1)-2)^2+(X(2)-5)^2+(X(3)+2)^4
2010 FE=FE+1
2020 REM счетчик количества вычислений функции
2030 RETURN
```

Алғашқы нүктені табу үшін бір немесе екі нүкте жеткілікті болмауы мүмкін. Бірінші нүктені тағайындағанда зер салып тексеру қажет.

Компьютер шектелген дәлдікпен жұмыс істейді, яғни есептеу үрдісінде қателер көбірек жиналып программаның жұмыс істеуіне әсер етуі мүмкін.

Бұл жағдай қадамның ұзындығы "ыңғайсыз" қабылданғанда кездесуі мүмкін *(программа кезкелген жағдайда жұмыс істеуі қажет).*

Сондықтан ***360*** жолда, базистық нүктенің өзгеруі тексерілетін жолда, қателердің жиналуына байланысты, қадам ұзындығының кішірейіп кетуінен сақтану үшін, қадам ұзындығын $\boldsymbol{10^{-8}}$ тең деп қабылдадық. Біз, зерттеудің базистық ***(BS=1, PS=0)*** нүктесінде ме немесе үлгі ***(BS=0, PS=1)*** нүктесінде ме жүріп жатқанын байқап отырамыз.

Қарасты программада қадам ұзындығының ең кіші мәні $\boldsymbol{10^{-8}}$ тең, бірақ оны өзгертуімізге болады *(510 жолды қараңыз).*

Процедураның жұмыс істеуін аңғарып отыру үшін, программада есептеген нәтижелерді экранда көріп отырамыз.

2000 жолдан басталатын ішкі программа минимумын іздеп жатқан функцияның мәнін есептейді:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2)^2+(x_2-5)^2+(x_3+2)^4$$

Минимум ***(2; 5; -2)*** нүктесінде орналасқан.

Алғашқы базистық ***(4; -2; 3)*** нүкте ретінде және қадам ***1***-ге тең деп үйғарып программа арасындағы кейбір нәтижелер экранда көрсетілетіндей етіп жазылған. Бұл нәтижелер арқылы, зерттеу және үлгі бойынша іздеу үрдістерінің өзгеріп отырғанын байқаймыз. Функцияны неше рет есептеген санын счетчикте сақтап отырамыз. Бұл әртүрлі әдістердің жұмыс істеуін салыстырғанда керек болады. Әдіс неғұрлым жақсы болған сайын функцияны есептеу саны жалпы түрде аз болуы керек.

Программаның жұмыс істеу нәтижесі:

```
Метод Хукса – Дживса
Введите число переменных    3
Введите начальную точку  X1,X2,…,XN       4  -2  3
Введите длину шага     1
Начальное значение функции     678
4          -2              3
исследующий поиск   675
3          -2              3
исследующий поиск   662
3          -1              3
исследующий поиск   293
3          -1              2
исследующий поиск   106
2          0               1
исследующий поиск   106
2          0               1
исследующий поиск   97
2          1               1
исследующий поиск   32
2          1               0
исследующий поиск   5
1          3               -2
исследующий поиск   4
2          3               -2
исследующий поиск   1
2          4               -2
исследующий поиск   1
2          4               -2
исследующий поиск   20
2          7               -4
исследующий поиск   20
2          7               -4
исследующий поиск   17
2          6               -4
исследующий поиск   2
2          6               -3
замена базисной точки          1
2          4               -2
исследующий поиск   1
2          4               -2
исследующий поиск   0
2          5               -2
исследующий поиск   0
2          5               -2
поиск по образцу               1
2          6               -2
исследующий поиск   1
2          6               -2
исследующий поиск   0
2          5               -2
исследующий поиск   0
```

2 5 -2
замена базисной точки 0
2 5 -2
исследующий поиск 0
2 5 -2
исследующий поиск 0
2 5 -2
исследующий поиск 0
2 5 -2
уменьшить длину шага
исследующий поиск 0
исследующий поиск 0
2 5 -2
исследующий поиск 0
2 5 -2
исследующий поиск 0
2 5 -2
уменьшить длину шага
минимум найден
X 1 = 2
X 2 = 5
X 3 = -2
Минимум функции равен 0
Количество вычислений функции равно 127

§ II. 3.3 Нелдер-Мид әдісі

Нелдер-Мид әдісі Спендли, Хекста және Химсвортың сиплекс әдісін дамытып, жалғасуы болып табылады.

Бұл әдісті кейде көп қабырғалы фигураларды созып, қысып өзгертіп іздеу әдісі депте аталады.

n өлшемді кеңістіктегі ***(n+1)*** бір-бірінен бір қашықтықта орналасқан нүктелер тобын регулярлы симплекс деп атаймыз. Мұндай нүктелер тобы Спендли, Хекста және Химсворт әдісінде қарастырылған. Сондықтан екі өлшемді кеңістікте симпелкс ретінде қабырғалары тең үшбұрыш болады, ол үш өлшемді кеңістікте - дұрыс тетраэдр. Әдістің негізгі мақсаты симплекстің ***(n+1)*** шыңдарындағы нүктелерде функция мәндерін салыстырып және итерациялық процедура арқылы оптималды нүкте бағытына қарай қозғалтып есептің ең тиімді жауабын (шығару) табу. Алғашқы ұсынылған симплекс әдісінде, регулярлық симплекс итерация үрдісі әр қадамында қолданылып пайдаланылған.

Нелдер мен Мид осы әдістің бірнеше түрін ұсынған, бірақ бұлардың әдістерінің ерекшелігі -дұрыс емес (регулярлы емес) симплексті қолданумызға мүмкіндік береді. Осындай көзқарас нәтижесінде, ол сенімді, тікелей іздеу әдістің бірі болып табылды. Егерде, ***n≤6*** болған жағдайда, бұл әдіс ең жақсы күрделі әдіс болып ұйғарылады.

Спендли, Хекста және Химсворт әдісінде симплексті жылжыту негізінде үш әрекетпен жүргізіледі: сәулеу, созу және қысу. Бұл әрекеттердің мазмұнын процедураның қадамдарын қарастырғанда түсінеміз.

А) Симплекс шыңдарындағы функция мәндерін табамыз

$f_1 = f(x_1),\ f_2 = f(x_2),\ \ldots,\ f_{n+1} = f(x_{n+1})$

Б) Функцияның ең үлкен мәні f_h, сосын осы мәннен кейінгі үлкен мән f_g, ең кіші мәні f_t және осы мәндер орналасқан сәйкес x_h, x_g және x_t нүктелерін анықтаймыз.

В) x_h нүктесінен басқа нүктелердің бәрінің салмақтарының ортасын есептейміз. Салмақтар ортасы ретінде келесі өрнек болатын болсын:

$$x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i \neq h} x_i \qquad \text{(II.3.6)}$$

осы нүктедегі функция мәнін $f(x_0) = f_0$ есептейміз.

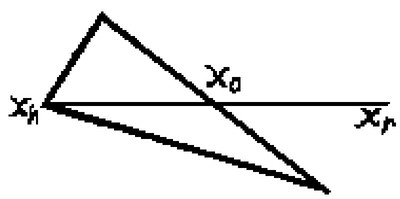
Г) Ең қолайлысы қозғалтуды x_h нүктесінен бастағанымыз. x_r нүктесін x_0 нүктесіне қатынасты x_h нүктесін сәулелендіріп табамыз және $f(x_r) = f_r$ мәнін есептейміз.

Сәулелендіру әрекеті II.3.4- суретінде көрсетілген. Егерде сәулелендіру коэффиценті $\alpha>0$ оң мәнді болса, онда x_r нүктесінің орналасуын келесідегідей іздеп табамыз:

$$x_r - x_0 = \alpha(x_0 - x_h), \qquad \text{яғни}$$

$$x_r = (1+\alpha)x_0 - \alpha x_h \qquad \text{(II.3.7)}$$

Ескерту: $\alpha = |x_r - x_0| / |x_0 - x_h|$.

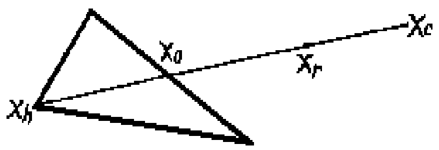


II.3.4- сурет

Д) f_r және f_t, функция мәндерін салыстырайық:

1) Егерде $f_r<f_t$ онда біз функцияның әзірге ең кіші мәнін тапқанымыз. x_0 нүктесінен x_r нүктесіне қарай қозғалту бағыты ең ыңғайлы да және тиімді деп ұйғарамыз. Сөйтіп, осы бағытта біздер созу әрекетін жүргізіп x_e нүктесін тауып $f_e = f(x_e)$ функция мәнін есептейміз. II.3.5-суретінде симплексті созу әрекеті көрсетілген. Созу коэффицентін $\gamma>1$ келесі қатынастардан табуымызға болады:

$$x_e - x_0 = \gamma(x_r - x_0), \qquad \text{яғни}$$
$$x_e = \gamma x_r + (1 - \gamma)x_0 \qquad \text{(II.3.8)}$$



II.3.5- сурет

Ескерту: $\gamma = \mathrm{l}\, x_e - x_0 \,\mathrm{l} \,/\, \mathrm{l}\, x_r - x_0 \,\mathrm{l}$.

а) Егерде $f_e < f_t$ болса, x_h -нүктесін x_e-нүктесіне алмастырамыз және ***(n+1)***-ші симплекс нүктесінде минимумге қарай жылжығанымызды анықтап тексереміз (***3*** қадамы). Егерде функция минимумын тапқан жағдайда үрдісті тоқтатамыз, ал керісінше жағдайда ***Б*** қадамына қайта оралып үрдісті жалғастырамыз.

б) Егерде $f_e \geq f_t$ болса, онда x_e -нүктесін алып тастаймыз. Неге десеңіз x_0 нүктесінен x_r -нүктесіне қарай үлкен қашықтыққа қозғалып кеткенімізді білдіреді. Сондықтан, x_h -нүктесін x_r -нүктесіне алмастырамыз, бұл нүктеде (***Д, 1*** қадамында) функцияның кіші мәні алғашында табылды. Осы нүктеде минимумге жеткен-жетпегенімізді анықтаймыз (**В** қадамы).

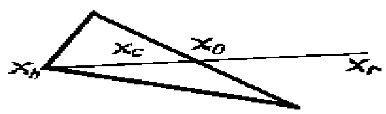
2). Егерде $f_r > f_t$, бірақ $f_r \leq f_g$ онда, қарасты екі нүктенің симплексна қарағанда $\mathbf{x_r}$ -нүктесі жақсы болғандығы, сондықтан $\mathbf{x_h}$ -нүктесін $\mathbf{x_r}$ -нүктесіне алмастырып, осы нүктеде минимумге жеткен жетпегенімізді тексереміз (**Б** қадамы). Жетпеген жағдайда **Б** қадамына қайтадан оралып, яғни жоғарыда айтылған ***1,б*** пунктін орындаймыз.

3). Егерде $f_r > f_t$ және $f_r > f_g$, болса, ***Е*** қадамына көшеміз.

Е) f_r және f_h функция мәндерін салыстырамыз.

1) Егерде $f_r > f_h$ болса, бірден ***Е,2*** қысу қадамына көшеміз. Егерде $f_r < f_h$ болса, x_h -нүктесін x_r -нүктесіне және f_h функция мәнін f_r мәніне алмастырып ***Е,2*** қысу қадамына көшеміз.

2) $f_r > f_h$ болған жағдайда анықтағанымыз, x_h -нүктесінен x_0 -нүкте бағытына қарай үлкен қашықтыққа қозғалғанымыз. Сондықтан осы қатені түзету үшін, қысу қадамы арқылы x_c -нүктесін (сосын f_c мәнін) тауып алып (II.3.6- суретте көрсетілген) үрдісті жалғастырамыз.



II.3.6-сурет

Егерде $f_r > f_h$ болса, бірден қысу қадамын қарастырып x_c -нүктесін келесі қатынастардан табамыз:

$$x_c - x_0 = \beta(x_h - x_0),$$

мұнда:

β*(0 < β < 1)* - қысу коэффиценті.

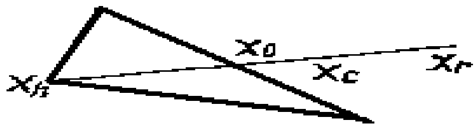
онда:

$$x_c = \beta x_h + (1-\beta)x_0 \qquad (II.3.9)$$

Егерде $f_r < f_h$ болса, x_h -нүктесін x_r -нүктесіне алмастырғаннан кейін, қысу әрекетін жасаймыз. Онда x_c нүктесін келесі қатынастан табамыз (II.3.7-сурет).

$$x_c - x_0 = \beta(x_r - x_0), \qquad \text{яғни}$$

$$x_c = \beta x_r + (1-\beta)x_0, \qquad (II.3.10)$$



II.3.7-сурет

Ж) f_c және f_h мәндерін салыстырамыз.

1) Егерде $f_c < f_h$ кіші болса, x_h -нүктесін x_c -нүктесіне алмастырамыз, және минимумге жетпесек ***Б*** қадамына қайтадан оралып, үрдісті жалғастырамыз.

2) Егерде $f_c > f_h$ болса, біздің f_h мәнінен кіші мән табуға істеген әрекеттеріміз еш нәтиже бермегендігі, сондықтан біз ***З*** қадамын қайтадан орындауға көшеміз.

З) Бұл қадамда симплекстің әр нүктесінен x_t -нүктесіне дейінгі қашықтықты екіге бөліп, яғни симплекстің өлшемін кішірейтіп қарастырамыз. x_t -функцияның ең кіші мәні орналасқан нүкте.

Сөйтіп, x_i –нүктесін $x_i + 1/2(x_i - x_t)$ -нүктесіне алмастырамыз, яғни x_i нүктесін

$$1/2(x_i + x_t) \quad \text{нүктесіне} \qquad (II.3.11)$$

Сосын, f_i мәндерін $i = 1,2,...,(n+1)$ есептеп, минимумге жеткен жетпегенімізді тексеріп және жетпеген жағдайда ***В*** қадамына қайтып оралып іздеуді жалғастырамыз.

И) Жеткен жетпегендікті тексерудің негізі ретінде түсінетініміз - функцияның (n+1)-ші мәнінің айырмашылығы белгілі бір є- (дәлдәк) мәнінен кем немесе тең болған жағдай. Бұл жағдайда σ -мәні есептеледі.

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n+1} (f_i - \bar{f})^2 / (n+1) \qquad (II.3.12)$$

мұнда

$$\bar{f} = \sum f_i / n + 1$$

Егерде σ<є болса, функция мәндері бір-біріне өте жақын орналасқанның белгісі, сондықтан олар функцияның минимумы орналасқан x_t -нүктесінің маңы болуы мүмкін. Минимумға жеткен немесе жетпегендікті осындай шартта тексеруіміз миға қонарлықтай деп есептейміз.

Осы әдістің процедура үрдісі программа ретінде көрсетілген. α, β және γ коэффиценттері программада сәйкес сәулелендіру, қысу және созу коэффиценттері ретінде қолданылған. Нелдер мен Мидтың ұсыныстары бойынша $\alpha=1$, $\beta=0{,}5$ және $\gamma=2$ тең деп аламыз. Бұл ұсыныс әр түрлі мәндер үшін жүргізілген іздеулер (экперимент) нәтижесінде анықталып негізделген.

Осы параметр мәндері әдістің әр түрлі қиын жағдайда жұмыс істеп және ең тиімді жұмыс істеуіне мүмкіншілік тудырады.

Алғашқы симплексті өзіміз тағайындауымыз қажет. Бұл программада $\boldsymbol{x_1}$ нүктесі алғашқы нүкте ретінде қолданылады, сосын программада келесі нүктелер есептеледі:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + ke_1\\
x_3 &= x_1 + ke_2\\
x_{n+1} &= x_1 + ke_n
\end{aligned}
\qquad (II.3.13)
$$

мұнда k - кез-келген қадам ұзындығы,

e_j - бірлік вектор.

Программада қолданылатын айнымалылар, жоғарғы түсініктегі белгілерге сәйкес жазылады, бірақ латын алфавитінің үлкен әріптерімен FE $\equiv f_e$, XC $\equiv x_c$ және т.с.с. Симплекс шыңдары S матрицасы арқылы белгіленген.

Матрицаның S(I,J) элементі симплекстің I -шыңындағы J -компоненті, яғни

$$S\,(I, J) \equiv x_{ij} \qquad (II.3.14)$$

Программаның ***5000*** жолында минимумы ізделіп жатқан Пауэлл *((II.3.2) теңдеуді қараңыз)* функциясын есептейтін ішкі программаның басы.

Минимумге жеткен немесе жетпегенді тексеру *(программаның **2060÷2180** жолдары)* белгілі қатынасты

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(f_i-\overline{f}\right)^2=\sum_{i=1}^{n+1}f_i^2-(n-1)\overline{f}^2, \qquad (II.3.15)$$

өрнектің сол жағын есептеуге пайдаланылады.

```
20 PRINT "Симплексный  метод  Нелдера - Мида"
40 PRINT ""
60 PRINT "Функция Z=F(X1,X2,…,XN) вычисляется в строке 5000"
80 PRINT "":TEV=0
100 PRINT "Введите число переменных "
120 INPUT N
140 PRINT "Начальное приближение "
160 DIM S(N+1,N)
180 FOR J=1 TO N
200 INPUT S(1,J)
220 NEXT J
240 PRINT "Введите длину шага"
```

```
260 INPUT K
270 REM  Построить первый симплекс вокруг начальной точки"
280 FOR I=2 TO N+1
300 FOR J=1 TO N
320 IF J=I-1 THEN S(I,J)=S(1,J)+K:GOTO 360
340 S(I,J)=S(1,J)
360 NEXT J
380 NEXT I
400 PRINT "Введите ALFA, BETA, GAMMA"
420 INPUT AL, BE, GA
440 DIM X(N), XH(N), XG(N), XL(N), X0(N)
460 DIM XR(N), XC(N), XE(N), F(N+1)
470 REM  Вычислить значение функции
480 FOR I=1 TO N+1
500 FOR J=1 TO N
520 X(J)=S(I,J)
540 NEXT J
560 GOSUB 5000
580 F(I)=Z
600 NEXT I
610 REM  Найти наибольшее и наименьшее значение
615 REM функции и соответствующие ему точки
620 FH=-1E+20:FL=1E+20
640 FOR I=1 TO N+1
660 IF F(I)>FH THEN FH=F(I):H=I
680 IF F(I)< FL THEN FL=F(I):L=I
700 NEXT I
710 REM Найти второе наибольшее значение и
715 REM соответствующую ему точку
720 FG=-1E+20
740 FOR I=1 TO N+1
760 IF I=H THEN GOTO 800
780 IF F(I)>FG THEN FG=F(I):G=I
800 NEXT I
820 FOR J=1 TO N
840 X0(J)=0
860 FOR I=1 TO N+1
880 IF I=H THEN GOTO 910
900 X0(J)=X0(J)+S(I,J)
910 NEXT I
920 REM  Определить точки X0, XH, XJ, XL
940 X0(J)=X0(J)/N
960 XH(J)=S(H,J)
980 XG(J)=S(G,J)
1000 XL(J)=S(L,J)
1020 NEXT J
1040 FOR J=1 TO N
1060 X(J)=X0(J)
1080 NEXT J
1100 GOSUB 5000
1120 F0=Z:PRINT  "Вычислите центр тяжести в строке 1120"
1130 REM далее выполните отражение
1140 FOR J=1 TO N
```

```
1160 XR(J)=X0(J)+AL*(X0(J)-XH(J))
1180 X(J)=XR(J)
1200 NEXT J
1220 GOSUB 5000:FR=Z:PRINT " выполните отражение в строке 1120  ";Z
1230 REM Если FR<FL, то производится растяжение
1240 IF FR<FL THEN GOTO 1300
1250 REM Если FR>FL и FR>FG, то проверить FR и FH
1255 REM  в противном случае, заменить XH на XR
1260 IF FR>FG THEN GOTO 1600
1280 GOTO 1520
1290 REM Далее выполняется растяжение
1300 FOR J=1 TO N
1320 XE(J)=GA*XR(J)+(1-GA)*X0(J)
1340 X(J)=XE(J)
1360 NEXT J
1380 GOSUB 5000:FE=Z
1400 IF FE<FL THEN GOTO 1440
1420 GOTO 1520
1440 FOR J=1 TO N
1460 S(H,J)=XE(J)
1480 NEXT J:F(H)=FE:PRINT  "Выполните растяжение в строке 1480    ";Z
1490 REM Проверить сходимость в строке 2060
1500 GOTO 2060
1520 FOR J=1 TO N
1540 S(H,J)=XR(J)
1560 NEXT J:F(H)=FR:PRINT  "Выполните отражение в строке 1560"
1580 GOTO 2060
1600 IF FR>FH THEN GOTO 1700
1620 FOR J=1 TO N
1640 XH(J)=XR(J)
1660 NEXT J
1680 F(H)=FR
1690 REM Далее следует сжатие
1700 FOR J=1 TO N
1720 XC(J)=BE*XH(J)+(1-BE)*X0(J)
1740 X(J)=XC(J)
1760 NEXT J
1780 GOSUB 5000:FC=Z
1800 IF FC>FH THEN GOTO 1920
1820 FOR J=1 TO N
1840 S(H,J)=XC(J)
1860 NEXT J
1880 F(H)=FC:PRINT  "Выполните сжатие в строке 1880  ";Z
1900 GOTO 2060
1910 REM Далее следует редукция симплекса
1920 FOR I=1 TO N+1
1940 FOR J=1 TO N
1960 S(I,J)=(S(I,J)+XL(J))/2
1980 X(J)=S(I,J)
2000 NEXT J
2020 GOSUB 5000:F(I)=Z
2040 NEXT I:PRINT "Выполните редукцию в строке 2040"
2050 REM далее следует проверка сходимости
```

```
2060 S1=0:S2=0
2080 FOR I=1 TO N+1
2100 S1=S1+F(I)
2120 S2=S2+F(I)*F(I)
2140 NEXT I
2160 SIG=S2-S1*S1/(N+1):SIG = SIG/(N+1)
2180 IF SIG<1E-10 THEN GOTO 2220
2200 GOTO 620
2220 PRINT "Минимум найден в точке"
2240 FOR J=1 TO N
2260 PRINT "X";J; "  =";XL(J)
2280 NEXT J:PRINT  ""
2300 PRINT "Значение минимума функции="F(L)
2320 PRINT "Количество вычислений функции="TEV
2340 END
5000 Z=(X(1)+10*X(2))^2+5*(X(3)-X(4))^2
5020 Z=Z*(X(2)-2*X(3))^4
5040 Z=Z+10*(X(1)-X(4))^4
5060 TEV=TEV+1
5100 RETURN
```

I Мысал

$$f(x_1, x_2) = 100\left(x_2 - x_1^2\right)^2 + \left(1 - x_1\right)^2$$

функциясының муиунимумын табу үшін Нелдер-Мид әдісін қолданыңыз. Алғашқы нүкте ретінде (1,5; 2) нүктені тағайындап және k=0,5 тең деп, сығылу коэффиценттерді α=1, β=0,5 және γ=2 тең деп қабылдаймыз.

Программаның ***5000*** жолындағы ішкі программаны дұрыс өзгертіп жазсақ, программаның жұмыс істеуі төменде көрсетілген.

Функция минимумы 0-ге тең және ол (1; 1) нүктесінде орналасқан.

```
Симплексный метод Нелдера – Мида

Функция Z=F(X1,X2,…,XN)  вычисляется  в  строке  5000

Введите число переменных              2
Начальное приближение                 1.5       2
Введите длину шага                    .5
Введите ALFA, BETA, GAMMA             1         .5                  2
Вычислите центр тяжести в строке 1120
Выполните отражение в строке 1120225
Выполните сжатие в строке 1880        66.07813
Вычислите центр тяжести в строке 1220
Выполните отражение в строке 1220               88.45312
Выполните сжатие в строке 1880                  17.93848
Вычислите центр тяжести в строке 1120
Выполните отражение в строке 122020.92285
Выполните сжатие в строке 1880                  4.80719
Вычислите центр тяжести в строке 1120
```

Выполните отражение в строке 122051.29157
Выполните сжатие в строке 1880 .2411101
Вычислите центр тяжести в строке 1120
Выполните отражение в строке 1220.3819754
Выполните отражение в строке 1560
Вычислите центр тяжести в строке 1120
Выполните отражение в строке 12207.327366
Выполните сжатие в строке 1880 1.094459
Вычислите центр тяжести в строке 1120
Выполните отражение в строке 12206.877291E-05
Выполните отражение в строке 1560
Вычислите центр тяжести в строке 1120
Выполните отражение в строке 12201.433001E-04
Выполните сжатие в строке 1880 2.787633E-05
Вычислите центр тяжести в строке 1120
Выполните отражение в строке 12203.54833E-05
Выполните сжатие в строке 1880 8.852308E-06
Вычислите центр тяжести в строке 1120
Выполните отражение в строке 12202.155905E-05
Выполните сжатие в строке 1880 5.518512E-06
Минимум найден в точке
X 1 = 1.000634
X 2 = 1.001357

Значение минимума функции равно 1.194424E-06
Количество вычислений функции равно 108

§ II. 3.4 Жаттығулар

1. Координаттар арқылы төмендеп түсу әдісін іске асыратын программаны Бейсик алгоритм тілінде жазып (құрып) көріңіз. ***2*** -ші тарауда келтірілген бір айнымалы функциясының бір өлшемдегі іздеу алгоритмін ішкі программа ретінде қолданып.

2. Осы ***1***-ші жаттығуда құрған программаны

$$(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2$$

функциясының және Розенброх

$$100\left(x_2-x_1^2\right)^2+\left(1-x_1\right)^2$$

функциясының минимумын іздеуге қолданыңыз.

3. Хук-Дживс әдісін іске асыратын программаны функция минимумын іздеуге қолданып, осы әдіспен және ***1***-ші жаттығуда әдіспен іздегенде функция мәндері неше рет есептелгенін салыстырып талқылаңыз.

4. ***3***-ші және ***2***-ші жаттығуларды әртүрлі алғашқы нүктелерге қайталаңыз.

5. Нелдер-Мид әдісінде қадамды кішірейту коэффицентін ***(а) 2, (б) 45, (в) 8, (г) 100*** өзгертіп, яғни ***10***-нан ***а***-ға, ***б***-ға, ***в***-ға, ***г***-ға өзгертіп ***2***-ші және ***3***-ші

жаттығуларды қайталаңыз. Функцияны есептеу сандарын салыстырып талқылаңыз.

6. Нелдер-Мид әдісіне жазылған программаны қолданып Розенброк функциясының, Пауэлл функциясының, екі өлшемдегі экспоненциялдық функциясының *((II.3.1)-(II.3.3) теңдеулері)* минимумын табыңыз. Әр түрлі алғашқы мәндерді қолданып және функцияны есептеу сандарын салыстырып талқылаңыз. Минимумды іздеу үрдісінде ыңғайсыз нүктелер ретінде Розенброк функциясында ***(-1,2; 1)*** нүктесі және Пауэлл функциясында

(3; -1; 0; 1) нүктесі болады.

7. Нелдер-Мид әдісінің программасын әртүрлі α**,** β және γ коэффиценттердің мәндерін пайдалануға өзгертіп қолданыңыз. Есептелген нәтижелерді зерттеп талқылаңыз.

8. $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 - 4x_1 + 3$ - функциясының минимумын табыңыз.

9. $\varphi(x_1 x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_3^2 - 7)^2$ - функциясының минимумын табыңыз.

10. Теңдеулерді шешіңіз:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 = 11 \\ x_1 - x_2^2 = 7 \end{cases}$$

9-жаттығудың осы теңдеулерді шешу үшін қандай көмегі болады?

11. Теңдеулер жүйесін шешіңіз.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$$

12. ***F*** және ***C*** айнымалылары ***F = a + bc*** қатынасы бойынша байланысты, бірақ ***F*** мәнін өлшегенімізде қателер пайда болады. ***a*** және ***b*** коэффиценттерінің мәндерін келесі мәліметтер бойынша табыңыз.

F	***51***	***68***	***84***	***103***	***121***	***141***
C	***10***	***20***	***30***	***40***	***50***	***60***

Кіші квадраттар принципін қолданып, ***a*** және ***b*** мәнін функция минимумын іздеу үрдісі арқылы табыңыз.

$S = \sum_{i=1}^{6} (F_i - a - bc_i)^2$ улықтарының біразында қарастырылғде келтірілген мәлімет бойынша айнымалылар айтылған қатынаста екенін көрсетіп **a** және **n** мәндерін табыңыз:

n = 4 6 8 10 12

Q = 650 1740 3640 6360 9790

Ескерту:

Егерде $\boldsymbol{Q = ah^n}$ келесі өрнек $\boldsymbol{ln(Q) = ln(a) + n\ ln(h)}$ орынды. Сөйтіп, қарасты есепті сызықтық регрессия есебіне алмастыруымызға болады, айнымалылар ретінде $\boldsymbol{ln(Q)}$ және $\boldsymbol{ln(h)}$ пайдаланып. Алмастырып және алмастырмай да кіші квадраттар принципі бойынша есептеңіз, яғни функциялар минимумын іздеңіз:

1) $S_1 = \sum [\ ln(Q_i) - ln(a) - n\ ln(h_i)\ ]^2$,

2) $S_2 = \sum (Q_i - ah_i^n)^2$,

a және ***n*** мәнін өзгертіп отырып есептеңіз. Жауаптары бір-біріне сәйкес болар ма екен?

4 - тарау
Градиенттік әдістер

§ II. 4.1 Тез төмендеу әдісі

Бұл тарауда функция мәндерімен бірге оның градиентін пайдаланып іздейтін әдістер қарастырылған.

3.1 тақырыбында қарастырылған координаттар бойынша төмендеу әдістерінің көмегімен іздеу үрдісі өстердің біреуіне параллелді бағытта жүргізіледі, сол бағыттағы минимумге жеткенше.

Сосын іздеу басқа өске параллелді бағытта жүргізіледі және т.с.с. жалғастырылады. Бағыттар міндетті түрде белгілі болады. Әрине әдістің жүргізілетін бағыттарының ішінен ең *«жақсысын«* таңдап алып жүргізгеніміз жөн. Қай бағытта ең *«жақсы«* екені белгісіз, бірақ градиенттің бағыты функцияның ұлғаю бағытына сәйкес екені белгілі. Сондықтан, оған керісінше бағыт функцияның тезірек кемуін көрсететін бағыт.

Градиенттің осындай қасиеті келесі түсініктермен талқыланады. $\boldsymbol{X}$ нүктесінен келесі $\boldsymbol{(X + hd)}$ нүктесіне ығысу қажет болсын, мұнда $\boldsymbol{d}$ - бағытты көрсетеді, ал $\boldsymbol{h}$ - қадамның ұзындығын көрсетеді.

Сондықтан ығыстыру $\boldsymbol{(x_1,x_2,...,x_n)}$ нүктесінен $(x_1 + \delta x_1,\ x_2 + \delta x_2,\ ...,\ x_n + \delta x_n)$ нүктесіне дейін жүргізіледі, мұнда

$$\delta x_i = hd_i \qquad (II.4.1)$$

ал $\boldsymbol{d_i}$ - d бағытындағы косинустар, олар мынандай шартта болады:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 1 \qquad (II.4.2)$$

Функция мәнінің өзгеруі келесі қатынаста болады:

$$df = f(x_1 + \delta x_1,\ x_2 + \delta x_2,\ \ldots, x_n = \delta x_n) - f(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial f_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n$$

(II.4.3)

және дәлдігі ***(x_i*** бірінші қатарға дейін, ***x*** нүктесіндегі дербестік туындылар есептеледі *((*II*.1.4) теңдеуіне сәйкес).*

$\boldsymbol{d_i}$ бағытын, ***df*** функциясы өзгеруінің ең үлкен мәнін табу және (II.4.2) теңдеуін қанағаттандыру үшін қалай тағайындауымыз қажет?

Бұл жағдайда шарт қойылған максимумды іздеу есебі туады. Оны есептеу үшін, келесі тарауда қарастырылатын Лагранж көбейтінділері әдісін қолдануға тура келеді. Оның көмегімен келесі функцияны табамыз.

$$\varphi(d_1, d_2, \ldots, d_n) = df + \lambda\left(\sum d_i^2 - 1\right)$$

(II.4.2) теңдеуі арқылы шектелген ***df*** -мәнінің максимумын табу үшін.

$$\varphi(d_1, d_2, \ldots, d_n) = h\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}d_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}d_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}d_n\right) +$$
$$+ \lambda\left(d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 - 1\right)$$

функциясының максимумы орналасқан нүктені табуымыз қажет.

Оның туындысы:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial d_j} = h\frac{\partial f}{\partial x_j} + 2\lambda d_j, \quad \text{мұнда } j=1,2,..,n \qquad \text{(II.4.4)}$$

Егерде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial d_j} = 0 \quad \text{тең болса} \quad d_j = -\frac{h}{2\lambda}\frac{\partial f}{\partial x_j}. \qquad \text{(II.4.5)}$$

Сондықтан

$$\frac{d_1}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{d_2}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}} = \ldots = \frac{d_n}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}}. \qquad \text{(II.4.6)}$$

Онда $d_i \sim \partial f / \partial x_i$ және ***d*** бағыты ***X*** нүктесінде $\nabla f(x)$ бағытына параллельді болады.

Сөйтіп қарастырғанда, функцияның аумақта *ең үлкен* ұлғаюы, берілген бір *кіші* ***h*** қадамында ***d*** бағытты $\nabla f(x)$ немесе ***g(x)*** бағытына сәйкес болғанда. Сондықтан тез төмендеу бағыты ретінде

$$-\nabla f(x) \quad \text{немесе} \quad -g(x) \qquad \text{(II.4.7)}$$

бағыттарын қарастырамыз.

Қарапайым түрде (4.3) теңдеуін келесі өрнекпен жазамыз:

$$df = |\nabla f(x)|\,|dx|\cos\theta,$$

мұнда: θ $-\nabla f(x)$ және ***dx*** векторлар арасындағы бұрыш. Біз берілген ***dx*** мәніне сәйкес ***df*** функциясының минимумын табамыз, θ=***180⁰*** керіқарай тағайындап, неге десеңіз ***dx*** бағыты $-\nabla f(x)$ бағытына сәйкес болуы үшін.

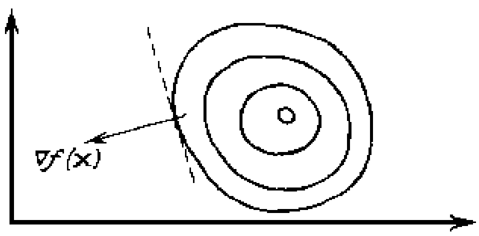
Ескерту: Градиент бағыты бірқалыпты деңгей сызығының кез келген нүктесіне перпендикуляр болады, неге десеңіз, осы сызық бойында функция мәні өзгермейді. Сөйтіп, егерде $(d_1, d_2, ..., d_n)$ -деңгей сызығының бойындағы кіші қадам болса,

онда:

$$f(x_1 + d_1, x_2 + d_2, ..., x_n + d_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

және, сондықтан,

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} d_j = [\nabla f(x)]^T d = 0 \qquad \text{(II.4.8)}$$



II.4.1- сурет

Тез төмендеу әдісінде градиент бағытының қарастырылған қасиетін пайдаланғанымыз жөн.

Сондықтан, егерде біз оптимизация үрдісінің қадамында x_i нүктесінде орналассақ, онда функция минимумын іздеуді $-\nabla f(x)$ бағыт бойында жүргізгеніміз қолайлы.

Бұл әдіс итерациялық болады. ***i*** қадамында минимум x_i нүктесімен аппроксимацияланса.

Келесі аппроксимациялау нүкте ретінде:

$$x_{i+1} = x_i - \lambda_i \nabla f(x_i), \qquad \text{(II.4.9)}$$

мұнда, λ_i - λ-мәнінің минимизациялау функциясы

$$\varphi(\lambda) = f[x_i - \lambda \nabla f(x_i)] \qquad \text{(II.4.10)}$$

λ_i-мәндері ***2***-ші тарауда жазылған бір өлшемді іздеу әдістері арқылы табуымыз мүмкін.

Тез төмендеу әдісінің программасы:

```
20 PRINT «МЕТОД  НАИСКОРЕЙШЕГО  СПУСКА»
40 PRINT «ФУНКЦИЯ Z=F(X1,X2,...,XN) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В СТРОКЕ 2000»
60 PRINT «ЧАСТНЫЕ  ПРОИЗВОДНЫЕ G(1),G(2),...,G(N)
        ВЫЧИСЛЯЮТСЯ
                В СТРОКЕ 3000»
80 PRINT «ОДНОМЕРНЫЙ  ПОИСК  ПРОИЗВОДИТСЯ  МЕТОДОМ
        КВАДРАТИЧНОЙ  ИНТЕРПОЛЯЦИИ»
100 PRINT «ВВЕДИТЕ  ЧИСЛО  ПЕРЕМЕННЫХ»: INPUT   N
```

```
120 DIM  X (N), Y(N), G(N), L(4), FF(4)
140 REM  МАССИВЫ  L(4)  И  FF(4)  ИСПОЛЬЗУЮТСЯ  ПРИ
             КВАДРАТИЧНОЙ   ИНТЕРПОЛЯЦИИ
160 PRINT «ВВЕДИТЕ  НАЧАЛЬНУЮ  ТОЧКУ»
180 FOR I-1 TO N:INPUT I:NEXT I
200 PRINT « ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНЫЙ ШАГң:INPUT L
250 PRINT « ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ»
260 REM ЗАГОЛОВОК ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ВЫВОДА
300 FOR I =1 TO N:Y(I)=X(I):NEXT I
320 GOSUB 2000:GOSUB 3000:IF GO<.000001 THEN GOTO 1200
340 FOR I=1 TO N:D(I)=-G(I)/G0:NET I
360 REM ЗАДАТЬ НАПРАВЛЕНИЕ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА
            ИЗ ТОЧКИ Y(I)
370 REM [РАВНОЙ В НАЧАЛЕ X(I)]
380 L(1)=0:FF(1)=Z:ZZ=Z
400 L(3)=L
                  410 FOR I=1 TO N:X(I)=Y(I)+L(3)*D(I):NEXT I
430 GOSUB 2000:FF(3)=Z
440 GOSUB 3000
450 G2=0
460 FOR I=1 TO N:G2+G(I):NEXT I
470 IF FF(3)>=FF(1) OR G2>=0 THEN GOTO 500
480 L=2*L:GOTO 400
500 REM В СТРОКЕ 480 УДВОИТЬ ДЛИНУ ШАГА,
510 REM ЧТОБЫ «НАКРЫТЬң МИНИМУМ
520 L(2)=L/2
540 FOR I=1 TO N:X(I)=Y(I)+L(2)*D(I):NEXT I
560 GOSUB 2000:FF(2)=Z
580 REM ВЫПОЛНИТЬ ПЕРВУЮ КВАДРАТИЧНУЮ ИНТЕРПОЛЯЦИЮ
600 L(4)=L*(FF(2)-.75*FF(1)-.25*FF(3))/2*FF(2)-FF(1)-FF(3))
620 IF L(4)<0 THEN PRINT «ВНИМАНИЕң
640 FOR I=1 TO N:X(I)=Y(I)+L(4)*D(I):NEXT I
660 GOSUB 2000:FF(4)=Z
680 REM ИМЕЕМ 4 ЗНАЧЕНИЯ LAMBDA И 4 ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ,
690 REM УПОРЯДОЧИТЬ ИХ В ПОРЯДКЕ УБЫВАНИЯ
700 FOR J=1 TO 3
710 FOR K=J+1 TO 4
720 IF FF(J)<=FF(K) THEN GOTO 760
730 LL=L(J):L(J)=L(K):L(K)=LL
740 FO=FF(J):FF(J)=FF(K):FF(K)=F0
750 REM  ПОМЕНЯТЬ  МЕСТАМИ FF(J) И FF(K),   ЕСЛИ ОНИ НЕ
       УПОРЯДОЧЕНЫ
760 NEXT K:NEXT J
790 REM  ЗАКОНЧИТЬ  ПОИСК  В  ДАННОМ   НАПРАВЛЕНИИ,
795 REM ЕСЛИ ТОЧНОСТЬ ДОСТИГНУТА В СТРОКЕ 800
800 IF ABS(L(1)-L(2))<.00005 THEN GOTO 1000
810 REM ЗАПОМНИТЬ ТРИ ЛУЧШИХ ТОЧКИ
820 S1=SGN(L(2)-l(1)):S2=SGN(L(3)-L(1))
830 S3=SGN(L(4)-L(1))
840 IF S1=S2 AND S1=-S3 THEN L(3)=L(4):FF(3)=FF(4)
850 REM ВТОРАЯ И ПОСЛЕДНЯЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ
860 DN=(L(2)-L(3))*FF(1)+(L(3)-L(1))*FF(2)+(L(1)-L(2))*FF(3)
870 F=F*(L(2)-L(3))/(2*DN)
```

```
880 F=F*(L(2)-L(3))*(L(3)-L(1))
890 L(4)=(L(1)+L(2))/2+F
900 FOR I=1 TO N:X(I)=Y(I)+L(4)*D(I):NEXT I
910 GOSUB 2000:FF(4)=Z
920 REM ПОВТРОИТЬ ВТОРУЮ ИНТЕРПОЛЯЦИЮ
930 GOTO 700
1000 FOR I=1 TO N:X(I)=Y(I)+L(1)*D(I)
1002 Y(I):PRINT «X»; I; «=»; X(I)
1005 NEXT I
1010 PRINT «»
1020 GOSUB 2000:GOSUB  3000
1040 PRINT «F=»Z:PRINT «»
1080 L=L/2
1100 IF GO>.00001 THEN GOTO 340
1150 REM  ПЕРЕХОД НА  НАЧАЛО  СЛЕДУЮЩЕЙ  ИНТЕРАЦИИ
        ПОИСКА ИЗ ТЕКУЩЕЙ ТОЧКИ
1200 PRINT «»:PRINT
1220 FOR I=1 TO N:PRINT «X»; I; «=»;X(I):NEXT I
1240 PRINT «МИНИМУМ ФУНКЦИИ F(X1, X2, ...,XN)=«Z
1300 END
2000 Z=(X(1)-1)^2+(X(2)-3)^2=4*(X(3)+5)^2
2090 FE=FE+1
2100 RETURN
3000 GO=0
3100 G(1)=2*(X(1)-1)
3200 G(2)=2*(X(2)-3)
3300 G(3)=8*(X(3)+5)
3800 FOR I=1 TO N:GO=GO+G(I)*G(I):NEXT I
3810 GO=SQR(G0)
4000 RETURN
```

Программада ***L*** арқылы λ Лагранж көбейтінділері белгіленген.

340 жолдағы вектор бірлік векторы болып табылады.

Келесі функцияның минимумы:

$$\varphi(\lambda) = f(x_i + \lambda d_i) \qquad \text{(II.4.11)}$$

$\boldsymbol{x_i}$ нүктесінен $\boldsymbol{d_i}$ бағытында іздеу үшін квадраттық интерполяция әдісі қолданылады.

$\boldsymbol{x_i}$ нүктесінде $\boldsymbol{x=0}$, және біз λ қадамының ұзындығын тағайындағанда, функция минимумынан асып кетпейтіндей қылып тағайындаймыз.

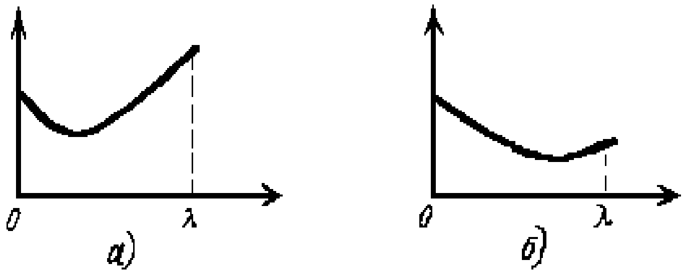
Туындысы:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = g\left(x_i + \lambda d_i\right)^T d_i \qquad \text{(II.4.12)}$$

Программаның ***460*** жолында (II.2.16) өрнек есептеледі, ол ***G2*** деп белгіленеді.

470 жолда минимумнан асып кеткеніміз, немесе кетпегеніміздің шарты тексеріледі. Ол шарттың орындалуы, егерде:

$$\psi(\lambda) \geq \psi(0), \quad \text{немесе} \quad d\psi(\lambda) / d\lambda(=G2) \geq 0$$



II.4.3- сурет

Ескерту: $d\psi(0) / d\lambda = -g(x_i)^T g(x_i) < 0$ (II.*4.3 а және б сурет).*

Егерде минимум $(0,\lambda)$ аралығына түспесе, λ екі есе көбейтіліп қарастырылады және осы әрекет қайта көбейтіліп жалғастырылады да минимум аралыққа кіргенше, яғни,

$\psi(\lambda) \geq \psi(0)$, немесе $d\psi(\lambda) / d\lambda(=G2) \geq 0$ шарт орындалғанша.

Минимум ***(0,λ)*** аралығына түскеніне көзіміз жеткеннен кейін, үшінші нүкте ретінде **λ/2** нүктені тағайындаймыз. Қарастырылған квадраттық полиномның минимумы орналасқан нүктесін ***(***II.2.12***)*** теңдеудің қатынасы бойынша іздейміз және ***t = λ / 2*** тең деп қарастырып. Бұл әрекет программаның ***600*** жолында көрсетілген.

Қазіргі жағдайда квадраттық интерполяция II.2.4 тарауда келтірілген программаны қайталайды, бірақ жол нөмірлері ***300***-ге көбейген. ***800*** жолдағы тағайындалатын дәлдікті өзгертуімізге болады.

1000 жолда $x_{i+1} = x_i$ меншіктеу операторы жұмыс істейді және егерде

l g(x_{i+1}) l жеткілікті кіші мән болса, үрдіс аяқталады *(бұл шартты тексеру программаның **1100** жолында атқарылады).* Қадам ұзындығын кішірейту программаның ***1080*** жолында. Іздеу үрдісінде экстремумге келіп тірелетінімізді болжаймыз, сондықтан үрдістің қолайлы болуына қадам ұзындығын кішірейтіп жүргізгеніміз дұрыс. Ал қадам ұзындығы ***2*** санына бөліп программада қарастырғанымыз жай ғана өзіміздің тағайындап кішірейткеніміз.

<u>1 Мысал</u>

Жоғарыда келтірілген программаны қолданып

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 + 4(x_3 + 5)^2$

функция минимумын табыңыз.

Бұл есепті есептеуге жоғарыда келтірілген программаны қолдануымызға болады. Минимум $x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=-5$ тең жағдайда болатынына көзіміз жетіп тұр. Программаның жұмыс істейтінін анықтау үшін, алғашқы нүктені

(4; -1; 2) деп ұйғарып, алғашқы қадам ұзындығы ***4***-ке тең деп алып функция минимумын ***11*** итерациядан кейін табуымызға болады. Төменде осы программаның жұмыс істегені келтірілген:

```
МЕТОД   НАИСКОРЕЙШЕГО   СПУСКА
ФУНКЦИЯ   Z=F(X1, X2, ..., XN)  ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В  СТРОКЕ   2000
ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ  G(1), G(2), ..., G(N)  ВЫЧИСЛЯЮТСЯ В
```

СТРОКЕ 3000
ОДНОМЕРНЫЙ ПОИСК ПРОИЗВОДИТСЯ МЕТОДОМ
КВАДРАТИЧНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ
ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ
3
ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНУЮ ТОЧКУ
4
-1
2
ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНЫЙ ШАГ
4

ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ

X 1 = 3.232205
X 2 = .02372677
X 3 = -5.166087

F = 13.95128

X 1 = 1.189384
X 2 = 2.747488
X 3 = -4.558105

F = .880715
X 1 = 1.140915
X 2 = 2.812114
X 3 = -5.010485

F = .0555979

X 1 = 1.011955
X 2 = 2.98406
X 3 = -4.972104

F = 3.50976E-03

X 1 = 1.008896
X 2 = 2.988139
X 3 = -5.000662

F = 2.215617E-04

X 1 = 1.000754
X 2 = 2.998995
X 3 = -4.99824

F = 1.396853E-05

X 1 = 1.00561
X 2 = 2.999252
X 3 = -5.000042

F = 8.804964E-07

X 1 = 1.000047
X 2 = 2.999937
X 3 = -4.99989

F = 5.51017E-08

X 1 = 1.000035
X 2 = 2.999954
X 3 =-5.000003

F = 3.422542E-09

X 1 = 1.000004
X 2 = 2.999995
X 3 = -4.999993

F = 2.683578E-10

X 1 = 1.000003
X 2 = 2.999997
X 3 = -5

F = 1.966782E-11

X 1 = 1.000003
X 2 = 2.999997
X 3 = -5
МИНИМУМ ФУНКЦИИ F(X1, X2, ..., XN)= 1.966782E-11

800 жолда әрбір итерацияның аяқталу жағдайы келтірілген. Көсетілген жағдайға қарағанда, тианақты бірден өткізу қажет емес. $f(x_i)$ мәніндегі функция мәнінің ұқсастығының азаюна көз жеткізу қажет

Сондықтанда, 800 жолдағы операторды мынандай операторға ауыстыруымыз қажет

800 IF FF (1) < ZZ THEN GOTO 1000

2 Мысал

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^2 + 4(x_3 + 5)^4$$

функциясының минимумын табыңыз.

Функция минимумы нөл екеніне және ол ***(1; 3; -5)*** нүктесінде орналасқанына көзіміз жетеді. Программаның жұмыс істегені төменде келтірілген және тоғыз итерация жүргізілгені.

МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА
ФУНКЦИЯ Z=F(X1, X2,..., XN) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В СТРОКЕ 2000
ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ G(1), G(2),... G(N) ВЫЧИСЛЯЮТСЯ В
СТРОКЕ 3000
ОДНОМЕРНЫЙ ПОИСК ПРОИЗВОДИТСЯ МЕТОДОМ
КВАДРАТИЧНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

```
ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ
3
ВВЕДИТЕ  НАЧАЛЬНУЮ ТОЧКУ
4
2
-1
ВВЕДИТЕ  НАЧАЛЬНЫЙ  ШАГ
4
ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ
X 1 = -.1757255
X 2 = 2.077328
X 3 = -2.237252

F= 33.29327

X 1 = .6431065
X 2 = 2.30976
X 3 = -5.021118

F= .4944399

X 1 = .7308417
X 2 = 2.975843
X 3 = -4.939602

F= 2.042376E-02

X 1 = .7408926
X 2 = 2.982069
X 3 = -5.001866

F= 4.842788E-03

X 1 = .8003951
X 2 = 3.012736
X 3 = -4.989102

F= 2.224726E-03

X 1 = .8051051
X 2 = 3.008965
X 3 = -5.002012

F= 1.539329E-03
```

Енді назарымызды программаларға аударайық. Бірден қарағанда аңғаратынымыз функцияны және аргументті есептейтін ішкі программаларын өзгертіп, кез-келген функцияның минимумын табатындаймыз. Бірақ ол олай емес, іздеу үрдісінің әрекеттері қарапайым жағдай болмайды. Бүгіндікке барлық жағдайды пайдаланып нәтиже беретін универсалдық әдістің жоқ екенін байқаймыз. Сондықтан, жоғарыда айтылған әдістердің бәрінде қолданған кезде, абай болуымыз қажет. Олардың үрдіс қадамдарында жұмыс істеу нәтижелерінде, мысалы дәлдікті өте кіші қылып қарастырсақ, немесе итерацияның аяқталу шарттарын есептегенде, айырмашылықтары компьютердің есептеу дәлдігінен асып кетсе, программа дұрыс жұмыс істемей тоқтап қалуы мүмкін.

Сондықтан, программаларды қолданғанда түсініп қолданып, сақ болуымыз керек.

Тез төмендеу әдісін керекті жақсы оптимизациялау процедурасы деп қарастыруға болмайды, неге десеңіз, тәжірибе жүзінде, ол бір қарағанда жақсы көрінгенімен, жұмыс істеуі өте төмен. Тез төмендеу әдісінің қасиеті бір аймақта ғана жүргізіледі, өте жиі бағыты өзгертуімізге әкеп тіреледі, сондықтан, керек емес есептеу әрекеттерін көп жүргіземіз. Әдісте екінші туындының мәндері ескерілмеген.

Сондықтан, квадраттық функциялар қасиеттерін пайдалануға негізделген әдістер қарапайым да және екінші туындылар мәнін қолданып есептеу тәсілдері ең қолайлы деп ұйғарамыз. Егерде, ***(1.4)*** Тейлор қатарына жіктеуді қолдансақ, функцияның екінші туындысы нөлге тең болмаса, кез-келген функция өзінің минимум төңірегінде квадраттық функция арқылы аппроксимацияланады. Сондықтан, квадраттық функциялардың іздеу әдістерін басқа да функцияларға қолдануымызға болады. Келесі тақырыпта ***n*** **-** айнымалылы квадраттық функция қасиеттерін келтіріп талқылаймыз.

§ II.4.2 Квадраттық функциялар

Квадраттық функция

$$f(x)=a+x^t b+\frac{1}{2}x^t Gx, \qquad \text{(II.4.13)}$$

мұнда ***a*** - тұрақты сан; ***b*** - өзгермейтін вектор және ***G*** - оң мәнді симметриялық матрица.

0 минимумы x^* нүктесінде орналасқан дейік және x^* нүктесі жоғарыда айтылғандай келесі өрнектен табылады:

$$\nabla F\left(x^*\right)=b+Gx^*=0 \qquad \text{(II.4.14)}$$

ол өрнектен $x^* = -G^{-1}\, b.$

(II.1.4) теңдеуінен ұйғаратынымыз, егерде кез-келген функцияға үзіліссіз шарты орындалса, ол функцияны x_0 нүктесінің төңірегінде келесі функция арқылы аппроксимациялауымызға болады

$$\varphi(x)=f(x_0)+(x-x_0)^T\nabla f(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^T G(x_0)(x-x_0), \qquad (4.15)$$

мұнда $G(x_0)$ Гессе матрицасы - x_0 нүктесінде есептелген $f(x)$ функциясының минимумын аппроксимациялаудың маңыздысы $\psi(x)$ функциясының минимумы болуы мүмкін. Егерде $\psi(x)$ функциясының минимумы x_m нүктесінде орналасқан болса, яғни

$$\nabla f\left(x_0\right)+G\left(x_0\right)\left(x_m-x_0\right)=0,$$

бұл өрнектен

$$x_m = x_0 - G^{-1}(x_0)\nabla f(x_0)$$

немесе

$$x_m = x_0 - G^{-1}(x_0)\, g(x_0), \qquad (II.4.16)$$

Сөйтіп, итерациялық *(*II.4.9*)* теңдеуін өңдеуіміз қажет және x_i нүктесіндегі минимумды аппроксимациялау келесідей болып өрнектеледі:

$$x_{i+1} = x_i - G^{-1}(x_i)\, g(x_i), \qquad (II.4.17)$$

немесе, ыңғайлы түрде

$$x_{i+1} = x_i - \lambda_i G^{-1}(x_i)\, g(x_i), \qquad (II.4.18)$$

мұнда λ_i -қадам ұзындығы. $G^{-1}(x_i)\, g(x_i)$ бағытында бір өлшемді іздеу арқылы табылған мән.

Ньютон-Рафсон әдісі соңғы теңдеуге сүйенген. Оны жіктеп талқыламай-ақ, кейбір ерекшелігін еске сала кетейік. ***(4.17)*** және ***(4.18)*** теңдеулерін жазылған түрінде қарастырсақ, олар қадам сайын Гессе матрицасын терістендіріп есептеуді қажет етеді, яғни осы әрекет есептеу үрдісінің көп уақытын алуы мүмкін. Егерде, x_i нүктесі x^* нүктесіне жақын орналасқан жағдайда минимумге келіп тірелуіміз тез өтеді, неге десеңіз $\psi(\mathbf{x})$ функциясының жалпы түрі $f(x)$ функциясын осы төңіректе жақсы аппроксималайды.

Градиент l $g(x_{i+1})$ l нормасын (абсолюттық мәні) және нүктелер l $x_{i+1} - x_i$ l аралығындағы қашықтықты, үрдісті аяқтау шартына тексергеніміз жөн. Қызығып белгілейтініміз, қарапайым тез төмендеу әдісімен салыстырғанда, соңғы әдісте төмендеу бағытында $-G^{-1}(x_i)g(x_i)$ екінші туындылар ескеріледі, ал қарапайым әдісте төмендеу бағыты ретінде тек қана $-g(x_i)$ мәні ескерілетінін байқаймыз. Давидон-Флетчер-Пауэлл әдісі бойынша жақсы нәтижеге жетуімізге болады, егерде, i-ші қадамда іздеуді $-H_i\, g(x_i)$ бағытында жүргізсек. Мұнда H_i - оң мәнді табылған симметриялық матрица, соңында шектеліп $-G^{-1}(x^*)^1$ матрицасына тең болатын. Сөйтіп, бұл әдіс әр итерацияда $G(x_i)$ марицасын терістендіру есебін және өзін есептеуді қажет етпейді -- есептеу үрдісі жеңілденеді.

Сондықтан, итерация үрдісінің тиімділігі жөнінде айтсақ, әр итерацияда іздеу бағытын анықтау ең күрделі болады. Әр итерацияда ең тиімді бағыты бір өлшемді іздеу салып тапқанымыз жөн. *(*II.***4.13)*** өрнегіндегідей n -- айнымалылы квадраттық функцияға ең тиімді бағыт ретінде, алғашқы ізденген бағытқа сәйкес қосақталған бағыт екені мәлім. Қосақталған бағытқа түсініктеме берейік, сосын оның пайдалы екенін анықтайық.

P және q екі бағытты оң мәннен анықталған симметриялық G матрицасына қатынасты, қосақталған деп айтамыз, егерде келесі теңдік орындалса:

$$P^T G q = 0 \qquad (II.4.19)$$

Егерде, $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ яғни n бір-біріне, n - өлшемдік кеңістікте қосақталған бағыттар болса, олар бір-бірінен сызықтық байланыссыз болатын векторлар екенін көрсетіп анықтауымызға болады.

Егер, олар сондай қатынаста болмаған жағдайда, барлығы нөлге тең болмайтын $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ тұрақты сандардың болатыны анық, яғни

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + ...,+\alpha_{n-1} P_{n-1} = 0$$

онда кез-келген k_{n-1}-ге $(0 \le k \le n-1)$ келесі теңдік орындалады

$$P_k^T G \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j P_j = 0, \qquad \text{бойынша, ал}$$

бұдан $\alpha_k P_k^T G P_k = 0,$ неге десеңіз, қосақталған мүшелердің қасиеті басқа мүшелердің бәрі жойылады $(P_k^T G P_g = 0,\ k \ne j)$.

$P_k \neq 0$ және G - оң мәннен анықталған матрица және $a_k = 0$ болғандықтан,

$P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ векторлары сызықтық байланыста болмағандығын анықта-ғанбыз.

Есептеуді әрі қарай қарастырудың алдында, (II.4.13) функциясын келесі түрде жазып қарастырайық:

$$F(x) = a + x^T b + \frac{1}{2} x^T G x,$$

және оның минимумы x^* нүктесінде орналасқан болсын

$$x^* = -G^{-1} b$$

және

$$F(x) = F(x^*) + (x - x^*)^T \nabla F(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T G(x - x^*) =$$

$$= F(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T G(x - x^*)$$

неге десеңіз $(\nabla F(x^*) = 0)$

$$= a + x^{*T} b + \frac{1}{2} x^{*T} G x^* + \frac{1}{2}(x - x^*)^T G = (x - x^*) =$$

$$= a - \frac{1}{2} b^T G^{-1} b + \frac{1}{2}(x - x^*) G (x - x^*)$$

немесе,

$$F(x) = C + \frac{1}{2}(x - x^*)^T G(x - x^*), \qquad \text{(II.4.20)}$$

мұнда $C = a - \frac{1}{2} b^T G^{-1} b$ -константа.

(II.4.20) функциясының минимумын іздеуге итерациялық процедураны қолданамыз деп ұйғарайық.

Бірден бағытты *(мысалы, координаттар арқылы төмендеп іздеу әдісіндегі сияқты)* тағайындамай, алғашқы этаптардағы мәліметтерді жинап, соларды пайдаланып, келесі бағытты анықтағанымыз жөн болатыны айқын.

Минимум орналасқан нүктені табу үшін іздеу үрдісін x_0 нүктесінен бастап P_0 бағытында жүргізейік.

$$x_1 = x_0 + \lambda_0 P_0 \qquad \text{(II.4.21)}$$

мұнда λ_0 - сколярлық санның біреуі.

x_1 нүктесінде ***P_0*** бағытына $g(x_1)=\nabla F(x_1)$ бағыттар ортагоналды екенін белгілесек және

$$g(x_1)^T P_0=0 \qquad \text{(II.4.22)}$$

((II.2.16) және (II.4.12) теңдеулерін қараңыз).

Жалпы жағдайда ***i*** қадамында минимум орналасқан нүктені табу әрекетінде, іздеу үрдісі ***x_i*** нүктесінен ***P_i*** бағытында жүргізледі.

$$x_{i+1} = X_i + \lambda_i P_i \qquad \text{(II.4.23)}$$

мұнда, ***F(X)*** үшін келесі қатынастар орын табады:

$$g(x_{i+1})^T p_i = 0 \qquad \text{(II.4.24)}$$

$$g(x_i) = G(x_i - x^*) \qquad \text{(II.4.25)}$$

(II.4.23) теңдеуін қайта қолданып ***n*** -қадамнан кейін келесі өрнекті табамыз.

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1}+\lambda_{n-1}P_{n-1}=x_{n-2}+\lambda_{n-2}P_{n-2}+\lambda_{n-1}P_{n-1}= \\ &= x_{j+1}+\sum_{i=j+1}^{n-1}\lambda_i P_i \end{aligned} \qquad \text{(II.4.26)}$$

$0 \le j < n-1$ аралығындағы j - лар үшін.

Сөйтіп, (II.4.25) теңдеуіне бағынсақ:

$$G(x_n - x^*) = G(x_{j+1} - x^*) + \sum_{i=j+1}^{n-1}\lambda_i GP_i \qquad \text{(II.4.27)}$$

Сондықтан,

$$g(x_n)^T P_i = g(x_{j+1})^T P_j + \sum_{i=j+1}^{n-1}\lambda_i P_i^T GP_j \qquad \text{(II.4.28)}$$

және (II.4.28) теңдеуінен табатынымыз:

$$g(x_n)^T P_j = \sum_{i=j+1}^{n-1}\lambda_i P_i^T GP_i. \qquad \text{(II.4.29)}$$

Енді, егерде барлық $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ векторлер бір-бірімен қосақталған жағдайда

$$P_i^T GP_j = 0 \qquad \text{(II.4.30)}$$

$i \neq j$ тең болмаған кезде.

II. (4.24) қатынасынан келесі өрнек туады.

$$g(x_n)^T P_j = 0 \qquad \text{(II.4.31)}$$

$j=0,1, \dots ,n-1$ үшін

Бұл жағдайда ***$P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$*** векторлары сызықтық байланыста болмағандығынан, олар базисты құрайды, яғни

$$g(x_n) = 0 \qquad \text{(II.4.32)}$$

содан

$$G(x_n - x^*) = 0 \qquad \text{(II.4.33)}$$

және

$$x_n = x^*$$

Сондықтан, егерде іздеуді бір-біріне қосақталған бағытта жүргізсек, ***n*** айнымалы квадраттық функциясының минимумын ***n*** қадамнан аспайақ табамыз. Осындай болжауға, 4.4 тақырыбында талқыланған Флетчер-Ривс әдісі негізделген.

§ II.4.3 Девидон-Флетчер-Пауэлл әдісі

Девидон-Флетчер-Пауэлл (ДФП) әдісі (II.4.16) және (II.4.18) өрнектерін пайдалануға негізделген, бірақ онда әр қадамда гессиан $\mathbf{G^{-1}(x_i)}$ матрицасын есептеудің қажеті болмайды, неге десеңіз і-қадамында іздеу бағыты ретінде $\mathbf{-H_i g(x_i)}$ бағытын қабылдаймыз, мұнда $\mathbf{H_i}$ - оң мәнді табылған симметриялық матрица. Бұл матрица әр қадамда жақартылады, ал сол әрекет төменде жазылып көрсетілген. Түбін де **H** матрицасы аударылған тессиан матрицасына тең болады.

Іздеуді $\mathbf{x_0}$ нүктесінен бастайық, алғашқы матрица ретінде H_0 матрицасын алып (әлбетте бұл бірлік матрицасы болуы мүмкін, бірақ алғашқы матрица ретінде кез-келген оң табылған симметриялық матрицалар бола алады). Итерациялық процедураны келесі түрде этап бойынша жазып көрсетейік: ($\mathbf{g(x_i)}$ орнына $\mathbf{g_i}$ жазғанымыз ыңғайлы)

1. **i** -қадамында $\mathbf{x_i}$ нүктесі және $\mathbf{H_i}$ оң табылған симметриялық матрица белгілі деп есептейік.

2. Іздеу бағыты ретінде келесі бағытты қабылдайық

$$d_i = - H_i g_i \qquad (II.4.34)$$

3. $f(x_i+\lambda_i d_i)$ функциясының минимумы орналасатын λ_i нүктелерін табу үшін, бір өлшемді іздеуді $\mathbf{x_i}+\lambda_i \mathbf{d_i}$ түзуі бойынша жүргіземіз.

4. $\mathbf{V_i}$ ретінде келесі өрнекті тағайындаймыз

$$V_i = \lambda_i d_i \qquad (II.4.35)$$

5. Өрнекті қабылдаймыз

$$x_{i+1}=x_i+v_i \qquad (II.4.36)$$

6. $\mathbf{f(x_{i+1})}$ және $\mathbf{g_{i+1}}$ табайық. Егерде $|g_{i+1}|$ немесе сандары $|v_i|$ жеткілікті кіші болса процедураны аяқтаймыз.

Ескерту: (4.24) өрнегіне келесі өрнекті жазамыз

$$g_{i+1}^T v_i = 0 \qquad (II.4.37)$$

7. Келесі теңдеуді қабылдаймыз

$$U_i = g_{i+1} - g_i \qquad (II.4.38)$$

8. H_i матрицасын жақартуды келесі өрнектер арқылы өткіземіз:

$$H_{i+1} = H_i + A_i + B_i \qquad (II.4.39)$$

мұнда

$$A_i = v_i v_i^T / (v_i^T u_i) \qquad (II.4.40)$$

$$B_i = -H_i u_i u_i^T H_i / (u_i^T H_i u_i) \qquad (II.4.41)$$

9. і -дің мәнін бірге ұлғайтып, сосын 2-ші қадамға ораламыз.

Флетчер және Пауэлдердің түсініктемелеріне бағыттанып процедураны түсіндірейік.

а) Егерде v_i функциясы кемитін болса және λ_i саны оң мәнді болса, үрдіс тұрақты болғаны. Неге десеңіз g_i бағыты ең тез ұлғаю бағытты болып табылады, v_i функциясының кемитін жағдайы тек қана келесі көбейтінді ең мәнді болғанда болады

$$-v_i^T g_i = -g_i^T v_i = \lambda_i g_i^T H_i g_i \qquad \text{(II.4.42)}$$

Бұл өрнектің орындалатын жағдайы, егерде M_i матрицасы кез-келген **i**-ге оң мәнді симметриялық болып табылса. Алғашқы H_0 матрицасы бұл қасиетпен өзінің анықталуымен жабдықталады. (II.4.39)-(II.4.41) қатынастарына сәйкес жүргізілетін жақсарту үрдісі тессиан матрицасының симметриялығын сақтайды. Индукция тәсілі бойынша, H_i матрицасы жақартқаннан кейінде оң мәнді болып табылады. Егерде осы шарт орындалған жағдайда, келесі өрнекті қарастыруымызға болады

$$C_i^T C_i = C_i C_i^T = H_i \qquad \text{(II.4.43)}$$

$$P = c_i \eta \ \text{ және } \ q = c_i u_i \qquad \text{(II.4.44)}$$

тең деп қабылдайық, мұнда η-кез-келген вектор.

Онда

$$\eta^T H_{i+1} \eta = \eta^T H_i \eta + \frac{\eta^T v_i v_i^T \eta}{v_i^T u_i} - \frac{\eta^T H_i u_i u_i^T H_i \eta}{u_i^T H_i u_i} =$$

$$= p^2 - \frac{(p^T q)^2}{q^2} + \frac{(\eta^T v_i)^2}{v_i^T u_i} =$$

$$= \frac{p^2 q^2 - (p^T q)^2}{q^2} + \frac{(\eta^T v_i)^2}{v_i^T u_i} \geq \frac{(\eta^T v_i)^2}{v_i^T u_i}, \qquad \text{(II.4.45)}$$

Неге десеңіз Шварц теңсіздігіне сәйкес $p^2 q^2 \geq (p^T q)^2$

(II.4.45) өрнегіндегі бөлшектің асты оң мәнді, олай болса

$$v_i^T u_i = v_i^T \left| g_{i+1} - g_i \right| = -v_i^T g_i,$$

Неге десеңіз $v_i^T q_{i+1} = 0$ тең (4.37) теңдеуден.

Сондықтан,

$$v_i^T u_i = \lambda_i g_i^T H_i g_i > 0, \qquad \text{(II.4.46)}$$

Неге десеңіз $\lambda_i > 0$ және H_i матрицасы оң мәнді табылған.

Сондықтан, $\eta^T H_{i+1} \eta > 0$, H_{i+1} матрицасының оң мәнді болып табылатынын дәлелдейді.

б) Егерде ДФП әдісін **G** симметриялық оң мәнді матрицасын пайдаланып квадраттық функцияға ((II.4.13) теңдеуін қараңыз) қолдансақ, іздеу n қадамнан кейін аяқталып және $H_n = G^{-1}$ тең екенін көрсетейік. Оны дәлелдеу үшін, $v_0, v_1, \ldots, v_k$ -векторлерін, $H_{k+1}G$ бірге тең өздік мәндері бар матрицасының, сызықтық байланыссыз өздік векторлері екенін көрсетсек жеткілікті. Онда $H_n G$ матрицасы бірлік матрицасы болуы қажет.

(II.4.38) қатынасынан келесі өрнек болатынын белгілейік,

$$U_i = g_{i+1} - g_i = Gx_{i+1} - Gx_i = Gv_i \qquad \text{(II.4.47)}$$

Жаңғыз ол ғана емес,

$$H_{i+1}Gv_i = H_{i+1}u_i = H_iu_i + A_iu_i + B_iu_i = H_iu_i + v_i - H_iu_i,$$

(II.4.39)-(II.4.41) өрнектерінен және $V_i^T u_i$ және $V_i^T \mathrm{H}_i u_i$ мәндерді қысқартуымызға болады.

Сөйтіп

$$H_{i+1}Gv_i = v_i \qquad \text{(II.4.48)}$$

Арқарай **k** арқылы индукция тәсілі бойынша, ***k=2, 3, ..., n*** мәндері үшін келесі қатынастарды орынды екенін көрсетеміз.

$$V_i^T Gv_j = 0, \quad 0 \le i < j < k \quad \text{үшін} \qquad \text{(II.4.49)}$$

$$H_kGv_i = v_i, \quad 0 \le i < k \quad \text{үшін} \qquad \text{(II.4.50)}$$

Оны дәлелдеу үшін (4.48) өрнегіндегі $i = 0$ тең деп алып $H_1Gv_0 = v_0$ қатынасты жазамыз. Байқайтынымыз бұл (II.4.50) қатынас өрнегі $k=1$ тең болған жағдайда $k=2$ тең болған жағдайда (II.4.50) өрнегінің түрі:

$$H_2Gv_0 = v_0 \quad \text{және} \quad H_2Gv_1 = v_1.$$

Екінші теңдік (II.4.48) өрнегінен $i = 1$ тең болғандағы қатынастан орынды деп есептейміз.

Бірінші теңдікте H_2 өзгертіп, яғни (II.4.39) өрнегін пайдаланып өзгертіп жазсақ болады

$$H_2Gv_0 = H_1Gv_0 + v_1\frac{v_1^T Gv_0}{V_1^T u_1} - \frac{H_1u_1u_1^T H_1Gv_0}{u_1^T H_1u_1}.$$

Теңдеудің оң жағындағы теңдеудің екі мүшесі 0-ге тең, неге десеңіз

$$v_1^T Gv_0 = v_0^T Gv_1 - v_0^T G(-\lambda_1 H_1 g_1) = -\lambda_1 g_1^T H_1 Gv_0 = -\lambda_1 g_1^T v_0 = 0$$

Бұл өрнек $i = 0$ үшін (II.4.48) қатынасынан және $i = 0$ жағдайда (II.4.37) қатынастарынан анықталады. Одан басқада аңғаратынымыз, $u_1 = Gv_1$ болғандықтан $u_1^T H_1 Gv_0 = v_1^T Gv_0$. Сөйтіп (II.4.50) қатынасындағы өрнектің $k=2$ тең кезінде де орынды екенін көрсетейік. Теңдеудің басқа шетіне аударсақ, керекті нәтижені аламыз.

$$v_0^T Gv_1 = 0,$$

Бұл (II.4.39) қатынастағы өрнек, $k=2$ тең болғандағы екені айғын.

Егерде (II.4.49) және (II.4.50) қатынастары k мәнінде орынды болса, ол өрнектер $k+1$ мәнінде де орынды екенін, индукция арқылы көрсетейік.

Білетініміз

$$G_k = b + Gx_k = b + G(x_{k-1} + v_{k-1}) = b + G(x_{k-2} + v_{k-2} + v_{k-1}) =$$
$$= g_{i+1} + G(v_{i+1} + v_{i+2} + \ldots + v_{k-1}) \qquad \text{(II.4.51)}$$

(II.4.49) қатынасынан, **i<k-1** болған жағдайын табамыз

$$v_i^T g_k = v_i^T g_{i+1} = 0,$$

және (II.4.37) қатынасын пайдаланып мынаны жазамыз.

$$v_{k-1}^T g_k = 0$$

Онда

$$v_i^T g_k = 0, \quad 0 \le i < k \qquad \text{үшін} \qquad (II.4.52)$$

және (II.4.50) қатынасынан байқайтынымыз

$$v_i^T G H_k g_k = 0, \quad 0 \le i < k \qquad \text{үшін}$$

онда

$$-v_i^T G d_k = 0$$

және

$$-v_i^T G y_k = 0, \quad \text{неге десеңіз} \quad v_k = \lambda_k d_k .$$

Сондықтан

$$-v_i^T G v_k = 0, \quad 0 \le i < k \qquad \text{үшін} \qquad (II.4.53)$$

Яғни

$$-v_i^T G v_j = 0, \quad 0 \le i < k+1 \qquad \text{үшін} \qquad (II.4.54)$$

(4.47) және (4.50) қатынастарынан мынаны жазамыз

$$(u_k)^T H_k G v_i = u_k^T v_i = v_k^T G v_i = 0, \quad 0 \le i < k(<k+1) \qquad \text{үшін} \quad (II.4.55)$$

Онда (II.4.39), (II.4.50) өрнектерінен жалғастырсақ

$$H_{k+1} G v_i = H_k G v_i + \frac{v_k v_k^T G v_i}{v_k^T u_k} - \frac{H_k u_k u_k^T H_k G v_i}{u_k^T H_k u_k} = H_k G v_i ,$$

неге десеңіз

$$v_k^T G v_i = 0$$

және

$$u_k^T H_k G v_i = u_k^T v_i = v_k^T G v_i = 0, \quad 0 \le i < k \qquad \text{үшін.}$$

Сөйтіп анықтағанымыз

$$H_{k+1} G v_i = H_k G v_i = v_i, \quad 0 \le i < k \qquad \text{үшін} \qquad (II.4.56)$$

i=k болған жағдайда болатыны

$$H_{k+1} G v_k = H_k G v_k + \frac{v_k v_k^T G v_k}{v_k^T u_k} - \frac{H_k u_k u_k^T H_k G v_k}{u_k^T H_k u_k} = H_k u_k + v_k - H_k u_k$$

неге десеңіз

$$v_k^T G v_k = v_k^T u_k \qquad \text{және} \qquad u_k^T H_k G v_k = u_k^T H_k u_k .$$

Сондықтан, $H_{k+1} G v_k = v_k$ және (II.4.56) қатынасынан табатынымыз

$$H_{k+1} G v_i = v_i \quad \text{егерде} \quad 0 \le i < k+1 \qquad (II.4.57)$$

(II.4.54) және (II.4.57) қатынастары келесі k үшін орынды болғаны (II.4.49) және (II.4.50) қатынастарындағы сияқты болады. Сондықтан индукция бойынша дәлелдедік деп санаймыз.

(II.4.49) қатынасынан байқайтынымыз, $v_0, v_1, ..., v_{n-1}$ векторлері түзу сызықтық байланыссыз екенін. Олардың G матрицасы арқылы бірі бірімен қосақталғандығы. (II.4.50) қатынасынан байқайтынымыз $\mathbf{v_0}$, $\mathbf{v_1}$, ..., $\mathbf{v_{n-1}}$

векторлерінің, өздік мәнді $\boldsymbol{H_n G}$ бірге тең матрицасының өздік векторлері екенін. Онда $\boldsymbol{H_n G}$ бірлік матрица болуы қажеттігінен ұйғаратынымыз

$$H_n = G^{-1} \qquad \text{(II.4.58)}$$

(II.4.52) қатынасындағы өрнектен байқайтынымыз, минимумды $\boldsymbol{n}$ итерациядан кейін тапқанымыз. Байланыссыз $\boldsymbol{v_0, v_1, ..., v_{n-1}}$ векторлерінің әр қайсысына $\boldsymbol{g_n}$ векторы ортогональды (перпендикулярлы) болуы қажет. Сондықтан

$$g_n = 0 \qquad \text{(II.4.59)}$$

в) (II.4.39) қатынасында $\boldsymbol{H}$ матрицасы жақарту тәсілі жазылған:

$$H_n = H_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A_i + \sum_{i=0}^{n-1} B_i$$

$G^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i$ тең екенін көрсетейік. (II.4.49) ортогоналдық (параллельдік) шартынан ұйғаратынымыз.

$$V^T GV = D$$

мұнда Vį -векторлерінен құрастырылған V -матрица, ал

D - диагоналдық матрица $v_i^T G v_i$ - элементтерінен құрастырылған.

Сондықтан

$$G = (V^T)^{-1} D V^{-1}$$

Онда

$$G^{-1} = V D^{-1} V^T$$

ал D - диагоналдық матрица болғандықтан, инверсия жасап матрицаларды бір-біріне көбейтіп келесі өрнекті табамыз.

$$G^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{v_i v_i^T}{v_i^T G v_i} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{v_i v_i^T}{v_i^T u_i}$$

((II.4.47) қатынасын қараңыз).

Сөйтіп

$$G^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \qquad \text{(II.4.60)}$$

(II.4.48) қатынас орындалған жағдайда, $H_{i+1} G V_i = V_i$, ал бұл дегеніміз

$$V_i = H_i G V_i + A_i G V_i + B_i G V_i$$

тең болғаны.

Ал $A_i G v_i = A_i u_i = \dfrac{v_i v_i^T u_i}{v_i^T u_i} = v_i$, тең болғаннан

онда

$$B_i G v_i = - H_i G v_i = - H_i u_i \qquad \text{(II.4.61)}$$

осыдан B_i - табуымызға болады.

$$B_i = \frac{-H_i u_i z^T}{z^T G v_i} = \frac{-H_i u_i z^T}{z^T u_i},$$

мұнда **z** - кез келген вектор. Біз $\mathbf{B_i}$ матрицасының симметриялық болғанын қалағандықтан, **z** векторы $\mathbf{z} = \mathbf{H_i u_i}$ ретінде қабылдайық. Қабылдағанда

$$B_i = \frac{-H_i u_i u_i^T H_i}{u_i^T H_i u_i} \qquad \text{(II.4.62)}$$

Тең болатындай қылып.

Осымен ДФП әдісінің теориялық түсініктемесін аяқтайық. Бұл әдісте Ньютон-Рафсон әдісінің болжауын қолдандық және қосақталған бағыттардың қасиеттерін пайдаландық. ***n*** -айнымалылы квадраттық функциясының минимумын табу үшін қолдансақ, ***n***- инерциядан аспай-ақ шешімге келіп тірілетінімізді көрсетейік. Бұл әдіс жақсы оптимизациялау процедурасы болып табылады. Функция квадраттықпа немесе квадраттық емеспе оған қарамастан, көп деген басқа да функциялар үшін оптимизициялауға тиімді.

Осы процедураның программасын төменде келтірейік. Программаға қосымша қарастырылған функцияны есептейтін және оның туындысын есептейтін ішкі программаларды жазу қажет. Әдеттегі қадамдар және айнымалылардың аттары программада көрсетілген. Бір өлшемді іздеу үрдісі кубтық интерполяция арқылы жүргізілген, бірақ іздеуді аяқтау дәлдіке байланысты емес, іздеуді аяқтау кіші функция мәнін табқан мерзімде болады. Программа текстінде айнымалылар аты процедура алгоритміндегіге ұқсас және түсніктемелер арқылы анықталған. Бір өлшемді іздеу үрдісі ретінде ***600-1010*** жолдарында 2.6 тараудағы кубтық интерполяция қолдалынған. Келесі іздеу аралығы ***930*** жолда анықталады, егер ол қажет болса.

1-мысал

(3; -1; 0; 1) координаттары бар нүктені алғашқы нүкте ретінде пайдаланып, Пауэлл функциясының минимумын табыңыз.

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$$

Төменде келтірілген ішкі программа осы функцияға жазылған. Ұсынылған алғашқы нүкте бұл функцияға ыңғайсыз нүкте болып табылады.

Минимум ***(0; 0; 0; 0)*** нүктесінде екені айқын.

```
100 PRINT «МИНИМИЗАЦИЯ МЕТОДОМ ДФП»
120 REM ОДНОМЕРНЫЙ ПОИСК ПРОИЗВОДИТСЯ КУБИЧЕСКОЙ
           ИНТЕРПОЛЯЦИЕЙ
150 REM ФУНКЦИЯ F(X1, X2, ..., XN) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В СТРОКЕ 5000
155 REM ЗНАЧЕНИЯ G(1), G(2), ..., G(N) ВЫЧИСЛЯЮТСЯ В СТРОКЕ 6000
200 PRINT «ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ»:INPUT   N
```

```
220 DIM X(N), P(N), Q(N), R(N), D(N), G(N), U(N), V(N), Y(N), M(N)
240 DIM H(N, N)
300 REM ПЕРВОНАЧАЛЬНО ЗАДАТЬ Н ЕДИНИЧНОЙ МАТРИЦЕЙ
320 CC=0:FOR I=1  TO  N:FOR J=1  TO  N:H(I, J)=0:NEXT  J:H(I, J)=1:NEXT  I:TT=0
330 PRINT «ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНУЮ ТОЧКУ»
340 FOR I=1 TO N:INPUT «X»:I::INPUT   X(I):NEXT   I:PRINT   ""
360 REM ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ ВЫВОД
380 PRINT «                ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ»
400 FOR I=1 TO N:P(I)=X(I):PRINT   "X"; I,X(I):NEXT I
410 GOSUB 5000
420 PRINT "ИТЕРАЦИЯ";CC;"         ЗНАЧЕНИЕ  ";Z
430 FP=Z:GOSUB  6000:G1=G0
440 REM ГРАДИЕНТ ЗАПОМНИТЬ В U И ВЫБРАТЬ НАЧАЛЬНОЕ
НАПРАВЛЕНИЕ D
450 FOR I=1 TO N
460 U(I)=G(I):D(I)=0
470 FOR J=1 TO N
480 D(I)=D(I)-H(I, J)*G(J)
490 NEXT J
500 NEXT I
600 GP=0
610 FOR I=1 TO N;GP=GP+G(I)*D(I):NEXT I
620 IF GP < 0 THEN GOTO 680
625 REM НАЙТИ НАЧАЛЬНЫЙ ШАГ И, ЕСЛИ НЕОБХОДИМО,
627 REM ИЗМЕНИТЬ НАПРАВЛЕНИЕ СПУСКА НА ПРОТИВОПОЛОЖНОЕ
630 QX=ABS(2*FP/GP):IF QX>1 THEN QX=1
640 FOR I=1 TO N
650 X(I)=P(I)-QX*D(I):P(I)=X(I):NEXT I
660 GOSUB  5000:FP=Z:PRINT  «НЕСТАБИЛЬНОСТЬ?»
670 GOSUB 6000:G1=GO:GOTO 600
680 QX=ABS(2*FP/GP):IF QX>1 THEN QX=1
690 HH=QX
700 REM НАЙТИ СЛЕДУЮЩУЮ ТОЧКУ Q
710 BB=HH
720 FOR I=1 TO N
730 Q(I)=P(I)+BB*D(I):X(I)=Q(I)
740 NEXT I
750 GOSUB 5000:FQ=Z
760 GOSUB 6000:G2=G0
770 GQ=0
710 BB=HH
720 FOR I=1 TO N
730 Q(I)=P(I)+BB*D(I):X(I)=Q(I)
740 NEXT I
750 GOSUB 5000:FQ=Z
760 GOSUB 6000:G2=G0
770 GQ=0
780 FOR I=1 TO N
790 GQ=GQ+G(I)*D(I)
800 NEXT I
810 IF GQ>0 OR FQ>FP THEN GOTO 830
815 REM ВЫПОЛНИТЬ КУБИЧЕСКУЮ ИНТЕРПОЛЯЦИЮ
817 REM ИЛИ УДВОИТЬ ШАГ, ЧТОБЫ «НАКРЫТЬ»   МИНИМУМ
```

```
820 HH=2*HH:GOTO 700
830 ZZ=3*(FP-FQ)/HH:ZZ=ZZ+GP+GQ
840 WW=ZZ*ZZ-GP*GQ: IF WW<0 THEN WW=0
850 W=SQR(WW)
860 DD=HH*(1-(GQ+W-ZZ)/(GQ-GP+2*W))
870 FOR I=1 TO N:X(I)=P(I)+DD*D(I):NEXT I
880 GOSUB 5000:FR=Z
890 GOSUB 6000:G3=G0
895 REM НАЙТИ ГРАДИЕНТ В НОВОЙ ТОЧКЕ
900 GR=0
910 FOR I=1 TO N:GR=GR+G(I)*D(I):NEXT I
920 IF Z<=FP AND Z<=FQ THEN GOTO 1100
930 IF GR>0 THEN GOTO 990
960 HH=HH-DD
970 FOR I=1 TO N:P(I)=X(I):NEXT I
980 FP=Z:GP=GP:G1=G0:GOTO 830
990 HH=DD
1000 FOR I=1 TO N:Q(I)=X(I):NEXT I
1050  REM ОБНОВИТЬ МАТРИЦУ H
1100 KK=0:WK=0:DK=0
1110 FOR I=1 TO N
1120 U(I)=G(I)-U(I):V(I)=X(I)-Y(I)
1130 NEXT I
1140 FOR I=1 TO N:M(I)=0
1150 FOR J=1 TO N
1160 M(I)=M(I)+H(I, J)*U(J)
1170 NEXT J
1180 KK=KK+M(I)*U(I):WK=WK+V(I)*U(I)
1190 DK=DK+V(I)*V(I)
1200 NEXT I
1205 IF KK=0 OR WK=0 THEN GOTO 1260
1210 FOR I=1 TO N
1220 FOR J=1 TO N
1230 H(I, J0=H(I, J)-M(I)*M(J)/KK+V(I)*V(J)/WK
1240 NEXT J
1250 NEXT I
1260 CC=CC+1
1265 REM ПРОВЕРКА КРИТЕРИЯ ЗАВЕРШЕНИЯ
1270 IF SQR<.00005 OR G3<.00001 THEN GOTO 1300
1275 REM НАЧАТЬ НОВУЮ ИТЕРАЦИЮ ПОИСКА
1280 GOTO 400
1300 PRINT «МИНИМУМ НАЙДЕН»
1310 PRINT "КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЙ="; CC;"  ЗНАЧЕНИЕ МИНИМУМА=  "; Z
1320 FOR I=1  TO N
1330 PRINT  "X"; I, X(I)
1340 NEXT I
1350 END
5000 Z=O
5010 Z=(X(1)+10*X(2))^2+5(X(3)-X(4))^2
5020 Z=Z+(X(2)-2*X(3))^4+10(X(1)-X(4))^4
5100 TT=TT+1
5200 RETURN
6000 G0=0
```

```
6100 G(1)=2*(X(1)+10*X(2))+40*(X(1)-X(4))^3
6200 G(2)=20*(X(1)+10*X(2))+4*(X(2)-2*X(3))^3
6300 G(3)=10*(X(3)-X(4))-8*(X(2)-2*X(3))^3
6400 G(4)=-10*(X(3)-X(4))-40*(X(1)-X(4))^3
7000 FOR I=1 TO N:G0=G0+G(I)*G(I):NEXT I
7010 G0=SQR(G0)
7500 RETURN
```

```
МИНИМИЗАЦИЯ МЕТОДОМ ДФП
ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ
4
ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНУЮ ТОЧКУ
X 1   3
X 2  -1
X 3   0
X 4   1

  ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ
X 1            3
X 2            -1
X 3            0
X 4            1
ИТЕРАЦИЯ 0  ЗНАЧЕНИЕ   215
X 1            1.949874
X 2            -.5058231
X 3            6.683568E-03
X 4            2.063853
ИТЕРАЦИЯ     2        ЗНАЧЕНИЕ 30.89246
X 1            1.952094
X 2            -.1460427
X 3            .1139128
X 4            1.983205
ИТЕРАЦИЯ     2        ЗНАЧЕНИЕ 17.73255
X 1            1.672088
X 2            -.1326144
X 3            .6173387
X 4            1.740239
ИТЕРАЦИЯ     3        ЗНАЧЕНИЕ 9.919396
X 1            .1212769
X 2            -9.131193E-03
X 3            .23143347
X 4            .2154706
ИТЕРАЦИЯ     4        ЗНАЧЕНИЕ 5.259228E-02
X 1            .1124414
X 2            -1.592427E-02
X 3            .1754911
X 4            .2051925
ИТЕРАЦИЯ     5        ЗНАЧЕНИЕ 2.546394E-02
X 1            1.728326E-02
X 2            -1.335926E-04
X 3            .1186576
X 4            1068345
```

X 1 1.669752E-03
X 2 -1.673108E-04
X 3 1.655202E-03
X 4 1.653915E-03
ИТЕРАЦИЯ 23 ЗНАЧЕНИЕ 1.658259E-10
X 1 5.41309E-04
X 2 -5.39442E-05
X 3 9.644107E-04
X 4 9.654203E-04
ИТЕРАЦИЯ 24 ЗНАЧЕНИЕ 2.436223E-11
МИНИМИЗАЦИЯ ЗАКОНЧЕНА
КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЙ РАВНО 25 ЗНАЧЕНИЕ МИНИМУМА РАВНО 7.528931У-12
X 1 1.960656E-04
X 2 -1.964616E-05
X 3 7.700225E-04
X 4 7.697501E-04

§ II. 4.4 Флетчер-Ривс әдісі

Флетчер-Ривс әдісінде іздеу үрдісі бір-біріне қосақталған бағытта ***n***-айнымалыны квадраттық функцияға жүргізіледі.

(II.4.13) өрнегіндегі функцияны қарастырайық, яғни

$f(x) = a + b^T x + ½\, x^T G x$

Бір өлшемді іздеуді, ***G*** матрицасы арқылы бір-біріне қосақталған бағыт бойында, жүргізейік.

Бірінші $\boldsymbol{x_1}$ нүктесінен, бірінші іздеу бағыты ретінде тез төмендеу бағытын қарастырып,

$$d_1 = -g_1 \qquad \text{(II.4.63)}$$

және $\boldsymbol{\lambda_1}$ санын функция минимумын іздеу арқылы табайық

$f(x_1 + \lambda d_1)$

$\boldsymbol{x_2}$ келесі өрнектен тауып

$$x_2 = x_1 + \lambda_1 d_1 \qquad \text{(II.4.64)}$$

және іздеуді $\boldsymbol{d_2}$ бағытында атқарамыз.

$\boldsymbol{d_2}$ бағыты $\boldsymbol{d_1}$ бағытына қосақталған $\lambda \boldsymbol{d_2}$ векторын $\boldsymbol{g_2}$ және $\boldsymbol{d_1}$ векторлерінің түзу сызықтық қатынас (комбинациясы) арқылы таңдап анықтаймыз).

Сосын табатынымыз

$$x_3 = x_2 + \lambda_2 d_2 \qquad \text{(II.4.65)}$$

λ_2 мәнін $\boldsymbol{f\ (x_2 + \lambda_2\ d_2)}$ функциясының минимумын іздеу арқылы табамыз.

$\boldsymbol{x_3}$ нүктесінен іздеу $\boldsymbol{d_3}$ бағытын $\boldsymbol{d_1}$ және $\boldsymbol{d_2}$ бағыттарына қосақталған бағыт ретінде анықтап қабылдаймыз. ***(k+1)***-ші қадамында $\boldsymbol{d_{k+1}}$ бағытын

$-g_{k+1}, d_1, d_2, ..., d_k$ век торларының сызықтық комбинация түрінде және $d_1,d_2,...,d_k$ векторлер бағыттарына қосақталған бағыт ретінде анықтап қабылдаймыз.

Сөйтіп, $$d_{k+1} = -g_{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \alpha_r d_r, \quad k=1,2,\ldots,$$

айқайтынымыз, α_k -дан басқасының барлық α_r-мәндері нөлге тең болады, сондықтан

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \alpha_k d_k \qquad \text{(II.4.66)}$$

және

$$\alpha_k = -g^2_{k+1} / g^2_k \qquad \text{(II.4.67)}$$

индукциялық талқылаудың алдында, $k=1$ мәніне (II.4.66) және (II.4.67) өрнектерінің орынды екенін дәлелдейік.

$f(x_2) = f(x_1 + \lambda_1 d_1)$ өрнектің мәні $f(x_1 + \lambda d_1)$ түзу функциясының бойындағы минимумына тең болғандықтан

$$g^T_2 d_1 = -g^T_2 g_1 = 0 \qquad \text{(II.4.68)}$$

Бұл нәтиженің дәлелін алғашында да біз бірнеше рет тауып көрсеткенбіз *((II.4.37), (II.4.22), (II.4,24) қатынастарын қараңыз).* Ол квадраттық функцияға да жүретін қатынас.

$$g_2 = b + Gx_2, \quad g_1 = b + Gx_1$$

Онда, егерде d_1 және $d_2 = -g_2 + \alpha_1 d_1$ қосақталған болса

$$d^T_2 G d_1 = 0,$$

яғни

$$-g^T_2 G d_1 + \alpha_1 d^T_1 G d_1 = 0$$

Сондықтан

$$\frac{\left(-g_2^T - \alpha_1 g_1^T\right) G \left(x_2 - x_1\right)}{\lambda_1} = 0,$$

осыдан жазатынымыз

$$\left(-g_2^T - \alpha_1 g_1^T\right)\left(g_2 - g_1\right) = 0.$$

сөйтіп

$$-g_2^2 + \alpha_1 g_1^2 = 0.$$

(II.4.68) қатынасындағы басқа мүшелері жойылады, сондықтан

$$\alpha_1 = g_2^2 \big/ g_1^2$$

керекті өрнекті дәлелдедік. Бұл $k = 1$ тең жағдайдағы (II.4.67) өрнегін көрсетеді.

Енді, индукция арқылы (II.4.66) және (II.4.67) қатынастарының $d_1, d_2, \ldots, d_k$ векторлері жоғарыда көрсетілген тәсіл мен бір-біріне қосақталып табылғанын ескере отыра, кез келген k санына да жарайтындығын дәлелдейік.

$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$ нүктесі ретінде $x_k + \lambda_k d_k$ түзу сызық бойындағы функциясының минимумы орналасқан нүктеге сәйкестігі анықталды.

Онда

$$g^T_{k+1} d_k = 0 \qquad \text{(II.4.69)}$$

ұғып жазатынымыз

$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k = x_{k-1} + \lambda_{k-1} d_{k-1} + \lambda_k d_k$ және т.с.с.

Сөйтіп,

$$x_{k+1} = x_{j+1} + \sum_{i=j+1}^{k} \lambda_i d_i \; ; \quad 1 \le j \le k-1 \quad \text{үшін} \qquad \text{(II.4.70)}$$

сондықтан,

$$Gx_{k+1} = Gx_{j+1} + \sum_{i=j+1}^{k} \lambda_i G d_i \; ,$$

Онда

$$g^T_{k+1} = g^T_{j+1} + \sum_{i=j+1}^{k} \lambda_i d_i^T G \; , \quad 1 \le j \le k-1 \quad \text{үшін,}$$

Содан

$$g^T_{k+1} = g^T_{j+1} d_j + \sum_{i=j+1}^{k} \lambda_i d_i^T G d_j \; .$$

өзгерту нәтижесінде білетініміз $g^T_{j+1} d_j = 0$ *((II.4.68) және (II.4.69) қатынастарына сәйкес)* және векторлердің бір-біріне қосақталған қасиеттерінен $d_i^T G d_j = 0$, $j < i$ үшін.

Сөйтіп теңдеудің оң жағындағы қосындылардың әр қайсысы нөлге тең болады.

Сондықтан,

$$g^T_{k+1} d_j = 0, \quad j=1,2,...,k-1 \quad \text{үшін} \qquad \text{(II.4.71)}$$

және (II.4.69) қатынасы арқылы білетініміз

$$g^T_{k+1} d_j = 0, \quad j=1,2,...,k-1 \quad \text{үшін} \qquad \text{(II.4.72)}$$

сөйтіп g_{k+1} векторы $d_1, d_2, ..., d_k$ векторларын әр қайсысына ортагоналды екенін дәлелдедік.

Сол сияқты g_{k+1} векторы $g_1, g_2, ..., g_k$ векторларына да ортагоналды екенін көрсетуімізге болады, оны (II.4.72) қатынасы арқылы білеміз:

$$g^T_{k+1} d_j = 0, \quad j = 1,2,...,k-1 \quad \text{үшін}$$

Индукция бойынша дәлелдеуді алғашындағы болжау бойынша

$$d_j = - g_j + \alpha_{j-1} d_{j-1}$$

жоғарыдағы өрнекті өзгертіп жазамыз

$$-g_{k+1}^T g_j + \alpha_{j-1} g_{k+1}^T dj - 1 = 0$$

сондықтан, $-g_{k+1} d_{j-1}=0$, неге десеңіз (II.4.72) қатынасынан $- g^T{}_{k+1} d_{j-1} = 0$, тең.

Сөйтіп,

$$g_{k+1}^T d_j = 0, \qquad j = 1,2,...,k \quad \text{үшін} \qquad (II.4.73)$$

Индукция бойынша дәлелдеудің соңы болды деп есептейміз, егерде, (II.4.66) өрнегі бойынша табылған $\boldsymbol{d_{k+1}}$ векторын $\boldsymbol{d_1, d_2, ..., d_k}$ векторлары мен қосақталған екенін көрсетсек.

$j = 1,2,...,k-1$ үшін білетініміз

$$d^T{}_{k+1} G\, d_j = - g^T{}_{k+1} G\, d_j + \alpha_k d^T{}_k d_j = - g^T{}_{k+1} G\, d_j$$

Бір-бірімен қосақталған векторлар болғандығынан.

Онда

$$-g_{k+1}^T G d_j = -g_{k+1}^T G \frac{\left(x_{j+1} - x_j\right)}{\lambda_j} = -g_{k+1}^T \frac{\left(g_{j+1} - g_j\right)}{\lambda_j} = 0$$

(II.4.73) өрнекті есепке алғанда.

Сөйтіп, $d^T{}_{k+1} G\, d_j = 0, \quad j=1,2,...,k-1$ үшін және бұл кез келген α_k–ға да орнықты.

Дәлелдеуді аяқтау үшін, төмендегі теңдеу орындалатындай қылып α_k - санын табуымыз қажет.

$$d_{k+1}^T G d_k = 0 :$$

$$d_{k+1}^T G d_k = -g_{k+1}^T G d_k + \alpha_k d_k^T G d_k =$$

$$= -g_{k+1}^T \frac{\left(g_{k+1} - g_k\right)}{\lambda_k} + \alpha\left(-g_k^T + \alpha_{k-1} d_{k-1}^T\right)\frac{\left(g_{k+1} - g_k\right)}{\lambda_k}.$$

Сондықтан,

$$d_{k+1}^T G d_k = \frac{-g_{k+1}^2 + \alpha_k g_k^2}{\lambda_k}.$$

неге десеңіз оң жақтағы басқа мүшелердің бәрі жойылады (II.4.72) және (II.4.73) қатынастарын ескерсек.

Сондықтан, $\boldsymbol{d_{k+1}}$ бағытын $\boldsymbol{d_k}$ бағытына қосақталған болады, егерде

$\boldsymbol{\alpha_k = g^2{}_{k+1} / g^2{}_k}$ тең болса, керекті дәлелді тауып дәлелдедік.

Сөйтіп, Флетчер-Ривс әдісінде іздеу жүргізу бағыттары бір-біріне қосақталған болады және бұл әдісте ***n*** айнымалылы квадраттық функцияның минимумың саны ***n***-қадамнан аспайтын қадамдар арқылы табамыз. Бұл бір өлшемді іздеу үрдісін керекті дәлдікпен жүргізілгені, және есептегенде пайда болатын домалақтау қателерінің болмайтындығы (жайылғаны).

Жоғарыда айтылған әдісті, квадраттық емес функцияларға да қолдануымызға болатындығын айтқанымыз жөн. Неге десеңіз квадраттық аппроксимация орын алса, оның минимумға әкеп соқтыруына үміттенуге болады, егерде минимумның айналасында іздеу үрдісі жүргізілсе, Флетчер және Ривстердің болжауы бойынша, әр ***n*** бағыты ретінде, тез төмендеу бағытын іздеу үрдісінде қабылдап және қосақталған бағытты есептеген сайын іздеу үрдісін қайталап жүргізілуі қажет.

Төменде осы болжауды іске асырып іздеу үрдісін орындайтын программа жазылған. Жалпы түрді бұл әдіс ДФП әдісінен қолайлы емес, бірақ өте пайдалы болуы мүмкін.

```
100 PRINT «МИНИМИЗАЦИЯ МЕТОДОМ ФЛЕТЧЕРА-РИВСА»
120 REM ОДНОМЕРНЫЙ ПОИСК ПРОИЗВОДИТСЯ КУБИЧЕСКОЙ
     ИНТЕРПОЛЯЦИЕЙ
150 REM ФУНКЦИЯ F(X1, X2, ..., XN) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В СТРОКЕ 5000
155 REM ЗНАЧЕНИЯ G(1), G(2), ..., G(N)
200 PRINT «ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ»:INPUT N
220 DIM X(N), Y(N), Q(N), D(N), G(N)
300 PRINT «ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ»
320 FOR I=1 OT N;INPUT «X»;I;;INPUT X(I):NEXT:PRINT «»
340 REM ЗАДАТЬ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СЧЕТЧИКОВ
350 SV=1:TV=0
360 REM ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ ВЫВОД
380 PRINT «                ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ»
550 FOR I=1 TO N;P(I)=X(I):PRINT "X";I;"=";X(I):NEXT I
560 GOSUB 5000:FP=Z:PRINT "Z="Z
570 GOSUB 6000:G1=G0:GK=G0
575 REM В КАЧЕСТВЕ ПЕРВОГО НАПРАВЛЕНИЯ ВЗЯТЬ
577 REM НАПРАВЛЕНИЕ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА
580 FOR I=1 TO N:D(I):NEXT I
585 REM K  - СЧЕТЧИК   ИТЕРАЦИЙ
590 K=1
600 GP=0
610 FOR I=1 TO N:GP=GP+G(I)*D(I):NEXT I
620 IF GP<=0 THEN GOTO 680
625 REM ОПРЕДЕЛИТЬ НАЧАЛЬНЫЙ ШАГ И,
627 REM  ЕСЛИ  НЕОБХОДИМО,ИЗМЕНИТЬ  НАПРАВЛЕНИЕ  СПУСКА
     НА ПРОТИВОПОЛОЖНОЕ
630 QX=ABS(2*FP/GP):IF QX>1 THEN QX=1
640 FOR I=1 TO N
650 X(I)=P(I)-QX*D(I):P(I)=X(I):NEXT I
660 GOSUB 5000:FP=Z:PRINT «НЕСТАБИЛЬНОСТЬ»
670 GOSUB 6000:G1=G0:GOTO 600
680 QX=ABS(2*FP/GP):IF QX>1 THEN QX=1
690 HH=QX
700 REM НАЙТИ СЛЕДУЮЩУЮ ТОЧКУ
710 BB=HH
720 FOR I1 TO N
790 GQ=GQ+G(1)*D(I)
800 NEXT I
```

```
810 IF GQ>0 OR FQ>FP THEN GOTO 860
815 REM ВЫПОЛНИТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИЮ,
817 REM УДВОИТЬ ШАГ И ПЕРЕЙТИ К ТОЧКЕ Q
818 REM  ИЛИ  УДВОИТЬ   ШАГ,  ЧТОБЫ   «НАКРЫТЬ»   МИНИМУМ
820 HH=2*HH
830 FOR I=1 TO N:P(I)=Q(I):NEXT I
840 FP=FQ:GP=GQ:G1=G2
850 GOTO 710
860 ZZ=3*(FP-FQ)/HH:ZZ=ZZ+GP+GQ
870 WW=ZZ*ZZ-GP*GQ:IF WW<0 THEN WW=0
880 W=SQR(WW)
890 DD=HH*(1-(GQ+W-ZZ)/(GQ-GP+2*W))
900 FOR I=1 TO N:X(I)=P(I)+DD*D(I):NEXT I
910 GOSUB 5000:FR=Z
920 GOSUB 6000:G3=G0
925 REM НАЙТИ ГРАДИЕНТ В НОВОЙ ТОЧКЕ
930 GR=0
940 FOR I-1 TO N:GR=GR+G(I)*D(I):NEXT I
950 IF Z<=FP AND Z<=FQ THEN GOTO 1100
960 IF GR>0 THEN GOTO 1020
990 HH=HH-DD
1000 FOR I=1 TO N:Q(I)=X(I):NEXT I
1010 FP=Z:GP=GR:GOTO 860
1020 HH=DD
1030 FOR I=1 TO N:Q(I)=X(I):NEXT I
1040 FQ=Z:GQ=GR:GOTO 860
1100 REM ПРОВЕРКА КРИТЕРИЯ ЗАВЕРШЕНИЯ
1110 IF G3<.000001 THEN GOTO 1300
1120 IF K=N THEN GOTO 1250
1130 REM УВЕЛИЧИТЬ СОДЕРЖИМОЕ СЧЕТЧИКА ИТЕРАЦИЙ
1140 K=K+1
1150 REM НАЙТИ СОПРЯЖЕННОЕ НАПРАВЛЕНИЕ
1160 AK=G3*G3/(GK*GK)
1170 FOR I=1 TO N:D(I)=-G(I)+AK*D(I):P(I)=X(I):NEXT I
1200 PRINT «НОВОЕ  НАПРАВЛЕНИЕ»;:DV=DV+1:PRINT
        «    ПОИСКА»;DV
1210 FP=Z:G1=G0:GK=G0
1220 FOR I=1 TO N:PRINT "X";I;"=";X(I):NEXT    I:PRINT     "Z=";Z
1230 GOTO 600
1250 PRINT «РЕСТАРТн;:SV=SV+1:DV=DV+1
1260 PRINT "              ИТЕРАЦИЯ"; SV;"    ПОИСК"; DV
1270 PRINT ""
1280 GOTO 550
1300 PRINT   "МИНИМУМ НАЙДЕН"
1320 FOR I=1 TO N:PRINT   "X";I;"=";X(I):NEXT    I
1340 PRINT   "МИНИМУМ  ФУНКЦИИ РАВЕН    "Z
1350 PRINT  "КОЛИЧЕСТВО ВЫЧИСЛЕНИЙ ФУНКЦИИ РАВНО  ";TV
1400 END
5000 Z=100*(X(2)-X(1)*X(1))^2
5010 Z=Z+1(1-X(1))^2
5020 TV=TV+1
5200 RETURN
6000 G0=0
```

```
6100 G(1)=-400*X(1)*(X(2)-X(1))
6110 G(1)=G(1)-2*(1-X(1))
7000 FOR I=1 TO N:G0=G0+G(I)*G(I):NEXT I
7010 G0=SQR(G0)
7500 RETURN
```

1- <u>Мысал</u>

Розенброк функциясын Флетчер-Ривс әдісін қолданып алғашқы нүкте ретінде ***(-1,2; 1)*** нүктені тағайындап минимумын іздеп табыңыз.

Функцияның өзі де оптимизациялауға қиын және алғашқы *(-1,2; 1)* нүктесіде ыңғайсыз нүкте. Функция минимумы (1;1) нүктесінде болатындығына көзіміз жетеді.

Программаның жұмыс істеуін келтірейік.

```
МИНИМИЗАЦИЯ МЕТОДОМ ФЛЕТЧЕРА-РИВСА
ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ
2
ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
X 1  -1.2
X 2   1
          ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ
X 1 = -1.2
X 2 = 1
Z= 24.20001
НОВОЕ НАПРАВЛЕНИЕ              ПОИСКА 1
X 1 = -1.0302
X 2 = 1.069306
Z = 4,128102
РЕСТАРТ            ИТЕРАЦИЯ 2        ПОИСК 2
X 1 =-.7342701
X 2 = .4632753
Z = 3.583429
НОВОЕ НАПРАВЛЕНИЕ              ПОИСКА 3
X 1 = -.6921596
X 2 = .4880884
Z = 2.871511
РЕСТАРТ            ИТЕРАЦИЯ 3        ПОИСК 4

X 1 = -.5967852
X 2 = .3241929
Z = 2.65865
НОВОЕ НАПРАВЛЕНИЕ                    ПОИСКА 5
X 1 = -.5726343
X 2 = .3384563
Z = 2.484301
РЕСТАРТ            ИТЕРАЦИЯ 45       ПОИСК 88

X 1 = .9999818
X 2 = .9999634
Z = 3.34083E-10
```

НОВОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ПОИСКА 89
X 1 = .9999818
X 2 = .9999634
Z = 3.330172E-10
РЕСТАРТ ИТЕРАЦИЯ 46 ПОИСК 90

X 1 = .9999821
X 2 = .9999643
Z = 3.250769E-10
НОВОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ПОИСКА 91
X 1 = .9999822
X 2 = .9999642
Z = 3.190373E-10
РЕСТАРТ ИТЕРАЦИЯ 47 ПОИСК 92

X 1 = .9999822
X 2 = .9999643
Z = 3.179714E-10
НОВОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ПОИСКА 93
X 1 = .9999823
X 2 = .9999644
Z = 3.165788E-10
МИНИМУМ НАЙДЕН
X 1 = 1
X 2 = 1
МИНИМУМ ФУНКЦИИ РАВЕН 0
КОЛИЧЕСТВО ВЫЧИСЛЕНИЙ ФУНКЦИИ РАВНО 250

2 Мысал.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3(x_1-1)^2 + 2(x_2-2)^2 + (x_3-3)^2$$

Функция минимумын табыңыз.

1-ші мысалға қарағанда бұл есеп қарапайым. Алғашқы нүкте ретінде ***(9;-7;11)*** нүкте қабылданған. Төмендегі программаның жұмыс істеуі, Флетчер-Ривс әдісі бойынша (теория бойынша) үш итерациядан кейін тапқанымызды байқаймыз.

МИНИМИЗАЦИЯ МЕТОДОМ ФЛЕТЧЕРА-РИВСА
ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ
3
ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
X 1 9
X 2 -7
X 3 11

ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ
X 1 = 9
X 2 = -7
X 3 = 11
НОВОЕ НАПРАВЛНИЕ ПОИСКА 1

X 1 = -.481967
X 2 = .1114755
X 3 = 7.839344
Z= 37.14098
НОВОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ПОИСКА 2
X 1 = 1.206897
X 2 = 2.827586
X 3 = 4.862069
Z= 4.965516
МИНИМУМ НАЙДЕН
X 1 = .999999
X 2 = 2
X 3 = 3
МИНИМУМ ФУНКЦИИ РАВЕН 4.263257E-14
КОЛИЧЕСТВО ВЫЧИСЛЕНИЙ ФУНКЦИИ РАВНО 7

§ II. 4.5 Жаттығулар

1) II.4.1 тараудағы тез төмендеу әдісіне жазылған программаны түзу сызықты іздеу Фибоначчи әдісін, *«алтын қиылыс»* әдісін, кубтық интерполяция әдісін қолданатындайғып өзгертіңіз. Оны келтірілген мысалдарға пайдаланып есептерді шығарыңыз. Туатын қиыншылықтарға
зер салып талқылаңыз.

2) II.4.1 тараудағы 1-ші және 2-ші мысалдарды әр түрлі алғашқы нүктелерге қолданып шығарып көріңіз. Қандай қиыншылықтарды аңғардыңыз?

3) Тез төмендеу әдісін қолданғанда бір-бірінен кейін табылған P_0, P_1 және P_2 нүктелері белгілі болды деп есептейік. болжау бойынша есептеу үрдісі, егерде келесі P_0, P_2 бағытында жүргізілсе жылдам жүреді деп қабылдайық. Осы болжауды көрсететіндей қылып, бір қалыптағы сызықтарды минимумның төңірегінде сызып көрсетіп талқылаңыз. Осы болжауды 4.1 тараудағы программасында өзгертіп келтіріп байқаңыз.

4) Егерде, екі айнымалылы оң мәнді квадраттық функция - $f(x)$ болса. Оның минимумы $(0; 0)$ нүктесінде орналасқан, ал X_0, X_1 және X_2 - үш нүкте бірінен соң бірі тез төмендеу әдісі бойынша табылған нүктелер болса. X_0 және X_2 нүктелер арқылы түзу сызық, функцияның минимумы орналасқан нүктесін қиып өтетінін көрсетіңіз. *(3-ші жаттығуда айтылған есептеу үрдісін жылдамдатуды қараңыз)*.

5) Квадраттық функцияны $f(x,y) = x^2/a^2 + y^2/b^2$ қарастырайық, мұнда a және b - тұрақты сандар. Функцияның бір қалыпты мәндері бар сызықтар ретінде эллипстер болсын.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$$

мұнда c^2 - функция мәні. Функция минимумы нөлге тең және координаттар басындағы нүктеде $(0; 0)$ орналасқан болсын. Төмендегі түзу сызық

$$y = mx \pm c\sqrt{\left(a^2 m^2 + b^2\right)}$$

Эллипске жанама ретінде бағытталғандығын және

$$\left[\pm \frac{ma^2 c}{\sqrt{\left(a^2 m^2 + b^2\right)}}, \pm \frac{cb^2}{\sqrt{\left(a^2 m^2 + b^2\right)}}\right]$$

Координаттары бар ***P*** нүктесінде түйілісетінін көрсетіңіз.

Сондықтан, алғащқы нүктеден басталатын іздеу үрдісі осы түзу сызық бойымен жүріп минимум орналасқан ***P*** нүктесінде аяқталады.

Түзу сызық градиенті, ***P*** нүктесін координаттар басы *(минимум орналасқан нүкте)* мен қосқанда болады, оның мәні m' тең болсын.

$mm' = -b^2 / a^2$ тең болатынын көрсетіңіз.

$$p^T \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{pmatrix} q = 0$$

мұнда $p^T = (\cos\alpha; \sin\alpha)$; $q^T = (\cos\beta, \sin\beta)$ және $m = tg\alpha$, $m' = tg\beta$.

Сондықтан, ***p*** және ***q*** векторлары бір біріне қосақталған және іздеу үрдісі ***p*** векторының бойымен, сосын ***q*** векторының бойымен жүргізілсе, минимумды екі итерациядан кейін табамыз.

6) $f(x) = 3(x_1 - 4)^2 + 5(x_2 + 3)^2 + 7(2x_3 + 1)^2$

функция минимумын ДФП және Флетчер-Ривс әдістерін қолданып табыңыз. Бірінші жағдайда алғашқы нүктеден байланысты емес минимумды табу үшін үш итерация қажеттігін көрсетіңіз, ал екінші жағдайда үш іздеу үрдісінің қадамдарының қажеттігін көрсетіңіз.

7) Функция минимумын табыңыз:

$$f(x_1, x_2) = 1 - x_1 - 2x_2 - 4x_1x_2 + 10x_1^2 + 2x_2^2$$

8) Функция минимумын табыңыз:

$x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 - 4x + 3$

9) Функция минимумын табыңыз:

$(x_1^2 + x_2 + 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$

10) Функция минимумын табыңыз:

$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 2$

5 - тарау
Шектелген шарт болғандағы оптимизация
Жалпы теориясы

§ II. 5.1 Шектеудің теңдік түріндегі шарты

Екі айнымалы функцияның минимумын іздеу есебін қарастырайық:

$$z = f(x, y),$$

мұнда x пен y-ке қойылған шектеу келесі теңдеу мен берілген

$$g(x, y) = 0 \qquad \text{(II.5.1)}$$

Жалпы түрде, $g(x, y) = 0$ теңдеуін x айнымалысынан байланысты y арқылы шығарып жазсақ, яғни $y = h(x)$. Бірақ, тәжірибе түрінде, бұл қиын есеп болуы мүнкін немесе тіпті $h(x)$ функциясының айқын түрін табу мүмкін емес болады.

Кейбір дифференциалдау шарттары орындалған жағдайда $h(x)$ функциясының туындысы:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} h(x) = -\frac{\partial g}{\partial x} \Big/ \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \text{(II.5.2)}$$

онда функцияны

$$z = f(x,y) = f[x, h(x)] \qquad \text{(II.5.3)}$$

бір x айнымалысы арқылы жазуымызға болады.

Ал z функциясының минимумы болғандқтан қажетті шарты ретінде келесі өрнектер болады.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0\,,$$

яғни

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} \right) * \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

(II.5.1) және (II.5.2) қатынастарын есептеп минимум мәнін x^*, y^* нүктесінде табуымызға болады.

Бұл нәтижені басқа түрде де жазуымызға болады. Егерде келесі теңдікті қабылдасақ:

$$\lambda = \frac{-\partial f}{\partial y}(x, y) \Big/ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \qquad \text{(II.5.5)}$$

$x = x^*, y = y^*$ тең болған жағдайда минимум орналасқан нүктеде келесі өрнектер орын алады:

$$g(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$$

соңғы өрнекті (II.5.5) қатынасынан бірден жазсақта болады.

Лагранж функциясын пайдаланып, осы үш қажетті шарт өрнектерін табуымызға болады.

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + (g(x,y) \qquad \text{(II.5.6)}$$

байқайтынымыз бұл мақсатты функцияның және шектелген шарт функциясын Лагранж көбейтінділеріне көбейтіп солардың қосындысы болып табылады.

Онда ***f(x, y)*** функциясының минимумының болатын қажетті шартын және аргументтерінің шектелген шартын ескере отырып келесі түрде өрнектеп жазуымызға болады:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.5.7)}$$

Бұл теңдеуден құралған системаның шешімі ретінде табылған $\boldsymbol{x^*}$, $\boldsymbol{y^*}$ және λ^*-минимум орналасқан нүктелер координаты.

1-мысал

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

функциясының минимумын, келесі шектелген $\boldsymbol{x + y = 4}$ шартта, есептеп табыңыз. Лагранж функциясы келесі өрнек болады:

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(4 - x - y)$$

Онда сәйкесті минимум шартын келесі түрде жазамыз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 4 - x - y = 0.$$

Бұл теңдеулер системасының шешімі $x = y = 2,\ \lambda=4$

Фукция минимумы ***8***-ге тең болады. оқырмандарға жаттығу ретінде осы нәтижені тексеру ұсынылады, егерде функцияны айнымалы ретінде қарастырсақ, яғни ***y*** - ті Лагранж функциясы арқылы жазып өрнектеп қабылдасақ:

$$z = x^2 + (4 - x)^2$$

Минимумның қажетті (II.5.7) шартын, ***n*** - айнымалылы функциялар үшін, олардың шектелген ***m*** шарты бар теңдіктері үшін де ары қарай жалғастырып жалпы өрнегін жазуымызға болады.

Функциясының минимумын іздеп табу есебін қарастырайық:

$$z = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

мұнда, ***x*** айнымалыларына шектелген шарт қойылған

$$g_1(x) = 0,\ g_2 = 0,\ ...,\ g_m(x) = 0 \qquad (II.5.8)$$

Шектелген шарттарлы пайдаланып, ***m*** айнымалыларын тағайындап белгілеуімізге болады *(шектелген шарттың жалпы түрінде жазылғанын ескере отырып, оларды $x_1, x_2, ..., x_m$ арқылы белгілейік).* Ал қалған ***(n - m)*** айнымалыларын бір бірімен байланыссыз ортогоналды деп қарастырып, осылар арқылы айнымалыларын байланысты өрнектерін жазуымызға болады. минимум орналасқан нүктеде, шектелген $f(x + h) - f(x) \geq 0$ шарттар бар жағдайда, $i = 1, 2, ..., m$ өзгергенде, $g_i(x + h) = g_i(x) = 0$ қатынастары орындалатын барлық ***h*** үшін айтатынымыз.

Бірінші дәрежелі h_j дәлдігіне дейін болатын өрнек:

$$\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0,$$

мұнда

$$\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{үшін}$$

Бұл өрнекті келесі түрде жазуымызға болады:

$$\sum_{j=1}^{n} h_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = 0, \qquad (II.5.9)$$

мұнда, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ - Лагранж көбейтінділері.

h_{m+1}, h_{m+2}, …, h_n бір біріне байланыссыз ***(n-m)*** айнымалыларының ұлғайуы болғанынан, оларға сәйкес коэффициенттер нольге тең болуы қажет, яғни

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \qquad j = m+1, m+2, \dots, n \quad \text{үшін}$$

h_1, h_2, ..., h_m ***m*** айнымалыларының бір-бірінен байланыссыз болғанымен, оларды Лагранж көбейтінділерін (II.5.9) теңдеуінен тақалап тағайындап алып есептеп табамыз.

Сөйтіп $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ көбейтінділерін тақалап тағайындағанымызда келесі өрнек орындалуы қажет.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1,2, \dots, m \quad \text{үшін}$$

Онда түбінде келесі өрнекті табамыз.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,2, \dots, n \quad \text{үшін} \qquad (II.5.10)$$

Сондықтан, егерде Лагранж функциясын келесі түрде жазып тапсақ

$$F(x,\lambda)= f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x), \qquad \text{(II.5.11)}$$

онда, шектелген шарттары бар кездегі, ***f(x)*** функциясының минимумы болатындығының қажетті шартын келесі өрнектен анықтаймыз:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}=0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{үшін} \qquad \text{(II.5.12)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}= g_i(x)=0, \quad \mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{m} \quad \text{үшін} \qquad \text{(II.5.13)}$$

Аңғаратынымыз, қарастырылуға керекті $\boldsymbol{x}$ мәндеріне (шектелген шартты бұзбайтын) келесі теңдеу орын табатыны анық:

$$F(x,\lambda)= f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)= f(x)$$

Минимум орналасқан нүкте үшін, егерде шектелген $\boldsymbol{x}^*$ мәніне шарттар қойылған жағдайда, $\boldsymbol{g_i (x^*+ h) = 0}$ теңдеуі орынды, әрбір $\boldsymbol{i}$ санна сәйкес $\boldsymbol{h}$ -қа

$$f(x^* + h) - f(x^*) \ge 0$$

теңсіздікті жазуымызға болады.

Сөйтіп,

$$F(x^*+h)-F(x^*)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}h_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_i\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}h_j+\dots\ge 0,$$

мұнда, туындылар $\boldsymbol{x}^*$ нүктесінде $\lambda=\lambda^*$ тең болған кезде есептелген.

(II.5.12) теңдеуін есепке ала отыра, шектелген шарттарды қанағаттандыратын барлық $\boldsymbol{h}$ -тар үшін

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_i\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}h_j \ge 0.$$

минимумның болуы үшін жеткілікті шарт, егерде (II.5.12) және (II.5.13) теңдеулері шектелген шарт болса, осы шектікті бұзбайтын барлық санына квадраттық форманың оң мәнді болғаны.

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_i\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}h_j \qquad \text{(II.5.14)}$$

Ескерту.

Квадраттық форманы қолдануға ыңғайлы түрінде жазып келтіру оңай жұмыс емес.

2 мысал

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2$$

функциясының минимумы ***(2;2)*** нүктесінде орналасатынын тексеріңіз, егерде оның шектелуі $\boldsymbol{x_1 + x_2 = 4}$ теңдеуі болса

$$F(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(4 - x_1 - x_2)$$

функциясына арнай табылған шешімдер.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \quad \textit{егерде} \quad x_1 = x_2 = 2 \quad \textit{және} \quad \lambda = 4$$

F -функциясының Гессе матрицасы келесі түрде болады $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ сондықтан ол оң мәнен құралғандығы яғни ***(2; 2)*** нүктесінде минимумның орналасқанын дәлелдейді.

§ II. 5.2 Шектелу шарты теңсіздік түрінде берілсе

Бұл тақырыпта Лагранж көбейтінділер әдісін, шектелу шарттар теңсіздік болған жағдайға таратып қарастырамыз. Математикалық бағдарламалау (программалау) есебінің жалпы түрін қарастырайық.

f (x) -функциясының минимумын келесі шектеулер шарты қойылған жағдайда $g_i(x) \le b_i$, ***(i=1, 2, ..., m)*** табыңыз.

Осындай, шектелу шарттар есептің жалпы түріндегі теңсіздіктерге кедергі болмайды. (Шектелу $\varphi(x) \ge c$ түрінде болса оны ***(-1)*** көбейтіп $-\varphi(x) \le -c$ керекті түріне аударып жазамыз).

Мұндай есептің кез келген түрінің шешімі болатынын анықтайтын әдіс бүгінгі күнде жоқ есебінде. Егер оқырман сондай әдіс бар екендігін ұсынса біз қуаныштымыз.

Теңсіздік түрінде жазылған шектеулерді теңдік түрінде алмастырып жазуымызға мүмкіншілік бар, егерде, әр қайсысына теріс мәнді емес әлсіздіретін u_i^2 айнымалысын қосып қарастырайық. *(u_i^2 айнымалысы оң мәнді екенін белгілеп аңғарайық):*

$$\varphi_i(x) + u_i^2 = b_i \qquad \text{немесе} \qquad g_i(x) + u_i^2 - b_i = 0 \qquad \text{(II.5.15)}$$

сөйтіп, есеп ***f (x)*** -функциясының минимумын, шектеудің ***m*** шартты $g_i(x) + u_i^2 - b_i = 0$ теңдік түрінде қарастырылғандағы жағдайда табатын есепке келтіріледі.

Алғашқы тақырыпта талқыланған әдіс бойынша, Лагранж функциясының өрнегін анықтайық

$$F(x, \lambda, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[g_i(x) + u_i^2 - b_i \right] \qquad \text{(II.5.16)}$$

Орнықты нүктесінде орындалатын қажетті шарттар ретінде келесі өрнектер болады:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}, \quad \text{егерде} \quad j=1,2,\dots,n, \qquad \text{(II.5.17)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0 = g_i(x) + u_i^2 - b_i, \quad \text{егерде} \ i = 1, 2, \dots, m, \qquad \text{(II.5.18)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = 0 = 2\lambda_i u_i, \qquad \text{егерде} \quad i = 1, 2, ..., m, \qquad (II.5.19)$$

Соңғы теңдеуді $u_i / 2$ көбейтіп, келесі өрнекті жазамыз:

$$\lambda_i u_i^2 = 0,$$

яғни

$$\lambda_i [b_i - g_i(x)] = 0, \quad \text{егерде} \quad i=1, 2, ..., m \qquad (II.5.20)$$

шектелуі бар жағдайдағы, функция минимумының x^* нүктесінде орналасуының қажетті шарттары ретінде (II.5.17), (II.5.18) және (II.5.20) теңдеулері болады. (II.5.18) теңдеуі шектелу $g_i(x) \le 0$ шартының қайталап жазылуы болып табылады.

(II.5.20) теңдеуіміз $\lambda_i = 0$, немесе $b_i - g_i(x^*) = 0$ тең екендігін білдіреді.

Егерде, $\lambda_i \ne 0$, онда $g_i(x^*) = b_i$ және бұл шектелу шарты пысықталған (активный) шарт болады және шектелу теңдік түрінде жазылған шарт болып табылады.

Өзге жағынан қарастырсақ, егерде шектелу шарты нақты теңсіздік түрінде $g_i(x^*) < b_i$ жазылған болса, онда оған сәйкес Лагранж көбейтіндісі

$\lambda_i = 0$ тең болғаны. Шынымен ақ, егерде, $g_i(x^*) < b_i$ онда қарастырылған минимум шектелу бұзбағаны, яғни пысықталған емес шарт болып табылады. Сондықтан бұл i шартын қарастырмай-ақ болса да болады, ал оған сәйкес

$\lambda_i = 0$ көбейтіндісі нөлге тең деп қарастырамыз. Бірақта, бірден қай шектелу шартты қарастырмайтынымыз белгісіз.

Шектелу шарттардың ішінде минимум орналасқан нүктесінде қосымша,

$\lambda_i \ge 0$ Лагранж көбейтіндісі оң мәнді шарттар болады.

Егерде, (x^*, λ^*, u^*) нүктесінде (II.5.17), (II.5.18) және (II.5.20) теңдеулер орнында қанағаттандырылған деп есептесек. Егерде, шектелу шарттар бар жағдайдағы, $z = f(x^*)$ функциясының нақты минимумы болса, онда z функциясының b_i айнымалысынан байланысты функция деп қарастыруға болады. Яғни, b_i мәнін өзгертіп отырып, шектелуін өзгертеміз және сөйтіп z функция мәнінде өзгертіп талқылаймыз.

Келесі өрнек орын табатынын көрсетейік:

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = -\lambda_i^*,$$

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i}, \qquad (II.5.21)$$

мұнда, дербестік туындылар x^* нүктесінде есептеледі.

Неге десеңіз $g_k(x) + u_k^2 = b_k$ болғандықтан,

$$\frac{\partial g_k}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i} = \begin{cases} 0, & \text{егерде} \quad i \ne k \\ 1, & \text{егерде} \quad i = k \end{cases}$$

Онда

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \frac{\partial g_k}{\partial b_i} = \frac{\partial z}{\partial b_i} + \lambda_i^* = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial b_i}$$

Бірақ бұл өрнек (II.5.17) өрнекке сәйкес қарастырсақ нөльге тең болады. Сөйтіп

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = -\lambda_i^*$$

b_i - мәнінің ұлғаюы, шектелу аймағында кеңиді, ол ***f(x)*** -функциясының z минимумы шектелу аймағында орналасқандықтан, оның мәнін ұлғайтпайды, тіпті минимумның мәнін кішірейтуі мүмкін. Сөйтіп,

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} \le 0,$$

яғни

$$\lambda_j^* \ge 0 \qquad \text{(II.5.22)}$$

F (x) функциясының минимумының, егерде шектелу ***g_i (x) ≤ b_i*** ***(i = 1,2,...,m)*** шарты болған жағдайда, x және λ мәндерінде болуының қажетті шартын, келесі теңдеулер орынды қанағаттандырылғанда есептеп табуымызға болады.

(Егерде функцияның максимумы қарастырылған жағдайда λ_i көбейтінділерінің таңбасы ауысып жазылады).

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_j} + \Sigma\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 && \text{при} \quad j = 1,\dots, n \\ &g_i(x) \le b_i && \text{при} \quad i = 1,2,\dots, m; \\ &\lambda_i\left[g_i(x) - b_i\right] = 0 && \text{при} \quad i = 1,2,\dots,m, \\ &\lambda_i \ge 0 && \text{при} \quad I = 1,\dots,m. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.5.23)}$$

Бұл шарт (II.5.23) оқулықтарда Күн-Такер шарты ретінде белгілі.

1-Мысал:

Шектелген $x_i \ge 0, x_2 \ge 0$ және $x_1 + x_2 \ge 4$ шарттар бойынша

$$\boldsymbol{f(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2}$$

функциясының минимумы үшін Кун -Такер шартын жазыңыз.

Бұл есепті келесі түрде жазып қарастырайық:

$$\boldsymbol{f(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2}$$

функциясының минимумын іздейік, егерде келесі шектелу шарттары берілген жағдайда

$$-x_1 \le 0, \quad -x_2 \le 0, \quad -x_1 - x_2 \le -4.$$

F(x, u, λ) Лагранж функциясын келесі түрде жазамыз

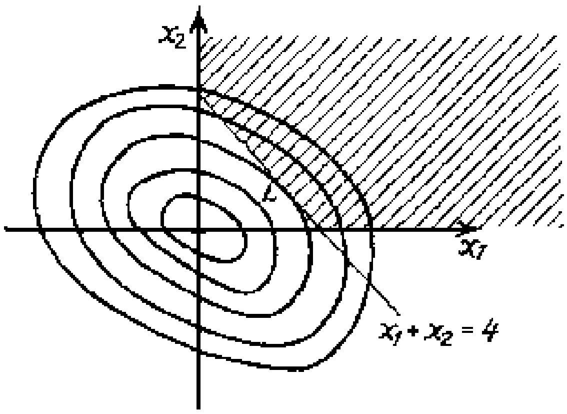
$$\boldsymbol{F = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + (_1 (u_1^2 - x_1) + (_2 (u_2^2 - x_2) + (_3 (u_3^2 - x_1 - x_2 + 4)}$$

Минимумның болуының қажетті шарты келесі:

$$6x_1 + 4x_2 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0,$$
$$4x_1 + 10x_2 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0,$$
$$-x_1 \le 0, \quad -x_2 \le 0, \quad -x_1 - x_2 \le -4,$$
$$\lambda_1 x_1 = 0, \quad \lambda_2 x_2 = 0, \quad \lambda_3 (4 - x_1 - x_2) = 0,$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0,$$

Бұл шектелу шартты бұзбай отыра, тексеруіміз қиын болмайды.

Егерде, $x_1=3$, $x_2=1$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=22$, тең болса, $(3;1)$ координаттары A нүктесінде функцияның минимумы орналасады және оның мәні $z = 44$ тең болады. Графикалық түсініктемесін қарастырайық (II.5.1- сурет).



II.5.1- сурет

f(x) функциясының бір қалыпты сызықтары эллипс болады.

$$3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = C$$

Егерде, шектелу шарттары болмаған жағдайда минимумы координаттардың басында орналасады да, ал мәні нөлге тең болады. Шектелу шарттарын пайдаланып сызған шектелу облысымыз көлеңкелі контур арқылы II.5.1-суретте көрсетілген.

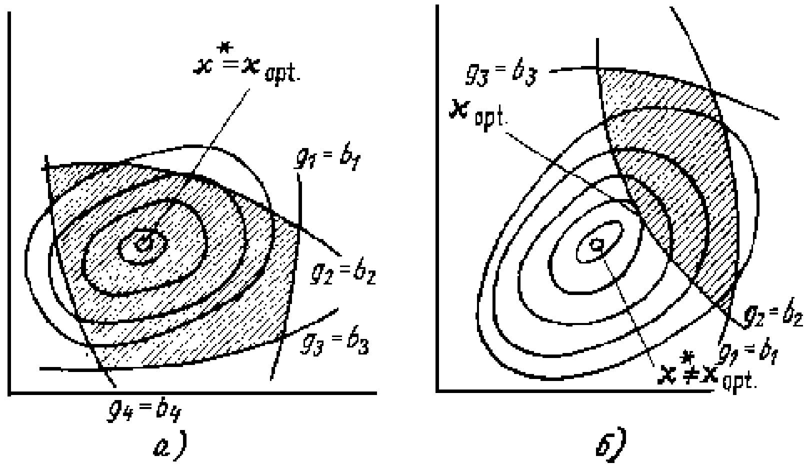
§ II. 5.3 Дөңгейлік және ойпактық

Осы тараудың басында келтірілген, математикалық болжау (программалау, пландау) есептердің жалпы түрі, өте қиында және қазіргі уақытқа дейін толық шешілмеген болып табылады. Есепте кездесетін кейбір қиыншылықтардың графикалық талқыламасын қарастырайық. II.5.2-суретте функция мәнінің бір қалыпты деңгейіндегі сызықтар көрсетілген.

Шектелу шарты болмаған жағдайда, функцияның минимумы орналасқан x^* нүктесінен қозғалған сәтте - функция мәні әрдайым ұлғаяды. II.5.2-суретінде шектелу $g_i(x) = b_i$ шарттары арқылы пайда болатын кеңістіктің (облыстың) шекарасы көрсетілген, ал кеңістік штрихпен белгіленген.

II.5.2.a - суретінде функция минимумы, шектелген жағдайдағы орналасқан нүктесі, шектелмеген жағдайдағы нүктесі мен бірдей болып табылады.

Шектелу шарттарының бәрі де теңсіздіктің түрі болады, егерде біз осы жағдайды білсек, шектелу шарттарын қарастырмай-ақ, бірден есепті оқулық құралдың I - бөліміндегі әдістерді қолданып шығаратын едік.



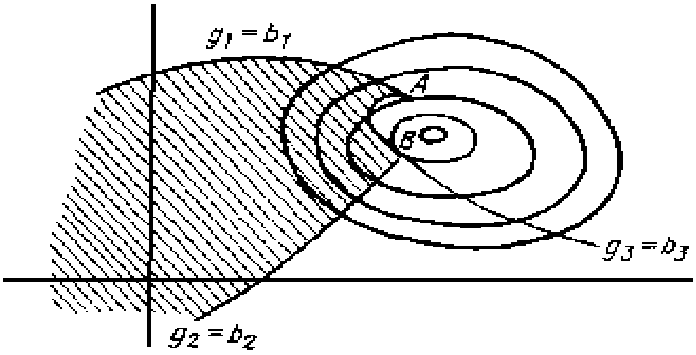
II.5.2 - сурет

II.5.2.б - суретінде шектелу шарттар болған жағдайда функция минимумы $\boldsymbol{g_2(x) = b_2}$ қисық сызығында орналасады, ал басқа екі шарт пысықталмаған болып табылады. Осы жағдайларды ескере отыра, $\boldsymbol{g_1}$ және $\boldsymbol{g_3}$ шектелу шарттарын қарастыруымызға да болады және осы есепті шектелу шарт теңдік $\boldsymbol{g_2(x) = b_2}$ ретінде берілген деп есептеп табуымызға болады. Соңғы түсініктен ұйғаратынымыз теңдік ретінде шектелу шарты болғанда функция минимумы орналасқан $\boldsymbol{X}$ нүктесінде келесі қатынас орын алады.

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g_2(x)$$

Неге десеңіз $\nabla f(x)$ бағыты бір қалыпты деңгей сызықтарына перпендикуляр болады және шектелген кеңістікке (облысқа) да осы нүктеде перпендикуляр болады. ((II.5.17) теңдеуі мен салыстырыңыз).

Шектелу шарттардың болған кезінде, кейде аумақты (локальді) минимумдардың болуына әкеп соғуы мүмкін. Бұл жағдай, функцияны шектеусіз қарастырғанда, минимумы бірақ нүктеде болған кездеде болуы мүмкін. Осындай ситуацияның болуы II.5.3-суретте көрсетілген.



II.5.3- сурет

Функция шектеусіз қарастырылғанда минимумы бір нүктеде болады.

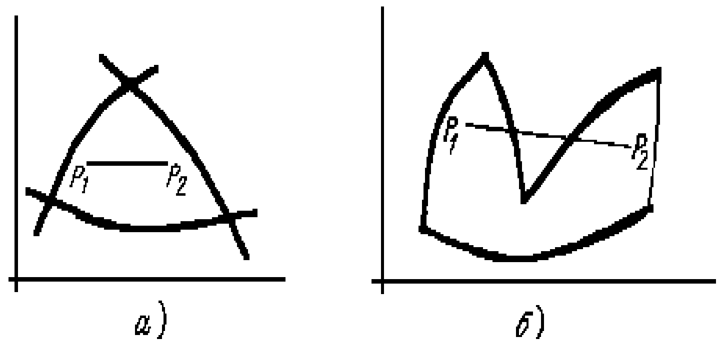
Ал шектеулі шарттары мен қарастырылғанда ***A*** және ***B*** нүктелерінде аумақты (локальді) екі минимумы болатыны көрсетілген. Неге десеңіз осы екі ***A*** және ***B*** нүктелерінің аумақтарындағы нүктелерде функцияның мәні осы нүктелердегі мәнінен кіші болмайды.

Егерде, шектелу шарттарының құратын облысын доңгейлік деп есептесек және қарастырып минимумын (максимумын) іздеп отырған функцияның дөңгейлік (ойпақтық) деп есептесек осы айтылған қиыншылықтардың біразын жоямыз.

Осы айтылған *дөңгейлік* және *ойпақтық* терминдерін талқылап түсіндірейік.

Облысты *дөңгейлік* деп атаймыз, егерде облыс ішіндегі кез келген екі нүктені қосатын түзу сызықта, осы облыстың ішінде орналасса. Сондықтан, егер де x_1 және x_2 нүктелер осы облыста орналасса, онда кез келген

$\theta x_2 + (1-\theta)x_2$ нүктеде осы облыс ішінде орналасады, мұнда $0< \theta <1$ сан. II.5.4.а - суретінде дөңгейлік облысы көрсетілген , ал II.5.4.б - суретінде дөңгейлік емес облысы көрсетілген.

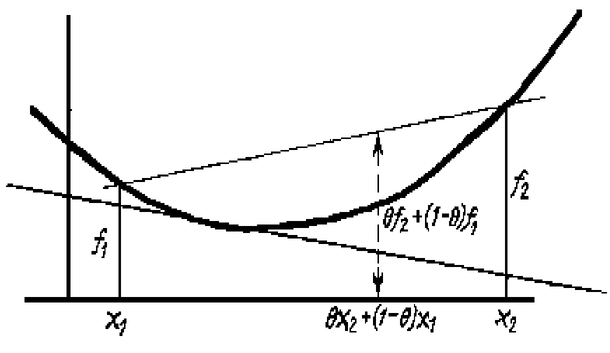


II.5.4 – сурет

$f(x)$ фнукциясы дөңгейлік X облысында дөңгейлік болады, егерде кез келген $x_1, x_2 \in X$ екі нүктеде келесі қатынас орынды болса.

$f[\theta x_2 + (1-\theta)x_1] \leq \theta f(x_2) + (1-\theta)f(x_1), \; 0< \theta <1 <0$ үшін (II.5.24)

Бір айнымалы функцияларға бұл жағдайдың түсінігі - екі кез келген нүктені қосатын хордадан, минимум төмен орналасатыны. Оның графигі II.5.5- суретінде.



II.5.5 - сурет

Ойпақты функциялар үшін, егер ол дөңгейленген нүктелер тобының көпшілігінде есептелетін болса, теңсіздіктің таңбасын кері қарай өзгертіп жазып келесі қатынасты қарастырамыз.

$$f[\theta x_2 + (1-\theta)x_1] \geq \theta f(x_2) + (1-\theta) f(x_1) \qquad \text{(II.5.25)}$$

Мұндай, оның графигіндегі кез келген екі нүктені қосқандағы доғадан функция жоғары орналасады.

Егер (II.5.24) және (II.5.25) өрнектеріндегі теңсіздіктер таңбасын қатаң теңсіздік таңбасына алмастырсақ, онда ***f(x)*** функциясы да дөңгейлік немесе қатаң ойпақты болады.

Дөңгейлік (ойпақтық) функцияларының тағы екі маңызды қасиеттері бар, оларды (II.5.24) және (II.5.25) қатынастарынан табуымызға болады.

Егер, дөңгейлік ***X*** облысының кез келген екі нүктесінде x_1, $x_2 \in X$ функция дөңгейлік болса.

$$f(x_2) \geq f(x_1) + (x_2 - x_1)^T \nabla f(x_1) \qquad \text{(II.5.26)}$$

Ойпақты функциялар үшін теңсіздік таңбасы керісінше жазылып қарастырылады.

f(x) функциясы дөңгейлік болғандықтан, кез келген $0<\theta<1$ санына келесі қатынас орынды болады.

$$f[\theta x_2 + (1-\theta) x_1] \leq \theta f(x_2) + (1-\theta) f(x_1),$$

Сондықтан,

$$f[x_1 + \theta(x_2 - x_1)] - f(x_1) \leq \theta[f(x_2) - f(x_1)]$$

және

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f[x_1 + \theta(x_2 - x_1)] - f(x_1)}{\theta}$$

Ал ортақ бөлшектеу теоремасы бойынша

$$f[x_1 + \theta(x_2 - x_1)] = f(x_1) + \theta(x_2 - x_1)^T \nabla f[x_1 + \theta\lambda(x_2 - x_1)]$$

мұнда, $0 < \lambda < 1$, яғни туынды есептелетін нүкте, x_1 және $x_1 + \theta(x_2 - x_1)$ нүктелерінің арасында орналасытынын көрсетеді.

Сондықтан,

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1)^T \nabla f[x_1 + \theta\lambda(x_2 - x_1)]$$

және $\theta \to 0$ нөлге ұмтылғанда (II.5.26) өрнекті табамыз.

(II.5.26) қатынасынан құйғаратынымыз, бір (екі) айнымалылы дөңгейлік функциялар, кез келген осы функцияға өткізілген жанамадан (жазықтықтан) жоғары орналасатындығы (II.5.5-суретін қараныз).

Функция дөңгейлік болады, егер Гессиан матрицасы

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

оң мәнді болып табылса.

Тейлор теоремасын пайдаланып жазуымызға болады

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)^T \nabla f(x_1) + \frac{1}{2}(x - x_1)^T H(x - x_1),$$

мұндағы $\boldsymbol{H}$ матрицасы $\boldsymbol{x_1+\lambda(x-x_1)}$ және $\boldsymbol{0<\lambda<1}$ нүктесінде есептеледі.

Сөйтіп, оң мәнді табылған квадраттық $\boldsymbol{(1/2)x^T Hx}$ функциясының дөңгейлік екенін көрсетсек жеткілікті болғаны. Осыны көрсету қиын емес.

$\boldsymbol{x_1}$ және $\boldsymbol{x_2}$ **-** кез келген екі мәні болсын делік және

$$\bar{x} = \theta x_2 + (1-\theta)x_1$$

тең деп $\boldsymbol{0<\Theta<1}$ үшін есептейік.

Онда

$$\bar{x}^T \mathrm{H}\bar{x} - \theta x_2^T \mathrm{H} x_1 = \theta^2 x_2^T \mathrm{H} x_2 + 2\theta(1-\theta)x_2^T \mathrm{H} x_1 + (1-\theta)^2 x_1^T \mathrm{H} x_1 - \theta x_2^T \mathrm{H} x_2 - (1-\theta)x_1^T \mathrm{H} x_1 =$$

$$= -\theta(1-\theta)(x_2 - x_1)^T \mathrm{H}(x_2 - x_1).$$

$\boldsymbol{0<\Theta<1}$ болғандығына $\boldsymbol{(1-\Theta)>0}$ оң мәнді сан болады, және Н матрицасы оң мәнді табылғандықтан, $\boldsymbol{-\Theta(1-\Theta)\le 0}$ теріс мәнді сан болады.

Сондықтан,

$$[\Theta x_2 + (1-\Theta)x_1]^T H[\Theta x_2 + (1-\Theta)x_1] \le \Theta x_2^T H x_2 + (1-\Theta)x_1^T H\Theta x_1 \qquad (II.5.27)$$

Бір айнымалы дөңгейлік функциялар үшін, бұл өрнек екінші туындысының мәні теріс емес екендігін білдіреді, сондықтан бірінші туынды арқылы табылған функция ұлғаятын функция болады. Оның мәні тек қана бірақ нүктеде нөлге тең болады. Сондықтан, қарастырылған функцияның минимумы біреуғана болғанын білдіреді.

<u>1-мысал:</u>

Егер, $g_i(x)$ (i=1,2,…,m) үшін дөңгейлік X облысындағы дөңгейлік функциялар болса, яғыни $\boldsymbol{\lambda_i \ge 0,}$ онда $\boldsymbol{\sum\lambda_i\, g_i\,(x)}$ функциасыда дөңгейлік функция екенін көрсетейік.

$$h(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \quad \text{функциясы делік.}$$

егер $\boldsymbol{x_1, x_2 \in X}$ облысынан болса, онда,

$$h[\theta x_2 + (1-\theta)x_1] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i[\theta x_2 + (1-\theta)x_1] \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [\theta g_i(x_2) + (1-\theta)g(x_1)] \le$$

$$\le \theta \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_2) + (1-\theta)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1) = \theta h(x_2) + (1-\theta)h(x_1),$$

бұл $\boldsymbol{h(x)}$ функциясының дөңгейлік екендігін дәлелдейді.

<u>2-мысал:</u>

Егер шектелу облысы теңсіздіктермен $\boldsymbol{g_i(x) \le b_i}$, $\boldsymbol{(i=1,2,...,m)}$ анықталған болса және $\boldsymbol{g_i(x)}$ **-**дөңгейлік функциялар болса осы шектелу облысының өзі де дөңгейлік болатынын көрсетелік.

$\boldsymbol{x_1}$ және $\boldsymbol{x_2}$ шектелу облысындағы нүктелер деп есептесек, онда

$g_i(x_1) \le b_i$ $\quad (i=1,2,...,m)$ үшін,

$g_i(x_2) \le b_i$ $\quad (i=1,2,...,m)$ үшін.

Егер $\quad 0<\Theta<1, \quad i=1,2,...,m \quad$ үшін

$g_i[\Theta x_2 - (1-\Theta)x_1] = \Theta g_i(x_2) + (1-\Theta)g_i(x_1) \le \Theta b_i + (1-\Theta)b_i = b_i$

Сондықтан, $\boldsymbol{\Theta x_2 + (1-\Theta)x_1}$ нүктесіде осы шектелу облысының ішінде орналасқандықтан, біз қарастырған облыстағы нүктелер жинағыда дөңгейлі болғаны.

Жоғарыда табылған нәтижелер келесі теореманы дәлелдеуге мүмкіншілік береді.

Егер, $\boldsymbol{g_i(x)}$ -дөңгейлік функциялар арқылы, $\boldsymbol{g_i(X)b_i}$ теңсіздіктермен анықталған шектелу облысында $\boldsymbol{f(x)}$ функциясы дөңгейлік болса, онда осы облыстағы $\boldsymbol{f(x)}$ функциясының аймақты минимумы функцияның глобальді минимумы болғаны.

$\boldsymbol{x^*}$ нүктесінде функцияның глобальді минимумы орналассын, ал $\boldsymbol{x_0}$ - нүктесінде аймақты минимум орналасқан деп есептелік, яғни $\boldsymbol{f(x^*)<f(x_0)}$. Осы екі нүкте шектелу облысында орналасқан болсын, және шектелу облысы мен қаразсты $\boldsymbol{f(x)}$ функциясы дөңгейлік болғандықтан, келесі өрнек орынды.

$$\boldsymbol{f[\Theta x^* - (1-\Theta)x_0] \le \Theta f(x^*) + (1-\Theta)f(x_0) \le \Theta f(x_0) + (1-\Theta)f(x_0) \le f(x_0)}$$

$\boldsymbol{0<\Theta<1}$ саны үшін.

Егер, $\boldsymbol{\Theta}$ мәні қанағатты кіші сан болса, онда $\boldsymbol{\Theta x^* - (1-\Theta)x_0}$ (кесіндісі) нүктесі $\boldsymbol{x_0}$ -нүктесінің **δ** -аймағында орналасқаны. Онда $\boldsymbol{x_0}$ нүктесінде аймақты минимумы орналасқанын ескерсек келесі $\boldsymbol{f(x^*) \ge f(x_0)}$ теңсіздігі орынды деп жазсақ, біз қайшылық жағдайға ұшырағанымыз, сондықтан $\boldsymbol{x^*}$ нүктесі және $\boldsymbol{x_0}$ нүктесі бір-біріне сәйкес болуы қажет.

3 –мысал

Келесі есептің Кун-Такер шартын жазыңыз. Шектелу $\boldsymbol{x}$, $y \ge 0$, $x + 2y \le 3$ шарттары арқылы анықталғанда, $f(x,y) = -x^2 - y^2$ функциясының минимумын анықтаңыз.

Лагранж функциясы келесі өрнекпен жазылады.

$$F(x,y,\lambda,u) = -x^2 - y^2 + \lambda_1(-x + u^2{}_i) + \lambda_2(-y + u^2{}_2) + \lambda_3(x + 2y + u^2{}_3 - 3)$$

Минимум болуының қажетті шарты келесі теңдеулер арқылы тексеріледі.

$$-2x - \lambda_1 + \lambda_3 = 0;$$
$$-2y - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0;$$
$$\lambda_1 x = 0,\ \lambda_2 y = 0,\ \lambda_3(x + 2y - 3) = 0$$
$$x + 2y \le 3$$
$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \ge 0$$

осы теңдеулер ситемасының шешімін келесі жағдайларда табуға тырысайық:

А) егерде, $x > 0$, $y > 0$, онда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ тең;

Б) егерде $\lambda_3 = 0$, онда $x=y=0$ және функцияның максимумы орналасады.

В) егерде $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 > 0$, онда $2x = \lambda_3 = y$ және $x + 2y - 3 = 0$, сондықтан, $x=3/5$, $\lambda_3 = 6/5$, $y = 6/5$, минимум шарттарының теңдеулер системасы бұзылмай орындалады және $f = -45/25$.

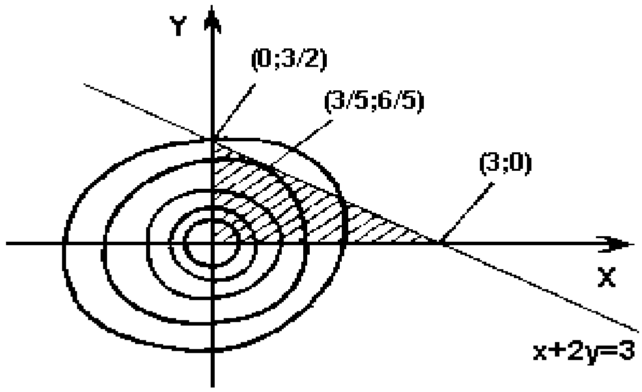
Г) егерде, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 > 0$ онда $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y = 3$ сондықтан $y=3/2$, $\lambda_3=3/2$, $\lambda_1=3/2$, шектелу шарттар орныды және $f = -9/4$.

Д) егер, $\lambda_1=0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_3>0$ онда $x>0$, $y=0$, $x+2y=3$ онда, $x=3$, $\lambda_3=6$, $\lambda_2=12$ барлық минимум шарттары орынды және $f=-9$.

Сөйтіп, қажетті шартты бұзбайтын (орынды) бірнеше нүкте бар екенін анықтадық. Функцияның осы шектеудегі глобальді минимумы $f=-9$ және *(3;0)* нүктесінде орналасады. Есептің графикалық көрінісі II.5.6 - суретте көрсетілген.

3-ші мысалдағы есепті қарастырып шығарғандағы қиындықтар жойылады, егерде функция $f(x)$ дөңгейлік болса және шектелу облысыда дөңгейлік болса.

$\boldsymbol{f(x)}$ функциясының минимумын іздеу есебінде шектелу $\boldsymbol{g_i(x) \le b_i}$ шарттары арқылы анықталса және $\boldsymbol{f(x)}$ пен $\boldsymbol{g_i(x_1)}$ - дөңгейлік функциялар болса, қажетті Кун-Такер шарты ((II.5.23) өрнегін қараңыз) жеткілікті шарт болғаны.



II.5.6-сурет

Бұл жағдайдағы Лагранж функциясы ((II.5.16) қатынасын қараңыз)

$$F(x,\lambda,u)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[g_i(x)+u_i^2-b_i\right]$$

дөңгейлік функцияларының қосындысы болғандықтан, функцияның өзі де дөңгейлік болғаны, ал Лагранж көбейтінділері $\lambda_i \ge 0$. Сондықтан, $\boldsymbol{F}$ функциясының глобальді минимумы орналасатын нүктеде және оның туындысы да өте кіші нөлге жуық мән болады және мұндай нүкте біреу-ақ болады. Сондықтан, қажетті шарт жеткілікті шарт болғанын анықтаймыз.

3-ші мысал бұл нәтижеге қайшы келмейді. $\boldsymbol{g_i(x)}$**-** функциялары дөңгейлік болғандығы мен $\boldsymbol{f(x,y)=-(x^2+y^2)}$ функциясы дөңгейлік емес, ол ойпақты функция екені анық.

§ II. 5.4 Жаттығулар

1) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ функциясының, $(x_1+x_2)=4$ тең жағдайда, минимумы 8-ге тең $(x_1,x_2)=(\pm2;\pm2)$ екенін нүктесінде болатынын көрсетіңіз.

2) Шектелу $x - y = 5$ шарты болғанда, $f(x, y) = x^2 + y^2$ функциясының минимумы $x = 2.5$, $y = -2.5$ нүктесінде орналасатынын көрсетіңіз.

3) Егерде, a, b, c, k -тұрақты сандар оң мәнді болған жағдайда, $k = x + y + z$ және $w = ax^2 + by^2 + cz^2$ функцияларының минимумы орналасатын x, y, z оң мәнді нүкте координатасын іздеп табыңыз.

4) Егерде a, b, c -теріс мәнді және шектелу $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ шартындағы $f(x_1,x_2,x_3) = ax_2x_3 + bx_3x_1 + cx_1x_2$ - функциясының минмумының мәні, $abc / [2(ab + bc + ca) - a^2 + b^2 + c^2]$ - бөлшектің астындағы өрнек оң мәнді болған жағдайда, осы өрнекке тең болатындығын көрсетіңіз.

5) Шектелу $x + y + z = 6$ шартындағы $f(x, y, z) = xy^2z^3$ функциясының стационарлық мәнін (мәндерін) табыңыз.

6) Биіктігі болғанда және астындағы төртбұрыштың ені мен ұзындығы x пен y тең болған жағдайда жіңішке темір парақынан жасалатын ашық қорап бар деп есептейік. Қораптың асты және x ұзындығы бар бүйірінің қалыңдығы d (кіші сан) тең болса, ал y ұзындығы бар бүйірінің қалыңдығы 2d тең деп қарастырсақ. Қораптың жасалатын материалын өстіп тағайындалса, $x = 2y = 4z$ жағдайда қораптың көлемі ең үлкен (максималды) болатынын көрсетіңіз.

7) Кун-Такер шартын тауып және сөйтіп есепті шешіңіз. Шектелу $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 5$ шартында $f(x,y) = x^2 + y^2$ функцияның минимумын іздеп табыңыз.

8) Кун-Такер шартын тауып және сөйтіп есепті шешіңіз. Шектелу $x^2 - 2y \leq 1$, $2x - 2y \leq 1$ шартында $f(x,y) = x^2 + 6xy - 4x - 2y$ функциясының минимумын іздеп табыңыз.

9) Егерде, x облысында f(x) деңгейлік функция болса, $g(x) = - af(x)$, $a>0$ оң мәнді болған жағдайда, x облысында g(x) функциясы ойпатты функция болатынын көрсетіңіз.

10) $g_i(x)$ функциялары $i=1, 2, ..., m$ үшін деңгейлік функциялар болса. $\{x:g_i(x) \leq k\}$ нүктелер жинағы да деңгейлік болатынын көрсетіңіз, егерде k -тұрақты сан болса.

11) h(x) -оң мәнді деңгейлік функция және $a \leq x \leq b$ аралықта орналасса деп есептесек. $g(x)=1/h(x)$ функциясы да аралығында деңгейлік болатындығын көрсетіңіз. Осы нәтижені жалпы жағдайда таратыңыз, егерде, x жинағында анықталған h(x) оң мәнді табылған деңгейлік функция болса. $g(x) =1/h(x)$ функциясының тессиан матрицасы оң мәнді болып табылатынын көрсетіңіз.

12) Шектелу $g_i(x) \leq 0$ шартындағы (1, 2, ..., m) функция-сының минимумын іздейтін есепті қарастырыңыз. Шектелу шарттары жоқ болған жағдайда, f(x) функциясының минимумы x^* нүктесінде орналасады деп және $g_1(x^*) > 0$, $g_2(x^*) > 0$, $g_3(x^*) > 0$ оң мәнді деп есептеп. Егерде, шектелу шартын есепке алғанда функция минимумы x_0 нүктесінде орналасса, кем дегенде $g_1(x_0)$, $g_2(x_0)$, $g_3(x_0)$ функцияларының бір мәні нольге тең болатынын көрсетіңіз. Геометриялық тарқылауды графикте жүргізіңіз.

13) $f(x,y) = x^2 + y^2$ функциясының минимумын және максимумын табыңыз, егерде шектелу $3x^2 + 4xy + 6y^2 =140$ шартты болса.

Геометриялық түсініктемесін келтіріңіз.

14) Товарды шығару көлемінің минимумын іздеу есебі

$$f(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{x_1} + \frac{\beta}{x_2} + \gamma(x_1 + x_2) \ , \ (x_1, x_2 \geq 0)$$

функциясының минимумын іздеу есебіне келтіріледі.

α және β тұрақтылары екі товардың өндіру бағасынан байланысты, ал γ -тұрақтысы товарлардың складта сақталу бағасынан байланысты (1.4) тақырыбындағы 8 жаттығуды қараңыз.

Жоғарыда келтірілген функцияның минимумы $x_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$ тең болған нүктеде орналасатынын көрсетіңіз.

Товарлар қойма сақталғандығынан, x_1 және x_2 айнымалылар $x_1 + x_2 \leq S$, мұнда s -тұрақты сан, шартқа сәйкес болуы қажет.

Қойыоған есепке Кун-Такер шартын жазыңыз және сөйтіп есептің шешімін табыңыз.

15) Почта арқылы жіберілетін посылка тік бұрышты формалы болсын, оның өлшемі x_1, x_2, x_3 тең болсын. Посылканы жібергенде оның өлшеміне келесі шектелу $x_1 \leq 20$, $x_2 \leq 11$, $x_3 \leq 42$ және $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 72$ шарттары қойылсын. Қандай өлшемдерде посылканың көлемі ең үлкен (максималды) мәнде болатынын табыңыз. (Бұл Розенброк пен өңделген почта посылкасы туралы есеп. Келесі бөлімді қараңыз).

16) Почта посылкасы туралы стандарттық есеп жоғарыдағы есеп сияқты, бірақ шектелу шартты келесі түрде жазылады:

$x_3 \leq 42$ егерде $i = 1, 2, 3$ үшін $x_1+2x_2+2x_3 \leq 72$

Осы есептің Кун-Такер шартын жазып және есептің шешімін табыңыз.

6 -тарау

Іздеу әдістері

§ II.6.1 Өңделген Хук-Дживс әдісі

Біріншіден математикалық сызықтық емес болжау (программалау) есептерін шығаратын әдістерді қарастырайық, мұнда тек қана функция мәні қолданылады. Бұл бағытта III-бөлімдегі тікелей іздеу әдістері нәтижелі қолданылады. Ол бөлімде, шектелу шарты болмаған жағдайдағы оптимизациялау есептерін пайдаландық.

Осы әдістерді шектелу шартты болған жағдайғада өңдеп қарастыруымызға болады. Бұл бағытта, функцияның минимумын іздеуді бастау үшін, шектелу шарты бұзылатындай қылып функцияның тым үлкен мәні орналасатын нүктені бастапқы нүкте ретінде қолданып, іздеу әдістерін пайдалансақ жеткілікті деген пікірлерде бар.

Осындай пікірді программаны өзгертіп жазу қолдануға болатыны да оңай көрінеді. Іздеу үрдісіндегі табылған әр нүктені шектелу шартындағы облысына (жиынға) жатама-жатпайма екенін тексеру қажет.

Ол нүктені тапқаннан кейін іздеуді қайтадан шектелу облысында жаңартып, жүргізіп минимумның орналасқан нүктесін белгілі дәлдікпен табамыз.

Өңделген Хук-Дживс әдісіне жазылған программада, осы әрекетті іске асыру шаралары жасалған. (II.5.2 тақырыбындағы 1-ші мысалды қараңыз.)

Қарастырылған есеп келесі түрде қойылады:

$f(x_1,x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ -функциясының минимумын шектелген $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \geq 4$ шарттар ішінде іздеп табыңыз?

Төмендегі келтірілген программа Хук-Дживс II.3.2 тақырыбындағы программасына ұқсас, тек қана 2000 жолдан басталатын ішкі программада, жоғарыда айтылғандай, шектелу шарты ескерілген.

Функция минимумы 44 тең, оның орналасу нүктесі (3; 1), $x_1+x_2=4$ шартта болады.

```
10 PRINT «МЕТОД ХУКА-ДЖИВСА ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ»
20 REM ФУНКЦИЯ Z=F(X1, X2, --, XN) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В СТРОКЕ 2000
30 PRINT «ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ»:INPUT N
40 DIM X(N), B(N), Y(N), P(N)
50 PRINT «ВВЕДИТЕ НАЧАДЬНУЮ ТОЧКУ X1, X2, --, XN»
60 FOR I=1 TO N;INPUT X(I):NEXT I
70 PRINT «ВВЕДИТЕ ДЛИНУ ШАГА»:INPUT H
80 K=H:FE=0
90 FOR I=1 TO N
100 Y(I)=X(I):P(I)=X(I):B(I)=X(I):NEXT I
110 GOSUB 2000:FI=Z
120 PRINT «НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ»Z
130 FOR I=1 TO N:PRINT X(I);«   «;:NEXT I:PRINT »»
```

```
140 PS=0:BS=1
150 REM ИССЛЕДОВАНИЕ ВОКРУГ БАЗИСНОЙ ТОЧКИ
180 J=1:FB=FI
200 X(J)=Y(J)+K
210 GOSUB 2000
220 IF Z<FI THEN GOTO 280
230 X(J)=Y(J)-K
240 GOSUB 2000
250 IF Z<FI THEN GOTO 280
260 X(J)=Y(J)
270 GOTO 290
280 Y(J)=X(J)
290 GOSUB 2000
300 FI=Z
310 PRINT «ПРОБНЫЙ ШАГ»Z
320 FOR I=1 TO N:PRINT X(I); «  «;:PRINT »»
330 IF J=N THEN GOTO 360
340 J=J+1
350 GOTO 200
```

Бастапқы (4; 3) нүктесіне және қадам ұзындығы бірге тең деп алғанда минимумды іздеу есебін программа нәтижелі есептеді. Программаның есептеу жұмысының көріндісін келтірейік.

```
МЕТОД ХУКА-ДЖИВСА ПРИНАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ
ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ
2
ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНУЮ ТОЧКУ X1, X2, --, XN
4
3
ВВЕДИТЕ ДЛИНУ ШАГА
1
НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ 141
4    3
ПРОБНЫЙ ШАГ  108
3    3
ПРОБНЫЙ ШАГ  71
3    2
ПОИСК ПО ОБРАЗЦУ 1E+30
2    1
ПРОБНЫЙ ШАГ  44
3    1
ПРОБНЫЙ ШАГ  44
3    1
ПОИСК ПО ОБРАЗЦУ 1E+30
3    0
ПРОБНЫЙ ШАГ  48
4    0
ПРОБНЫЙ ШАГ  48
4    0
ЗАМЕНА БАЗИСНОЙ ТОЧКИ 44
3    1
```

```
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
        3     1
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
3     1
        УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
        3     1
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
3     1
        УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
        3     1
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
3     1
        УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
        3     1
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
3     1
        УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
        3     1
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
3     1
        УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
        3     1
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
3     1
        УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
        3     1
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
3     1
        УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
        3     1
        ПРОБНЫЙ ШАГ  44
3     1
        УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
          МИНИМУМ НАЙДЕН
        X 1 = 3
        X 2 = 1

        МИНИМУМ ФУНКЦИИ РАВЕН 44
        КОЛИЧЕСТВО ВЫЧИСЛЕНИЙ ФУНКЦИИ РАВНО 68
```

Қадам ұзындығы бірге тең деп және бастапқы нүкте ретінде (3; 4) нүктесін алғанда да программа нәтижелі жұмыс істейді.

Бастапқы нүкте ретінде (5; 6) нүктесін алғанда қадам ұзындығын бірге тең деп алсақ, есеп программа бойынша есептеледі, бірақ соңына дейін есептің шешімі табылмады. Программаның жұмыс істеуі (1; 3) нүктесінде аяқталды, яғни пысықталған шектелу шартында, сөйтіп дұрыс емес нәтиже көрсетті.

Программаның жұмыс істеген нәтижесі

```
        МЕТОД ХУКА-РИВСА ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ
        ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ
        2
        ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНУЮ ТОЧКУ X1, X2, --, XN
        5
        6
        ВВЕДИТЕ ДЛИНУ ШАГА
        1
        НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ 375
        5    6
        ПРОБНЫЙ ШАГ 324
        4    6
        ПРОБНЫЙ ШАГ 253
4    5
        ПОИСК ПО ОБРАЗЦУ 155
3    4
        ПРОБНЫЙ ШАГ 124
2    4
        ПРОБНЫЙ ШАГ 81
2    4
        ПОИСК ПО ОБРАЗЦУ 1E+30
0    1
        ПРОБНЫЙ ШАГ 1E+30
0    1
        ПРОБНЫЙ ШАГ 1E+30
0    1
        ЗАМЕНА БАЗИСНЙ ТОЧКИ 81
        2     3
        ПРОБНЫЙ ШАГ 60
        1     3
        ПРОБНЫЙ ШАГ 60
        1     3
        ПОИСК ПО ОБРАЗЦУ 1E+30
0     3
        ПРОБНЫЙ ШАГ 60
        1     3
        ПРОБНЫЙ ШАГ 60
1     3
        ЗАМЕНА БАЗИСНОЙ ТОЧКИ 60
        ПРОБНЫЙ ШАГ 60
        1     3
        ПРОБНЫЙ ШАГ 60
1     3
        УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
        ПРОБНЫЙ ШАГ 60
        1     3
        ПРОБНЫЙ ШАГ 60
```

```
1       3
УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
1       3
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
1       3
УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
1       3
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
1       3
УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
1       3
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
1       3
УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
1       3
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
1       3
УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
1       3
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
1       3
УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
.9999999     3
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
.9999999     3
ПОИСК ПО ОБРАЗЦУ 1E+30
.9999998     3
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
.9999999     3
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
.9999999     3
ЗАМЕНА БАЗИСНОЙ ТОЧКИ 60
.9999999     3
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
.9999999     3
ПРОБНЫЙ ШАГ 60
.9999999     3
УМЕНЬШИТЕ ДЛИНУ ШАГА
  МИНИМУМ НАЙДЕН
X 1 = .9999999
X 2 = 3

МИНИМУМ ФУНКЦИИ РАВЕН 60
КОЛИЧЕСТВО ВЫЧИСЛЕНИЙ ФУНКЦИИ РАВНО 96
```

Ұқсас қанағаттандырылмайтын нәтиже, программа бойынша, алғашқы нүкте ретінде (5; 6) нүктесін және қадам ұзындығы 0.5 тең деп алғанда болды. Дұрыс емес шешім (1.5, 2.5) нүктесінде табылады. Бастапқы нүкте ретінде (4; 3) нүктесін қарастырсақ, ал қадам ұзындығын 0.5 тең деп алсақ программа жұмыс істейді, бірақ дұрыс емес шешімді (2.5, 1.5) нүктесінде табады.

Бұл жағдайлар түсінікті. Бұл әдісті қолданғанда, шектелу шарттар арқылы анықталған облыстың бойымен қозғалуға мүмкіншілік жоқ. Сондықтан облыстың шекарасындағы бірінші нүкте табылғанда, іздеу үрдісі аяқталады.

I-бөлімде ескертілгендей, оптимизация есебінің жалпы түрін, шектелу шарттары берілгенде, шығару өте қиын. Сондықтан, жоғарыда келтірілген әдістен басқа тәжірибелі әдістерді табу үшін ерекше процедураларды қолдануымыз қажет.

§ II. 6.2 Аралас (комплексты) әдіс

Алғашында болған іздеу әрекеттерін пайдаланғанда кездесетін қиыншылықтар Бокс ғылымын 1964 жылы, өзінің ерекше әдісін табуға ықластандырды. Негізінде оның әдісі Нелдер-Мид симплекс әдісінің өңделген түрі болып табылады, бірақ бұл әдіс шектелу шартын ескереді. Бокс оны аралас әдіс деп атады.

Есептелетін есепте $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясының минимумын табу керек. Мұнда x қойылатын айқын шектелу шарттар

$$l_j \le x_j \le u_j, \ j = 1, 2, ..., n \quad \text{үшін} \qquad \text{(II.6.1)}$$

және де айқын емес берілген шектелу шартты

$$g_i(x) \le b_i, \quad i = 1, 2, ..., m \quad \text{үшін} \qquad \text{(II.6.2)}$$

Егерде, бағытталған f(x) функциясы деңгейлік және $g_i(x)$ функциялары да деңгейлік болса, есептің бір ғана шешімі болатыны анық. l_j және u_j мәндері төменгі және жоғарғы айнымалылар шекарасы болады. Егерде, нақты есепте берілген айнымалыларға шектелу шарты қойылмаса, онда айнымалыларға "қауыпсыз" шекара қарастырып, яғни оптимум орналасқан нүкте кіретін шекара бар деп есептегеніміз аралас әдісті қолдануға мүмкіншілік береді.

Бұл әдіс итерациялық үрдіс болып табылады. ((II.6.1) және (II.6.2) теңсіздікті қараңыз). Шектелу шарттарын қанағаттандыратын алғашқы x_1 нүктесі және n, m, l_j, u_j мәндері әдісте белгілі деп есептейміз.

Біріншіден шектелу шартын қанағаттандыратын k нүктелерін таңдап тағайындау қажет. Осы нүктелердегі бағытталған функция мәнін барлық k нүктесінде есеп дайындаймыз. Осы нүктелер жинағын *комплекс* деп атаймыз. Бокс ғылымының ұйғарып тапқаны Нелдер-Мид симплекс әдісінде қолданылатын (n+1) санынан k саны үлкен болу қажеттігі, Бокс бойынша k = 2n тең деп қабылдаймыз.

Жоғарыда айтылғанда шектелу шарттарын бұзбайтын x_1 нүктесі белгілі деп есептейміз. (6.1) теңсіздігін бұзбайтын қалған нүктелерді келесі өрнек арқылы есептеп таңдап тағайындаймыз:

$$x_{ij} = l_j + r\left(u_j - l_j\right) \qquad \text{(II.6.3)}$$

J =1, 2, ..., n және i = 2, 3, .., k үшін, мұнда

r - псевдокездейсоқ (0,1) аралығында бір қалыпты тара-тылған айнымалы мәні. Бейсик тілінде мұндай айнымалы мәндері, Y= RND(x) операторы арқылы есептеліп тағайын-далады.

(II.6.3) теңдеуі арқылы есептеліп j-ға қарасты тағайындалатын, нүктелер автоматты түрде (II.6.1) теңсіздігіне қанағатты болады.

Егерде осы қарасты нүкте (II.6.2) теңсіздігін қанағаттандырса, сол нүктелерді комплекстің алғашқы нүктесі ретінде қарастырып қабылдаймыз.

Егерде, (II.6.3) өрнегі арқылы есептеліп табылған қарасты нүкте (II.6.2) теңсіздігін қанағаттандырмаса, ол нүктені жарты қашықтыққа, осыған дейін қабылданға нүктелер жинағынын салмақтар орталығына (орта бөлшек нүктесіне) қарай ығыстырып қайтадан есептеп тағайындаймыз, яғни ол келесі өрнектер арқылы есептеледі

$$x_i^{'} = \frac{x_i + x_c}{2}, \qquad \text{(II.6.4)}$$

мұнда

$$x_c = \frac{1}{i-1}\sum_{e=1}^{i-1} x_e$$

Егерде, (II.6.4) қатынасындағы нүкте, тағыда (II.6.2) теңсіздігін қанағаттандырмаса, (II.6.3) қатынасы арқылы есептелетін процедура (әрекет) қайталана береді, қарасты нүкте (II.6.2) қатынасын қанағаттандырғанша.

Егерде, $g_i(x)$ функциясы деңгейлік болса, бұл үрдіс түбінде шектелу шарттарын қанағаттандырады. x_1-нүктесі шектелу облысының ішінде орналасқандықтан, комплексті нүктелер жинағы да осы шектелу облысында болады.

Комплекс нүктелерін, осы нүктелердегі функция мәндеріне сәйкес қылып реттеп орналастырып қарағанымыз жөн. Осы әрекет программада 790-1000 жолдарында келтірілген.

Енді біз аралас (комплексты әдістің) итерациялық процедурасына жақындадық, мұнда минимумды іздеу, шектелу облысының ішіндегі минимумға қарай бағытталған бағытта ығыстырылып жүргізіледі. Бұл процедура келесі қадамдарды қажет етеді:

1. Функцияның ең үлкен мәні орналасқан x_h нүктесін тауып және қалған (k-1) нүктелерінің орта бөлшегін x_0 тауып дайындаймыз.

2. x_h нүктесінен ығысып іздеуді бастаймыз. Ол үшін x_h нүктесінің x_0 нүктесіне қатынасты сәулелендірілген x_r нүктесін, сәулелендіру коэффициентін $\alpha > 1$ пайдаланып келесі өрнек арқылы табамыз

$$x_r = (1+\alpha)x_0 + \alpha x_h \qquad \text{(II.6.6)}$$

3. x_r нүктесі шектелу шарттарын қанағаттандыра ма, бұза ма- бұзбай ма екіндігін тексереміз.

а) Егерде, x_r нүктесінде кейбір шарттар бұзылып орындалмаса, мысалы l_j үшін, онда $x_{rj}=l_j+10^{-6}$ тең деп қабылдаймыз, егерде бұзылған шарт u_j үшін болса, онда $x_{rj} = u_j - 10^{-6}$ тең деп қабылдаймыз.

б) Егерде барлық шектелу шарттары орындалмаса, онда x_r нүктесін, x_0 нүктесі мен x_r арасындағы қашықтықтың ортасына ығыстырып қарастырамыз, яғни

$$x_{r(жаңа)} = (x_0+x_r) / 2 \qquad \text{(II.6.7)}$$

Сөйтіп шектелу шартарын қанағаттандыруына тексереміз және 3-ші қадамды, нүкте шектелу шартарын қанағаттандырғанша қайталай береміз.

4. Егерде, x_r нүктесі шектелу шарттарын бұзбаса, $f(x_r)$ функция мәнін есептеп және оны $f(x_k)$ функцияның ең үлкен мәні мен салыстырамыз.

Егерде, $f(x_r)> f(x_k)$ яғни бұрынғы нүктеден "жаман" болса, онда x_r нүктесі x_0 - орта нүктесінің арасындағы қашықтықтың ортасына ығыстырылады, яғни:

$$x_{r(жаңа)} = (x_0+x_r) / 2 \qquad \text{(II.6.7)}$$

және үрдіс 3-ші қадамнан басталады.

5. Егерде, $f(x_r) < f(x_k)$ кіші болса, онда x нүктесі x_r нүктесі мен алмастырылып, нүктелер осы функция мәндерімен реттеледі де қайтадан үрдіс жалғастырылады.

6. Әдістің аяқталуын немесе минимум орналасқан нүктеге келіп тірелуін тексеру үшін қолданылатын екі сан есептеледі: функцияның k мәндері үшін орташа квадраттық ығысу σ және ең үлкен ұзындығы бар d_m екі нүкте арасындағы қашықтық. Бірінші санды келесі өрнек арқылы есептейміз

$$\sigma = \left\{ \sum_{l=1}^{k} [f(x_l) - \overline{f}]^2 / k \right\}^{1/2}, \qquad \text{(II.6.8)}$$

мұнда

$$\overline{f} = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} (f(x_l)), \qquad \text{(II.6.9)}$$

σ^2 есептеу үшін келесі формуланы қолданған ыңғайлы

$$\sigma^2 = \left\{ \sum_{l=1}^{k} [f(x_l^2) - \frac{[\sum f(x)]^2}{k}]^2 \right\} / k \qquad \text{(II.6.10)}$$

7. σ^2 және d_m сандары жеткілікті дәлдікке дейін тексеріледі. Егерде екі сан да жеткілікті кіші мән болған жағдайда ғана, минимумды іздеу

процедурасы аяқталады. Кері жағдайда 1-ші қадамға оралалып процедураны қайталау қажет.

Программа текстінде үрдіс ішіндегі ортада есептелген нәтижелер 3500 жолда көрсетіліп шығарылады, егерде есептелген функцияның ең кіші мәні өзгерген жағдайда ғана. Программада 1-7 қадамдары 3800 жолға дейін жазылған. Жеткілікті дәлдік орнаған жағдай да ғана 4000-4100 жолдардағы операторларды пайдаланып есептің шешімі шығарылады.

Бағытталған функция мәні 5000 жылдағы ішкі программада есептеледі.

Шектелу шарттарын тексеру 6000 жолдан басталатын ішкі программада атқарылады.

IC=1 тең болған жағдайдың білдіре көрсететіні анықталмаған шектелу шартының бұзылуын, ал EC=1 айнымалының бірге тең болғандағы анықталған шектелу шартын бұзылуын білдіреді. EC(τ), τ=1, 2, ..., 2N және IC(L), L=1, ..., M массивтері (индексті айнымалылары) қай орындағы шектелу шарттарының бұзылғанын (қанағаттандырылмағанын) көрсетеді.

Бұл ішкі программаларды, өңделген почтадағы посылка туралы есепті, шығаруымызға қолданып пайдалануымызға болды (II.5.5 тақырыбындағы 15 жаттығу).

f(x)= - $x_1x_2x_3$ функция минимумын келесі шектелу шарттарында іздеп табыңыз.

$$0 \le x_1 \le 20,\ 0 \le x_2 \le 11,\ 0 \le x_3 \le 42 \quad \text{және} \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 72$$

Бұл есепте анықталмаған бір ғана шектелу шарты бар, бірақ басқа шектелу шарттарына ішкі программаны қайтып өңдеп жазатынымызды анықтап алып қолданғанымыз жөн. Аңғаратынымыз, егерде IM = 1 айнымалысының мәні бірге тең болса, анықталмаған шектелу шарттары ғана шектелетіні. Осы әрекеті жүргізуге, 640 жолындағы операторлардың мазмұны.

Процедураның шешімге келіп тірелген жағдайын анықтаумыз, егерде комплекс (нүктелер жинағы) "тартылып" келген өлшемі, минимумның орналасқан нүктесінің кіші аймағында орналасқан кезінде ғана болады.

Іздеу үрдісінің аяқталуы, яғни процедураның шешімге келіп тірелуін тексеру осы жағдайда тоқтатылады, неге десеңіз функцияның мәндерінің бәріде, бір бірінен айырмашылығыда өте аз болатыны.

K = 2n және $\alpha = 1{,}3$ тең деп тағайындаумыз (1120 жолды қараңыз) Бокс ғылымының ұсынуымен, эмпиритикалық (тәжірибеден) қабылдан заңдылық деп түсінеміз. Бірінші мәндер бірден комплекстің сығылып-қысылуын болдырмауына арналған. Сәулелендіру коэффициентінің $\alpha > 1$ комплексты (нүктелер жинағын) үлкейтіп көбейтіп қажетті бағытта ығыстыруға мүмкіншілік туғызады.

Алғашқы нүктеден нүктелер ортасына қарай жартылай ұзындыққа ығыстыруымыз комплексты сығып кішірейтеді. Сондықтан, комплекс (нүктелер жинағы) ығысу мерзімінде, шектелу облысының ішінде, шарттардың қиылысқан бұрышына қарамастан, шекара бойымен де жүріп отырады.

Алғашқы комплексты (нүктелер жинағын) тағайындау тәсілі бойынша айтатынымыз, бір неше рет ығысып іздеу үрдісін оңай өткізуімізге болатындығы.

Егерде, есептеліп қолданылатын нүктелер жинағының ерекшелігіне байланысты әдістің іздеу үрдісі бірден аяқталған жағдай да да кем дегенде бір рет ығысу процедурасын жүргізетінімізге көзіміз жетеді.

Сондықтан, функция минимумының мәні туралы біраз мәліметтер жинап, сосын осы мәліметтерді 5000 жылда жазылған ішкі программада қолданып қарасты функцияның минимумын іздеу процедурасын бастағанымыз жөн болады.

Бұл әрекеттер, іздеу процедурасының аяқталуын, яғни немесе үрдістің минимум орналасқан нүктеге келіп тірелгендігін тексеруін есептеу үрдісінде компьютердің жіберетін қателерді азайтуына әкеп соғады. Оны былай түсіндіруімізге болады. егерде функция мәндері нольге тым жақын орналасып бірінші тоғыз цифрларының сегізі бірдей болған жағдайда, дәлдікті есептеу үрдісінде тіпті теріс санның болуы да мүмкін. (бұл мәшиненің есептеу дәлдігіне де байланысты болуы да ықтимал, онда да іздеу үрдісі жүргізілгенде де есептеу қателері мен кездесеміз). Осындай қиыншылықтарды ескеру программасының 5000 жолындағы ішкі программада ескерілген. Сөйтіп, функция минимумының мәні нольге тең байқап программаны қолданайық.

1*-Мысал.

Почта посылкасы туралы өңделген есепті шығарыңыз.

Алғашқы нүкте ретінде (20; 10; 10) нүктені қарастырып. Кездейсоқ сандарын есептеуді 7199 бастап көріп y=RND(x) операторын қолданып пайдаланғанда, бірақ бұл саннан бастайық басқа саннан бастайық айырмашылығы жоқ. Программаның жұмыс істегендегі көрінісінің алдыңғы бөлшегі және соңғы бөлшегі келтірілген. Функция минимумы (20; 11; 15) нүктесінде орналасқан. Бұл әдіспен өте жақсы дәлдікте есептеп нәтижені таптық. Функцияның есептелген саны 231 тең, ол (басқа іздеу үрдісіне барғанда) үлкен сан сияқты, бірақ Бокстың тауып зерттеген нәтижесіне сәйкес болып тұрғаны мәлім. Қазіргі жағдайда мұндай есептеу сан, компьютердің дамуына байланысты ешқандай кедергі болмайды.

```
20 PRINT «КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД»:PRINT «»
40 REM  ФУНКЦИЯ  Z=F(X1, X2, ..., XN)  ВЫЧИСЛЯТСЯ  В  СТРОКЕ  5000
60 REM  ВЫЧИСЛЕНИЕ  ЗНАЧЕНИЙ   G1, G2, ...,GN   И   ПРОВЕРКА
65 REM  ОГРАНИЧЕНИЙ  ПРОИЗВОДИТСЯ  В  СТРОКЕ  6000
80 PRINT «ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ОГРАНИЧЕНИЙ»:INPUT  M
100 PRINT «ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ПЕРЕМЕННЫХ»:INPUT  N
120 DIM  X(N), Y(N), L(N), U(N), XC(N), XO(N), XR(N), XH(N)
160 K=2*N:PP=0
180 DIM C(K, N), F(K), G(M), IC(M), EC(2*N)
200 PRINT «ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯң
220 FOR J=1 TO N:INPUT X(J):C(1, J)=X(J):XC(J)=X(J):NEXT J
```

```
240 REM  ПРОЧИТАТЬ ЗНАЧЕНИЯ НИЖНИХ И ВЕРХНИХ ГРАНИЦ
260 FOR  J=1  TO N:READ    L(J), LK(J):NEXT J
280 REM  ВКЛЮЧИТЬ  ГЕНЕРАТОР  СЛУЧАЙНЫХ  ЧИСЕЛ
290 PRINT «ВВЕДИТЕ   X»:INPUT   X
500 I=1
520 GOSUB 5000;F(1)=Z
600 I=I+1
620 FOR   J=1  TO    N:C(I, J)=L(J)+RND(X)*(U(J)-L(J)):X(J)=C(I, J):NEXT    J
640 IM=1:GOSUB    6000
660 IF   IC=1 THEN   GOTO   720
670 REM  ОБНОВИТЬ  ЗНАЧЕНИЕ   «ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ»
680 FOR  J=1  TO  N:XC(J)=((I-1)*XC(J)+C(J))/I:NEXT   J
700 GOTO   760
720 FOR   J=1 TO N:C(I, J)=(C(I, J)+XC(J))/2:X(J)=C(I, J):NEXT     J
740 GOTO   640
760 GOSUB    5000:F(I)=Z
780 IF   I<K   THEN   GOTO   600
790 REM  УПОРЯДОЧИТЬ  ЗНАЧЕНИЯ  ФУНКЦИИ  И  ТОЧКИ,
795 REM   В  КОТОРЫХ  ОНА  ВЫЧИСЛЕНА
800 FOR  J=1  TO  K-1
820 FOR   I=J+1  TO  K
840 IF   F(J)<=F(I)   THEN   GOTO   900
860 F=F(J):F(J)F(I):F(I)=F
880 FOR  L=1 TO N:Y(L)=C(J, L):C(J, L)=C(I, L): C(I, L)=Y(L):NEXT   L
900 NEXT I:NEXT J
910 REM ЗАПОМНИТЬ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ
920 FM=F(1)
1000 PRINT «ПЕРВАЯ ТОЧКА»
1020 PRINT «МИНИМАЛЬНОЕ   ЗНАЧЕНИЕ = »F(1)
1040 PRINT «МИНИМАЛЬНАЯ ТОЧКА»
1060 FOR L=1 TO N:PRINT «X»;L,C(1,L):NEXT L
1080 PRINT «»
1100 REM ЗАДАТЬ КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ
1120 A=1.3
1190 REM  ОПРЕДЕЛИТЬ «ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ»   НАИЛУЧШИХ   (K-1)   ТОЧЕК
1195 REM   И   ЗАПОМНИТЬ   НАИХУДШУЮ   ТОЧКУ
1200 FOR  L=1  TO  N:XH(L)=C(K,L):X0(L)=(K*XC(L)-XC(L)-XH(L))/(K-1):NEXT L
1390 REM  ПОЛУЧИТЬ  ОТРАЖЕННУЮ  ТОЧКУ
1400 FOR L=1 TO N:XR(L)=(1+A)*X0(L)-A*XH(L):X(L)=XR(L):NEXT L
1490 REM ПРОВЕРИТЬ, ДОПУСТИМА ЛИ НОВАЯ ТОЧКА
1500 IM=0
1520 GOSUB 6000
1540 IF EC=0 AND IC=0 THEN GOTO 2000
1550 REM ЕСЛИ ТОЧКА ЯВЛЯЕТСЯ ДОПУСТИМОЙ, ТО ПЕРЕЙТИ К СТРОКЕ
2000
1555 REM И ВЫЧИСЛИТЬ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ
1600 IF EC=0 THEN GOTO 1800
1610 REM ЕСЛИ ЯВНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НАРУШЕНЫ, ТО
1615 REM ПОМЕСТИТЬ ТОЧКУ ВНУТРЬ ГРАНИЦ
1620 FOR J=1 TO N
1640 IF EC(J)=1 THEN XR(J)=L(J)+.00001:X(J)=XR(J)
1660 IF EC(J+N)=1 THEN XR(J)=U(J)-.00001:X(J)=XR(J)
1680 NEXT J
```

```
1800 IF IC=0 THEN GOTO 2000
1810 REM ЕСЛИ НЕЯВНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НАРУШЕНЫ, ТО
1815 REM ПЕРЕМЕСТИТЬСЯ НА ПОЛОВИНУ РАССТОЯНИЯ К «ЦЕНТРУ ТЯЖЕСТИ»
1820 FOR L=1 TO N:XR(L)=(XR(L)+X0(L))/2:X(L)=XR(L):NEXT L
1840 GOTO 1490
2000 GOSUB 5000:FR=Z
2010 REM ЕСЛИ НОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ -- НАИХУДШЕЕ,
2015 REM ТО ПЕРЕМЕСТИТЬСЯ НА ПОЛОВИНУ РАССТОЯНИЯ К ТОЧКЕ X0
2018 REM И ВЫЧИСЛИТЬ НОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ
2020 IF FR<F(K) THEN GOTO 2400
2040 FOR L=1 TO N:XR(L)=(XR(L)+XO(L))/2:X(L)=XR(L):NEXT L
2060 GOTO 1490
2400 REM ОБНОВИТЬ XC И ЗАМЕНИТЬ НАИХУДШУЮ ТОЧКУ НОВОЙ ТОЧКОЙ
2410 F(K)=FR
2420 FOR L=1 TO N
2440 XC(L)=K*XC(L)-C(K,L)+XR(L)
2460 XC(L)=XC(L)/K:C(K,L)=XR(L)
2480 NEXT L
2490 REM УПОРЯДОЧИТЬ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ,
2495 REM В КОТОРЫХ ОНА ВЫЧИСЛЕНА
2500 FOR J=1 TO K-1
2520 FOR I=J+1 TO K
2540 IF F(J)<=F(I) THEN GOTO 2600
2560 F=F(J):F(J)=F(I):F(I)=F
2580 FOR L=1 TO N:Y(L)=C(J, L):C(J,L)=C(I,L):C(I,L)=Y(L):NEXT L
2600 NEXT  I:NEXT   J
2610 REM ЕСЛИ НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ УМЕНЬШЕНО,
2615 REM ВЫСТАВИТЬ ПРИЗНАК ПЕЧАТИ
2620 IF  F(1)<FM  THEN  PP=1
2630 REM  ЕСЛИ  УМЕНЬШЕНИЕ  ФУНКЦИИ  НЕ  ОБНАРУЖЕНО,
2635 REM ТО  ПРОВЕРКА  КРИТЕРИЯ  ЗАВЕРШЕНИЯ ПОИСКА  МИНИМУМА НЕ ПРОИЗВОДИТСЯ
2640 IF PP=0 THEN GOTO 1190
2990 REM НАЙТИ ОТКЛОНЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ
3000 S1=0:S2=0
3020 FOR  I=1  TO  K:S1=S1+F(I):S2=S2+F(I)*F(I):NEXT  I
3040 SD=S2-S1*S1/K:SD=SD/K
3090 REM НАЙТИ ОТКЛОНЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ
3095 REM ТОЧКАМИ  КОМПЛЕКСА
3100 DM=0
3120 FOR  I=1  TO  K-1:FOR  J=I+1  O  K
3140 D=0
3160 FOR   L=1  TO  N:D=D+(C(I,L))^2:NEXT   L
3180 D=SQR(D)
3200 IF D>DM   THEN   DM=0
3220 NEXT  J:NEXT  I
3400 IF PP=0 THEN GOTO 3790
3500 PRINT «НОВАЯ  ТОЧКА  В  СТРОКЕ  3500»
3520 PRINT «МИНИМАЛЬНОЕ  ЗНАЧЕНИЕ=»F(1)
3520 PRINT «ТОЧКА  МИНИМУМА»
3560 FOR  L=1  TO  N:PRINT   «X»;L,C(1,L):NEXT   L
```

```
3580 PRINT «»
3600 FM=F(1):PP=0
3790 REM  ПРОВЕРКА  СХОДИМОСТИ
3800 IF SD>.000001 AND DM>.0001 THEN GOTO 1190
4000 PRINT «МИНИМУМ НАЙДЕН»
4020 PRINT «ТОЧКА МИНИМУМА»
4040 FOR L=1 TO N:PRINT  «X»L,C(1,L):NEXT L
4060 PRINT «МИНИМУМ ФУНКЦИИ=»F(1)
4080 PRINT «КОЛИЧЕСТВО ФУНКЦИИ=»FE
4100 END
5000 Z= -X(1)*X(2)*X(3)+3300
5050 FE=FE+1
5100 RETURN
6000 FOR II=1 TO 2*N:EC(II)=0:NEXT II:EC=0
6020 FOR II=1 TO M:IC(II)=0:NEXT II:IC=0
6050 IF IM=1 THEN GOTO 7100
6090 REM ПРЕДЫДУЩАЯ СТРОКА ПРЕДНАЗНАЧЕНА ДЛЯ ПРОВЕРКИ
6095 REM НЕРАВЕНСТВА GI(X)<=BI
6100 FOR II=1 TO N
6120 IF X(II)<L(II) THEN EC(II)=1:EC=1
6140 IF X(II)>U(II) THEN EC(N+II)=1:EC=1
6160 NEXT II
7100 G(1)=X(1)+2*X(2)+2*X(3)
7110 IF G(1)>72 THEN IC(1)=1:IC=1
8000 RETURN
9000 DATA 0,20,0,11,0,42
```

```
КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ОГРАНИЧЕНИЙ
1
ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ПЕРЕМЕННЫХ
3

ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
20
10
10
ВВЕДИТЕ X
-71

ПЕРВАЯ ТОЧКА
МИНИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ= 243.2185
МИНИМАЛЬНАЯ ТОЧКА
X 1         19.03517
X 2         9.735619
X 3         16.49469

НОВАЯ ТОЧКА В СТРОКЕ 3500
МИНИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ РАВНО 238.7466
ТОЧКА МИНИМУМА
```

X 1 19.0307
X 2 9.734394
X 3 16.52478

МИНИМУМ НАЙДЕН
ТОЧКА МИНИМУМА
X 1 19.0307
X 2 9.734394
X 3 16.52478
МИНИМУМ ФУНКЦИИ РАВЕН 238.7466
КОЛИЧЕСТВО ВЫЧИСЛЕНИЙ ФУНКЦИИ
РАВНО 7

Аралас (комплексті) әдіс шектелу шарттары қойылған үлкен есептер тобына пайдалануымызға мүмкіншілік береді. Осы саладағы ең қолайлы әдіс деп айтып түсінуіміз қате болады.

Егерде, бағытталған функциямыз шектелу облысымыз деңгейлік болған жағдайда әдісті пайдалану жақсы нәтиже беруі мүмкін, онда да қарасты есептің белгілі қасиеттеріне байланысты іздеу үрдісін тоқтатып аяқтауымызды тексеруімізді өңдеп қарастыруды талап етуі мүмкін. Егерде қарасты функциямыз ойпақты болса немесе шектелу облысымыз деңгейлік болмаса бұл әдістің жұмыс істеуі екіталай екеніне көзіміз жетеді. Расында да, егерде шектелу облысымыз деңгейлік болмаса, қарасты нүктелер тобының центрі шектелу облысында болмағанына немесе болатынына нақты айтатынымыз анық.

Сондықтан,

$x_{r(жаңа)} = (x_r+x_0) / 2$

жаңа нүктесіне ығысуымыз қажетті нәтиже беруі, бермеуі екіталай. Бұл есепте аймақты емес глобальді минимумды тапқанымызға да зер салуымыз қажет.

Бокстың ұғымы бойынша, программаны әртүрлі бастапқы нүктелерге пайдаланып қолданып жоғарыда айтылған ерекшелікті шешуімізге болатындығы. Бастапқы комплексті (нүктелер жинағын) кездейсоқ тапқандығымыз, осы нүктелер жинағының шектелу облысында өзінің ішіне кіргізуі және сондықтан, әдістің беретін жауабының глобальді минимумге әкеп беретіндігі.

Программаны бірнеше рет пайдаланғанда да функция минимумының мәні бірдей болатындығы да осыны дәлелдейді.

§ II. 6.3 Жаттығулар

1) Шектелу $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 5$ шарттарындағы $f(x, y)=x^2+y^2$ функциясының минимумын комплексті әдісті пайдаланып табыңыз?

2) Шектелу $x^2 + 2y \leq 1$, $2x - 2y \leq 1$ шарттарындағы $f(x, y) = x^2 + 6xy - 4x - 2y$ функциясының минимумын табыңыз

3) Шектелу $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ және $x_1 + x_2 \geq 4$ шарттарындағы f(x, y) $= 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ функциясының минимумын табыңыз

4) Комплексті (аралас) әдісті іске асыратын программамен эксперимент жасаңыз, комплекстегі (нүктелер жинағының) нүкте санын k-өзгертіп, (160 жол); α-сәулелендіру коэффициентін өзгертіп (1120 жол). Осы тақырыпта қарастырылған есептерді жаңа мәндер үшін және төмендегі жаттығулардағы есептерді шығарып

5) Функцияның минимумын табыңыз

$$f(x_1, x_2) = \frac{4}{x_1} + \frac{9}{x_2} + (x_1 + x_2)$$

егерде, ол келесі шарттармен $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq S$ шектелген болса.

Екі жағдайды қарастырыңыз S=6; S=4 (II.5.5 тақырыбындағы 14-жаттығуды қараңыз)

6) Шектелу $x_1 \geq 0$, $0 \leq x_2 \leq x_1 / \sqrt{3}$, $0 \leq x_1 + \sqrt{x_2} \leq 6$ шарттарында $f(x) = -[9 - (x_1 - 3)^2]x_2^3 / 27\sqrt{3}$ функцияның минимумын табыңыз

7) Шектелу $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1x_2 \geq 8$ шарттарында $f(x) = x_1^4 + x_2^2$ функцияның минимумын табыңыз

8) Шектелу $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$, $x_1x_2x_3 \geq 3$ шарттарында $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ функцияның минимумын табыңыз (Бастапқы нүкте ретінде (1; 2; 3) нүктесін қарастырып)

9) Шектелу $2x_1^2 + x_2^2 \leq 34$, $2x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ шарттарында $f(x_1, x_2) = (x_1-3)^2 + (x_2-4)$ функцияның минимумын табыңыз

10) Шектелу $x_1 \geq 0$, , $x_2 \geq 0$ $x_3 \geq 0$, $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 \leq 51$ шарттарында $f(x_1, x_2, x_3) = - x_1x_2x_3$ функцияның минимумын табыңыз

7 -тарау

Шектелусіз қалыптанған оптимизация

§ II.7.1 Айып функциялары

Айып функцияларының негізгі мазмұны ретінде функциялардың минимумын іздеп табу есептерін өзгертіп қарастыру болып табылады, яғни z=f(x) функциясын x-ке қойылған шектелу шарттарын ескеріп Z=f(x)+P(x) функциясының *шектелусіз минимумын* іздеу есебіне өзгерту.

P(x) - функциясын айып функциясы деп атаймыз. Ол функция, егерде шектелу шарттар бұзылған кезде z функциясына "айып тағып", яғни оның мәнін ұлғайтуы қажет. Бұл жағдайда z функциясының минимумы шектелу облысының ішінде болуы қажет. Мұндай шарттарды қанағаттандыратын P(x) функциялары әр түрлі болуы мүмкін.

Минимумды іздеу есебін келесі түрде қарастыруымызға болады.

z = f(x) функциясының (II.7.1)

$c_j(x) > 0$, (j=1, 2, --, m) минимумын шектелу

шарттары болған кезде табыңыз

Ескерту. Шектелудегі $h \le 0$ "кіші немесе тең" шарттардың түрін, көбейтіп $-h(x) \ge 0$ жазып қарастыруымызға болады, сондықтан, жоғарыдағы есептің қойылымда шарттардың жалпы түрі жойылмағандығын аңғарайық.

P(x) функциясын келесі өрнекпен анықтап жазғанымыз ыңғайлы

$$P(x) = r\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{c_j(x)} \qquad \text{(II.7.3)}$$

мұнда, r-оң мәнді сан. Онда Z $=\varphi(x,r)$ функциясы келесі өрнекпен марапатталады

$$Z = \varphi(x,r) = f(x) + r\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{c_j(x)} \qquad \text{(II.7.4)}$$

Егерде, x нүктесі шектелу шарттарын $c_j(x) \ge 0$ қанағаттандырса (бұзбаса), онда Z мәні де кейбір санға тең болғаны. Бірақ бұл сан сәйкес f(x) мәнінен (есептің негізгі бағытталған функция мәнінен), үлкен сан болады, яғни осы екі санның айырмашылығын кішірейтуімізге болады, егерде, r-дің мәнін кішкене сан қылып тағайындасақ.

Егерде, есептеліп қабылданған x нүктесі шектелу шарттарын бұзбаса және шектелу облысының шекарасына жақын орналасса кем дегенде шарттағы $c_j(x)$ функциясының біреуінің мәні ноль санының маңында болады. Онда, P(x) функциясының және сондықтан да Z функциясының мәндері өте үлкен сан болғаны. Сөйтіп, P(x) функциясының әсерінің арқасында, шектелу облысының шарттарының қиылысқан нүктелерінің және шекараларының маңында "шетіне қарай қатты иілген доғаның" пайда болуы.

Сондықтан, егерде іздеу үрдісін шектелу шарты бұзылмайтын нүктеден бастасақ және процедураны шектелу жоқ $\varphi(x,r)$ функциясына жүргізсек минимум орналасқан нүктесі, шектелу шарттарын ескеріп f(x) функциясының минимумын іздеу облысында қанағаттандырады (бұзбайды). Минимум орналасқан нүктеге P(x) функциясының әсерін азайту үшін, r-ді жеткілікті кіші сан деп есептеп, біздер $\varphi(x,r)$ функциясының шектелусіз минимум орналасқан нүктемен шектелу шарттары бар f(x) функциясының минимумы орналасқан нүктесі бір-біріне келіп іздеп табуымызға болады.

Жоғарыдан айтылған әрекеттер қалай өтетінін түсіну үшін, қарапайым мысалды қарастырайық.

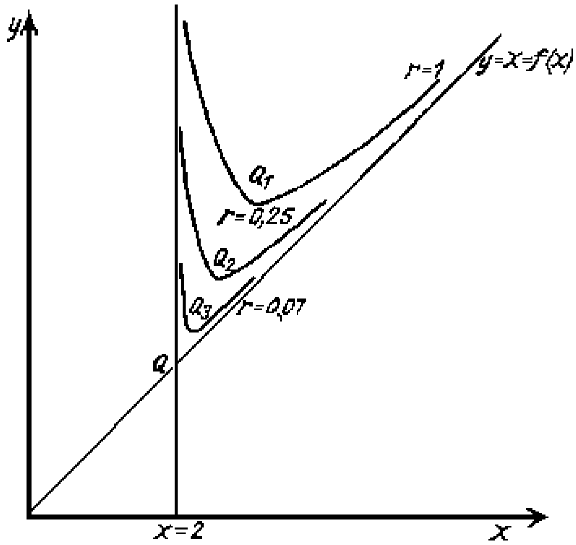
1-мысал.

(II.7.4) теңдеуі арқылы берілген айып функциясын қолданып, f(x)=x функциясының минимумын шектелу $x \ge 2$, яғни $x - 2 \ge 0$ шартында іздеп табыңыз. Функция минимумының мәні, x=2 тең болғанда 2 санына тең болады.

Айып функциясының көмегімен шешімді қалай табуға болады? Ол үшін $\varphi(x,r) = x + \dfrac{r}{x-2}$ функциясын қарастырамыз.

II.7.1-суретіндегі $\varphi(x,r)$ функциясының графигі көрсетілген және оның минимумының орналасу нүктесі, r санының әртүрлі мәнінде (1; 0,25 және 0,01) қарастырылған.

Шектелу облысы тік түзу сызықтың x=2 оң жағында орналасады. Q_1, Q_2, Q_3 нүктелер тізімі Q нүктесіне қарай ұмтылатынын байқаймыз. Q нүктесі функцияның минимумы, шектелу шартты бар кездегі, орналасатын нүкте.



II.7.1- сурет

Енді $\varphi(x,r)$ функциясының минимумының I-ші тарауда айтылған әдісті пайдаланып табайық.

$$\frac{d\varphi}{dx} = 1 - \frac{r}{(x-2)^2}$$

Сондықтан, егерде

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \ (x-2)^2 = r$$

яғни $$x = 2 \pm \sqrt{r}$$

онда $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \dfrac{2r}{(x-2)^3}$ және минимум орналасатын нүкте $x = 2 + \sqrt{r}$ шектелу облысын қанағаттандырып, соның ішінде болады.

Сондықтан, $\varphi(x,r)$ функциясының минимумы $x = 2 + \sqrt{r}$ нүктесінде $2 + 2\sqrt{r}$ мәніне тең болады.

Онда, координата (3; 4) нүктесі Q_1 болады, координаты (2,5; 3) нүктесі - Q_2 координаты (2,1; 2,2) нүктесі - Q_3 аз болады.

Енді анық ұйғаратынымыз $\varphi(x,r)$ шектеусіз функциямыздың минимумының мәні екі санына қарай, $r \to 0$ нольге ұмтылғанда жақындайды және минимумның орналасқан нүктесі x=2 тең болады.

$\varphi(x,r)$ функциясын, r айнымалысынан байланысты жай ғана функция ретінде қарастыр, жалпы жағдайда, минимумын аналитикалық әрекеттермен табуға болмайды. Сондықтан, оны табу үшін сандық әдістерді пайдалануымыз керек.

Егерде бағытталған f(x) функциясы деңгейлік болса, ал $c_j(x)$ функциясы ойпақты болса, онда (II.7.4) теңдеуі арқылы берілген $\varphi(x,r)$ функциясында, шектелу деңгейлік облысында деңгейлік болатынын белгілейік.

Сондықтан, $\varphi(x,r)$ функциясының анықталған r санына, біреу ғана минимумының болғаны. Егер x_1 және x_2 де нүктелері қажетті облыста орналасқан болса, $c_j(x_1) \geq 0$ яғни және $c_j(x_2) \geq 0$, j=1, 2, ..., m үшін, онда $0 < \theta < 1$ үшін келесі теңсіздік орынды болады.

$$c_j(\theta x_2 + (1-\theta)x_1) \geq \theta c_j(x_2) + (1-\theta)c_j(x_1) \geq 0,$$

неге десеңіз $c_j(x)$ функциясы деңгейлік. Сондықтан берілген шектелу облысымыздың деңгейлік болғаны.

Сөйтіп, $0 < \theta < 1$ үшін $\theta x_2 + (1-\theta)x_1$ нүктесі де қажетті облыста орналасқаны (II.5.3 тақырыбындағы екінші жаттығу мен салыстырыңыз) және де шектелу $c_j(x\ ) \geq 0$ шартын бұзбайтын барлық нүктелерде $1/c_j(x)$ функциясы да деңгейлік болады.

Егер де $h(x)=1/c_j(x)$, онда

$$\nabla h(x) = \frac{-\nabla c_j(x)}{\left|c_j(x)\right|^2}$$

Сондықтан h(x) функциясының Тессиан матрицасы келесі түрде жазылады $H(x) = -\frac{c(x)}{[c_j(x)]^2} + \frac{2\nabla c(x)\nabla c(x)^T}{[c_j(x)]^3}$, мұнда,

$c(x)_{ik} = \partial^2 c_j(x)/\partial x_i \partial x_k$,

$c_j(x)$ -функциясының Тессианы болып табылады. Онда, егерде P-кездейсоқ вектор десек, келесі теңдеу орынды болады

$$p^T H(x)p = -\frac{p^T c(x)p}{[c_j(x)]^2} + \frac{2[p^T \nabla c_j(x)]^2}{[c_j(x)]^3}$$, мұнда әрқашанда $p^T H(x)p \geq 0$

оң мәнді, неге десең $c_j(x)$ - деңгейлік функция және $c_j(x) \geq 0$ болғандықтан c(x) теріс мәнді табылған матрица. Онда, H(x) оң мәнді табылған матрица және барлық облыс ішінде $1/c_j(x)$ деңгейлік функция (II.5.5 тақырыбындағы 11 жаттығуға оралыңыз).

5.3 тақырыбындағы 1-жаттығудағы келтірілген нәтижелерден байқайтынымыз, егерде r>0 оң мәнді сан болса, (II.7.3) теңдеу арқылы берілген P(x) функциясы және (II.7.4) теңдеу арқылы берілген $\varphi(x,r)$ функциясы да деңгейлік болғаны.

Енді осы тақырыптағы нәтижелерді қорытып, шектелу бар есептің жалпы түрінде таратайық ((II.7.1) және (II.7.2) теңдеулерін қараңыз).

$r_1, r_2, ..., r_b, ...,$ -мәндері кішірейіп нөлге қарай ұмтылған қатарлар үшін, сәйкесті $\varphi(x,r)$ функциясының минимумы орналасқан нүктелерін $x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*$ белгілесек. Онда, $x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*$ нүктелер қатары да, шектелуі анықталған есептің оптимальді шешіміне ұмтылғаны, егерде $r \to 0$ нөлге ұмтылса.

Сондықтан,

$$\lim x_k^* = x^* \qquad \text{(II.7.5)}$$

және

$$\lim_{r_k \to 0}[\min \varphi(x,r_k)] = f(x^*), \qquad \text{(II.7.6)}$$

мұнда, шектелуі бар f(x) минимумы орналасқан x^* нүктесі.

Табылған нәтижені келесі ұғымда дәлелдеуімізге болады.

Егерде, f(x) функциясы үзіліссіз болса және $f(x^*) \le f(x)$ барлық шектеуді бұзбайтын нүктелерде орынды болса, онда, кездейсоқ жеткілікті ғып мәні кіші ε санын тағайындап, қажетті x^1 нүктесін табуымызға болады, келесідегідей.

$$f(x^1) < f(x^*) + \varepsilon/2 \qquad \text{(II.7.7)}$$

r_k-кішірейіп кемитін қатар болғандықтан, нольге қарай ұмтылған, $k \ge K$ теңсіздігі орынды қылып, K санын табуымызға болады.

$$r_k \le \{\frac{\varepsilon}{2m} \min[\frac{1}{c_j(x)}]\} \qquad \text{(II.7.8)}$$

$\varphi(x,r)$ функциясының анықтамасы P(x)>0 бойынша оң мәнді екенің ескерсек

$$f(x^*) \le \min \varphi(x,r_k) = \varphi(x_k^*, r_k), \qquad \text{(II.7.9)}$$

мұнда, x_k^*-нүктесі, шектелусіз $\varphi(x,r_k)$ функциясының минимумы орналасқан нүкте.

Жәнеде, егер k>K онда r_k<r_{kt} және келесі теңсіздік орынды болғаны.

$$\varphi(x_k^* r_k) \le \varphi(x_K^* r_K) \qquad \text{(II.7.10)}$$

Бұл өрнектің орынды болуы, неге десеңіз, $x_k^* - \varphi(x,r_k)$ функциясының минимумы орналасқан нүкте болғандықтан, және шектелу облысындағы кезкелген нүктеде, яғни x_k^* нүктесінде де функция мәндері $\varphi(x_k^*, r_k)$ мәнінен үлкен сан боланыны.

Сондықтан,

$$\varphi(x_k^*, r_k) = f(x_k^*) + r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j(x_k^*)} > f(x_k^*) + r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j(x_k^*)}$$

неге десеңіз $r_k < r_K$.

Сондықтан, $\varphi(x_k^*, r_k) > \varphi(x_K^*, r_K)$.

Онда,

$$f(x^*) \le \varphi(x_k^*, r_k) \le \varphi(x_K^*, r_K) < \varphi(x_k^*, r_k) \qquad \text{(II.7.11)}$$

x_K^* Нүктесі $\varphi(x, r_k)$ функциясының минимумы орналасқан нүкте болғандықтан

$$\varphi(x_k^*, r_k) \le \varphi(x^1, r_K) = f(x^1) + r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j(x^1)} \qquad \text{(II.7.12)}$$

Сондықтан, (7.11) және (7.12) қатынастарынан алып жазатынымыз.

$$f(x^*) \le \varphi(x_k, r_k) \le f(x^1) + r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j(x^1)} \qquad \text{(II.7.13)}$$

(7.8) Теңдеуінен ұйғаратынымыз келесі

$$f(x^1) + r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j(x^1)} \le f(x^*) + \varepsilon/2 \qquad \text{(II.7.14)}$$

Онда (7.7) теңдеуінен ұйғаратынымыз

$$f(x^*) \le \varphi(x_k, r_k) \le f(x^*) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

және

$$\varphi(x_k^*, r_k) - f(x^* < \varepsilon \qquad \text{(II.7.15)}$$

Е санының мәнін кездейсоқ кіші мәнғылып тағайындауымызға болғандықтан, әрқашанда k санын келесі шекарада таңалап алуымызға болады.

$$f(x^*) < \varphi(x_k^*, r_k) < f(x^*) + \varepsilon$$

Сөйтіп, $k \to \infty (r_k \to 0)$ ұмтылғанда

$$\lim_{r_k \to 0} \varphi(x_k^*, r_k) = f(x^*) \qquad \text{(II.7.16)}$$

белгілі дәлдікте.

Жоғарыда келтірілген дәлдіктен ұғатынымыз, егерде $r_k \to 0$ ұмтылса

$$f(x_k^*) \to f(x^*) \text{ және } \quad r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j(x_k^*)} \to 0 \qquad \text{(II.7.17)}$$

Жаттығу ретінде оқырманға $f(x_1^*), f(x_2^*), ..., f(x_k^*)$ кемитін қатар $f(x_{k+1}^*) < f(x_k^*)$ екенін (II.7.18) дәлелдеуді қалдырамыз.

Егерде, f(x) функциясы деңгейлік болса, ал $c_j(x)$ функциялары j=1, 2, --, n ойпақты болса, онда шектелу шарттар берілген f(x) функциясының тек қана бір минимумы болғаны.

(Табылған нәтижелерді II.5.3 тақырыбында анықталған нәтижелер мен салыстырыңыз).

2-мысал.

Келесі есепті қарастырайық.

Шектелу $x_1 - 1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ шартында $f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2$ функциясының минимумын табайық?

(II.7.4) теңдеуіне ұқсас қып жазамыз

$$\varphi(x, r) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^2 + x_2 + r(\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2})$$

φ функциясының минимумы болуының қажетті шарты келесі теңдеулер түрінде жазылады

$$(x_1 + 1)^2 - \frac{r}{(x_1 - 1)^2} = 0, 1 - \frac{r}{x_2^2} = 0,$$

бұларда келесі шешім болады $x_1(r) = (1 + \sqrt{r})^{1/2}$, $x_2(r) = \sqrt{r}$

Онда, $\varphi(x, r)$ функциясының минимумының мәні

$$\varphi^*(r) = \{\frac{1}{3}[(1 + \sqrt{r})^{1/2} + 1]^3 + \sqrt{r} + r[\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{(1 + \sqrt{r})^{1/2} - 1}]\} =$$

$$= \{\frac{1}{3}[(1 + \sqrt{r})^{1/2} + 1]^3 + \sqrt{r} + r[\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{(1 + \sqrt{r})^{1/2} + 1}{\sqrt{r}}]\} =$$

$$= \{\frac{1}{3}[(1 + \sqrt{r})^{1/2} + 1]^3 + \sqrt{r} + \sqrt{r}[1 + 1 + (1 + \sqrt{r})^{1/2}]\}.$$

Сөйтіп, егерде $r \to 0$ ұмтылса $x_1(r) \to 0$, $x_2(r) \to 0$ ұмтылатыны анық

және $\varphi^*(r) \to f(1;0) = 8/3$.

§ II. 7.2 Фиакко және Маккормик SUMT әдісі

SUMT (sequential unconstrained minimisation technique) әдісін бірінші рет 1951 жылы Кэррол ғалымы ұсынды. Оның ұсынысын Фиакко және Маккормик зерттеп, осы әдістің шешімге әкеп тірелетінін және оның теориялық сұрақтарын қарастырып, осы әдісті қолдануға тәжірибелік жүйе жасады.

Алғашқы тақырыпта айтылған әдісте, екі мысалға келтіріп қолданғанда, өте сирек пайдалануымызға болады. Неге десеңіз, $\varphi(x,r)$ функциясының оптимальді нүктесін кейбір жағдайда, табу өте қиынға соғуы мүмкін, сосын $x^*(r)$ функциясы түрінде келтіріп $r \to 0$ нөлге ұмтылғандағы шектелуді зерттеуге келмеуі мүмкін.

Сондықтан, тәжірибеде қарасты әдісті қолдану үшін, есептейтін сандық әдісті құруымыз қажет.

Онда алдыңғы тақырыптағы әдістің есептің шешіміне әкеп тірелуінің теориялық қасиеттерін қолданып бұзбайтындайғып қарастыруымыз керек. Берілген шектелу $c_j(x) \geq 0$ (j=1, 2, --, n) шарттарындағы f(x) функциясына $r=r_0$ алғашқы санын тағайындап, $\varphi(x,r_0)$ функциясына шектеусіз қарастыруға дайындаймыз. Сосын, осы шектеусіз $\varphi(x,r_0)$ функциясының минимумын IV тарауда келтірілген ДФП (Девидон-Флетчер-Пауэлл) әдісін қолданып іздеп табуымыз қажет. $\varphi(x,r_0)$ функциясының минимумын тапқаннан r-дің кейін мәнін кіші санғып қабылдап жалғастырамыз.

Егерде, $r_1=r_0/c$, мұнда с-тұрақтысы с >1 деп қабылдасақ болғаны, ал тиімді болуы қажет, төмендегі программада с =10 тең деп қабылданға, бұл кездейсоқ сан екенін ескеріңіз. Тиімді сан ретінде с =12, с=16 және т.с. сандар болуы мүмкін.

Сосын ДФП әдісін тағы да қолданып $\varphi(x,r_1)$ функциясының минимумын табу қажет. Сөйтіп, итерациялық процедураны құрастырамыз. k-қадамындағы $\varphi(x,r_k)$ функциясының минимумы x_k^* нүктесін де орналасты деп шешсек.

Онда, осы нүктені итерациялық процедурасында алғашқы нүкте деп есептеуімізге болатындығы өте керек ұғым. Сөйтіп, $r_{k+1}=r_k/c$ тең деп қарастырып $\varphi(x,r_{k+1})$ функциясының минимумын іздейміз. Енді анық ұғатынымыз, r_k қатарының кішірейіп нольге қарай ұмтылатыны, яғни есептеп тапқан минимум орналасқан нүктелердің шектелуі шарттары бар есептің шешіміне қарай ұмтылып терелетіндігі.

Төменде SUMT әдісінің программасы келтірілген. Кейбір жағдайларын түсініп анықтағанымыз жөн.

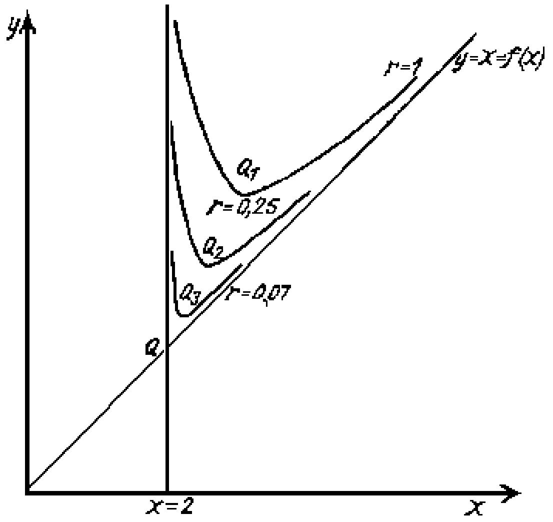
Процедураның басындағы, анықталған нүкте шектелу шартын бұзбайтын, шектелу облысының ішіндегі нүкте деп есептейміз. Есептеу үрдісінің қадамдарында табылатын нүктелерді шектелу облысының ішінде жату жатпауын тексеру әрекетіне өте зор қарауымыз қажет. ДФП әдісі минимумды іздеудің градиенттік әдісіне жатады. Бұл әдіс кубтық интерполяцияны бірөлшемді бағытта жүргізеді. Онда, х нүктесі шектелу облысының шекарасына ішінен жақындаса $\varphi(x,r) \to \infty$ ұмтылады, ал егерде, шектелу облысының шекарасына сырт жағынан жақындаса $\varphi(x,r) \to -\infty$ ұмтылады.

Сондықтан, егер де іздеу үрдісі екі нүктені қосатын түзу сызық бойында жүргізілсе, бір жағдайда нүкте шектелу облысының ішінде, ал екінші жағдайда сыртында орналасса, кубтық интерполяцияны қолдану қолайсыз болып табылады, неге десеңіз функция түзу сызықтың бойында үзілісі бар болып табылады. Шындығында да егер де есептеліп табылған минимум орналасқан нүкте шектелу облысының сыртында орналасса, ДФП әдісі бойынша қайтадан шектелу облысының ішіне қайтып кіре алмаймыз. Есепте ДФП әдісін қолданғанда осы жағдайды жақсы зерттеп пайдалануымыз қажет.

$\varphi(x,r)$ функциясының минимумын іздегенді, итерация қадамының санын азайту үшін, алғашқы r-санының мәнін тағайындау үлкен керекті маңызы болуы мүмкін. Егерде бірден санының мәні, кіші болып тағайындалса $\varphi(x,r)$ функциясының мәні f(x) функциясының мәнінен айырмашылығы аз болып, онда әдістің есептің шешіміне ұмытылып жетуі тез өтеді.

Бірақ мұндай көзқарас есептеу үрдісін қиын жағдайға әкеліп соғуы мүмкін. II.7.1 - суретінен түсінетініміз, r-санының мәні өте кіші болғанда, функция минимумының мәні өте күрделі өзгеріп, градиент әдісін қолданғанда күрделі қиыншылықтарға әкеп соғуы мүмкін.

Ал r санының үлкен мәні (II.7.4) теңдеуіндегі P(x) айып функциясының $\varphi(x,r)$ функциясына әсері көп болып есепті шығаруда қиыншылық тудырады. Сондықтан, алғашқы нүктені тағайындау әрекеті есепті шығарғанда өте күрделі орын табады.



II.7.1-сурет

Көпшілік есебіне алғашқы нүктені r_0=1 тең деп есептегеніміз қолайлы. Тиімді көзқарас ретінде түсінетініміз, егерде алғашқы нүктені есептеп тапқанда, осы нүкте функция минимумы орналасқан нүктеде алыс орналасады.

$$\varphi(x,r) = f(x) + r\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{c_j(x)} = f(x) + P(\alpha)$$

онда, $\varphi(x,r)$ функциясының градиенті кіші мәнді болады

$$\nabla\varphi(x,r) = \nabla f(x) + r\nabla P(x) \qquad \text{(II.7.19)}$$

бұл вектордың квадраттық нормасы

$$\nabla f(x)^T\nabla f(x) + 2r\nabla f(x)^T\nabla P(x) + r^2\nabla P(x)^T\nabla P(x) \qquad \text{(II.7.20)}$$

және минимумның орналасқан нүктесі

$$r = \frac{-\nabla f(x)^T\nabla P(x)}{\nabla P(x)^T\nabla P(x)} \qquad (7.21)$$

мәнінде орын табады.

Осындай r-дің бастапқы мәні, Фиакко және Маккормик ұсыныстары бойынша, есептің жалпы түрінде жақсы нәтиже береді.

r-дің бастапқы мәнін кішірейту өте қарапайым:

$r_{k+1} = r_k / c$, мұнда $c = 10$

$\varphi(x,r_{k+1})$ функциясының минимумын іздеп табу үшін ДФП әдісі қолданылады. Алғашқы нүкте ретінде, $\varphi(x,r_k)$ функциясының оптимальді нүктесі пайдаланылады.

Төмендегі программа IV-тараудағы программаға ұқсас, бірақ бір өлшемді іздеу үрдісінде атқарғанда, шектелу облысының сыртына шығып кетпеуімізге зор зер салуымыз қажет. келесі әдіс дөрекі көрінгенімен қолдануымызға өте қолайлы болуы мүмкін.

Анықталған Р нүктесі және d = -Hg іздеу бағытты белгілі деп есептейік. ((4.34) қатынасын қараңыз)

Кубтық интерполяциясын іске асыру үшін, келесі $q = p + \lambda d$ нүктесін қажет етеді. $\lambda = 2$ Тең мәніне бастайық (нақты әдісіндегі екі рет еселенген қадам) және q нүктесі шектелу облысын бұзған, бұзбағандығын тексерейік, яғни $c_j(q)>0$ барлық j үшін қанағаттандырылдыма (бұзбады ма). Егерде, бұзбасы, λ мәні өзгертпейміз, ал егерде бұзса λ мәніне λ/a өзгертіп жаңа q нүктесінің мәнін есептеп, осы нүктені тексереміз. Әйтеуір бір мерзімде, қажетті q мәнін тауып интерполяцияны іске асырамыз. Бірден а мәнін анықтау түсініксіз. Интерполяция процедурасына λ=2 тең десек a=1.05 қадамды ұзындыққа ыңғайлы болатыны интерполяцияның "қауіпсіз" екені, нүктені шектелу облысының шекарасына жақын орналасуын байқаймыз. (бұл қадамдар программаның 630-750 жолдарында орындалады)

Минимумды іздеу үрдісінде табылған нүктелердің шектелу облысының сыртына шығып кетпеуіне көп назар аударуымыз қажет. ол үшін программаның 1100-1220 жолдарында шаралар қолданылып, табылған минимум орналасқан нүкте, шектелу облысының ішіндегі екі нүктенің арасында орналасатындығын тексеріп анықтайды.

Программаның 1110 жолындағы Н-тің өзгеруі, кездейсоқ тәжірибеге сүйеніп, жасалғанымен өте қолайлы деп есептейміз.

$\varphi(x,r)$ функциясының минимумын іздеуді, оның екі мәнінің F_1 және F_2 айырмашылығын $\left|(F_1 - F_2)/F_1\right| < 0.000001$ болғанша (осы қатынас орындалғанша) жүргіземіз. Бұл қойылған шарт өзгертілуі мүмкін (1570 жол). (II.7.17) қатынасқа сәйкес программаның жұмыс істеуінің аяқталуы (1600 жол) келесі теңсіздік орындалғанда болуы мүмкін.

$$r\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{c_j(x_k^*)} < 0.000001$$

Бұл жағдайда f(x) функциясының минимумының мәні үтірден кейінгі бесінші цифрға дейінгі дәлдікпен есептелінеді. Дәлдікті өзгертуімізге де болады. Программаның жұмыс істеуінің тоқтауы $r_k<10^{-12}$ кіші болған кезде де болады.

Төменде программаның текстісі келтірілген. Ішкі программалар келесі есепті шығару үшін құрылған:

Шектелу

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 \ge 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \ge 0, x_3 \le 5$$

шарттарында $f(x)=(x_1-1)(x_1-2)(x_1-3)+x_3$ функциясының минимумын табамыз.

Сөйтіп,

$$\varphi(x,r)=f(x)+r\left(\frac{1}{x_3^2-x_1^2-x_2^2}+\frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2-4}+\frac{1}{5-x_3}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)$$

алты шектелу шарты бар, үш айнымалыға байланысты функциясының есебін шығарамыз.

Бағытталған функциямыз деңгейлі емес (ойпақты). Шектелу облысыда деңгейлі емес, онда да осы әдіс қолайлы қолданылады.

(0,1; 2; 2,1) - алғашқы нүктесінен бастасақ 48 қадам итерациясынан кейін шешімді табамыз.

Функцияның негізгі минимумы ($-6+\sqrt{2}$) тең болады және ($0;\sqrt{2};\sqrt{2}$) нүктесінде орналасады.

Соңында программаның жұмыс істегендегі көрінісінің бас жағымен соңғы жағы келтірілген. r-дің алдыңғы мәніне есептелген оптималдық нүкте, келесі r-дің мәнін есептеуге қолданылып бірнеше итерациялар қадамынан кейін көрсетілген сөйтіп соңғы минимум анықталғанша.

```
20 PRINT «   МЕТОД ФИАККО И МАККОРМИКА»
40 REM ФУНКЦИЯ Z=F(X1,X2,--,XN) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В СТРОКЕ 5000
60 REM ГРАДИЕНТ G(1),G(2),--,C(M) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ В СТРОКЕ 6000
80 REM ОГРАНИЧЕНИЯ C(1),C(2),--,C(M) ВЫЧИСЛЯЮТСЯ В СТРОКЕ 8000
100 PRINT «ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ»:INPUT N
120 PRINT «ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ОГРАНИЧЕНИЙ»:INPUT M
140 DIM X(N),P(N),Y(N),U(N),G(N),CG(N),D(N)
145 DIM V(N),R(N),Q(N),M(N)
150 DIM H(N,N)
160 DIM C(M),IC(M)
180 PRINT «ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНУЮ ТОЧКУ X1,X2,--XN»
190 FOR I=1 TO N:INPUT X(I):NEXT I
200 REM ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНИЯ ОГРАНИЧЕНИЙ
205 REM IC(J)=0 -- ОГРАНИЧЕНИЕ J ВЫПОЛНЕНО
207 REM IC(J)=1 -- ОГРАНИЧЕНИЕ J НАРУШЕНО
210 S=0
220 FOR II=1 TO M:GOSUB 8000
230 IF C(II)<0 THEN S=S+1:IC(II)=1
240 NEXT II
250 IF S>0 THEN PRINT «ПЕРВАЯ ТОЧКА НЕ ЯВЛЯЕТСЯ
ДОПУСТИМОЙң:STOP
270 REM НАЙТИ НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ R
290 T=0:B=0:R=0:CC=0
300 GOSUB 6000
310 FOR I=1 TO N
320 T=T-G(I)*CG(I):B=B+CG(I)*CG(I):NEXT I
350 R=T/B
360 IF R<0 THEN R=1
410 PRINT «R=ңR
420 REM В НАЧАЛЕ НОВОГО ЭТАПА МИНИМИЗАЦИИ
425 REM ЗАДАТЬ МАТРИЦУ Н РАВНОЙ ЕДИНИЧНОЙ МАТРИЦЕ
430 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N
```

```
440 H(I,J)=0:NEXT J
450 H(I,J)=1:NEXT I
460 REM ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ ВЫВОД
480 PRINT « ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ»
500 FOR I=1 TO N;P(I)=X(I):Y(I)=X(I):PRINT «X»;I,X(I):NEXT I
510 FOR II=1 TO M:GOSUB 8000:NEXT II:GOSUB 5000
520 PRINT «ИТЕРАЦИЯ»;CC; «ЗНАЧЕНИЕ»;Z
530 FP=Z:GOSUB 6000:G1=G0;FF=Z
540 REM ЗАПОМНИТЬ ГРАДИЕНТ В МАССИВЕ U И ПЕРЕЙТИ К
СЛЕДУЮЩЕМУ НАПРАВЛЕНИЮ
550 FOR I=1 TO N
560 U(I)=G(I):D(I)=0
570 FOR J=1 TO N
580 D(I)=D(I)-H(I,J)*G(J)
590 NEXT J:NEXT I
595 REM НАЙТИ ГРАДИЕНТ В ПЕРВОЙ ТОЧКЕ ОДНОМЕРНОГО ПОИСКА
600 GP=0
610 FOR I=1 TO N:GP=GP+G(I)*D(I):NEXT I
620 IF GP>0 THEN PRINT «ФУНКЦИЯ ВОЗРАСТАЕТ (СТРОКА 620)»
625 REM НАЙТИ ЗНАЧЕНИЕ LAMBDA, ТАКОЕ,
627 REM ЧТОБЫ ОГРАНИЧЕНИЯ НЕ БЫЛИ НАРУШЕНЫ
630 L=2
640 FOR I=1 TO N:X(I)=P(I)+L*D(I):NEXT I
650 S=0
660 FOR II=1 TO M
670 IC(II)=0:GOSUB 8000
680 IF C(II)>=0 THEN GOTO 730
690 IC(II)=1:S=S+1
700 L=L/1.05
710 FOR I=1 TO N:X(I)=P(I)+L*D(I):NEXT I
720 GOTO 670
730 NEXT II
750 IF S>0 THEN GOTO 650
1000 REM НАЙТИ СЛЕДУЮЩУЮ ТОЧКУ Q
1010 HH=L
1020 FOR I=1 TO N
1030 Q(I)=P(I)+HH*D(I):X(I)=Q(I)
1040 NEXT I
1050 FOR II=1 TO M:GOSUB 8000:NEXT II:GOSUB 5000:FQ=Z
1060 GOSUB 6000:G2=G0
1080 GQ=0
1090 FOR I=1 TO N:GQ=GQ+G(I):NEXT I
1095 REM ЕСЛИ МИНИМУМ НЕ ЛЕЖИТ МЕЖДУ ТОЧКАМИ P И Q,
1096 REM ЗАМЕНИТЬ P НА Q
1097 REM МОДИФИЦИРОВАТЬ H И НАЙТИ НОВОЕ НАПРАВЛЕНИЕ
1100 FOR I=1 TO N:FOR J=1 TO N:H(I,J)-D(I)*D(J)/GP:NEXT J
1115 P(I)=Q(I):X(I)=P(I):Y(I)=X(I):NEXT I
1120 FF=Z:FP=Z:G1=G0:GOTO 540
1125 REM ДАЛЕЕ ПРОИЗВОДИТСЯ КУБИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ
1130 ZZ=3*(FP-FQ)/HH:ZZ=ZZ+GP+GQ
1150 W=SQR(WW)
1160 DD=HH*(1-(GQ+W-ZZ)/(GQ-GP+2*W))
1170 FOR I=1 TO N:X(I)=P(I)+DD*D(I):NEXT I
```

```
1180 FOR II=1 TO M:GOSUB 8000:NEXT II:GOSUB 5000:FR=Z:GOSUB 6000
1195 REM НАЙТИ ГРАДИЕНТ В НОВОЙ ТОЧКЕ
1200 GR=0
1210 FOR I=1 TO N:GR=GR+G(I)*D(I):NEXT I
1215 REM ПОВТОРИТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИЮ В НОВОМ ИНТЕРВАЛЕ
1216 REM (СТРОКИ 1260 ИЛИ 1290), ЛИБО ПРОДОЛЖИТЬ
1220 IF Z<=FP AND Z<=FQ THEN GOTO 1400
1230 IF GR>0 THEN GOTO 1290
1260 HH=HH-DD
1270 FOR I=1 TO N:Q(I)=X(I):NEXT I
1280 FP=Z:GP=GR:G1=G0:GOTO 1130
1290 HH=DD
1300 FOR I=1 TO N:Q(I)=X(I):NEXT I
1310 FQ=Z:GQ=GR:G2=G0:GOTO 1130
1350 REM ОБНОВИТЬ МАТРИЦУ H
1400 KK=0:WK=0:DK=0
1410 FOR I=1 TO N
1420 U(I)=G(I)-U(I):V(I)=X(I)-Y(I)
1430 NEXT I
1440 FOR I=1 TO N:M(I)=0
1450 FOR J=1 TO N
1460 M(I)=M(I)+H(I,J)*U(J)
1470 NEXT J
1480 KK=KK+M(I)*U(I):WK=WK+V(I)*U(I)
1500 NEXT I
1505 IF KK=0 OR WK=0 THEN GOTO 1560
1510 FOR I=1 TO N
1520 FOR J=1 TO N
1530 H(I,J)=H(I,J)-M(I)*M(J)/KK+V(I)*V(J)/WK
1540 NEXT J
1550 NEXT I
1560 CC=CC+1
1565 REM ПРОВЕРКА ДОСТИЖЕНИЯ МИНИМУМА ФУНКЦИИ PHI(X.R)
1570 IF ABS((FF-Z)/FF)<.00001 THEN GOTO 1600
1575 REM ЕСЛИ СХОДИМОСТЬ НЕ ДОСТИГНУТА,
1577 REM ТО НАЧАТЬ НОВЫЙ ОДНОМЕРНЫЙ ПОИСК ИЗ ПОСЛЕДНЕЙ
ТОЧКИ
1580 FF=Z:GOTO 500
1590 REM ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА СХОДИМОСТИ;
1595 REM ЕСЛИ СХОДИМОСТЬ НЕ ДОСТИГНУТА,
1597 REM ТО УМЕНЬШИТЬ R И СФОРМУЛИРОВАТЬ НОВУЮ ФУНКЦИЮ
PHI(X,R)
1600 IF R*Z2<.00001 THEN GOTO 1800
1610 R=R/10
1620 GOTO 410
1800 PRINT « «
1820 FOR I=1 TO N
1830 PRINT «X»;I; «=»;X(I)
1840 NEXT I
1850 PRINT «F(X)=»;Z1
2000 END
5000 REM ФУНКЦИЯ F(X) ВЫЧИСЛЯЕТСЯ КАК ФУНКЦИЯ ОТ Z1, А P(X) КАК
ФУНКЦИЯ ОТ Z2
```

```
5010 Z1=(X(1)-1)*(X(1)-2)*(X(1)-3)+X(3)
5100 Z2=0
5110 FOR JJ=1 TO M:Z2=Z2+1/C(JJ):NEXT JJ
5200 RETURN
6000 REM РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАДИЕНТА ФУНКЦИИ F(X) ХРАНЯТСЯ В МАССИВЕ G(1)--G(N)
6005 REM РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАДИЕНТА ФУНКЦИИ P(X) ХРАНЯТСЯ В МАССИВЕ CG(1)--CG(N)
6010 REM ЗАТЕМ ОНИ СУММИРУЮТСЯ В МАССИВЕ G(1)--G(N)
6050 KA=X(1)-1:KB=X(1)-2:KC=X(1)-3
6100 G(1)=KA*KB+KB*KC+KC*KA
6150 CG(1)=-(-2*X(1)/(C(1)*C(1))+2*X(1)/(C(2)*C(2))+1/(C(4)*C(4)))
6190 G(1)=G(1)+R*CG(1)
6200 G(2)=0
6350 CG(2)=-(-2*X(1)/(C(1)*C(1))+2*X(1)/(C(2)*C(2))+1/(C(5)*C(5)))
6290 G(2)=G(2)+R*CG(2)
6300 G(3)=1
6350 CG(3)=-(2*X(3)/(C(1)*C(1))+2*X(3)/(C(2)*C(2))-1/(C(3)*C(3))
6360 CG(3)=CG(3)-1/(C(6)*C(6))
6390 G(3)=G(3)+R*CG(3)
6900 G0=0
6910 FOR JJ=1 TO N:G0=G0+G(JJ)*G(JJ):NEXT JJ
6920 G0=SQR(G0)
6990 RETURN
8000 REM РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ ОГРАНИЧЕНИЙ ХРАНЯТСЯ В МАССИВЕ C(1),C(2)--C(M)
8005 ON II GOTO 8010, 8020, 8030, 8040, 8050, 8060
8010 C(1)=X(3)*X(3)-X(1)*X(1)-X(2)*X(2):GOTO 8500
8020 C(2)=X(1)*X(1)+X(2)*X(2)+X(3)*X(3)-4:GOTO 8500
8030 C(3)=5-X(3):GOTO 8500
8040 C(4)=X(1):GOTO 8500
8050 C(5)=X(2):GOTO 8500
8060 C(6)=X(3):GOTO 8500
8500 RETURN
```

```
  МЕТОД ФИАККО И МАККОРМИКА
ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ
3
ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ОГРАНИЧЕНИЙ
6
ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНУЮ ТОЧКУ X1,X2,--,XN
-1
2
2.1
R= .0901618
  ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ
X 1              -1
X 2              2
X 3              2.1
ИТЕРАЦИЯ 0   ЗНАЧЕНИЕ-1.592473
X 1              7.556441E-02
X 2              1.941576
X 3              2.13685
```

ИТЕРАЦИЯ 1   ЗНАЧЕНИЕ-1.617675
X 1   .9553003
X 2   1.893447
X 3   2.162587
ИТЕРАЦИЯ 2   ЗНАЧЕНИЕ-1.671175
X 1   9.550905E-02
X 2   1.502009
X 3   1.773026
ИТЕРАЦИЯ 3   ЗНАЧЕНИЕ-1.980767
X 1   9.558208E-02
X 2   1.360921
X 3   1.633317
ИТЕРАЦИЯ 4   ЗНАЧЕНИЕ-1.995453
X 1   9.520754E-02
X 2   1.420405
X 3   11.686592
ИТЕРАЦИЯ 5   ЗНАЧЕНИЕ-2.014785
R= 9.016181E-03
ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ
X 1   9,552066E-02
X 2   1.418278
X 3   1.66902
ИТЕРАЦИЯ 6   ЗНАЧЕНИЕ-3.202302
X 1   3.626825E-02
X 2   1.418279
X 3   1.663025
ИТЕРАЦИЯ 7   ЗНАЧЕНИЕ-3.659234
X 1   .0286065
X 2   1.418742
X 3   1.502301
ИТЕРАЦИЯ 8   ЗНАЧЕНИЕ-3.787412
X 1   2.960457E-02
X 2   1.40907
X 3   1.492017
ИТЕРАЦИЯ 9   ЗНАЧЕНИЕ-3.78796
X 1   2.972558E-02
X 2   1.41197
X 3   1.490826
ИТЕРАЦИЯ 10   ЗНАЧЕНИЕ-3.788081
X 1   2.896714E-02
X 2   1.4137
X 3   1.49338
ИТЕРАЦИЯ 11   ЗНАЧЕНИЕ-3.78841
R= 9.01618E-04
ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ
X 1   2.9094472E-02
X 2   1.413903
X 3   1.494199
ИТЕРАЦИЯ 12   ЗНАЧЕНИЕ-4.150575

R= 9.016181E-09
ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ
X 1   1.084033E-04

X 2 1.414218
X 3 1.414491
ИТЕРАЦИЯ 35 ЗНАЧЕНИЕ-4.58421
X 1 3.620311E-05
X 2 1.414218
X 3 1.414484
ИТЕРАЦИЯ 36 ЗНАЧЕНИЕ-4.584845
X 1 3.630842E-05
X 2 1.414217
X 3 1.414308
ИТЕРАЦИЯ 37 ЗНАЧЕНИЕ-4.584977
R= 9.016181E-10
ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ
X 1 3.63019E-05
X 2 1.414206
X 3 1.414307
ИТЕРАЦИЯ 38 ЗНАЧЕНИЕ-4.585262
X 1 1.296428E-05
X 2 1.414206
X 3 1.414305
ИТЕРАЦИЯ 39 ЗНАЧЕНИЕ-4.585476
R= 9.016181E-11
ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ
X 1 1.30049E-05
X 2 1.414207
X 3 1.41425
ИТЕРАЦИЯ 40 ЗНАЧЕНИЕ-4.585598
X 1 4.401657E-06
X 2 1.414207
X 3 1.414249
ИТЕРАЦИЯ 41 ЗНАЧЕНИЕ-4.58568
R= 9.016181E-12
ТЕКУЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ
X 1 4.414079E-06
X 2 1.414208
X 3 1.41423
ИТЕРАЦИЯ 42 ЗНАЧЕНИЕ-4.585719
МИНИМУМ НАЙДЕН
X 1 = 1.619098У-06
X 2 = 1.414208
X 3 = 1.41423
F(X)=-4.585752

§ II. 7.3 Жаттығу

1) Шектелу облысы келесі $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ функцияның теңсіздіктерімен берілгенде $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ $x_1 + x_2 \ge 4$ минимумы әдісін пайдаланып табыңыз?

2) Шектелу $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ $x_1 + 2x_2 \leq 3$ шарттарында $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ функциясының минимумын табыңыз

3) Почта посылкалары туралы есепті SUMT әдісін қолданып шығарыңыз: Шектелу $0 \leq x_i \leq 42$ мұндағы i=1, 2, 3 және $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 72$ шарттарында $v=-x_1x_2x_3$ функциясының минимумын табыңыз?

4) SUMT әдісін қолданып келесі функцияның $f(x_1, x_2) = \frac{4}{x_1} + \frac{9}{x_2} + (x_1 + x_2)$ минимумын шектелу облысы $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ $x_1 + x_2 \leq S$ мұнда

а) S=6 б) S=4 шарттармен берілгенде жағдайда табыңыз

5) Шектелу $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$, $x_1 x_2 x_3 \geq 3$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ шарттарында $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ функцияың минимумын табыңыз

6) SUMT әдісінің программасымен эксперимент жасаңыз: алғашқы r мәнін өзгертіп (360 жол), λ-ны табуды өзгертіп (700 жол), r-ді кішіреітуді өзгертіп (1610 жол).

7) SUMT әдісінің программасымен эксперимент жасаңыз: шешімге әкеп тірелетін критерин өзгертіп (1570 және 1600 жолдар). Соңғы тексерудегі шартта тексеру шартын IF (R<IE-12) қарастырып

8) (7.18) қатынастың орындалуы айқын (шын) екенін көрсетіңіз, яғни $f(x_{k+1}^*) < f(x_k^*)$

9) $(x_1-1)^4+(x_2-3)^2$ функциясының минимумын табыңыз, егерде $x_1, x_2 \geq 0$ және $3x_1^2 + 2x_2^2 \leq 21$, $4x_1+5x_2 \leq 20$

10) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ функциясының минимумын, шектелу $x_1 \geq 2$, $x_1^2 - x_2^2 \leq 1$ шарттарында табыңыз

§ II. 7.4 Жаттығулардың жауаптары

II.1.4 -жаттығулар

1) Аймақты максимум 4/27 тең x=1/13 үшін; Аймақты минимум x=1 үшін нольге тең болады.

2) x=1 үшін, максимум 1/2 тең; x = -1 үшін, минимум --1/2 тең болады.

3) Зер салатынымыз, $a\cos\theta + b\sin\theta \equiv \sqrt{(a^2 + b^2)}\cos(\theta - \alpha)$, тең екендігі мұнда $tg\alpha = b/a$

4) $A = r^2 \sin 2\theta(1 + \cos 2\theta)$

5) $f^{l}(x)$ туындысы таңбасын "-"- тен "+"-ке өзгертседе, бірақ $f^{l}(0)$ туындысының мәні белгісіз.

6) x=0 тең болғанда, минимумде нольге тең болады. Туындысы $f^{l}(x)$ таңбасын "-"- тен "+"-ке өзгертседе, бірақ $f^{l}(x)$ туындысының мәні белгісіз болса да.

7) Функция минимумы $-1/3\sqrt{3}$ тең болады

9) Глобальді минимум 0,7808 нүктесінде --24,3696 тең; Аумақты минимум 3,7619 нүктесінде 40,7245 тең; Аумақты минимум 5,9572 нүктесінде 11,9676 тең;

10) (0; 0) нүктесінде минимум 0 тең

11) (0; 0; 0) нүктесінде максимум 0 тең

15) P_1 және P_2 үшін теңдеулердің өрнегі келесі түрде болады.

$-2b_1p_1+(a_1+a_2)p_2+c_1b_1-c_2a_2=0$

$(a_1+a_2)p_1-2b_2p_2+c_2b_2-c_1a_1=0$

16) x=0,5885 тең болғанда минимум - -0,2766 тең.

II.2.8 -Жаттығулар

4) Қажетті нүктелердің минимальді саны 198 тең

5) Функция миниумы x=0,47 нүктесінде орналасады.

6) 12 итерациясынан кейін табылған минимум 5,96 тең

7) 11 итерациясынан кейін және x=0,47 нүктесінде табылған функциясының минимумы 2,32 тең

9) x=1,763 нүктесінде функция минимумы --0,973 тең

10) (0,2558; -0,1163) нүктесінде функция минимумы 0,0465 тең

15) Теңдеудің шешімі x=0,5885 тең

II.3.5 - Жаттығулар

2) 1) (1; 2; 3) нүктесіндегі функция минимумы 0 тең

2) (1; 1) нүктесіндегі функция минимумы 0 тең

6) 1) (1; 1) нүктесіндегі функция минимумы 0 тең

2) (0; 0; 0) нүктесіндегі функция минимумы 0 тең

3) (1; 10) нүктесіндегі функция минимумы 0 тең

10) (1; 0) нүктесіндегі функция минимумы 0 тең

11) (3; 2) нүктесіндегі функция минимумы 0 тең

12) x_1, x_2 үшін системаның келесі шешімдері болады: (3; 2), (3,5844; -1,8481), (-3,7793; -3,2832), (-2,8011; -3,1313).

13) Системаның келесі шешімдері болады: x=1, y=2, z=3 немесе осы айнымалылардың бір-бірімен алмастырылғандағысы

14) a=31.87, b=1.79

15) 1) ln(a)=3.0296, a=2.68, n=2.48

2) a=22.3, n=2.45

II.4.6 -Жаттығулар

6) (4; -3; -0,5) нүктесінде минимум 0 тең

7) (0,25; 0,75) нүктесінде минимум 0 тең

8) (1; 0) нүктесінде минимум 0 тең

9) (3; 2) нүктесінде минимум 0 тең (12 жаттығуды көріңіз)

10) (1; 1) нүктесінде минимум -1 тең

II.5.5- Жаттығулар

3) $x = \frac{k_{bc}}{A}, y = \frac{k_{ac}}{A}, z = \frac{k_{ab}}{A}$, мұнда A=ab+bc+ca

5) (1; 2; 3) нүктесінде минимум 108 тең

7) x=y=2.5 тең болғанда минимум 12,5 тең

8) x=9/14, y=1/17 нүктесінде функция минимумы --371/196 тең

13) максимум 70 тең, минимум 20 тең

14) Егерде, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \le S\sqrt{\gamma}$ онда керісінше $x_1 = \sqrt{\alpha / \beta}, x_2 = \sqrt{\beta / \gamma}$ жағдайда; $x_1 = S\sqrt{\alpha} / (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})$ $x_2 = S\sqrt{\beta} / (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})$. Посылканың өлшемі x_1=20, x_2=11, x_3=15 және оның көлемі 3300 см^3.

16) Посылканың өлшемі: x_1=24, x_2=12, x_3=12 және оның көлемі 3456 см^3

II.6.4 - Жаттығулар

1) x=y=2.5 тең болғанда минимум 12,5

2) x=9/14, y=1/7 тең болғанда минимум --371/196 тең

3) x_1=3, x_2=1 тең болғанда минимум 44 тең

5) минимумның орналасқан нүктесі x_1=2, x_2=3, тең болғанда x_1=8/5, x_2=12/5

6) x_1=3, x_2=$\sqrt{3}$ тең болғанда минимум 1 тең

7) x_1=1.7818, x_2=4.4898 тең болғанда минимум 30,24 тең

8) x_1=x_2=x_3=1.4422 тең болғанда минимум 6,2403 тең

9) x_1=3, x_2=4 тең болғанда минимум 0 тең

10) x_1=2.9155, x_2=4.1231, x_3=2.3805 тең болғанда минимум --28,6153 тең.

II.7.4 -Жаттығулар

1) x_1=3, x_2=-1 тең болғанда минимум 44 тең.

2) x_1=3, x_2=0 тең болғанда минимум -9 тең.

3) x_1=24, x_2=12, x_3=12 тең болғанда минимум -3456 тең.

4) а) x_1=2, x_2=3 тең болғанда минимум 10 тең.

б) x_1=8/5, x_2=12/5 тең болғанда минимум 41/4 тең.

5) x_1=x_2=x_3=1.4422 тең болғанда минимум 6,2403 тең.

9) x_1=1, x_2=3 тең болғанда минимум 0 тең.

10) x_1=2, x_3=$\sqrt{3}$ тең болғанда минимум 7 тең.

Мазмұны

4 – тарау. Градиенттік әдістер

5 - тарау. Шектелген шарт болғандағы оптимизация. Жалпы теориясы

6 -тарау. Іздеу әдістері

7 -тарау. Шектелусіз қалыптанған оптимизация

Абайылданов Калышпек Нурлыбаевич
Абайылданов Бекзат Калышпекович
Абайылданова Ляззат Калышпековна

Экономикалық және инженерлік есептерді тиімді есептеудің негізі мен әдістемелері

Перевод, компьютерный набор и верстка
Абайылданов Б.К., Абайылданова Л.К.

Сдано в набор 03.04.2015 Подписано в печать 03.05.2015
Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная №1 Уч.изд л. 15. Печ. л. 14
Тираж 1000 экз. Заказ 620.

Отпечатано и переплетено
в типографии «Алишер»
г. Алматы, ул. Жандосова, 20